



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

José Carlos Pinto **Leivas**

Centro Universitário Franciscano de Santa Maria

Brasil

leivasjc@unifra.br

Resumen

A oficina tem por objetivo empregar a metodologia da resolução de problemas no ensino e na aprendizagem de Geometria, em conteúdo de geometria plana, utilizando o GeoGebra. Busca-se a compreensão do significado dessa metodologia à luz de alguns autores. Entendemos como problema qualquer atividade que possa chamar atenção dos estudantes para resolvê-la. Dessa forma, atividades de construções geométricas, usualmente realizadas com instrumentos como régua e compasso, e resolvê-las explorando o software, podem contribuir para a formação do professor de Matemática e proporcionar novas formas de aprendizagem. Propõe-se para a oficina seis problemas de Geometria Plana para serem resolvidos no GeoGebra, seguindo a metodologia da resolução de problemas. A aplicação dessa sequência de problemas junto a estudantes de uma disciplina de mestrado demonstrou que a metodologia utilizada, juntamente com esse software, foi relevante para a aprendizagem de conceitos geométricos de inscrição e circunscrição em triângulos.

Palabras clave: resolução de problemas, GeoGebra, geometria plana, educação matemática, formação de professores.

Introdução

No Brasil um movimento que tem, de certa forma, estimulado professores e estudantes ao ensino e à aprendizagem são as Olimpíadas Brasileiras de Matemática das Escolas Públicas (OBEMEP), inclusive com publicação sugerindo atividades que podem ser realizadas por

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

professores na preparação de seus alunos para realizar as provas (Wagner, 2013). Propõe-se realizar uma oficina na resolução de seis problemas, retirados dessa publicação, envolvendo construções geométricas planas de lugares geométricos, a ser realizada com base na metodologia da resolução de problemas, empregando o software GeoGebra.

Ao propor a resolução dos problemas, acredita-se que os participantes da oficina poderão adquirir algumas habilidades que o software desenvolve como: percepção e visualização. Além disso, poderão utilizar posteriormente tanto a metodologia, quanto o conhecimento desse software, na elaboração e aplicação de outras atividades de acordo com o interesse e o nível de escolaridade em que cada um atua.

Para Fischbein (1987), a percepção é um elemento importante na construção do conhecimento e, para ele, ela difere da intuição, pois intuição vai além dos fatos perceptíveis, necessitando uma extrapolação das informações advindas desses fatos. Assim, percepção se faz presente na compreensão do que é essencial em Geometria.

Freudenthal (1973), ao refletir sobre o que há de essencial em Geometria e sobre as perspectivas sobre a educação geométrica, afirma que ela pode ser pensada num nível mais elevado como: *é alguma forma axiomáticamente organizada, é certa parte da Matemática que, por algumas razões, é chamada Geometria* (p.403). Mais além, num nível mais elementar afirma: *é essencial compreender o espaço em que a criança vive, respira e se move. O espaço que a criança deve aprender a conhecer, explorar e conquistar, de modo a poder aí viver, respirar e mover-se melhor* (p. 403). Para ele, a Matemática, quando aprendida, deve estar intimamente ligada à realidade.

Dessa forma, essa realidade pode ser encontrada por meio de atividades, no caso, com o uso de um software, que conduzam à visualização, o que para nós é um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos. Para Arcavi (1999), o termo visualização se constitui em uma habilidade ou processo, o qual pode ser pensado como produto de uma criação ou interpretação, quando o sujeito forma imagens, figuras ou diagramas em sua mente, utilizando papel, ferramentas tecnológicas ou outro meio.

Para Fischbein (1987), essa criação se constitui em conhecimento intuitivo. Indica ele: *é uma afirmação trivial que se tende naturalmente a pensar em termos de imagens visuais e que aquilo que não se pode imaginar visualmente é difícil de conceber mentalmente* (p. 103). Ainda mais, *uma imagem visual não somente organiza os dados em estruturas significativas, mas é também um fator importante para orientar o desenvolvimento de uma solução analítica; representações visuais são essenciais dispositivos antecipatórios* (p. 104).

A resolução de problemas

Resolução de problemas é uma metodologia utilizada por pesquisadores como Polya (1978), Onuchic (2009), Van de Walle (2009), Schoenfeld (1992), dentre outros. No entanto, problemas estão na base da própria Matemática desde seus princípios, pois eles, muitas vezes, são o elo motivador para o desenvolvimento de criações tanto teóricas quanto práticas.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1998) indicam a resolução de problemas como se contrapondo à simples reprodução de procedimentos e, também, como eixo organizador do processo de ensino e aprendizagem de Matemática. Consideram que a situação problema é o ponto de partida da atividade matemática e não a definição, e que a resolução de

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

problemas não deve ser uma atividade a ser desenvolvida em paralelo ou como aplicação da aprendizagem, senão como uma orientação para essa aprendizagem.

De acordo com as normas emanadas pelo Nacional Council of Teachers of Mathematics – NCTM – a resolução de problemas deve se constituir numa parte integrante de toda a aprendizagem matemática, pois ela não só constitui o objetivo de sua aprendizagem como também é um meio importante para que os alunos aprendam esta disciplina. Afirmam ainda que os contextos dos problemas podem variar de acordo com a vivência dos alunos.

Para Hiebert et al. (1997, apud Van de Walle, 2009, p. 57) o significado do termo problema é *qualquer tarefa ou atividade na qual os estudantes não tenham nenhum método ou regra já receitados ou memorizados e nem haja uma percepção por parte dos estudantes de que haja um método “correto” específico de solução.*

Isto proporciona ao estudante aprendizagens de diversos conteúdos que são necessários para ele poder desenvolver um projeto de resolução da atividade que lhe é proposta pelo professor, uma vez que não é imposta nenhuma regra a seguir, proporcionando autonomia e criatividade nas tentativas de resolução do problema.

Onuchic (2009) concebe problema como tudo aquilo que não se sabe fazer, mas que há interesse em fazê-lo. A autora utiliza o termo metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação com o seguinte objetivo: *expressar uma concepção em que ensino e aprendizagem devem ocorrer simultaneamente durante a construção do conhecimento, tendo o professor como guia e os alunos como co-construtores desse conhecimento. Além disso, essa metodologia integra uma concepção mais atual sobre avaliação* (p. 97).

O processo avaliativo deve estar embutido nessa metodologia, uma vez que ele é diferenciado do tradicional, no qual o professor expõe o conteúdo e o aluno pratica, geralmente, por repetição e memorização. Dessa forma, a aprendizagem é dimensionada por provas escritas que identificam o quanto de conhecimento o aluno absorveu e não sua própria construção de conhecimento, o que, em geral, ocorre na metodologia de resolução de problemas.

O ensino por resolução de problemas, no entanto, não é fácil para o professor, pois esse necessita planejar cuidadosamente as atividades para seus alunos, selecioná-las de acordo com a turma e fazer o acompanhamento, quase que individualmente, de modo que eles não se sintam perdidos e sem rumo a seguir. Nesse sentido, a metodologia exige mais do professor do que aulas convencionais, elaboradas da mesma forma para todos.

O NCTM indica que o currículo da escola básica, utilizando a resolução de problemas, deve habilitar os alunos para: *construir novos conhecimentos matemáticos; resolver problemas que surgem em Matemática e em outros contextos; aplicar e adaptar uma diversidade de estratégias adequadas para resolver problemas; analisar e refletir sobre a resolução matemática de problemas.* (2008, p. 57).

Algumas fases na resolução de problemas indicadas por Polya (1978) são: compreender o problema, antes mesmo de iniciar a resolvê-lo, procurando verificar o que é pedido no enunciado e quais os dados são fornecidos; elaborar um plano, a fim de que se sinta orientado na busca da resolução, buscar algum problema similar que já tenha resolvido ou que esteja a seu alcance; executar o plano, passo a passo, realizando cuidadosamente os cálculos e construções, se for o caso e, finalmente, fazer uma revisão da resolução desde o seu começo, verificando se a solução encontrada é compatível com o solicitado e com os dados fornecidos.

Visualização e Geometria Dinâmica

Piaget e Inhelder (1993) ao pesquisarem sobre a construção do espaço na criança afirmam que ela começa no plano perceptivo e, após, passa para o plano representativo. A imagem visual das formas, para eles, supõe uma representação intuitiva, cuja construção é realizada quando o objeto permanece fora do campo perceptivo da visão. Assim, a imagem não resulta apenas da percepção senão também dessa representação intuitiva, por isso sendo relevante compreender-se a passagem do plano perceptivo ao plano representativo.

O uso de tecnologias como a régua e o compasso, em tempos atuais, não são mais motivadoras para estudantes e professores, que apresentam dificuldades no seu manuseio, como foram em tempos passados. Até mesmo pelo próprio abandono de construções e representações em Geometria com o advento do movimento da Matemática Moderna, as representações visuais dos objetos geométricos deram lugar às representações algébricas. Entendemos por visualização não somente aquela habilidade adquirida com o órgão físico da visão, senão como construtos mentais, os quais podem ser adquiridos por diversos caminhos, como pelo tato para os deficientes visuais ou pelo uso de softwares.

Visualização por si mesma é uma poderosa ferramenta na resolução de problemas e a possibilidade de os alunos fazerem mudanças instantâneas em suas representações visuais acrescenta uma dimensão dinâmica na construção do conhecimento. As tecnologias computacionais e, particularmente, os softwares de Geometria Dinâmica, parecem estar despertando para uma nova forma de reconstruir os aspectos visuais da Geometria. As construções, em geral, não precisam ser refeitas, como no caso com régua, compasso e outros instrumentos, pois os softwares permitem reconstruções rápidas, sem perda daquilo que o estudante já realizou. Por sua vez, é possível buscar o histórico da construção e refazer etapas que não foram adequadamente construídas. Dessa forma, o estudante não se desmotiva ao perder ou ter de refazer as construções. Outro aspecto relevante no uso de tecnologia computacional é a não necessidade de realizar uma demonstração formal para perceber a veracidade de determinadas afirmações, as quais podem ser percebidas visualmente na tela do computador.

Segundo Klotz (1991), Philip J. Davis argumentou que *geometria visual deve ser restaurada a uma posição de honra na matemática. Computação gráfica que inclui animação e cor oferece a possibilidade de ir muito além de desenhos convencionais*. Afirma, ainda, que infelizmente essas ferramentas têm sido raramente utilizadas para fins educacionais.

O software GeoGebra, por ser livre, tem despertado grande interesse tanto por estudantes quanto por pesquisadores. Nele se pode fazer construções como se estivessem disponibilizados os instrumentos usuais geométricos: régua, compasso, etc..., os quais existem e podem ser usados de forma virtual dinâmica. Além disso, podem ser acrescentadas no menu outras ferramentas que o usuário deseja fazer uso frequente, por exemplo, com as macro construções. O software propicia modificar construções, tais como formato, tamanhos, posições, cores, porém, mantendo a estrutura da construção inicial. Ao construir um triângulo retângulo, pode-se modificar os comprimentos dos lados, os ângulos agudos, para exemplificar alguns, sem que deixe de ser triângulo retângulo.

Na resolução de uma grande classe de problemas geométricos a utilização de lugares geométricos merece atenção especial, como inscrição e circunscrição de uma figura em outra. Nesse sentido, o GeoGebra é um grande aliado do estudante no seu planejamento para a resolução de problemas, uma das fases da metodologia de resolução de problemas enunciadas antes.

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

Os PCN (Brasil, 1998) indicam que as tecnologias não devem apenas se reduzir à aplicação de técnicas por meio do uso de máquinas, mas serem utilizadas na escola para ampliar as opções de ações didáticas, criando ambientes de ensino e de aprendizagem que favoreçam a criticidade, a curiosidade, a observação e análise, a troca de ideias, de modo que o estudante desenvolva sua autonomia, construindo seu conhecimento. Acredita-se que, aliando a isso a metodologia da resolução de problemas, novas perspectivas para o ensino e a aprendizagem de Geometria serão alcançadas.

A oficina

A oficina se constitui, num primeiro momento, de uma apresentação de características fundamentais da metodologia de resolução de problemas, segundo autores que pesquisam o tema. Num segundo momento, irá explorar as ferramentas do software GeoGebra para que todos possam se apossar das mesmas a fim de realizar a resolução dos problemas a serem propostos

Problema 1

A partir da apresentação do problema: construa um quadrado cuja diagonal tenha 4,5cm de comprimento, acompanha-se as etapas de sua resolução utilizando as ferramentas do GeoGebra. Após o acompanhamento da resolução far-se-á discussão sobre possibilidades levantadas junto ao grupo de participantes. Espera-se que os estudantes realizem uma construção similar à apresentada na figura 1, inclusive fazendo a verificação de que a mesma seja, de fato, um quadrado, com suas propriedades de lados e ângulos de mesmas medidas.

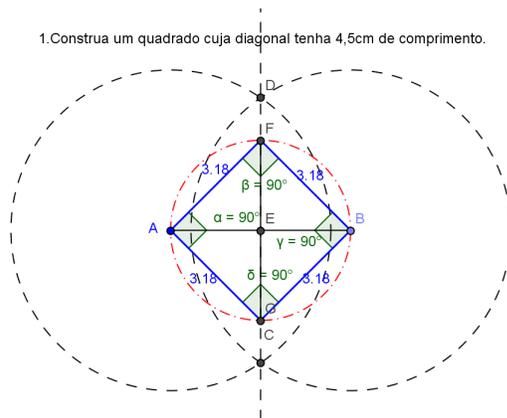


Figura 1. Construção de um quadrado conhecida sua diagonal. Construção do autor.

Após discutir com o grupo de participantes as dificuldades e as soluções encontradas dar-se-á sequência aos demais problemas.

Problema 2

Desenhe uma circunferência de 3,2cm de raio e construa o triângulo equilátero inscrito nela.

Espera-se uma construção similar à apresentada na figura 2.

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

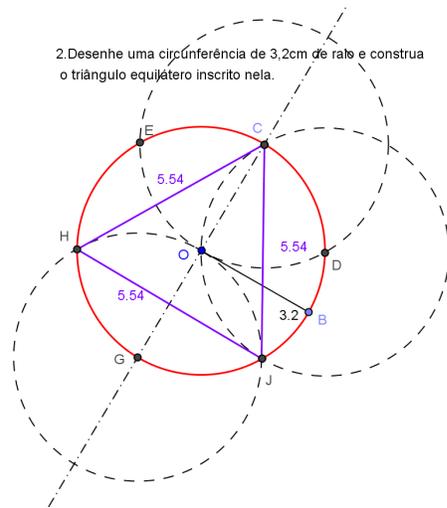


Figura 2. Construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência. Construção do autor.

Problema 3

Desenhe um triângulo cujos lados medem 5cm, 6cm e 7cm. Quanto mede o raio da circunferência circunscrita?

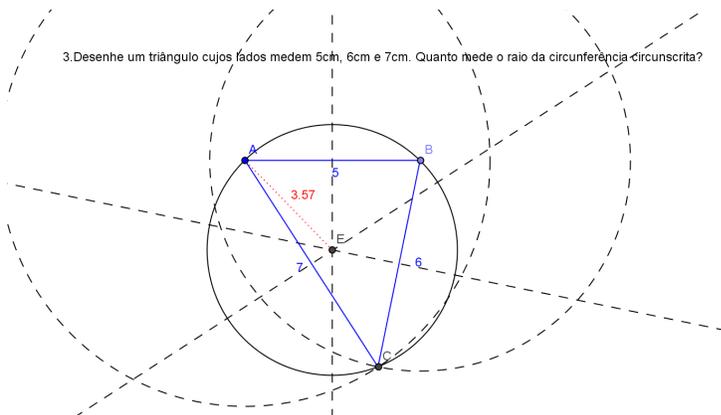


Figura 3. Circunferência circunscrita. Construção do autor.

Problema 4

Construa o triângulo ABC conhecendo a medida do lado $BC = 7\text{cm}$ e as das alturas $BD = 5.4\text{cm}$ e $CE = 6.7\text{cm}$.

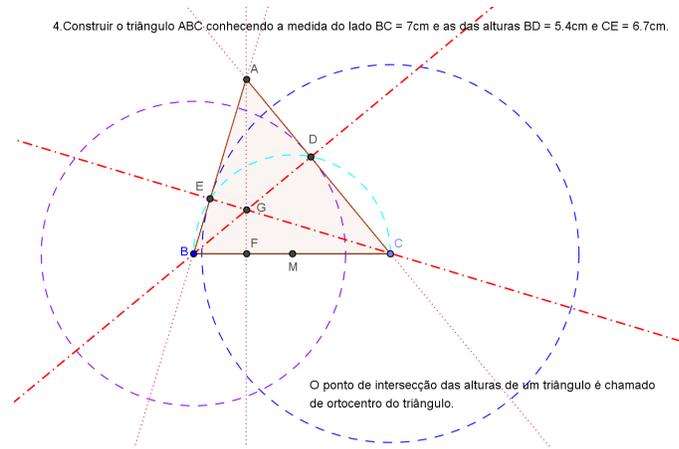


Figura 4. Triângulo conhecido um lado e duas alturas. Construção do autor.

Problema 5

Construa um triângulo ABC conhecendo a medida dos lados $BC = 5\text{cm}$, $AC = 4\text{cm}$ e da altura relativa ao vértice A igual a 3cm .

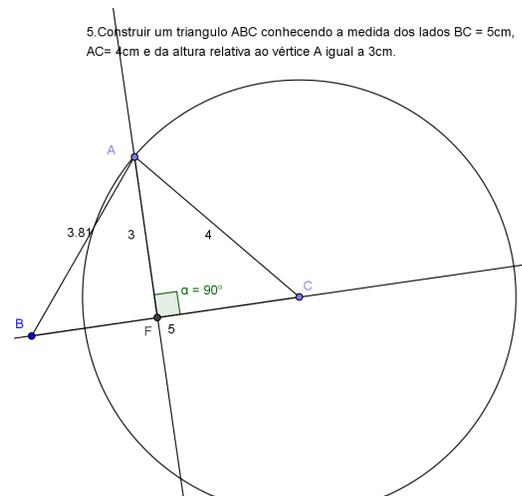


Figura 5. Triângulo conhecidos dois lados e uma das alturas. Construção do autor.

Problema 6

Construa um triângulo ABC, conhecendo a medida dos lados $AB=5\text{cm}$, $AC=4,5\text{cm}$, e altura relativa ao vértice A igual a 3cm.

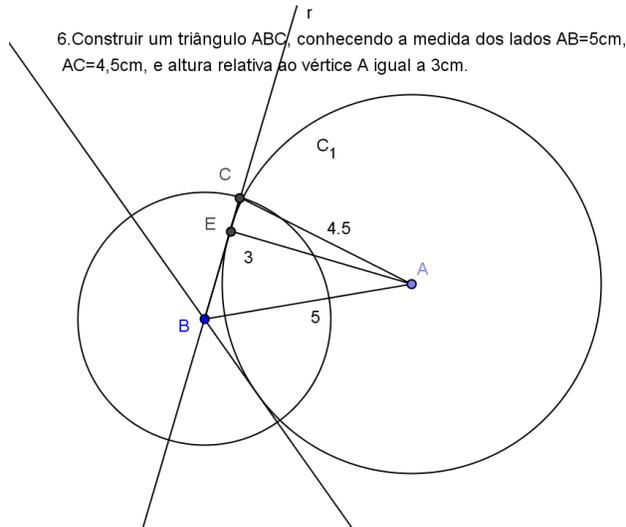


Figura 6. Triângulo conhecidos dois lados e uma das alturas. Construção do autor.

Observa-se que os problemas propostos exigem a elaboração de estratégias de resolução uma vez que, para sua resolução, não se encontra uma ferramenta imediata a menos que seja, posteriormente, feita uma macro construção e acrescida ao menu do software.

Como última etapa da oficina, se irá solicitar que cada participante faça registros utilizando a ferramenta “caixa de texto”, disponível no menu do software, e salve suas construções em um arquivo, o qual será encaminhado ao proponente da oficina ou por e-mail ou salvando num pendrive. Posteriormente, serão devolvidas, por e-mail as considerações sobre tais estratégias individualmente com comentários e solução caso o participante não tenha conseguido consolidar sua resolução corretamente.

A oficina será concluída com um pequeno debate sobre as estratégias utilizadas nas resoluções e avaliação crítica dos participantes sobre a metodologia empregada e os conhecimentos adquiridos.

Referencias y bibliografía

- Arcavi, A. (1999). The role of visual representation in the learning of mathematics. In *Proceedings... NORTH AMERICAN CHAPTER OF THE PME*. Disponível em: <http://www.clab.edc.uoc.gr/aestit/4th/PDF/26.pdf>. Acesso em: 30 set. 2008.
- Brasil. (1998). Ministério da Educação/Secretaria de Educação Fundamental (MEC/SEF). *Parâmetros curriculares nacionais: matemática*. Brasília, Brasil..
- Klotz, E. A. (1991). Visualization in Geometry: a case study of a multimedia mathematics education Project. In: *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. Walter Zimmermann; Steve

Resolução de problemas geométricos usando o GeoGebra

- Cunningham, (editors). Mathematical Association of America. Editorial Board. USA.
- Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics: an educational approach*. Dordrecht: Reidel.
- Freudenthal, H. (1973). *Revisiting mathematics education: China Lectures*. London: Kluwer Academic Publisher. Mathematics Education Library.
- NCTM. (2008). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar*. 2. ed. Edição Portuguesa. Associação de Professores de Matemática. Lisboa.
- Onuchic, L. de la Rosa. (2009). Trabalhando volume de cilindros a través da resolução de problemas. *Educação Matemática em Revista-RS*, v. 1, 95-103.
- PIAGET, J.; INHELDER, B.. (1993). *A representação do espaço na criança*. Porto Alegre: Artes Médicas.
- Polya, G. (1978). *A arte de resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.
- Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan
- Wagner, E. (2013). *Uma introdução às construções geométricas*. Rio de Janeiro: IMPA.
- Walle, J. A. Van de. (2009). *Matemática no ensino fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula*. (6th ed.). Porto Alegre: Artes Médicas.