



[i.cemacyc.org](http://i.cemacyc.org)

# I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

Santo Domingo, República Dominicana



## Historia del Álgebra y la Aritmética en la construcción de conocimiento pedagógico

Adriana **Gálvez** Socarrás

Universidad Distrital Francisco José de Caldas

Colombia

[adrianam.galvez@gmail.com](mailto:adrianam.galvez@gmail.com)

Jairo **Triana** Yaya

Universidad Pedagógica Nacional. UPN

Colombia

[jaty5051@gmail.com](mailto:jaty5051@gmail.com)

### Resumen

El presente escrito comunica algunos resultados de dos trabajos de maestría finalizados en el año 2012, en el marco de la línea de investigación sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas<sup>1</sup> (CPPM), cuyo propósito era caracterizar el papel de la Historia de la Aritmética y del Álgebra en un curso de didáctica<sup>2</sup>. Para ello se abordó (entre otras) la relación entre el conocimiento histórico como parte del CPPM a partir de cuatro preguntas que según Guacaneme (2011) son necesarias al estudiarla, y tienen que ver con la racionalidad (los *porqué*), la intencionalidad (los *para qué*), el tipo de historia (el *qué*) y las estrategias (los *cómo*). La atención se centra en el *qué* y los *para qué* de la Historia de las matemáticas en la formación del profesorado, dado que para estas dos cuestiones los hallazgos permitieron ampliar o puntualizar algunas cuestiones tanto a nivel metodológico como teórico.

*Palabras clave:* Historia de las Matemáticas, conocimiento del profesor, formación inicial de profesores de Matemáticas, Álgebra y Aritmética

---

<sup>1</sup> Línea de investigación adscrita al departamento de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN). Bogotá, Colombia

<sup>2</sup> Este curso hace parte de la formación inicial de profesores de matemáticas y es ofrecido por la UPN

### **Presentación del problema**

La preocupación por implicaciones y posibles relaciones entre la Historia de las Matemáticas (HM) y el CPPM ha permeado el ámbito de investigación en la formación inicial de profesores de matemáticas (FIPM) configurando un campo de investigación que pretende caracterizar formas de integrar la HM en la FIPM. Este hecho pone de manifiesto un interés por aspectos relacionados con la HM en la formación de profesores, en particular sobre el potencial de la primera en la segunda para el desarrollo de *conocimiento didáctico de los profesores* (Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Niss, & al, 2000).

Dentro del campo de investigación de las relaciones HM-CPPM puede considerarse la formación de profesores como una línea de investigación en la que los estudios han girado en torno a la forma como la HM hace parte de la formación de los profesores (Fauvel & Van Maanen, 2000), las implicaciones que puede llegar a tener su uso en las concepciones de los profesores (Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Niss, & al, 2000, Furinghetti & Pehkonen, 2002) y los argumentos que sustentan el uso de la HM en la formación en matemáticas (Guacaneme, 2011; Jankvist, 2009, Radford y otros, 2000). Si bien en la literatura se pone de manifiesto posibles utilidades de la HM en la FIPM, no es claro hasta el momento, el tipo de historia que se debe proponer, pues de acuerdo con Guacaneme (2010) bajo diferentes propuestas de indagación este tipo de historia que se propone es variable. Este hecho, junto con el llamado que hace Jankvist (2009) a desarrollar estudios de tipo experimental que permitan corroborar los resultados teóricos, configuran un espacio de indagación en la FIPM.

Es así como se realizó una investigación de carácter empírico para caracterizar el papel que se le asigna a la HM en la FIPM a través de dos tesis de maestría que indagaron por **¿Cuál es el papel asignado a la Historia de las Matemáticas en el curso *enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el álgebra*, cuando se construyen ideas en torno al Álgebra y la Aritmética?** El interés por este curso radicó en que su propuesta de formación pretende innovar en la formación de profesores al abarcar el conocimiento pedagógico de contenido (Shulman, 1986) usando la HM como una herramienta para tal fin. En dicho curso se usan algunos elementos históricos para i) reflexionar sobre la naturaleza de los objetos Aritméticos y Algebraicos, (ii) abordar aspectos curriculares sobre la enseñanza y el aprendizaje y (iii) estudiar propuestas de enseñanza.

Durante la realización del estudio se analizaron 26 registros de video, correspondientes a las clases del curso durante un semestre, a la luz de unos referentes conceptuales y de la discusión permanente entre los miembros de la línea de investigación. Esto permitió una descripción organizada analíticamente, haciendo uso del software Atlas ti, del conjunto de episodios de clase en los que se evidenciaba el uso de la historia de la Aritmética y el Álgebra. Aunque contábamos con unas categorías y unos referentes a priori, el ejercicio sistemático y una mirada fuertemente relacional (mediada por el software) posibilitó la emergencia de sistemas de categorías más detallados e incluso algunas categorías nuevas que proponemos.

### **Análisis de resultados**

A continuación se han organizado, de forma general, los resultados en torno a cuatro preguntas que fueron delimitadas a partir de la propuesta de Guacaneme (2011) y las sistematización y análisis de la información recolectada: a) ¿Qué tipo de historia fue usada en el curso?, b) ¿Qué de la historia del podía ser estudiado y qué se estudió?, c) ¿Para qué se proponía el estudio de la Historia? y d) ¿Cómo se abordó su estudio?

Para la primera pregunta es importante destacar que si bien Guacaneme (2010) propone 10 posturas historiográficas, éstas fueron reorganizadas en tres grandes grupos atendiendo a la generalidad de algunas posturas sobre otras así como las relaciones entre ellas. Dicha organización se ilustra en la figura 1 en la cual además de proponer los tres grandes grupos que abarcan las posturas historiográficas (tipo de fuentes, objetos estudiados, y la forma como son abordados los objetos históricos de estudio), se sintetizan los tipos de historia que fueron trabajados en el curso.

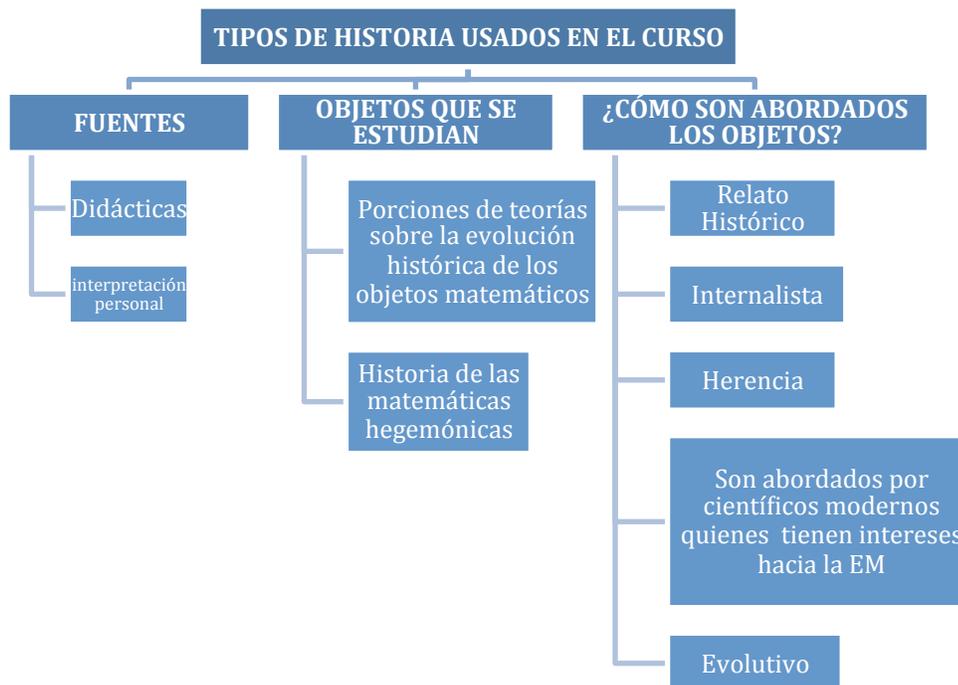


Figura 1. Síntesis de resultados para los tipos de historia usados en el curso.

En relación con el *tipo de historia* que se promovió en el espacio de formación las fuentes consultadas en el curso fueron de *tipo didáctico*. Lo anterior junto con el hecho que el curso no es de Historia sino de Didáctica del Álgebra y la Aritmética, permite afirmar que la Historia es usada como una herramienta para hacer análisis comparativos entre los objetos y/o temas de estudio de la Aritmética y del Álgebra, entre diversas concepciones históricas del Álgebra y de la Aritmética y entre los desarrollos históricos y las propuestas de enseñanza y aprendizaje. De este modo no sería posible hablar de la Historia como un fin sino de la Historia como un medio ya que la finalidad no es el estudio de la Historia del Álgebra por sí misma. Es así como la Historia es un medio para abordar problemas propios de la didáctica de la matemática.

Sin embargo, la postura historiográfica que se refiere al tipo de fuentes (originales, didácticas, secundarias) no logra cubrir todas las intervenciones que hacen alusión a asuntos históricos, ya que en ocasiones las intervenciones de la HM hacen parte del discurso usado por la profesora, (y en contadas ocasiones de los estudiantes) por lo cual no es evidente de qué tipo de fuente se obtuvo esa apropiación o ese dominio de la historia de la Aritmética o del Álgebra. Por ello, podría considerarse que aparece una nueva subcategoría que tiene que ver con la *interpretación personal* que hace un personaje (puede ser la profesora o los profesores en formación), y que no se remite directamente a una fuente original, secundaria o didáctica. Esta subcategoría se moviliza en el aula de clase constantemente, ejemplo de ello es un episodio en el

que se alude a una fuente original, la obra Elementos de Euclides y se hace una descripción de ella, pero esta alusión se encuentra cargada de la *interpretación personal* de quien hace la descripción.

En relación con el nivel de profundidad con el que se estudia la HM podemos decir que en el espacio académico, las intervenciones de la Historia de la Aritmética y del Álgebra, no pasan de un nivel descriptivo de los hechos históricos (relato histórico) a un nivel analítico (análisis histórico) que permita tener posturas fundamentadas para participar en las discusiones que eran propuestas por la profesora. En algunos casos se cuestiona a los estudiantes sobre las menciones históricas que se hacen, pero no se analiza el hecho histórico; por ejemplo, en algún momento la profesora se refiere la idea de número en los egipcios y pregunta acerca de por qué los egipcios no utilizaron el sistema posicional, si en las operaciones que hacían de fondo estaba ese sistema. La profesora hace este cuestionamiento pero en ningún momento se pasa a hacer un análisis o estudio de por qué sucedía aquello, sino que la pregunta queda allí sin respuesta y no se retoma para profundizar en el tema.

Se considera que de cierta forma el análisis histórico no participa en el curso por dos motivos, primero, no hace parte de los propósitos del espacio académico, porque como ya se mencionó antes, es un curso de didáctica no de Historia y por tanto no se busca hacer un estudio exhaustivo de la misma. Aún así, nos preguntamos qué sucedería si se incluye el análisis histórico en un curso de didáctica, si eso podría llevar a integrar de manera más potente la historia de la Aritmética o del Álgebra. Segundo, por el tipo de fuentes que se utilizan, ya que en el curso se utilizan fuentes didácticas y el análisis histórico se encuentra en mayor medida en las revistas especializadas de HM, o en algunas secciones de libros de HM en que se realiza algún análisis como eje central.

Pero si bien es cierto, que no se considera el análisis histórico, si podría pensarse en un *análisis histórico-curricular*, es decir un tipo de análisis (realizado por la profesora) que relaciona y contrasta asuntos de la Historia de la Aritmética y del Álgebra con el currículo escolar. Un ejemplo de ello es cuando se pretende hacer una comparación entre el desarrollo histórico de los sistemas numéricos y la forma como estos son abordados en el currículo escolar.

### **¿Qué de la Historia se estudió en el curso?**

La caracterización que se realizó de los temas y procedimientos tanto del Álgebra como de la Aritmética desde una perspectiva histórica fue necesaria dado que, en el caso del Álgebra, las presentaciones históricas que se consultaron abordaban el panorama histórico desde el desarrollo del lenguaje, desde la separación entre Álgebra clásica y moderna, desde los periodos de simbolización (retórico, sincopado y simbólico), desde una secuencia cronológica de hechos que corresponden a la historia del álgebra, o desde una cultura específica.

Lo anterior, dado el recorrido que sobre la historia se hizo en el curso, no era suficiente o no era lo suficientemente específico. Por esto, se consideró necesario buscar una forma de presentación que abarcara tanto el Álgebra clásica como el Álgebra moderna atendiendo a los objetos de estudio en cada una de ellas y a los procesos de simbolización y generalización de procedimientos que desde nuestro punto de vista brindan un panorama amplio del desarrollo histórico del Álgebra.

De este modo, la organización de la Historia del Álgebra en Objetos y Procesos

transversales, además de brindar un panorama general del desarrollo del Álgebra en la Historia, se convirtió en una herramienta analítica que brindó un *sistema de categorías* para responder a la pregunta *¿Qué Historia del Álgebra se estudiaba en el curso?* Sistema de categorías, que en los análisis presentados pone en evidencia su potencialidad para identificar los asuntos que fueron tratados en el curso, así como aquellos que eran estudiados en mayor o menor medida. Es así como en el caso del Álgebra, los asuntos históricos se organizaron en *objetos de estudio* y *procesos transversales a estos objetos* (Figura 2).

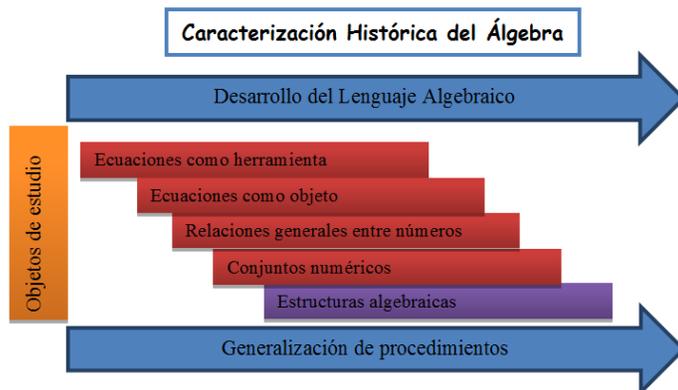


Figura 2. Objetos y procesos históricos en el desarrollo del Álgebra

Para el caso de la Aritmética, se requería precisar aquello que constituye y define la Historia de la Aritmética, asunto por demás problemático dado que, por un lado, no es tan sencillo establecer qué es Aritmética y, por otro lado, en su historia parecen entremezclarse las historias del concepto de número, de los numerales, de los conjuntos numéricos, de las propiedades de los números, de las operaciones y algoritmos aritméticos. Para contar con un marco de referencia para el estudio realizado, y sin ninguna pretensión de escribir una nueva historia de la Aritmética, desde un enfoque analítico se configuraron cinco trazas de la historia de la Aritmética (Figura 3) a través de las cuales observar sistemáticamente el lugar de ésta en el curso de formación mencionado.



Figura 3. Trazas de la historia de la aritmética

Si bien es cierto que aparecen todas las trazas en algún momento en el espacio académico, no todas aparecen con la misma frecuencia, hay algunas que solo son mencionadas en pocas ocasiones, mientras que otras son estudiadas en mayor medida como se muestra en la figura 4.

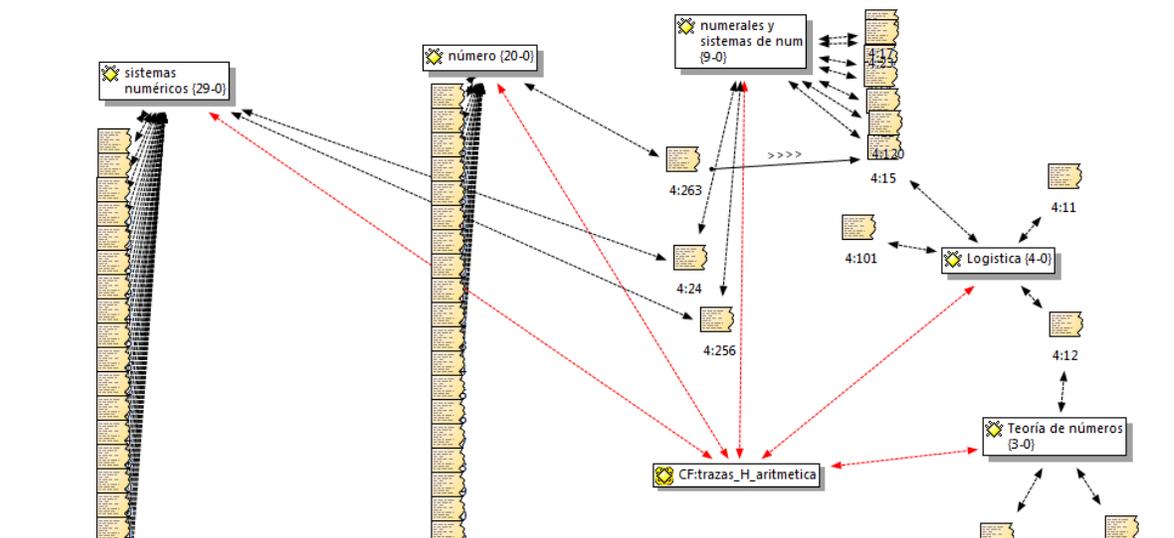


Figura 4. Ocurrencia de Episodios en relacion a las trazas de la Historia de la Aritmética.

Se puede observar que los asuntos que hacían parte de la Historia de los sistemas numéricos y la Historia del número son altamente tratados o por lo menos hay varios episodios que los abordan, mientras que los episodios relativos a las otras tres trazas son más bien escasos.

Estas dos organizaciones, configuraron un marco de referencia y una herramienta analítica que permitió identificar *qué de la Historia* fue abordado en el curso. Esta organización se propone para la discusión pues se reconoce que es necesario puntualizar tanto los objetos como los procesos y las trazas, así como validar mediante otros estudios dichas organizaciones y categorías.

### Intencionalidades de uso de la historia del Álgebra y de la Aritmética

En cuanto al *para qué* proponer la apropiación del conocimiento histórico por los profesores en formación, podemos afirmar que las intencionalidades con las que se introdujo la Historia estuvieron en correspondencia parcial con las propuestas por Guacaneme (2011). Dicha correspondencia se estableció a través del análisis y discusión sobre 83 episodios o momentos de clase en los que se hizo uso de la Historia. Cada uno de los episodios fue codificado en el Atlas ti. de acuerdo con tres tipos de categorías, las que referían al tipo de Historia (ver apartado anterior), las que referían a la organización histórica del Álgebra y de la Aritmética (figuras 2 y 3) y las que hacen referencia a la intencionalidad con la que aparecía un cierto discurso que involucraba aspectos históricos. Este último grupo de categorías (que se abordan más adelante) se contrastó por medio de redes con cada uno de los otros grupos de categorías de modo que además de las intencionalidades fue posible identificar que objetos, procesos o trazas tuvieron un mayor nivel de uso dentro de la clase. Un ejemplo de estas redes se ilustra en las figura 4 y 5.

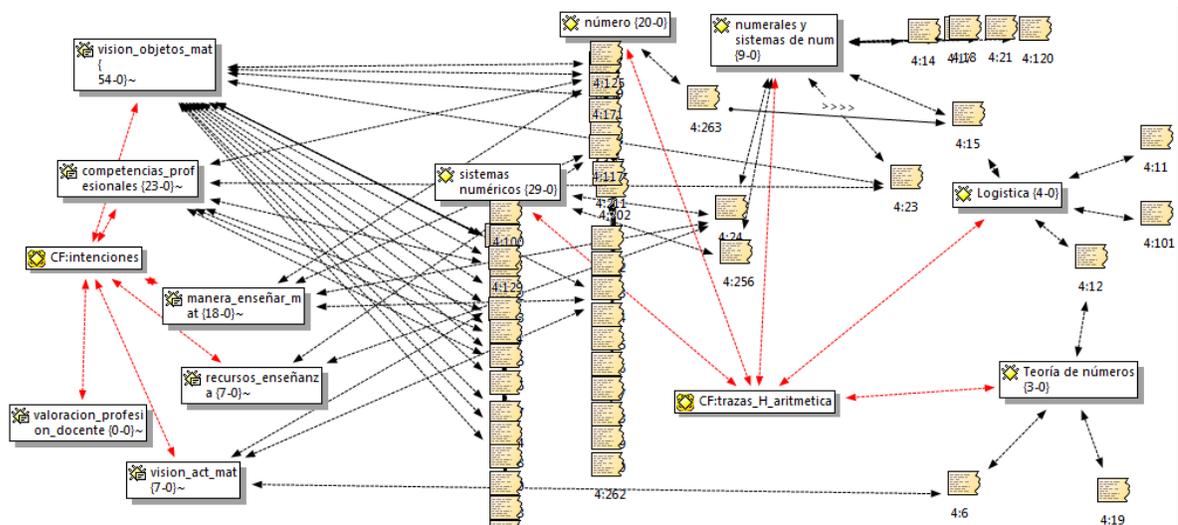


Figura 5. Red relación entre Intenciones y Trazas de la historia de la Aritmética

En esta red se muestra, por un lado, la categoría trazas de la aritmética con sus respectivas subcategorías y, por otro lado, las seis intenciones propuestas por Guacaneme (2011), y los respectivos episodios de clase que relacionan estos dos sistemas de categorías. En estos episodios encontramos que en gran parte la intención de usar la historia de la Aritmética es generar o propender por un cambio en la visión, no solo de los objetos matemáticos, sino también, un cambio en la visión de lo que se considera Aritmética y Álgebra. Algunos de los segmentos tienen la intención de dotar al profesor de competencias profesionales, de modificar la manera de enseñar al tener mayor consciencia de lo que se hace en la clase, proveer de recursos para la enseñanza. Son muy escasos los episodios que consideramos dan evidencia de la intención de cambiar la visión de la actividad matemática. Por otra parte, los registros no dan evidencia de que la historia de la aritmética se use con la intención de promover valoración de la profesión docente.

Tratamientos sobre los datos como el anteriormente ilustrado permitieron los siguientes hallazgos:

Se propone diferenciar la intencionalidad teórica denominada “*promover competencias profesionales*” de las intencionalidades (emergentes) que promueven *reflexiones de tipo didáctico*. Es importante resaltar que el hallazgo de asuntos de tipo didáctico que pretendían vincular el conocimiento histórico y el currículo o el aula de matemáticas, permite identificar el potencial de la HM para el desarrollo del CPPM. Para ilustrar lo anterior se presenta el siguiente ejemplo retomado de los datos analizados.

En la sesión 17, luego de haber construido elementos teóricos alrededor de lo que en el curso se denominó concepciones históricas del álgebra (generalización de la aritmética, estudio de las estructuras, herramienta para la solución de ecuaciones, herramienta para manipular expresiones, álgebra como lenguaje y estudio de relaciones entre cantidades recurriendo a fuentes de tipo didáctico que abordan la historia del álgebra y concepciones curriculares del álgebra la profesora afirma: “... quiero que antes de dar el cierre como tal veamos si esas que aparecen aquí [refiriéndose concepciones curriculares del álgebra] estaban, como les decía al principio, relacionadas con las concepciones históricas o no”. En este episodio es explícita la intencionalidad de la profesora en establecer vínculos entre propuestas curriculares y desarrollo

histórico; de modo más general, podría decirse que la historia se introduce como objeto para comprender las propuestas curriculares actuales. Este es un aspecto que no está contemplado en Guacaneme (2011) y que los autores de este escrito, consideran, hace parte de las competencias profesionales que debería desarrollar un profesor de matemáticas.

Así como lo afirman Radford y otros (2000) “cualquier uso de la historia en la enseñanza de las matemáticas requiere de un acompañamiento de la reflexión didáctica” (p. 152), en el curso analizado se identificaron importantes episodios de clase en los que el conocimiento histórico, que sobre el Álgebra y la Aritmética se había logrado, era puesto en juego por parte de la profesora (en la mayoría de las ocasiones) o por parte de los profesores en formación para referirse a asuntos de tipo didáctico tales como el currículo, el aula de clase a la que se enfrentarían los profesores en formación o el aula en la que se han formado como profesores o la posibilidad de usar la HM para la elaboración de unidades didácticas.

Un uso tal del conocimiento histórico da cuenta de lo propuesto por Fauvel & Van Maanen (2000) y Anacona (2003) para quienes la HM puede ser una fuente para ayudar a identificar pasos cruciales, dificultades y obstáculos en la evolución de un tema; Anacona además de la identificación de dificultades asegura que puede ser fuente para la comprensión de las mismas.

Ahora bien, consideramos que la intencionalidad descrita en este apartado no hace parte de la intencionalidad promoción de competencias profesionales ya que la definición que hace Guacaneme (2010) no precisa cuáles pueden ser las aptitudes y actitudes hacia la docencia y en los ejemplos presentados por el autor se centra la atención en habilidades que no son propias de un profesor de matemáticas sino que atienden a asuntos generales de la profesión como las habilidades de lectura y escritura. De acuerdo a lo anterior y planteando la discusión más que asumiendo una postura definitiva, podría optarse por dos caminos:

- a. El primero de ellos que contempla la intencionalidad “generar reflexiones didácticas” como un complemento a la intencionalidad “promoción de competencias profesionales” y por tanto es necesario extender la idea de competencia propuesta por el autor. En este caso, consideramos que la propuesta de Rico (2004) podría enriquecer y sobre todo puntualizar cuáles serían esas habilidades (aptitudes y actitudes) de los profesores y particularmente de los profesores de matemáticas. Evidencia de esta potencialidad de la propuesta de Rico ha sido señalada en los vínculos presentados en el análisis de los datos.
- b. El segundo, un poco más radical y que se acerca más a lo presentado en el presente trabajo, contempla que la intencionalidad “promoción de competencias profesionales” se reserve para los asuntos de tipo pedagógico, es decir las habilidades profesionales que no requieren necesariamente de la existencia de un objeto matemático; por su parte la intencionalidad “generar reflexiones didácticas” estaría reservada para los asuntos que además de una habilidad profesional requieran la existencia y el estudio de un objeto matemático.

Además, para las intencionalidades propuestas en Guacaneme (2010): *modificación de las visiones sobre las matemáticas y la actividad matemática y modificación de las visiones de los objetos matemáticos* se puntualizaron subcategorías para cada una de ellas de acuerdo a lo sucedido en el curso. Para la primera intencionalidad es posible hablar por separado de la intención de modificar la visión sobre las matemáticas y de forma mucho más particular hablar sobre la modificación de la visión sobre la actividad matemática, si bien puede pensarse que la modificación de una de las dos debería generar cambios en la otra no es posible brindar

evidencia empírica de este hecho a partir de lo indagado. Para la segunda intencionalidad que refiere a la modificación de la visión sobre los objetos matemáticos se puede decir que en el curso indagado se abordó desde tres aspectos: la caracterización de los objetos de estudio de la Aritmética y del Álgebra desde una postura histórica, la diferenciación entre aritmética y álgebra y la interpretación personal.

### **Algunas estrategias de clase. Cómo se promovió el uso de la HM para el desarrollo del conocimiento pedagógico del contenido.**

Acerca de *cómo se promovió el uso de la HM*, es posible afirmar que existieron varios momentos de estudio de algunos aspectos históricos del Álgebra con diferentes finalidades. El primero de ellos permitió *la identificación de los objetos de estudio del Álgebra y los de la Aritmética*. En el segundo se realizó un *estudio comparativo entre los objetos de estudio del Álgebra y los de la Aritmética*. Y un tercer momento en el que *los objetos de estudio del Álgebra y de la Aritmética fueron puestos en comparación con desarrollos curriculares del Álgebra* en la escuela. Los momentos no son lineales, se desarrollan de forma paralela y en ellos la reflexión de tipo didáctico es reiterativa por lo que consideramos que no se pretendió un estudio de la HM sino un estudio acerca de la HM en relación con la enseñanza y el aprendizaje. Por otro lado las estrategias que se tienen en cuenta en el espacio académico para involucrar la historia incluyen exposiciones, discusiones, socializaciones, lecturas, mapas conceptuales y cuadros comparativos que relacionan la historia de la aritmética y el álgebra con el currículo escolar.

Para finalizar hay que decir que el trabajo realizado en las tesis permitió el reconocimiento de la HM como un asunto de interés en la investigación sobre el CPPM, que la HM tiene el potencial para desarrollar Conocimiento Didáctico acerca del Álgebra y la Aritmética y que el conocimiento del desarrollo histórico de un determinado concepto puede brindar valiosas herramientas a un profesor para cuestionar el para qué enseñar, por qué enseñar y cómo enseñar. Así mismo, queda mucho trabajo por realizar en el campo de investigación pues como se mencionó los estudios de tipo empírico son escasos y es necesario realizarlos para corroborar, refutar o puntualizar los planteamientos teóricos que se han venido desarrollando en las últimas décadas.

### **Referencias y bibliografía**

- Anaconda, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática., 8(1), 30-46.
- Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2000). Historical support for particular subjects. En *History in mathematics education: the ICMI Study* (págs. 241-243). Kluwer: Dordrecht.
- Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. Leader, E. Pehkonen, & G. Torner (Edits.), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education* (págs. 39-57). Suiza: Kluwer Academic Publishers.
- Gálvez, A. M., & Maldonado, A. F. (2012). *El papel de la historia de la Aritmética en un curso de didáctica para la formación de profesores de matemáticas*. Bogotá: Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional.
- Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista EDUCyT*, 2.
- Guacaneme, E. (2011). La historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: Razones e

- intenciones. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM*. Recife Brasil.
- Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* , 12(1), 67-101.
- Manrique, J. F., & Triana, J. A. (2012). *El papel de la Historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores de Matemáticas* . Bogotá: Tesis de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional.
- Radford, L., M. B., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J., Katz, V., y otros. (2000). Historical formation and student understanding of mathematics. En *History in mathematics education. The ICMI study* (págs. 143-170).
- Rico, L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado,, 8(1).
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher* , 15 (2), 4-14.
- Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Niss, M., & al, e. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maamen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.