I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

Criterios de certeza en el contexto de un foro virtual

Benjamín **Martínez** Navarro
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
bemanav@yahoo.com.mx
Mirela **Rigo** Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
mrigolemini@gmail.com

Resumen

Se analizan -con base en un instrumento que se diseñó en el marco del proyecto cuyos resultados parciales aquí se exponen-, los estados de certeza (o presunción) que, en torno a hechos de las matemáticas, experimentó un participante (asesor en capacitación) en un foro virtual al resolver un problema matemático. Dicho análisis permitió a los investigadores detectar las posibles dificultades del asesor en la comprensión de conceptos matemáticos involucrados y sugerir las formas mediante las cuales él sustentó sus afirmaciones; también permitió concluir que los estados de certeza o presunción que en torno a los hechos matemáticos él experimentó, están relacionados con su nivel de comprensión y sus formas de sustentar las afirmaciones implicadas.

Palabras clave: certeza y presunción, sustentos de enunciados matemáticos, comprensión, foro virtual, capacitación a distancia.

Presentación

En la capacitación a distancia, como en todo proceso de aprendizaje, es necesario que la persona involucrada no sólo construya los conocimientos esperados sino que también experimente certezas en torno a esos conocimientos. En el caso de un foro virtual, lo anterior plantea el reto de contar con elementos teóricos e instrumentos analíticos que permitan distinguir los estados de certeza (en torno a los enunciados de contenido matemático que ahí surjan) que vivencian los alumnos inscritos. En consideración a esta problemática, en el documento se propone un instrumento teórico-metodológico para identificar en esos ámbitos educativos los estados de certeza (y otros estados internos, como la presunción) que eventualmente experimentan los involucrados. La aplicación del instrumento a un caso de estudio dejó ver que en esos ambientes de instrucción es posible suponer fundadamente los estados internos de certeza de la persona implicada; adicionalmente, el análisis de sus estados internos dio pauta para identificar la forma en que ella sustentó sus afirmaciones, y reconocer sus posibles dificultades en la comprensión de conceptos matemáticos comprometidos en el estudio.

Antecedentes

Investigaciones diversas han centrado su atención en el papel que juega la certeza (y otros estados semejantes) tanto en el quehacer matemático como en el salón de clases. Por ejemplo, de acuerdo a Hersh (1993), en la investigación matemática el convencimiento es un propósito central de la prueba y es un criterio de demarcación: una justificación es una prueba sólo si convence a los jueces calificados. En contraste, él mismo supone que el objetivo de la prueba en el aula de matemáticas no es precisamente el de convencer o generar certezas sino el de estimular la comprensión de los estudiantes.

Al igual que Hersh, de Villiers (2010) encomia el valor explicativo de las pruebas en el aula, pero recupera para este ámbito su función de convencer. Conforme a lo que de Villiers sostiene, los matemáticos profesionales se convencen, durante la experimentación, de que sus procesos heurísticos de construcción de nuevos conocimientos van por buen camino; no obstante -continúa el investigador-, a los expertos en las matemáticas esos procesos empíricos casi nunca les suele generar certeza (absoluta) de sus resultados, en parte, porque el trabajo experimental no posee suficientes cualidades explicativas. Es por esto que recurren a las pruebas deductivas, las que para ellos representan la vía para sistematizar, comprender y explicar los resultados que generan. A nivel del aula, y de parecida manera a lo que sucede con los profesionales de las matemáticas, es este valor explicativo de las pruebas lo que -según de Villiers- probablemente genera mayor convencimiento en los estudiantes. Por ello, él sugiere que los profesores se esfuercen en exponer pruebas que expliquen ya que en el salón de clases, además de mostrar el carácter axiomático de la demostración, es muy importante aprovechar y potencializar el carácter explicativo de las demostraciones deductivas y las pruebas y el estado de certeza que puedan promover.

Con el objetivo de determinar la certeza (o presunción) que los autores de documentos escritos proyectan a través de ellos, Hyland (1998) se ha interesado por el análisis de textos, y en particular, en producciones redactadas por estudiantes. Él recurre a aspectos del lenguaje, que llama epistémicos, porque es mediante éstos que los escritores (consciente o inconscientemente) expresan su evaluación de las posibilidades de verdad de lo que afirman e indican el grado de confianza que experimentan en torno a ello. Atendiendo al hecho de que el compromiso del escritor puede ser expresado de acuerdo a una enorme variedad de formas y que estas expresiones pueden transmitir una amplia gama de significados Hyland y Milton (1997) ubicaron elementos léxicos utilizados por estudiantes en distintas categorías epistémicas (certeza, posibilidad o probabilidad).

En esta investigación se reconoce la importancia de que en la educación matemática se promueva certeza y estados de convencimiento en torno a enunciados de las matemáticas, siguiendo siempre criterios de esta disciplina (pertinentes al nivel educativo y al tema).

Consecuentemente, y debido a que las personas que participaron en el trabajo empírico que aquí se analiza son miembros de un foro virtual, a los autores les interesa identificar los estados de certeza (o presunción) en torno a enunciados o hechos de las matemáticas que ellos posiblemente experimentan y que expresan de manera escrita. Esto da cuenta del interés y la necesidad del marco interpretativo que se expone en el siguiente apartado

Marco interpretativo

Los alumnos suelen sustentar sus afirmaciones o procedimientos de contenido matemático de modos diversos, como por ejemplo, cuando un estudiante explica el uso de un algoritmo recurriendo a su facilidad ("es más fácil resolverlo así") o a la autoridad del profesor ("porque me lo dijo la maestra"). Rigo (2013[a]) ha propuesto una taxonomía de estos recursos de sustentación a los que llama "esquemas epistémicos". Ella propone que algunos sustentos se vertebran en torno a razones matemáticas, como los que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g. ejemplos genéricos o las instanciaciones) o los que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g. a partir del análisis de casos particulares), esquemas que pueden denotar cierta comprensión conceptual por parte de quien los aduce. En otros casos, continúa Rigo (2013[a]), los esquemas que una persona construye para sustentar la verdad de un enunciado matemático obedecen a sus motivos y no al contenido del enunciado, como los que se basan en la familiaridad, mismos que son resultado de la repetición, la memorización y las costumbres. Los esquemas que se basan en la repetición pueden provenir de reiterar sistemáticamente algún enunciado o hecho de las matemáticas, mientras que otros esquemas pueden provenir de costumbres institucionales en torno a lo que deben ser las tareas matemáticas que deben resolver los niños en la clase, como cuando los estudiantes sustentan el uso de un algoritmo por ser habitual o por su facilidad. En esta investigación se considera que, asociados a sus esquemas epistémicos, el sujeto experimenta estados internos de certeza (cuando le asocia el máximo grado de probabilidad a lo creído) o de presunción (cuando le asocia grados menores de probabilidad a lo creído). A estos estados internos Rigo (2013[a]) les llama "estados epistémicos".

Criterios para distinguir estados epistémicos (de certeza y presunción): Propuesta de un instrumento de análisis

Con base en las anteriores consideraciones, en lo que sigue se pone a la apreciación del lector el instrumento que permitió identificar (o suponer fundadamente, de acuerdo a las evidencias con las que contaban los investigadores) los estados epistémicos de los estudiantes que participaron en un foro virtual. En su diseño convergieron perspectivas provenientes de muy distintas disciplinas: de filosofía (Wittgenstein, 1988), la psicología (Bloom, Hastings & Madaus, 1975), la sociología (Abelson, 1988), la lingüística (Boyero, 2012; Hyland, 1997; Hyland & Milton, 1998; Sánchez-Upegui, 2009) y la educación matemática (Rigo, 2013[a]; Rigo, 2013[b]).

Partiendo del hecho de que la comunicación en un foro virtual se da a través del lenguaje escrito, para distinguir los estados de certeza o presunción de sus participantes resulta necesario recurrir al análisis de su meta-discurso (entendido éste como el que va más allá de su discurso explícito) con el fin de desvelar las intenciones comunicativas (muchas de ellas inconscientes) que ellos proyectan a través de su escritura. En esta investigación se considera que una persona (que participa en un foro virtual) vivencia un grado de certeza (o de presunción) en un enunciado matemático, cuando cumple con alguno(s) de los siguientes criterios.

Elementos del habla. La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa perífrasis modales de obligación (e.g. tener que/deber/ haber de/haber que), el modo indicativo de los verbos (e.g. tengo, hago, saco) u otros elementos del habla que Hyland & Milton (1997) ubican dentro de la categoría epistémica de certeza (e.g. saber, pensar, en realidad, ciertamente). En caso de un menor grado de compromiso la persona recurre a mitigadores, por ejemplo, la persona usa el morfema verbal –ía que está asociado al modo condicional (e.g. sería, podría) u otros elementos del habla que Hyland & Milton (1997) ubican en las categorías de probabilidad (e.g. creer, parecer, probablemente) o posibilidad (e.g. poder, tal vez, posiblemente).

Acción. El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.

Familiaridad. La persona activa esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres). Por ejemplo, la persona sustenta explícita o implícitamente el uso de un algoritmo aduciendo que es lo habitual o apelando a su facilidad.

Elaboración cognitiva. La persona activa esquemas epistémicos basados en razones matemáticas que pueden denotar cierta comprensión conceptual. Entre ellos se encuentran, por ejemplo, los esquemas epistémicos que poseen una estructura lógica de tipo deductivo (e.g. ejemplos genéricos o las instanciaciones) o los esquemas epistémicos que surgen a partir de la acumulación de evidencia empírica (e.g. a partir del análisis de casos particulares).

Determinación. La persona manifiesta de manera espontánea su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia en un hecho de las matemáticas, a pesar de tener al colectivo en su contra o bien, tiene el valor de cambiar su posición frente al grupo. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.

Interés. Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son:

-Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible (Cantidad).

-Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos y correctos (Cualidad).

-Relevantes. En el foro, una contribución relevante implica activar esquemas epistémicos para aportar información que hasta ese momento no se había considerado pero que guardan relación con las demás participaciones (De relación).

-Claras y precisas.

-Numerosas, en relación a sus intervenciones en otros temas y a la partición de otros.

Actitud. La persona muestra consistencia en los criterios anteriores. Esta consistencia puede presentarse en una intervención o en un período de tiempo considerablemente mayor.

Las anteriores condiciones pueden ser suficientes para que una persona experimente certeza o grados altos de presunción; sin embargo no son necesarias.

Consideraciones metodológicas

La investigación cualitativa que aquí se presenta está centrada en un estudio de caso de tipo interpretativo (Denzin & Lincoln, 1994) y se enmarcó en un proceso de investigación-acción (Harding, 1978), en el sentido de que los resultados que se presentan provienen en parte de la reflexión de uno de los autores sobre su propia práctica.

El estudio empírico se llevó a cabo en el Diplomado de Temas Fundamentales de Álgebra impartido por el Instituto Nacional para la Educación de los Adultos; el diplomado tiene el propósito de fortalecer la formación de personas que asesoran en temas de álgebra a adultos que se encuentran en proceso de obtener su certificado de secundaria. Incluye un Módulo Cero y cuatro Módulos de contenido matemático que se estudian de forma secuenciada. En el Módulo I se revisan temas de conteo y medición, así como algunas relaciones numéricas básicas, en el Módulo II los participantes descubren regularidades y reconocen patrones para estudiar el lenguaje algebraico, en el Módulo III se estudian relaciones funcionales y en el Módulo IV se presentan problemas que involucran el planteamiento de una ecuación lineal con una incógnita y sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Cada Módulo está dividido por semanas en las que se revisa un tema en particular.

Las actividades de enseñanza se desarrollan a distancia mediante el uso de la plataforma Moodle a través de la cual los estudiantes reciben apoyo, evaluación y retroalimentación por parte de un tutor. En el marco de los módulos del diplomado los estudiantes participan en foros de discusión y realizan actividades y tareas que implican resolución de problemas matemáticos. La dinámica consiste en que el tutor propone un problema a resolver, los estudiantes publican en el foro sus soluciones al problema propuesto e interactúan entre ellos para enriquecer o corregir sus respuestas; la discusión que se genera es guiada por el tutor.

Para el análisis que aquí se expone se eligió el Módulo IV porque los estudiantes tendían a sustentar sus respuestas. Las participaciones de ese módulo se organizaron en episodios, mismos que están conformados por todas esas participaciones de los estudiantes y del tutor que giran en torno a una actividad iniciada por este último. Los episodios comienzan con la solicitud del tutor para responder a una tarea y finalizan con el acuerdo de los estudiantes en torno a una solución o conjunto de soluciones. Una vez que para propósitos del estudio se organizaron las participaciones en episodios, éstos se separaron en partes considerando las necesidades del análisis, asignándoles un numeral.

Para este reporte se seleccionaron tres participaciones: una de una estudiante, llamada Patricia, que abrió la discusión, y otras dos de otra estudiante, Jeymi, quien parece haber experimentado matices en sus estados epistémicos al exponer dos métodos de solución de un mismo problema, aparentemente correctos. Jeymi era una asesora que contaba con cuatro años y medio de experiencia cuando fue observada. Martínez (uno de los autores de este trabajo) fungió como tutor del grupo, quien deliberada y sistemáticamente instó a que sus estudiantes explicitaran los sustentos en los que apoyaban sus afirmaciones. En la edición de diplomado que aquí se analiza, él contaba con dos años de experiencia como tutor de asesores.

Análisis de Resultados: Episodio "El problema del salón de clases"

El episodio "El problema del salón de clases" que se examina en lo que sigue trata sobre la resolución de un problema que se puede resolver con un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. Comenzó con la solicitud del tutor para que los participantes en el foro resolvieran el siguiente problema:

En un salón de clases hay 61 alumnos. El número de mujeres excede al de hombres en 7.¿Cuál es el número de hombres y mujeres?

a) ¿Cuántas incógnitas tienes?

b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?

d) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?

e) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema.

Para resolver el problema, de acuerdo al objetivo de la semana, se esperaba que los participantes reconocieran e identificaran la presencia de algo desconocido que se puede determinar; específicamente, que reconocieran como incógnitas del problema la cantidad de hombres y la cantidad de mujeres en el salón; que simbolizaran las incógnitas, por ejemplo, mediante las letras "x" y "y" y que relacionaran las incógnitas con los datos del problema para establecer un sistema de ecuaciones. En una semana posterior se pediría a los estudiantes realizar las operaciones necesarias para determinar el valor específico y sustituir en la ecuación el valor encontrado para comprobar que era correcto.

Participación de Patricia

La participación que abrió la discusión en el episodio bajo examen fue la de Patricia. Su respuesta desencadenó las participaciones de sus compañeros y en particular la de Jeymi. Su participación fue la siguiente:

(2.3) a) ¿Cuántas incógnitas tienes?
(2.4) 2 el numero de hombres y de mujeres
(2.5) b) ¿Cuáles son las literales que asignaste? ¿Qué significan?
(2.6) "h" hombres y "m" mujeres.
(2.7) c) ¿Te hacen falta datos para dar solución al problema?
(2.8) no
(2.9) d) Trata de plantear las ecuaciones que resuelven el problema
(2.10) h+m=7 m+7=h

En esta intervención, Patricia se limitó a contestar las preguntas que formuló el tutor. En (2.4) identificó como incógnitas al número de hombres y mujeres; posteriormente asignó la literal "h" al número de hombres y la literal "m" al número de mujeres (2.6) y finalmente relacionó esas incógnitas con los datos del problema para plantear un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas (2.10). Como se aprecia, la segunda ecuación del sistema es incorrecta porque la alumna considera al número de mujeres como la variable independiente y al número de hombres como la variable dependiente (2.10).

La primera participación de Jeymi se dio como respuesta a la participación de Patricia (ver Primera participación de Jeymi). En ella, Jeymi resolvió el problema utilizando una ecuación lineal con una incógnita: $x + (x + 7) = 61$. La alumna comenzó enunciando lo que consideró los datos del problema; identificó como incógnita el número de hombres y le asignó la literal “x”; posteriormente relacionó la incógnita con los datos del problema con base en lo cual planteó una ecuación lineal con una incógnita, la que después simplificó para obtener el valor de la incógnita “hombres”, el cual utilizó para calcular el valor de la otra incógnita. Finalmente, sumó la cantidad de hombres y de mujeres para verificar la cantidad total de alumnos en el salón.

La segunda participación de Jeymi (ver Segunda participación de Jeymi) se dio a petición del tutor. En esa oportunidad Jeymi sugirió un sistema de ecuaciones (h+m=61, m=h+7) que tuvo como base la asignación de la literal “h” al número de hombres y “m” al número de mujeres, y la traducción al lenguaje algebraico del enunciado del problema (expresado en lenguaje natural). El sistema, aunque de expresión correcta, Jeymi lo dejó sin resolver.

Los investigadores inicialmente centraron su atención en detectar el probable estado epistémico que experimentó Jeymi en sus dos participaciones. Los resultados del análisis se exponen en lo que sigue.

Primera participación de Jeymi: sus (posibles) estados epistémicos

(3.3)	primeramente hay que analizar muy bien los datos que se nos dan
(3.4)	datos salon de clases 61 alumnos x hombres x + 7 mujeres
(3.5)	por lo cual hay 2 datos desconocidos
(3.6)	pero de uno se resuelve el otro
(3.7)	y tenemos una incognita denominda "X"
(3.8)	que significa hombres
(3.10)	Ahora plantearemos la ecuacion
(3.11)	x + (x + 7) = 61
(3.18)	y nos queda asi 2x=54
(3.19)	ahora vamos a dejar sola la x
(3.20)	y para eso hay que dividir entre 2 ambos miembros
(3.21)	2x/2=54/2
(3.22)	y nos queda x=27.
(3.24)	mujeres X + 7 = 27+7= 34
(3.26)	en el salon de clases tenemos 27 hombres y 34 mujeres
(3.27)	dando un total de 61 alumnos.

En relación a su primera intervención los investigadores concluyeron que Jeymi probablemente experimentó certeza. Esto se derivó de la identificación en ella de distintos de los criterios que aparecen en el marco interpretativo de este documento. Se puede decir, en principio, que ella tuvo *determinación* para someter a juicio del grupo respuestas y procedimientos distintos a los que se habían publicado en el foro hasta ese momento; por ejemplo, Patricia planteó un sistema de ecuaciones pero no lo resolvió (2.10), mientras que Jeymi planteó una ecuación (3.11) y obtuvo el valor de las incógnitas (3.26). Su certeza también se puede inferir del uso de *enfatizadores,* específicamente, del hecho de haber recurrido al modo indicativo de los verbos para presentar reglas generales (3.10 y 3.19) o para hacer afirmaciones (3.5 y 3.7), llegando incluso a utilizar el enfatizador “hay que analizar” (3.3). Otros aspectos que hablan de la certeza de Jeymi son que *actuó* en consecuencia con los procedimientos que anunció, por ejemplo, cuando advirtió “ahora vamos a dejar sola a la "x" (3.19) y cuando realizó acciones consecuentes para efectivamente obtener su valor (3.20, 3.21 y 3.22); que activó *esquemas epistémicos* basados en la *familiaridad* al enunciar reglas como "hay que analizar muy bien los datos" o "ahora plantearemos la ecuación" que muy probablemente eran habituales para ella al resolver problemas rutinarios en su labor como asesora y que parecían darle confianza en sus respuestas; que ella aludió a *razones*, por ejemplo, al plantear una ecuación lineal con una incógnita en lugar de plantear las ecuaciones que se le solicitaron o en lugar de retomar el sistema de ecuaciones que había propuesto Patricia; sus razones también las dejó ver al declarar que "…[había] dos datos desconocidos" (3.5) y que "…de uno se [resolvía] el otro…" (3.6); además su domino conceptual quedó de manifiesto por los símbolos que introdujo en 3.7, en donde explicitó la interpretación que dio a la "x", o en 3.20, donde denotó cierta comprensión de las propiedades del signo "=" al realizar la misma operación a ambos lados de la igualdad. Su certeza también la dejó ver al mostrar *interés* por resolver el problema, al explicar detalladamente su solución, al contestar correctamente todas las preguntas del problema, al resolver el sistema que planteó sin que el tutor se lo solicitara, al exponer una solución distinta a la que se habían mostrado en el foro hasta ese momento y al ser clara en su exposición. Finalmente, Jeymi demostró su certeza al dejar ver *constancia* en la aplicación de las acciones recién descritas a lo largo de su intervención.

Segunda participación de Jeymi: sus (posibles) estados epistémicos

(5.17) ya que bueno vamos a tomar a m como el numero de mujeres y h el numero de hombres
(5.18) entonces sabemos que la suma de las dos cantidades nos da 61
(5.19) seria h+m=61
(5.20) pero tambien sabemos que el numero de mujeres excede en 7 al numero de hombre
(5.21) esto seria
(5.22) h+7=m
(5.26) bueno por lo tanto nuestro sistema de acuaciones seria
(5.27) h+m=61 h+7=m
(5.28) creo jeje

La segunda participación de Jeymi se dio cuando el tutor le pidió cambiar su método de solución para resolver el problema. Pareciera que en esa oportunidad ella experimentó un estado de presunción porque, entre otras cosas, usó *mitigadores* tanto en su procedimiento como al rematar su participación; en ese proceso recurrió a estos elementos léxicos cuando tradujo literalmente cada enunciado del problema del lenguaje natural al lenguaje algebraico: por ejemplo, al traducir el enunciado "el número de mujeres excede en 7 al número de hombres" utilizó el mitigador "sería" (5.21) antes de plantear la ecuación correspondiente, "h+7=m" (5.22), a diferencia de su primera intervención en donde usó el enfatizador "nos queda" (3.18 y 3.22). Al finalizar su intervención ella utilizó el mitigador "creo jeje" (5.28) que da la impresión de que ella dejó abierta la posibilidad de error en el planteamiento de su sistema que, como ya se ha dicho, dejó sin resolver. Finalmente, parece que ella sólo activó esquemas epistémicos basados en la *familiaridad* porque para formular el sistema de ecuaciones no se apreció un sustento distinto a la traducción literal de los enunciados del problema al lenguaje algebraico, y no abundó sobre el significado conceptual de las letras o relaciones que ella introdujo, como lo hiciera en su primera intervención.

Alerta de una posible dificultad conceptual

Del análisis de los posibles estados epistémicos que experimentó Jeymi al presentar distintos métodos de solución se concluyó, de acuerdo a lo que se explicó, que en su primera intervención Jeymi probablemente experimentó certeza, y que en cambio vivenció un estado de presunción en su segunda participación. Esto alertó a los investigadores y los llevó a suponer que en esa segunda participación, Jeymi quizá tenía alguna dificultad conceptual, específicamente con la variable, aún cuando sus procedimientos y resultados en primera instancia eran correctos. Se decidió entonces analizar sus procedimientos usando el Modelo 3UV[1] (Ursini, Escareño, Montes & Trigueros, 2005) en el que se caracterizan los tres usos de la variable.

En su primera intervención Jeymi inicialmente identificó la presencia de dos incógnitas al explicitar "…hay 2 datos desconocidos…" (3.5) (aspecto I1 de la variable como incógnita) pero inmediatamente reconoció una correspondencia entre las variables al mencionar "…de una se resuelve el otro…" (3.6) (aspecto F1 de la variable en una relación funcional). Para obtener el valor de la incógnita "cantidad de hombres" (aspecto I4 de la variable como incógnita) ella le asignó la literal "x" (3.7), la interpretó como "hombres" (3.8) aunque del contexto se infiere que se refería a la "cantidad de hombres" (aspecto I2 de la variable como incógnita). Posteriormente, utilizó esa literal para plantear la ecuación correctamente, $x+(x+7)=61$ (3.11) (aspecto I5 de la variable como incógnita), simplificó esa expresión (3.18) y realizó la misma operación a ambos lados de la igualdad (3.18) (aspectos G2 y G4 de la variable como número general). Una vez que obtuvo la cantidad de hombres, Jeymi la sustituyó en la expresión con la que representó la cantidad de mujeres (3.24) para obtener la respuesta, 34 mujeres (aspecto F2 de la variable en una relación funcional). Finalmente, sumó las dos cantidades para verificar el total de alumnos en la clase (3.26), 61 alumnos (aspecto I3 de la variable como incógnita).

En su segunda intervención (cuando planteó el sistema de ecuaciones) Jeymi en (5.18) identificó dos cantidades: el número de mujeres y de hombres (no explicitó que se trataban de incógnitas), en (5.17) les asignó las literales "h" y "m" y tradujo literalmente del lenguaje común al lenguaje algebraico el enunciado del problema para plantear el sistema de ecuaciones (aspecto I5 de la variable como incógnita): en (5.19) del enunciado "la suma de dos cantidades es 61" obtuvo la ecuación $h+m=61$ y en (5.22) del enunciado "el número de mujeres excede en 7 al número de hombres" obtuvo la ecuación $m=h+7$. Su intervención finalizó con el planteamiento correcto del sistema en (5.27), que dejó sin resolver.

El análisis precedente dejó ver a los investigadores que cuando Jeymi utilizó la representación "x", mostró flexibilidad en el uso de la variable dejando ver que ella contaba con las habilidades necesarias para obtener su valor y verificarlo. Incluso, mostró cierta madurez en el manejo del signo igual al utilizar el método de la balanza para obtener el valor de la literal. Esta flexibilidad y habilidades no las manifestó cuando en su segunda intervención recurrió a una representación distinta (h y m). A diferencia del significado que

[1] El Modelo 3UV distingue aspectos de los tres usos de la variable. *Aspectos de la variable como incógnita:* I1 Reconocer la presencia de algo desconocido que puede ser determinado.I2 Interpretar la variable como valores específicos.I3 Sustituir la variable por el valor o valores que hacen de la ecuación

un enunciado verdadero.I4 Determinar la cantidad desconocida.I5 Simbolizar las cantidades desconocidas y utilizarlas para plantear ecuaciones. *Aspectos de la variable como número general:* G2 Interpretar la variable simbólica como la representación de una entidad general.G4 Manipular la variable simbólica. *Aspectos de las variables en una relación funcional:* F1 Reconocer la correspondencia entre variables relacionadas. F2 Determinar los valores de la variable dependiente, dados los valores de la independiente.

le otorgó a "x", parece que Jeymi consideró esas literales "h" y "m" sólo como abreviaturas de las palabras "hombres" y "mujeres" perdiendo el significado de variables en toda su extensión; una muestra es que se refirió a esas literales como 'cantidades' (5.18).

Adicionalmente, y posiblemente relacionado con lo anterior, ella no percibió la relación entre las ecuaciones del sistema que ella misma enunció y, al carecer de razones, ella sólo activó esquemas epistémicos basados en la familiaridad al dar cuenta de su sistema acudiendo únicamente al parafraseo del enunciado del problema. Por ejemplo, para explicar el planteamiento de la ecuación h+7=m (en lugar de m+7=h) ella sólo utilizó parte del enunciado del problema ("ya que el número de mujeres son las que exceden a el número de hombres") y no hizo referencia al uso de las variables o a las relaciones funcionales entre variables, como lo hiciera en su primera intervención ("hay dos incógnitas" o "de una se resuelve la otra"). Todo ello probablemente le impidió resolver el sistema y determinar el valor de las incógnitas, que sí obtuvo cuando planteó una sola ecuación.

Principales Hallazgos

En la investigación se pudo constatar la eficacia del instrumento para identificar los posibles estados epistémicos que experimentó el sujeto de este estudio al resolver un problema matemático en el contexto de un foro virtual. A partir de este análisis fue posible distinguir la forma en que ella sustentó sus afirmaciones y el nivel de comprensión del concepto de variable que presentó en cada planteamiento. Cuando ella experimentó certeza mostró una comprensión conceptual de la variable que no se vio reflejada cuando los investigadores detectaron un estado de presunción en ella. Esto permitió suponer que cuando esta estudiante vivenció un estado de presunción quizá sólo activó esquemas basados en la familiaridad que le alcanzaron sólo para plantear el sistema y que la posible ausencia de razones (derivada tal vez de la falta de comprensión conceptual que desencadenó una representación distinta de la variable) le impidió continuar con la resolución.

Lo anterior deja ver que estudiar la trayectoria de los estados de certeza (o presunción) de los alumnos permite detectar posibles obstáculos conceptuales y determinar la forma en que ellos sustentan sus afirmaciones matemáticas. Esta conclusión puede ser útil en la práctica del tutor (y de cualquier docente de matemáticas) porque el análisis que él realice de los estados epistémicos que experimentan sus estudiantes puede ayudarle a identificar los posibles obstáculos que ellos tienen con algún concepto matemático. En el reporte que aquí se expone, fue posible identificar las dificultades que la profesora que se tomó como caso de estudio tenía con el concepto de la variable cuando experimentó un estado de presunción, a pesar de que sus resultados y procedimientos eran correctos (en primera instancia).

Lo antes dicho nos llevó a identificar otro fenómeno que se dio específicamente en el caso de Jeymi, la profesora del estudio: que su certeza está relacionada con sus niveles de comprensión y con la activación de esquemas epistémicos basados en razones, y que sus estados de presunción parecen estar asociados a razones operatorias y esquemas basados en la familiaridad, pero sobre todo a la ausencia de razones conceptuales. Puede resultar interesante para el lector saber que este escenario no parece ser el más frecuente, lo cual se mostrará en otros reportes que los autores están actualmente preparando.

Referencias

Abelson, R. P. (1988). Conviction. *American Psychologist*, *43(4)*, 267.

Bloom, B. S., Hastings, J. T., & Madaus, G. F. (1975). *Evaluación del aprendizaje*. Buenos Aires: Ediciones Troquel.

Boyero, M. J. (2012). Aportación al estudio de los marcadores conversacionales que intervienen en el desarrollo del diálogo (Tesis doctoral). Universidad Complutense de Madrid, Madrid.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and proof in mathematics. In G. Hanna, H. Niels & H. Pulte (Eds.), *Explanation and Proof in Mathematics* (pp. 205-221). USA: Springer.

Denzin, N. K., & Lincoln, Y. S. (1994). Introduction: Entering the field of qualitative research. In N. K. Denzin & Y. S. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 1–18). California: Sage Publications.

Harding, J. (1978). What is action-research in schools? *Journal of Curriculum Studies, 10(4),* 355-357.

Hersh, R. (1993). Proving is convincing and explaining. *Educational Studies in Mathematics*, *24(4)*, 389-399.

Hyland, K., & Milton J. (1997). Qualification and Certainty in L1 and L2 Students. *Journal of second Language Writing*, *6(2)*, 183-205.

Hyland, K. (1998). Persuasion and Context: The pragmatics of academic metadiscurse. *Journal of Pragmatics, 30,* 437-455.

Rigo-Lemini, M. (2013 [a]). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Rigo-Lemini, M. (2013 [b]). La convicción, la comprensión y las prácticas de racionalidad en la escuela primaria. Estudio del profesor. En Berciano A., Gutiérrez G., Climent N., & Estepa A. (Eds.) *Investigación en Educación Matemática XVII*. Bilbao: SEIEM.

Sánchez-Upegui, A. (2009). Nuevos modos de interacción educativa: análisis lingüístico de un foro virtual. *Educación y Educadores*, *12(2)*, 29-46.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D., & Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa.* México: Editorial Trillas.

Wittgenstein, L. (1988). *Sobre la Certeza.* Barcelona: Editorial Gedisa.