



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



El pensamiento variacional en los libros de texto de matemáticas: el caso de las relaciones trigonométricas

Ferney **Tavera** Acevedo

Universidad de Medellín (Estudiante Maestría en Educación Matemática)

Colombia

ftavera827@yahoo.es

Jhony Alexander **Villa-Ochoa**

Universidad de Antioquia (Docente de la facultad de Educación)

Colombia

javo@une.net.co

Resumen

En el presente documento reportamos parte de los resultados obtenidos de una investigación que centró su atención en el estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana presente en los libros de texto de matemáticas de la Educación Media (15 - 18 años). En particular, nos propusimos interpretar la manera en que los libros de texto de matemáticas ponen de relieve los aspectos variacionales en estos tópicos. A través de la técnica del análisis de contenido pudimos observar que generalmente esta temática se desarrolla a través de expresiones algebraicas para calcular “datos fijos y desconocidos” de un triángulo; los resultados del estudio muestran que la necesidad de diseñar propuestas alternativas, en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones “dinámicas” y funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo.

Palabras clave: pensamiento variacional, libros de texto, relaciones trigonométricas, uso de la tecnología.

Introducción

Esta investigación se desarrolló en el marco de la Maestría en Educación Matemática en la Universidad de Medellín-Colombia y tuvo su génesis en una revisión de la literatura a la luz del pensamiento variacional asociado al estudio de algunos tópicos de la trigonometría plana. Desde dicha revisión encontramos que el Ministerio de Educación Nacional de Colombia ha señalado que este pensamiento está en relación con *“el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos”* (Colombia, 1998, p. 73).

El pensamiento variacional no es un logro que se atiende de manera específica en algún nivel educativo, sino que cada grado de escolaridad debe propender por promover el desarrollo de dicho pensamiento; por esta razón, el MEN recomienda que desde la Educación Básica primaria se debe construir *“distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico”* (Colombia, 2006, p. 66).

De acuerdo con lo establecido por el MEN (Colombia, 2006; 1998) consideramos que el desarrollo del pensamiento variacional conlleva al reconocimiento de fenómenos de cambio y variación, por tal motivo, es necesario propiciar en el aula de clase actividades para que los estudiantes exploren, reflexionen, deduzcan, conjeturen y planteen nuevas situaciones frente a las relaciones dinámicas que se generan entre los conceptos matemáticos, en este caso, aquellos que se originan con el estudio de las relaciones trigonométricas.

Algunos antecedentes

Investigadores como Brown (2006) y Fiallo (2010) han señalado que son pocas las indagaciones que existen en relación a la trigonometría escolar; de igual modo, estos autores también revelan la complejidad de la enseñanza y el aprendizaje de algunos tópicos de la trigonometría, en la cual ponen en evidencia una desconexión entre las diferentes formas de abordar el estudio de las razones trigonométricas; puesto que esta temática usualmente se trabaja en el aula de clase como razones entre los lados de un triángulo rectángulo, como coordenadas de un punto sobre el círculo unitario y como funciones (Brown, 2006) de manera independiente, trayendo como consecuencia que los estudiantes adquieran una comprensión incompleta o fragmentada de los conceptos allí tratados (Fiallo, 2010).

Desde esta perspectiva, consideramos que por la falta de una conexión entre las temáticas antes mencionadas, es posible afrontar algunas dificultades y limitaciones en la interpretación variacional del estudio de las relaciones trigonométricas, puesto que, tanto la noción de razón como la de función, tienen en común una *“naturaleza variacional”*. En este sentido, nos preocupamos por observar la manera en que los libros de texto han integrado o no aspectos variacionales o dinámicos en los desarrollos que presentan de la trigonometría, en particular, en la trigonometría del triángulo.

La idea de centrar la atención en los libros de texto se consolida a través de algunos estudios e investigaciones que resaltan las implicaciones que tiene este tipo de recurso en los ejercicios y problemas que plantea habitualmente el docente en clase de matemáticas. Al

respecto Selva y Borba (2013) señalan que en muchos casos el libro de texto se considera como el principal referente del trabajo propuesto en el salón de clase debido, en buena parte, a la ausencia de otros materiales que orienten a los profesores en relación con lo que debe enseñarse y cómo debe hacerse.

A causa de los diferentes argumentos encontrados en esta revisión inicial de literatura, nos interesamos en valorar algunos libros de texto de matemáticas con la intención de observar e interpretar de qué manera estos libros propician el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas. En la siguiente tabla se muestran los libros de texto que se seleccionaron para realizar un primer análisis sobre la manera como este tipo de recurso sugieren abordar la enseñanza y el aprendizaje de las relaciones trigonométricas, y de esta forma, consolidar el problema de investigación que queremos tratar en este estudio.

Tabla 1. Libros de texto seleccionados para realizar un primer análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

Autor(es)	Año	Nombre del libro de texto	Edición	Editorial
Londoño, N; Bedoya H	1988	<i>Serie Matemática Progresiva "Geometría Analítica y Trigonometría"</i>	Tercera	Norma
Uribe, J	1998	<i>Matemática Experimental 10</i>	Primera	Uros Editores
Zill, D; Dewar, J	2000	<i>Álgebra y Trigonometría</i>	Segunda	Mc Graw–Hill
Swokowski. E; Cole, J	2002	<i>Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica</i>	Decima	Thomson Learning
Mejía F; Álvarez R; Fernández, H	2005	<i>Matemáticas previas al cálculo</i>	Primera	Sello Editorial Universidad de Medellín
Grupo Editorial Santillana	2010	<i>Hipertexto, Matemáticas 10</i>	Primera	Santillana

De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012) libros de texto como los presentados en la Tabla 1 parecen desaprovechar los contextos de los ejercicios y problemas allí planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen, puesto que las medidas a encontrar se muestran como incógnitas observadas como cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales se puede establecer ciertas relaciones funcionales. Estos resultados nos motivaron a ampliar la búsqueda en otros libros más actualizados y puestos en el mercado posterior a la publicación de los Estándares Básicos de Competencia (Colombia, 2006); de esa manera nuestra indagación se centro en la pregunta: *¿Qué aspectos del pensamiento variacional se evidencian a través de los libros de texto del grado décimo, en el estudio de las relaciones trigonométricas?*

Referente conceptual

Desde finales de la década de los noventa, en el campo de la Educación Matemática se ha observado el interés por analizar e interpretar los trabajos relacionados con el desarrollo del pensamiento variacional y sus implicaciones didácticas a través del proceso de modelación. Al

respecto, investigadores como: Cantoral y Farfán, 1998; Reséndiz, 2006; Vasco, 2006; Villa-Ochoa y Ruiz, 2010; Villa-Ochoa, 2012; han planteado sus puntos de vista, con la intención de que el concepto de variable sea percibido a través de fenómenos de cambio y variación, pues han ofreciendo algunas reflexiones sobre la necesidad de desarrollar este tipo de pensamiento en el aula de clase.

Una mirada a la variación, variable y demás nociones asociadas al pensamiento variacional, no puede ser ajena a las interpretaciones y significados en los contextos en los cuales están inmersos. De ahí que el pensamiento variacional tenga una estrecha relación con el proceso de modelación matemática; según Dörfler (1991) “*generalizar significa construir variables*” (Traducción propia de Dörfler, p. 84) y esto conlleva necesariamente a formular modelos; al menos por dos razones: la primera porque hace énfasis en determinar la forma como una o varias cantidades de magnitud varían con respecto a otra u otras, y la segunda porque tiene la intención de encontrar la expresión algebraica que permite la variación mediante un modelo funcional.

Otras consideraciones del pensamiento variacional articulado a la modelación matemática pueden encontrarse en Vasco (2006) quien considera que este pensamiento va más allá de las interpretaciones clásicas del álgebra, para tratar de ofrecer una descripción más específica de cómo se debe asumir el pensamiento variacional, este autor propone nuevos elementos para su desarrollo y establece algunas relaciones entre este pensamiento, la modelación y la tecnología; de esa manera, puntualiza que este pensamiento puede describirse

[...] como una forma de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen sus variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de la misma o distinta magnitud en los subprocesos recortados de la realidad (p. 138).

De acuerdo con esta mirada, consideramos que en el desarrollo del pensamiento variacional, además de la modelación, se puede (y debe) integrar las tecnologías digitales, pues estas juegan un papel fundante para *visualizar* el dinamismo que caracteriza a algunos conceptos del análisis matemático (e.g.: el concepto de función, derivadas, integrales, etc.). De acuerdo con Tavera y Villa-Ochoa (2012) y con Villa-Ochoa y Ruiz (2010) a través de software dinámico como el Geogebra se puede producir y reproducir las relaciones variacionales que se pueden reconocer entre algunos objetos matemáticos.

Desde el trabajo de Villa-Ochoa y Ruiz (2010) puede inferirse que el estudio del pensamiento variacional constituye uno de los aspectos de mayor riqueza en el ámbito escolar, porque cotidianamente se establece a partir de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de cambio y variación provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias e incluso mediante las mismas matemáticas. Por tal razón, estos autores consideran que la variación implica la covariación y correlación de magnitudes cuantificables, que son expuestas no sólo a través de procesos algebraicos sino también mediante gráficas y registros numéricos de tabulación.

Como consecuencia de lo anteriormente expresado, consideramos que el uso de la tecnología a través del Software Geogebra se convierte en una herramienta que posibilita el desarrollo del pensamiento variacional, porque hace visualmente explícito el *dinamismo implícito* de los conceptos matemáticos. Según Leung (2008) se entiende por *dinamismo*

implícito aquellas actividades o razonamientos matemáticos que se emplean para comprender los conceptos abstractos de las matemáticas mediante algún tipo de “animación mental”, de tal manera, que se puedan observar los patrones de variación o las propiedades invariantes de los objetos conceptuales que están siendo utilizados en ese momento.

Desde esta perspectiva, se deduce que es posible analizar visualmente la variación de algunos elementos que intervienen en el estudio de las relaciones trigonométricas, mientras otros se mantienen constantes, es por esta razón, que Leung (2008) asume la variación como una *esencia epistémica* de la modalidad de arrastre; su objetivo se ve reflejado en el hecho de *generar estrategias de arrastre para descubrir propiedades invariantes en medio de los diferentes componentes de una configuración, representación o construcción geométrica.*

En este sentido, es importante mencionar que los problemas que habitualmente se plantean en los libros de texto sobre el estudio de las relaciones trigonométricas permiten explorar el potencial de Geogebra, porque este software puede establecer simulaciones vinculadas a situaciones del “mundo real” y, por lo tanto, recrear maneras de producir conocimiento articulado, de alguna manera, a procesos de modelación de situaciones que permitan la identificación de regularidades y razonamientos *dinámicos* (covariacional en términos de Villa-Ochoa, 2012).

Metodología

La presente indagación está enmarcada en un *enfoque cualitativo de investigación* y el método que utiliza para ello, es el *análisis de contenido*, dado que es una “*técnica que pretende dilucidar la naturaleza del discurso generado en una realidad social, la cual está determinada a través de la producción documental sustentada en los libros de texto*” (Pino y Blanco, 2008, p. 73). Basados en dicha descripción, se deduce que esta técnica intenta generar razonamientos discursivos o inferencias a partir de los datos registrados en cualquier tipo de lenguaje que exprese una comunicación (e. g: verbal, gráfico, simbólico), por tal razón, consideramos que sea posible analizar cómo algunos libros de texto del grado décimo presentan el estudio de las relaciones trigonométricas, desde una perspectiva variacional.

Para alcanzar el objetivo propuesto en esta investigación, adicional al conjunto de textos presentados en la Tabla 1, realizamos otra búsqueda de textos de grado décimo; los libros seleccionados debía atender a los siguientes criterios: (i) que aparezcan en el Portal Colombia Aprende¹, el cual ha sido diseñado por el Ministerio de Educación Nacional de Colombia para que cualquier agente educativo pueda consultar información sobre las diferentes características que poseen los libros de texto que se comercializan en el país para la Educación Básica y Media, (ii) que se tenga evidencias de uso por parte de profesores que dictan el área de matemáticas en el grado décimo y, finalmente, (iii) que desarrolle, de alguna manera, los tópicos de la trigonometría que incluyan el uso de contextos extra-matemáticos en el estudio de las relaciones trigonométricas.

¹ El sitio web al cual se puede acceder al catálogo de textos escolares, recomendado por el MEN es: <http://www.colombiaprende.edu.co/html/home/1592/article-99610.html> Última consulta Enero 10 de 2013.

Con base en estos criterios se seleccionó el siguiente conjunto de textos:

Tabla 2. Libros de texto seleccionados para realizar un segundo análisis sobre el estudio de las relaciones trigonométricas.

Autor (es)	Año	Nombre del libro de texto	Editorial
Buitrago, L; Romero, J; Ortiz, L; Gamboa, J; Morales, D; Castaño J.	2013	<i>Los caminos del saber Matemáticas 10</i>	Santillana
Sotero, F; Donaire, J; Hernández, J; Moreno, M; Serrano, E; Vizmanos, J.	2010	<i>Código Matemáticas 10</i>	Ediciones SM
Vergara, G; Rojas, C; García, O.	2009	<i>Misión Matemática 10</i>	Grupo Educar
Galindo, E; Cely, J.	2009	<i>Fórmula 10</i>	Voluntad S.A
Bautista, M; Ramírez, C; Chamorro, A; Romero, J; Torres, W.	2007	<i>Trigonometría, geometría Analítica y estadística</i>	Santillana
Moreno, V.	2006	<i>Conexiones Matemáticas 10</i>	Norma

El análisis al segundo conjunto de libros mostró que los textos escolares seleccionados presentan patrones similares en sus secuencias de actividades, de esa manera, inician con una serie de lecturas para que los estudiantes analicen e interpreten situaciones históricas que dieron origen a la construcción de ese conocimiento, después introducen cada temática con una presentación general de la misma, para luego mostrar las definiciones y propiedades con algunos ejemplos, posteriormente se destina un espacio para resolver ejercicios y problemas de aplicación, y, finalmente, algunos hacen un comentario informativo de cómo utilizar la tecnología para algunos conceptos matemáticos, no necesariamente relacionados con el tema que se está trabajando en esos momentos.

De acuerdo a lo expresado en el apartado anterior, la variación está en relación con los contextos y estos a su vez, se observan reflejados en ejercicios y problemas que generalmente se presentan en los libros de texto. Desde esta perspectiva, se planteó la necesidad de resolver todo el conjunto de ejercicios propuestos sobre el estudio de las relaciones trigonométricas en cada uno de los libros de texto seleccionados, de tal manera, que permitieran identificar el contexto al cual dicho ejercicio o problema hace referencia, posibilitando así, establecer la frecuencia de las categorías y subcategorías encontradas.

Es de anotar, que los ejercicios y problemas propuestos en los libros de texto analizados hacen un uso recurrente de enunciados verbales que pertenecen a un contexto matemático o a un contexto evocado, en los cuales hay una aplicación (casi) inmediata de los procedimientos y expresiones algebraicas previamente abordadas en el contenido de los capítulos. Esta situación crea la necesidad de proponer otro tipo de actividades y hacer alusión a otros contextos, en los cuales estos sean más “auténticos” y de esta forma, poder abordar la complejidad que implica el estudio de la variación asociada a la temática de las relaciones trigonométricas.

Algunos hallazgos

La investigación se desarrolló dos momentos, a saber: un análisis inicial, que estaba fundamentado en examinar la manera como algunos libros de texto, que son utilizados en el grado décimo y en determinados cursos, los primeros semestres de Universidad, propician el desarrollo del pensamiento variacional en el estudio de las relaciones trigonométricas, dado que estos son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas (Randahl, 2012), y un segundo análisis se realizó para observar e interpretar las relaciones existentes entre las orientaciones derivadas desde la literatura, lo emanado por el MEN, desde los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencia (2006), asociadas a un estudio variacional de la trigonometría plana y los desarrollos propuestos en los libros de texto del grado décimo.

Los resultados encontrados en el primer análisis, muestran que los libros de textos seleccionados, proponen pocas actividades, ejercicios y problemas donde se evidencie el desarrollo de un pensamiento variacional; de igual manera, observamos un uso constante de fórmulas, caracterizado por un dominio algebraico y procedimental que hace énfasis en el manejo apropiado de símbolos, operaciones y propiedades y que, en ocasiones, tal situación desatiende el reconocimiento de las nociones variacionales que se presentan en esta temática.

En el análisis del primero conjunto de textos, también observamos que la mayoría de ejercicios y problemas se fundamentaban en rutinas para calcular el valor numérico de una distancia o de un ángulo en un triángulo, en el cual los demás datos están dados; esta situación se presenta porque las medidas a encontrar se muestran como incógnitas, es decir, cantidades desconocidas que permanecen “fijas” y no como cantidades variables sobre las cuales podemos establecer ciertas relaciones funcionales, además se desaprovechan los contextos de los problemas planteados para hacer un estudio de las relaciones variacionales entre las cantidades que en ellas intervienen (Tavera y Villa-Ochoa, 2012).

Los resultados encontrados en análisis del segundo conjunto de textos dan cuenta que los libros seleccionados, generalmente para abordar el estudio de las relaciones trigonométricas privilegian un contexto matemático seguido de un contexto evocado, lo cual permite deducir que estos textos también descuidan algunos elementos del pensamiento variacional, debido a que los ejercicios y “problemas” allí propuestos se solucionan a través de expresiones algebraicas para calcular datos “fijos” y desconocidos de un triángulo. Este análisis también permitió identificar que los libros de texto del grado décimo dejan relegado el uso de variables y funciones al estudio de posteriores temáticas como por ejemplo en la trigonometría de la circunferencia o en la trigonometría analítica. Las dos apreciaciones antes mencionadas, se convierten en una evidencia de la brecha existente entre el estudio geométrico y analítico de la trigonometría según lo ha mencionado Montiel (2005).

En los libros de texto del grado décimo analizados encontramos que la mayoría de ejercicios y problemas propuestos sobre las razones trigonométricas se resuelven empleando la *tangente*, puesto que en ellas se establece una relación directa entre el cateto opuesto, el cateto adyacente y el ángulo de estudio; donde el valor numérico de la primera cantidad actúa por lo general, como incógnita y las otras dos cantidades están determinadas por la tarea planteada.

En este sentido, es importante aclarar que en los libros de texto seleccionados también aparecen algunos ejercicios y problemas que para ser solucionados requieren de la razón

trigonométrica *seno*, donde hay que hallar el valor de la hipotenusa, que igualmente se muestra como incógnita, pues la tarea propuesta expone el valor numérico al que equivale el cateto opuesto y el ángulo de estudio; es de anotar, que en ambos casos, las cantidades que allí intervienen son datos fijos y constantes, descuidando el uso de variables, parámetros y funciones.

La solución de ejercicios y problemas propuestos por los libros de texto seleccionados sobre el estudio de las relaciones trigonométricas que hacen alusión a un contexto evocado (Font, 2007), que permite establecer de manera mancomunada la relación que puede existir entre las diferentes formas que se emplean en el aula de clase para representar un concepto matemático (e.g.: verbal, numérica, geométrica, algebraica), dado que los estudiantes deben *entender y comprender el problema que se plantea*, para luego tratar de *graficar lo allí expuesto*, de tal manera que logren visualizar en qué lugar se encuentran los datos proporcionados por dicha tarea y aquel(los) que debe hallar, y, finalmente, determina una *expresión algebraica* que a través del manejo *apropiado de algunas propiedades* le permite calcular el valor numérico que satisface completamente la tarea planteada.

De este análisis surge la necesidad de diseñar propuestas alternativas en las cuales se haga hincapié en la visualización de relaciones funcionales entre los ángulos y los lados de un triángulo; de este modo, se espera aportar algunos elementos para superar la idea de que el estudio de las relaciones trigonométricas son “fórmulas” para calcular datos fijos y desconocidos de un triángulo.

En la siguiente tabla presentamos una comparación de los principales hallazgos en los análisis realizados a los dos conjuntos de libros de texto.

Tabla 3. Principales hallazgos encontrados en los dos conjuntos de libros analizados, antes y después de conocerse.

Conjunto de los libros de textos analizados	Publicados antes de conocerse los Lineamientos o los Estándares	Publicados después de conocerse los Lineamientos y los Estándares
Estructura y presentación de los contenidos	<p>Los textos, en su mayoría, obedecen a secuencias como:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Enumeración de las temáticas y objetivos que se desean alcanzar en cada unidad. • Lectura de situaciones históricas que permitieron dar origen a los conceptos que se abordan en cada unidad. • Cada concepto matemático es abordado a través de una serie repetitiva de ejemplo, seguido de ejercicios que fortalecen la parte procedimental y memorística del estudiante, para que luego éste los aplique en los problemas propuestos. • Los ejercicios y problemas planteados tienen sus respectivas respuestas. • Se recomienda la utilización de la calculadora científica o la calculadora graficadora. 	<p>Los textos, en su mayoría, obedecen a secuencias como:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Lectura y análisis de situaciones históricas dieron origen a los conceptos que se abordan en cada unidad. • La presentación de la temática a trabajar se hace mediante ejemplos ilustrativos, luego se plantean algunos ejercicios y problemas de aplicaciones, para que el estudiante observe de qué forma puede utilizar este concepto en la “vida cotidiana”. • Cada unidad trae en su parte final un resumen de los conceptos abordados; algunos de ellos, plantean simulacros tipo pruebas SABER. • Recomiendan utilizar el computador en el aula de clase, a través de algunos software de geometría dinámica como: Geogebra, Cabri Geometry II, Wx máxima, regla y compas, entre otros.
Contextos más usados, según lo propuesto por Font (2007)	<ul style="list-style-type: none"> • Contexto matemático • Contexto evocado 	<ul style="list-style-type: none"> • Contexto matemático • Contexto evocado
Tipos de tareas	Hay un predominio de tareas con una	Hay un predominio de tareas con una

Conclusiones

Los libros de texto son asumidos como el principal recurso que el docente emplea para orientar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, sin embargo, en este estudio se evidenció que existe cierto distanciamiento entre lo emanado por el MEN, asociado a los resultados obtenidos en las indagaciones realizadas sobre la variación y lo que usualmente presentan los libros de texto del grado décimo; dado que las editoriales para publicar sus textos, no siempre acogen las recomendaciones planteadas en los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencia (2006) y lo propuesto por algunas investigaciones, sobre algunos elementos que intervienen favorablemente en el desarrollo del pensamiento variacional. Esto se puede inferir, porque los ejercicios o problemas propuestos sobre el estudio de las relaciones trigonométricas omiten de cierta manera centran la atención en el reconocimiento y la matematización de la variación.

Los resultados encontrados en el análisis de ambos conjuntos de textos escolares permiten observar que los contextos simulados y reales como los descritos por Font (2007) aparentan estar invisibles en el estudio de las relaciones trigonométricas, según las actividades, ejercicios y problemas propuesto en los libros de texto seleccionados; esto es coherente con la complejidad que implican este tipo de contextos que exigen de cierto dinamismo no solo a nivel de los conceptos matemáticos mismos, sino de las relaciones entre las matemáticas y las situaciones extraescolares; sin embargo, consideramos una vez más que con la integración de las tecnologías pueden aparecer nuevas sugerencias para el desarrollo de tareas en estos contextos que impliquen el estudio variacional de las relaciones trigonométricas.

Los estudios previos consultados en esta investigación reportan que el uso de la geometría dinámica (e.g.: Software Geogebra) permite estudiar algunas temáticas de la trigonometría plana desde el punto de vista variacional, ya que incorpora el movimiento en forma de variable para que el estudiante identifique los fenómenos de cambio y variación allí expuestos, de tal manera que analice e interprete las relaciones producidas por éstas en una situación determinada, sin embargo en ambos conjuntos de textos escolares, se observa cierto descuido sobre el rol de la tecnología y, en algunos casos, su uso está enmarcado en comprobaciones o alivio de cargas operacionales más que promover la comprensión conceptual (Selva y Borba, 2013). En este sentido, este estudio llama la atención de los autores de los libros de texto para que promuevan el uso de herramientas de *visualización* puesto que incide en la generalización y en la abstracción de patrones y regularidades, que son demostrados en la detección de propiedades invariantes, posibilitando así el hecho de establecer conjeturas y experimentar el cumplimiento de algunas propiedades geométricas que no estaban previamente establecidas.

El uso de la tecnología en los libros de texto para el estudio de las relaciones trigonométricas desde una perspectiva variacional, se tejen a partir de una interpretación geométrica, lo que implica una *reorganización* de los formatos establecidos para la publicación de estos textos escolares; esta situación puede producir ciertos cuestionamientos a las empresas dedicadas a la producción y comercialización de estos escritos, porque el papel impreso presenta

de forma estática los fenómenos de cambio y variación, trayendo como consecuencia que haya discordancia frente a lo que se propone sobre el desarrollo del pensamiento variacional.

Bibliografía

- Beswick, K. (2011). Putting context in context: an examination of the evidence for the benefits of "contextualised" tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(2), 367 - 390.
- Borba, M., & Villareal, M. (2005). *Humans-with-Media and the reorganization of mathematical thinking*. New York: Springer.
- Brown, S. A. (2006). The trigonometric connection: Students' understanding of sine and cosine. En J. Novotná, H. Moraová, M. Krátká, & N. Stehlíková (Ed.), *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education. 1*, págs. 1 - 228. Prague: PME.
- Cantoral Uriza, R., & Farfán Márquez, R. M. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Revista Epsilon*, 14(3), 353 - 369.
- Colombia. MEN. (1998). *Lineamiento Curriculares para el área de matemáticas*. Santa fe de Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.
- Colombia. MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencia*. Bogotá: Magisterio.
- Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. En A. Bishop, S. Mellin-Olsen, & J. Van Dormolen, *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* (Vol. 10, págs. 63 - 85). Netherlands: Springer.
- Fiallo Leal, J. E. (2010). *Estudio del proceso de demostración en el aprendizaje de las razones trigonométricas en un ambiente de Geometría Dinámica*. Valencia - España: Tesis doctoral de la Universidad de Valencia.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: Una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 10(2), 427 - 422.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología de análisis de contenido: teoría y práctica*. Barcelona: Ediciones Paidós.
- Leung, A. (2008). Dragging in a Dynamic Geometry environment through the lens of variation. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 13, 135 - 157.

- Montiel Espinosa, G. (2005). *Estudio socio - epistemológico de la función trigonométrica*. México: Tesis doctoral del Instituto Politécnico Nacional: Centro de Investigación en Ciencias Aplicada y Tecnología Avanzada.
- Pino Ceballos, J., & Blanco, L. (2008). Análisis de los problemas de los libros de texto de matemáticas para alumnos de 12 a 14 años de edad de España y de Chile en relación con los contenidos de proporcionalidad. *Publicaciones*, 38, 63 - 88.
- Randahl, M. (2012). Approach to mathematics in textbooks at tertiary level: Exploring authors' views about their texts. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 43(7), 881 - 896.
- Reséndiz Baldera, E. (2006). La variación y las explicaciones didácticas de los profesores en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemáticas Educativa*, 9(3), 435 - 458.
- Selva, A., & Borba, M. (2013). *Uso de la Calculadora en los primeros grados de escolaridad*. Medellín: Sello Editorial Universidad de Medellín.
- Tavera Acevedo, F., & Villa-Ochoa, J. A. (2012). Pensamiento Variacional: El estudio de las relaciones trigonométricas en contextos dinámicos. En F. J. Córdoba Gómez, & J. Cardeño Espinosa, *Desarrollo y uso didáctico de Geogebra. Conferencia Latinoamericana Colombia 2012 y XVII Encuentro Departamental de Matemáticas* (págs. 281 - 293). Medellín: ITM.
- Vasco Uribe, C. E. (2006). El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. En C. Vasco, *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos* (págs. 134 - 148). Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Villa-Ochoa, J. A. (2012). Razonamiento covariacional en el estudio de funciones cuadráticas. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 31, 9 - 25.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2009). Modelación en educación matemática: Una mirada desde los Lineamientos y Estándares Curriculares colombianos. *Revista Virtual "Universidad Católica del Norte"*, 27, 1 - 21.
- Villa-Ochoa, J. A., & Ruiz Vahos, H. M. (2010). Pensamiento variacional: seres-humanos-con Geogebra en la visualización de noción variacional. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(3), 514 - 528.