I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org
Santo Domingo, República Dominicana

# Currículum oficial de matemáticas y Cultura de Racionalidad

Mirela **Rigo** Lemini
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
mrigolemini@gmail.com
Sergio Gonzalo **Rodríguez** Rubio
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional
México
rrsergg@yahoo.com.mx

## Resumen

En la ponencia se analiza un material curricular oficial para las matemáticas de la educación secundaria, a la luz de los componentes de la noción de 'Cultura de Racionalidad': Creencias, Normas de Sustentación, Normas Heurísticas, y Normas sobre Reparto de Responsabilidades (entre otros aspectos). Se argumenta que el enfoque didáctico del currículum analizado, centrado en un enfoque hacia el descubrimiento –basado en procesos empíricos e inductivos–, va a 'contraflujo' en relación a otras propuestas curriculares internacionales (como las de Estados Unidos e Inglaterra), lo cual debe de alertar no sólo a las autoridades responsables del desarrollo curricular sino a todos los implicados con la educación matemática del país.

*Palabras clave: análisis curricular, cultura de racionalidad, justificación matemática, educación secundaria, aprendizaje.*

## Antecedentes

Existen diferencias entre el currículo formal y el currículo que el profesor ejecuta cotidianamente en su clase. La divergencia entre el currículo puesto en práctica y lo que oficialmente se espera ha sido reconocida no sólo por los investigadores (Stein, Remillard y Smith, 2007, p. 321) sino por autoridades educativas responsables de la planificación y el desarrollo curricular (e.g., SEP, 2006, p. 29).

Los expertos en el tema han comenzado a investigar a los actores y las circunstancias (siempre complejas) que eventualmente pueden estar en el origen de las diferencias entre el currículo escrito y el formal, enfocando su interés, entre otras cosas pero de manera privilegiada, en los profesores (con sus marcos de comprensión y significación y en interacción con sus alumnos). Sin embargo –y a pesar de que existen análisis muy interesantes sobre los contenidos de (probabilidad) de los documentos curriculares (e.g., Sánchez, 2009) y de que las autoridades educativas conminan continuamente a los profesores a guiar su práctica educativa considerando los materiales curriculares oficiales (v. Lineamientos para la organización y el funcionamiento de los Consejos técnicos escolares, 2013, p. 13)–, los expertos parecen haber puesto escasa atención en el análisis del currículo mismo –aunque sea un factor que potencialmente incide en algunos aspectos de la práctica docente y que puede representar un obstáculo para que el profesor concrete las disposiciones oficiales curriculares (Stein, Remillard y Smith, 2007)–.

En continuidad con dicha línea de investigación, en el presente documento se hace un análisis de los materiales curriculares mexicanos aprobados por las instancias oficiales (Secretaría de Educación Pública) en la Reforma a la Educación Básica del año 2011. En el perfil de egreso de la Educación Básica precisado en el Plan de estudios (SEP, 2011a) se afirma que "El nivel de secundaria atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo" (p. 53) y se plantea que [a su egreso] "el estudiante formula y valida conjeturas; busca argumentos para validar procedimientos y resultados (p. 53)... argumenta y razona al analizar situaciones ... valora los razonamientos y la evidencia proporcionados por otros y modifica, en consecuencia, los propios puntos de vista (p. 43). Considerando el papel que en los distintos materiales curriculares mexicanos se le da al razonamiento y la argumentación, en esta presentación se analizan dichos materiales curriculares desde la perspectiva de la sustentación y el razonamiento. Se argumenta que el foco de los nuevos materiales está en los procesos de descubrimiento, a diferencia de la propuesta anterior –elaborada en la década de los noventa–, en la que además de considerar el enfoque heurístico se ponía atención a la prueba (localmente) deductiva.

## Marco Interpretativo y razones de su elección

La prueba es una actividad inherente a la matemática disciplinar (Hanna y de Villiers, 2008). Por ello, la prueba o las 'pruebas en vías de desarrollo' (prácticas de explicación y justificación no necesariamente deductivas y por tanto menos sofisticadas que la prueba formal; Hanna y de Villiers, 2008, p. 330) debieran resultar imprescindibles en las clases de matemáticas (de ello han dado cuenta investigadores como Hanna, 2001; Stylianides, 2007).

Es en los profesores en los que naturalmente recae la responsabilidad de enseñar las distintas formas de prueba (Cfr., Franke, Kazemi y Battey, 2007, p. 227), ya que –como sostiene Cobb– "es importante no dejar al propio juicio de los alumnos la tarea de validación" (Cit. en Hanna y Janhke, 1996, p. 886). A los docentes les toca "crear las condiciones para conseguir que los alumnos comprendan los roles del razonamiento y de la prueba dentro de las matemáticas" (Hanna y de Villiers, 2008, p. 329): considerando su nivel de escolaridad, ellos deben poder ayudar a los alumnos a abrirse a las ideas de la argumentación matemática y a desarrollar los elementos críticos del razonamiento deductivo (Harel y Sowder, 2007, p. 833), lo que incluye la formulación de conjeturas y de generalizaciones, y el reconocimiento de este tipo de pensamiento cuando se presenta por otros (cfr. NCTM, 2000, p. 18).

Si bien las actividades de argumentación, justificación y prueba que el profesor eventualmente anima o desarrolla en su clase son, como ya se explicó, centrales en la ayuda pedagógica que él les puede brindar a sus alumnos, esas actividades justificativas no se reducen a acciones aisladas basadas en la aplicación de ciertas técnicas de validación y razonamiento (e.g., la reducción al absurdo, la formulación de contraejemplos, la inducción y la comprobación o la deducción de propiedades de las matemáticas), por más importantes que éstas sean.

En la clase de matemáticas los maestros –deliberada o involuntariamente– comparten, (negocian o imponen) a los alumnos creencias, prácticas sistemáticas, normas de acción e interacción y actitudes en general (Franke, Kazemi y Battey, 2007, pp. 237-239); específicamente, por tanto, comparten (negocian o imponen) también las que se relacionan con lo que el grupo considera (conciente o inconcientemente) como lo 'razonable' (Balacheff, 2000). Esto incluye, entre otras cosas, los criterios y tipos de sustentación que el colectivo acepta para justificar las verdades matemáticas (o en otros términos, las normas sociomatemáticas correspondientes a lo que ahí se asume como una explicación aceptable); o bien, las reglas relativas al reparto de obligaciones en relación a quién le toca argumentar y a quién valorar y sancionar los argumentos de los otros, entre otras cosas. En la clase de matemáticas, en suma, los maestros –en conjunción con sus alumnos– promueven una subcultura que descansa en los distintos aspectos y procesos concernientes a la sustentación y justificación. En el marco de la presente investigación, a esta subcultura se le ha denominado "Cultura de racionalidad".

## La Cultura de racionalidad: una caracterización

Las comunidades que se agrupan en los salones de clase de matemáticas instauran y comparten su propia Cultura de racionalidad, la cual está asociada a un contenido matemático específico y depende del nivel de conocimientos que el grupo tiene sobre dicho contenido.

La Cultura de racionalidad está conformada por los siguientes componentes:

a. Un conjunto de compromisos, supuestos y creencias que (en mayor o menor grado) comparte el colectivo, en torno a las matemáticas y sobre el campo matemático específico; sobre cómo enseñarlo y sobre cómo se aprende en el ámbito escolar (con posturas claramente distintas entre el profesor y sus alumnos);

b. Un bagaje de verdades matemáticas (relacionadas con el campo específico y con los conocimientos que posee la comunidad sobre el tema) que el colectivo suele considerar como evidentes o por lo menos, ciertas;

c. Las normas de sustentación, es decir, el bagaje de esquemas de sustentación que el colectivo suele activar con el propósito de apoyar o justificar la verdad de los enunciados de contenido matemático (relacionados con el campo particular) que surgen en el aula. En el marco de esta investigación, a esos esquemas de sustentación se le denominan 'Esquemas epistémicos de sustentación' (Rigo, 2009; 2013);

d. Las normas de interacción y de reparto de responsabilidades. Se trata del reparto de obligaciones en relación al agente de clase que le corresponde certificar la pertinencia, viabilidad, o validez de los esquemas aplicados y la veracidad de los resultados;

e. Un conjunto de hábitos que regulan las disposiciones afectivas que los militantes del grupo experimentan hacia los procesos de sustentación y los resultados que de ahí se derivan

f. Un conjunto de hábitos que comparten los agentes de clase que los lleva a activar prácticas meta-cognitivas a través de las cuales toman conciencia de las circunstancias en las que en clase se pusieron en juego determinados esquemas epistémicos o bien, de los enunciados que se aceptaron sin justificar; entre otras muchas.

En síntesis, la Cultura de racionalidad influye en la determinación de los recursos en los que la comunidad confía para aceptar una creencia o un enunciado matemático como verdadero y los mecanismos sociales que tiene para certificar sus justificaciones y explicaciones. En clase de matemáticas el alumno, entonces, no sólo se ejercita en la aplicación de herramientas particulares para sustentar y validar; en ese ámbito el alumno aprende a participar activamente en las prácticas derivadas de la Cultura de racionalidad que prevalece en su grupo (Wenger, 2001).

En el apartado **Análisis de resultados** se emplea esta particular óptica en el análisis de los materiales curriculares que las autoridades educativas mexicanas propusieron para la materia de matemáticas en el año 2011, así como materiales curriculares para esa misma materia, correspondientes a 1993.

## Metodología

Tomando como foco el tema de la justificación matemática, se hizo una revisión sistemática y a profundidad de los documentos oficiales que sirven de guía a los profesores de educación secundaria en México. La siguiente tabla muestra esos documentos y los apartados que se revisaron de cada uno.

Tabla 1
*Documentos oficiales revisados.*

| Programas de estudio 2011. Guía para el Maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas (SEP 2011a) | Plan de estudios 2011. Educación Básica (SEP 2011b) | Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas escolares. Casos y perspectivas Batanero, Gutiérrez, Hoyos, López, Llinares, Sáiz y Sánchez (2011) | Planes de clase |
|---|---|---|---|
| Primera parte<br>Propósitos<br>Estándares curriculares<br>Enfoque didáctico<br>Organización de los aprendizajes<br>Segunda parte<br>Guía para el maestro | Perfil de egreso de la educación básica<br>Campos de formación<br>Pensamiento matemático | La cultura en el salón de clases<br>El desarrollo del razonamiento matemático<br>Aprender a demostrar en matemáticas | Primero, segundo y tercer grados |

En los tres apartados de la primera parte de los Programas se puso énfasis en los procesos de descubrimiento, exploración, justificación y prueba, por ejemplo, cuáles son las formas o los niveles que proponen de justificación; si en una primera revisión, los procesos de razonamiento son inductivos o deductivos, etc. También se puso atención en ver si proponen alguna guía que contemplara cuál debería ser el papel del profesor y del alumno respecto a dichos procesos. En el cuarto apartado se hizo la revisión e identificación de los contenidos de los tres grados que incluyeran procesos o acciones de justificación, argumentación o validación. La búsqueda se hizo a través de palabras clave, entre las que se incluyen: explicar, justificar, argumentar, conjeturar, validar o deducir; palabras que denotan acciones que se considera están relacionadas con lo que en la Cultura de racionalidad se les denominó normas sociomatemáticas de sustentación y justificación. Posteriormente se hizo un análisis específico de cada contenido para ver qué tipo de procesos de sustentación o justificación implican, lo que llevó, para profundizar en el análisis, a la revisión de los planes de clase correspondientes.

Los planes de clase son parte del material que se le brinda al profesor y son un referente del tipo de actividades y situaciones que se tienen que implementar para la enseñanza de los contenidos de los Programas. Además contienen sugerencias y orientaciones relacionadas con las actividades. Así para el análisis de los planes de clase correspondientes a cada contenido que se identificó previamente en los Programas que contienen alguna palabra clave, interesó ver los procesos de sustentación o justificación que se promueven con las situaciones que se proponen, así como las responsabilidades que el profesor y el alumno tienen respecto a esos procesos.

La revisión de la *Guía para el maestro* (segunda parte de los Programas) tuvo la finalidad de conocer las sugerencias específicas que le dan al profesor, relacionadas con la justificación de procedimientos y resultados, y del Plan de estudios sólo se consideraron para el análisis los apartados: Perfil de egreso y Campos de formación, porque son los que presentan información referente a lo que se espera que los alumnos hagan en cuanto a la justificación en matemáticas.

Por último, del documento *Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas,* al ser, como se indica en el mismo documento, un material de apoyo que le ofrece al docente información sobre el aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas; interesó analizar, por una parte "La cultura en el salón de clases", para ver qué diferencias o similitudes se encontraban respecto a la que se propone en el marco de la investigación que aquí se reporta, y por otra para conocer y analizar la información que presenta en cuanto a los procesos de justificación.

## Análisis de Resultados: Un enfoque empírico inductivo de las matemáticas

En el apartado se exponen algunos aspectos sobresalientes de la Cultura de racionalidad que subyace a la propuesta curricular oficial instituida en el 2011. Para el análisis se consideraron, sobre todo, lo relativo a las creencias y supuestos, y a las normas de sustentación y descubrimiento. En el documento se expone lo correspondiente al primer grado de secundaria ya que, desde la perspectiva de los autores, se considera que el material resulta suficiente para ilustrar lo que en el documento se argumenta.

### Compromisos, supuestos y creencias generales

En los materiales curriculares consultados se identificó una creencia matriz sobre las matemáticas y su didáctica, relacionada con el tema del razonamiento y la explicación; se trata del supuesto que está en la base del enfoque didáctico que descuella en el proyecto curricular mexicano de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas: de que "los alumnos formulen conjeturas y elaboren explicaciones para determinados hechos numéricos o geométricos" (Propósitos de estudio de las matemáticas para la educación básica, SEP, 2011b, p. 13). La misma idea se encuentra en el Perfil de egreso (SEP, 2011a, p. 53), donde se sugiere que: "A lo largo de la Educación Básica se busca que los alumnos sean responsables de construir nuevos conocimientos a partir de sus saberes previos, lo que implica [entre otras cosas], formular y validar conjeturas, y buscar argumentos para validar procedimientos y resultados" (p.53).

Un supuesto análogo, pero referido ya no sólo al aprendizaje sino también al ámbito de la enseñanza lo plantean Batanero, Gutiérrez, Hoyos, López, Llinares, Sáiz y Sánchez (2011, p. 33); ellos postulan la conveniencia de que el profesor mantenga "permanentemente la exigencia de que los alumnos proporcionen explicaciones, justifiquen y expliquen de manera adecuada los procedimientos seguidos"

Así, en el enfoque que es posible distinguir en los documentos sobre políticas generales se considera a "las matemáticas como una ciencia que enfatiza la heurística y las aproximaciones inductivas;... considerando que su rol más significativo en el aula es la investigación, exploración y justificación informal", de manera semejante a los puntos de vista que subyacen (o subyacían) a otros desarrollos curriculares (v. Hanna, 2001, p. 10).

Si bien a nivel del discurso explícito que se expone en dichos materiales curriculares también se hace mención a procesos deductivos, como por ejemplo cuando en el Perfil de egreso se plantea que "El nivel de secundaria atiende el tránsito del razonamiento intuitivo al deductivo", en los hechos, es decir, en las prácticas matemáticas de aula que se proponen en los Contenidos y los Aprendizajes esperados incluidos en los Programas de estudio (SEP, 2011b), también predomina, y de manera ostensible, una concepción de las matemáticas en la que imperan las actividades de exploración, descubrimiento y las aproximaciones inductivas y empíricas. En el apartado siguiente se ofrecen evidencias de ese compromiso.

**Normas de sustentación y de descubrimiento**

De los 107 Contenidos que en los Programas de estudio de los tres grados de educación secundaria (2011b) se proponen para la materia de matemáticas, sólo en siete de ellos se hace referencia explícita a términos como 'explicación', 'justificación' o 'deducción', mientras que en ocho, aunque no se mencionan explícitamente sí aparecen (sobre todo los de 'explicación' y 'justificación') en el apartado de los Aprendizajes esperados correspondientes (2011b). Con el propósito de analizar los procesos argumentativos que subyacen a la propuesta curricular, en lo que sigue se introduce un marco interpretativo.

**Criterios de análisis para procesos heurísticos, de generalización y prueba**

En el contexto de este trabajo se ha elaborado un marco interpretativo que tiene como objetivo analizar los procesos de descubrimiento, exploración, verificación y sustentación sugeridos en los contenidos de los Programas de estudio (2011b); el marco analítico se describe en la Tabla 2. Los criterios que integran el marco interpretativo se emplearán para descubrir y tipificar los esquemas epistémicos que aparecen en dichos contenidos y se han diseñado tomando como base el trabajo de Mason (1996), el de Radford (2006a; 2006b) y el de García de León (2012), para el caso de la generalización; se apoyan en el de Hanna (2001), para el caso de visualización, y en el de Ursini, Escareño, Montes y Trigueros (2005), para los usos de la variable.

Tabla 2

*Criterios de análisis para procesos heurísticos, de generalización y de prueba.*

| *Tipo de Esquemas epistémicos* | | *Tipo de actividad cognitiva* |
|---|---|---|
| Esquemas Empíricos | 1: | Análisis de casos particulares y trabajo empírico |
| Esquemas Empíricos;<br>Esquemas Inductivos. | 2: | Identificación de regularidades para uno o varios casos específicos (e.g., mediante ensayo y error) |
| Esquemas Deductivos (asociados a la heurística):<br>· Esquema basado en la sintaxis algebraica;<br>· Esquemas visuales;<br>· Esquemas procedimentales (i.e., en los que se sustenta la veracidad del enunciado en los algoritmos realizados). | 3: | Establecimiento de propiedades generales a través de la generalización para conjuntos infinitos; distinción de características que permanecen y que varían; identificación de estructuras subyacentes al problema |
| Esquemas deductivos de verificación:<br>· Esquema por instanciación;<br>· Esquema visual;<br>· Esquema de análisis de casos particulares;<br>· Prueba matemática. | 4: | Verificación y tareas de comprobación y/o justificación de los resultados obtenidos (e.g., a través de la comprobación en un caso; del argumento visual; de la prueba matemática) |

Con base en el marco interpretativo antes expuesto, en la Tabla 3 se expone el análisis de los cinco contenidos correspondientes al primero de secundaria en los que se mencionan las palabras 'justificación', 'explicación' o 'deducción'. En la primera columna aparece la descripción del Contenido tal como se encuentra en el documento oficial; en la tercera columna se hace una descripción breve de las tareas sugeridas, y en la segunda se hace referencia al numeral asociado al esquema epistémico que subyace a cada tarea.

Tabla 3
*Análisis de Contenidos del primer año de secundaria.*

| Descripción de contenidos | Tipos de Esquemas Epistémicos y tareas | |
|---|---|---|
| Contenido: 7.1.5. Que los alumnos expliquen con lenguaje natural el significado de algunas fórmulas geométricas del perímetro y del área, expresen con una fórmula generalizada el área de algunas figuras geométricas e interpreten el uso de la literal como número general, aplicando diversos valores para el cálculo. | 1:<br>3: | Calcular perímetros y áreas específicas de cuadrado, rectángulo, rombo, trapecio;<br>Enunciar la expresión de una fórmula general del perímetro y del área de las figuras antes mencionadas, con base en argumento visual y deducción algebraica. |
| Contenido: 7.2.6. Justificación de las fórmulas de perímetro y área de polígonos regulares con apoyo de la construcción y transformación de figuras.<br>Que los alumnos deduzcan la fórmula general para calcular el área de un polígono regular. | 1:<br>2:<br>2:<br>3:<br>2:<br>3: | Calcular perímetros y áreas de triángulos y cuadrados específicos;<br>Calcular perímetro y área de pentágono regular específico;<br>Calcular el perímetro de polígonos de 8 y 10 lados generales;<br>Enunciar la fórmula para calcular perímetro de cualquier polígono, con apoyo de argumentos visuales y deducciones algebraicas para fines de simplificación;<br>Establecer la fórmula para área de hexágono y octágono (argumento visual y deducción algebraica);<br>Establecer la fórmula del área de cualquier polígono regular (deducción algebraica). |
| Contenido: 7.3.5. Resolución de problemas que impliquen calcular el perímetro y el área de polígonos regulares.<br>Que los alumnos establezcan las relaciones de variación del apotema, perímetro y área en función de la medida de los lados de polígonos regulares y justifiquen sus respuestas | 3:<br>3:<br>4: | Establecer una propiedad matemática general: la apotema y el perímetro de un polígono regular varía de igual forma (doble, mitad, triple) que la variación del lado; el área crece al cuadrado en relación al crecimiento del lado;<br>Para el caso del apotema y el lado se propone un argumento visual:<br>Verificar la conjetura en casos particulares. |
| Contenido: 7.3.6. Formulación de explicaciones sobre el efecto de la aplicación sucesiva de factores constantes de proporcionalidad en situaciones dadas.<br>Que los alumnos interpreten el factor constante fraccionario como dos operadores enteros y lo apliquen para resolver diversos problemas. | 1:<br>3: | Aplicar Esquema por instanciación de una fórmula: la de la aplicación de un factor escalar;<br>Establecer una propiedad matemática general: la aplicación sucesiva de factores es equivalente a la aplicación del producto de dichos factores (a partir del análisis de un caso. Esquema procedimental, i.e, basado en los procedimientos aritméticos específicos realizados). |
| Contenido: 7.4.3 Justificación de la fórmula para calcular la longitud de la | 1: | Analizar casos particulares: calcular la longitud de la circunferencia entre el diámetro; |

| | | |
|---|---|---|
| circunferencia y el área del círculo. Explicitación del número $\pi$ como la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro. Que los alumnos: Justifiquen la fórmula para calcular el perímetro del círculo; que analicen la relación que existe entre la medida del diámetro y la circunferencia; y que establezcan la relación que existe entre $r^2$ y el área del círculo y con base en esto justifiquen la fórmula para calcular el área del círculo. | 2:<br>3:<br>1:<br>3:<br>1: | Identificar regularidades aritméticas: $\pi$ como la razón de la longitud de la circunferencia y el diámetro;<br>Justificar la fórmula para el perímetro del círculo (deducción algebraica de lo anterior);<br>Calcular razones de diámetros y razones de circunferencias correspondientes;<br>Establecer una propiedad matemática general: la invarianza de la razón del diámetro y la circunferencia respectiva (con base en evidencias numéricas. Esquema procedimental);<br>Aportar evidencia empírica para dar viabilidad a la fórmula del área del círculo, mostrando que $\pi r^2 < 4 r^2$. |

Como se puede observar de la Tabla 3, la didáctica que se sugiere para prácticamente todos los Contenidos tiene como punto de partida algún esquema empírico de análisis de casos particulares, y también en la mayoría de ellos se sugiere cerrar con la verificación de lo conjeturado, también con base en dicho análisis particular. En todos ellos se proponen actividades de exploración, conjeturación y de comunicación de las propiedades inducidas, ya sea en lenguaje natural o en lenguaje simbólico algebraico. Si bien los casos analizados tratan de procesos de generalización que parten de análisis de casos particulares, resultado de inducciones, en todos ellos se pueden identificar actividades deductivas, las que como bien apunta Polya (1965) suelen surgir cuando se llevan a cabo trabajos de descubrimiento.

En el caso de los contenidos analizados correspondientes al primer curso de Secundaria, los Esquemas Epistémicos Deductivos que se pudieron identificar son de dos tipos. Por un lado, se trata de lo que en la literatura han llamado 'argumentos visuales' (Hanna, 2001) y que en el marco del presente trabajo se denominan Esquemas Epistémicos Visuales. En el caso de los Programas bajo estudio estos Esquemas Visuales cumplen más bien una función heurística de evidencia, que de justificación o de apoyo para algún argumento del tipo de las pruebas matemáticas; Por otro lado, se encontraron también inferencias basadas en la sintaxis específica del lenguaje algebraico (e.g., como en los procesos de simplificación). En este caso es preciso señalar que la presencia de ese registro de representación, con su simbología asociada la cual conduce de manera directa a la generalización (Radford, 2006a; 2006b), no garantiza una comprensión de la misma (García de León, 2012, p. 2); esto es, el empleo de la variable no confirma la comprensión de sus distintos significados y de los diferentes papeles que juega dentro del discurso matemático (cf. Ursini *et al.* 2005).

De modo que los esquemas epistémicos que se sugieren en el primer año de secundaria son, en la mayoría de los casos, de tipo Empírico; los hay de tipo Inductivo (categoría 2) y también se encuentran los Esquemas Deductivos, que como se explicó, están basados en argumentos visuales o en deducciones apoyadas en la sintaxis algebraica (categoría 3). Hay también casos de verificación, pero sólo a través de comprobaciones en casos particulares o argumentos visuales. En ningún caso se detectó argumentos del tipo de la prueba matemática, inscritos en organizaciones localmente deductivas.

Los resultados del análisis antes expuesto corroboran lo dicho en el anterior apartado, en el sentido de que la orientación que prevalece en los contenidos matemáticos incluidos en los Programas de estudio (2011b) para el primero de secundaria, es hacia la exploración, el descubrimiento, y las actividades de conjeturación, todas ellas basadas en procesos empíricos y prioritariamente inductivos. La actividad deductiva queda reducida a los argumentos visuales y al álgebra. El análisis del segundo y tercer grado –que no se exponen por razones de espacio– arrojó resultados muy semejantes.

Por otra parte, cabe aclarar que se identificaron muy escasas actividades de organización de conocimientos, de disposiciones afectivas y emocionales (salvo por el hecho de que los procesos de justificación se incluyen como una actitud dentro de los Estándares Curriculares –expuestos en 2011b–), y prácticamente se identificaron muy pocas actividades metacognitivas, sobre todo del tipo de las que se mencionan en el apartado f que aparece en la descripción de la Cultura de racionalidad.

## Discusión de resultados

La Cultura de racionalidad que se puede distinguir en los documentos curriculares del 2011 difiere, en un aspecto muy importante, de aquella que permea a la propuesta curricular mexicana para la materia de matemáticas elaborada en el año 1993. Ésta queda de manifiesto en el Libro para el Maestro (Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero, 1994), del cual se expone en lo que sigue algunos fragmentos que, se considera, permiten ilustrar y sustentar lo que en el presente escrito se argumenta.

En el Libro para el Maestro citado se sugiere que

> Las conjeturas surgen de la manipulación de objetos concretos o de la observación de lo que ocurre en varios casos particulares, es decir, de un razonamiento inductivo. Para validar estas conjeturas los alumnos necesitan aprender a razonar lógica, deductivamente. Este es un objetivo que requiere de una larga preparación para alcanzarse... (Alarcón *et al.* 2001, p. 243)

De entrada se puede apreciar el enfoque del proyecto didáctico: no separar, pero sí diferenciar, los procesos de descubrimiento –de tipo exploratorio, empírico, inductivo– de los procesos de validación y justificación, que se pide sean de carácter deductivo, como se podrá mejor apreciar en lo que sigue. Se mencionan además aspectos didácticos y pedagógicos, relacionados con los largos períodos de tiempo que son necesarios para incubar y asimilar esos procesos demostrativos y las técnicas asociadas.

En el texto citado se hace además una distinción –que para fines didácticos resulta primordial– entre los razonamientos deductivos formales, y lo que Hanna y de Villiers (2008) llaman la ‘prueba en desarrollo’:

> No debe confundirse la iniciación gradual al razonamiento deductivo propuesta por los programas con una presentación axiomática de la geometría. La idea es que en situaciones escogidas por el profesor, los alumnos produzcan conjeturas a partir de la exploración de algunos casos particulares y que aprendan gradualmente a rechazarlas construyendo un contraejemplo, o las prueben mediante un razonamiento deductivo. (Alarcón *et al.* 2001, p. 243)

El enfoque didáctico aquí otra vez es claro: la actividad propiamente matemática no termina en las actividades heurísticas; resulta imprescindible transitar muy suavemente, pero de manera decidida hacia la construcción de demostraciones deductivas, del tipo de las que se proponen en las matemáticas. Y para concretar su propuesta sugieren, entre otros, el siguiente ejemplo:

> Explorar lo que ocurre cuando se unen los puntos medios de los lados consecutivos de un cuadrilátero, ¿qué figuras obtiene? Los alumnos podrán darse cuenta, a partir del análisis de varios casos particulares, que se forma un paralelogramo. En una segunda fase, el profesor podrá orientarlos [sugiriendo trazos auxiliares, e.g.] a que proporcionen un argumento deductivo para

> demostrar que se trata efectivamente de un paralelogramo. Una vez que se tiene la demostración se les podrá preguntar a los alumnos si la misma sirve también para el caso de un cuadrilátero no convexo y si se quiere plantear otro problema relacionado con el anterior, pedirles explorar y demostrar qué ocurre cuando se unen los puntos medios de lados opuestos de un cuadrilátero. (Alarcón *et al.* 2001, pp. 243-244)

La tarea heurística que se propone promueve la activación equilibrada de esquemas epistémicos tanto inductivos como deductivos: si bien el punto de partida son los Esquemas basados en el análisis de casos particulares, y Esquemas visuales, los autores sugieren también emigrar hacia los argumentos formales, es decir, hacia las pruebas semejantes a las inscritas en la geometría. Adicionalmente, en el fragmento citado, como en los anteriores, se puede identificar un claro reparto de responsabilidades así como prácticas de organización disciplinar diversas. A estas prácticas de organización también hacen referencia en el siguiente fragmento:

> También es importante no demostrar teoremas o resultados aislados, sino proponer actividades que permitan a los alumnos utilizar el razonamiento deductivo para establecer cadenas de teoremas, al principio pequeñas y extraídas de una misma situación, después un poco más largas y que vinculen situaciones diferentes. (Alarcón *et al.* 2001, p. 245)

Por otra parte, el aspecto afectivo también es considerado por los autores del texto citado:

> El aprendizaje de la geometría será más interesante para los alumnos si no se intenta probar desde el principio resultados evidentes, por ejemplo, que *en un triángulo a lado mayor se opone ángulo mayor*. Las actividades propuestas deberán hacer sentir la satisfacción que acompaña al descubrimiento de hechos hasta entonces desconocidos y de su relación con lo que uno ya sabía. Más adelante la atención del alumno se desplazará poco a poco de los resultados a sus demostraciones y comenzará a comprender por qué ciertos hechos necesitan demostrarse, aunque parezcan muy sencillos y evidentes. (Alarcón *et al.* 2001, p. 244)

Asimismo, el último párrafo hace referencia a prácticas metacognitivas, como las que se describen en f, las que los autores del texto retoman en la siguiente sugerencia: “Los alumnos deberán aprender en forma paulatina a distinguir lo que se ha probado de aquello que se ha aceptado sin demostración y a redactar sus demostraciones” (p. 245).

Los autores, por otra parte, no descuidan los aspectos relacionados con la redacción y comunicación de resultados, aprovechando la oportunidad para que el profesor y sus alumnos tomen conciencia de las verdades aceptadas: “Se trata de presentar de manera matemáticamente correcta los resultados obtenidos durante la fase de investigación y búsqueda, distinguiendo con cuidado los resultados que se prueban de aquellos que se tomaron como ciertos o que ya habían sido probados antes”. (p. 245)

En la propuesta curricular del año 1993 se puede apreciar un enfoque hacia las matemáticas en el que se equilibran los procesos inductivos inmersos en las tareas de descubrimiento, por una parte, y los procesos demostrativos y de prueba inscritos en organizaciones localmente deductivas, por la otra (a), y se propone, también, que los agentes de clase identifiquen las verdades matemáticas demostradas de las que se han aceptado sin sustento (b). Se promueven actividades heurísticas y de sustentación, basadas en esquemas epistémicos tanto inductivos como deductivos; dentro de los últimos destacan sobre todo, la construcción de contraejemplos y las pruebas deductivas. (c). Se propone también un claro reparto de responsabilidades en relación a qué le toca hacer al profesor y a los alumnos (d); se habla de las disposiciones afectivas que hay que promover en los alumnos durante todos estos procesos argumentativos (e) y se insiste en la toma de conciencia de lo que se ha hecho y de su importancia (aspecto f). Como se comentó, muchos de estos aspectos no se encontraron en los materiales curriculares propuestos en al año 2011, lo que incluye también el Libro para el Maestro (en su edición de 2001).

## Consideraciones finales

"La prueba –sostiene Hanna– continúa mereciendo un lugar prominente en el currículo matemático" (2001, p. 5). La investigadora sustenta su afirmación en dos ejemplos: el del currículum de matemáticas que se perfila en los Estándares elaborados por la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) y en el caso inglés. En relación a los Estándares del NCTM, la experta sostiene que mientras los publicados en 1989 "tenían un enfoque que enfatizaba la motivación hacia el argumento heurístico, lo que tuvo como resultado que se dejara de explotar el potencial de la prueba como una herramienta de enseñanza" (p. 10), los resultados de la reforma curricular llevada a cabo en Estados Unidos cambiaron ese acento. La nueva versión de los Principios y Estándares del NCTM (del año 2000) "remediaron esta situación al recomendar que el razonamiento y la prueba debían ser una parte del currículo de matemáticas a todos los niveles, desde el nivel preescolar hasta el grado 12" (Hanna, 2001, p. 10).

El caso de Inglaterra es en cierta forma análogo. Cierto es que a la fecha en la que Hanna escribió el artículo citado el currículo de matemáticas inglés todavía no había cambiado en su tendencia y acento hacia la heurística, sí en cambio se habían dado múltiples manifestaciones –específicamente a través de un manuscrito fechado en el año de 1995–, de expertos relacionados con el trabajo profesional de las matemáticas (de la London Mathematical Society, del Institue of Mathematics and its applications y de la Royal Statistical Society) reaccionando a esa orientación y reivindicando el papel de la prueba en el ámbito educativo.

A diferencia de esas tendencias internacionales, el currículum de matemáticas mexicano parece estar moviéndose en un sentido justamente opuesto. Valdría la pena que los responsables del desarrollo curricular y todos los que estamos involucrados en el acto educativo, consideráramos y evaluáramos con elementos teóricos y empíricos, esta circunstancia. Este documento tiene como propósito contribuir a ese análisis, que si bien puede resultar muy pertinente para el caso mexicano, también lo puede ser para el caso internacional.

## Referencias

Alarcón, J.; Bonilla, E.; Nava, R.; Rojano, T. y Quintero, R. (2001). *Libro para el maestro. Matemáticas. Secundaria*. México: SEP.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas [Proof processes among mathematics students]*. Bogotá: una empresa docente, Universidad de los Andes.

Batanero, C.; Gutiérrez, A.; Hoyos, V.; López, G.; Llinares, S.; Sáiz, M. y Sánchez, E. (2011). *Aprendizaje y enseñanza de las matemáticas escolares. Casos y perspectivas*. México: SEP.

Franke, M. L., Kazemin, E., y Battey, D. (2007). Mathematics Teaching and classroom practice. En F. Lester (Ed.) *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp 225-256). Charlotte, NC: NCTM

García de León, M. A. (2012). Procesos de generalización en ambiente logo: Estudio longitudinal con educadoras en formación inicial. Tesis para obtener el grado de Maestro en Ciencias, Especialidad Matemática Educativa. Cinvestav. México.

Hanna, G. (2001). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, Special issue on "Proof in Dynamic Geometry Environments", *44* (1-2), 5-23.

Hanna, G., y Jahnke, H. N. (1996). Proof and proving. In A. J. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), *International handbook of mathematics education* (pp. 877-908). Dordrecht: Kluwer.

Hanna, G., y de Villiers, M. (2008). ICMI study 19. *ZDM–The International Journal of Mathematics Education, 40*(2), 329-336.

Harel, G., y Sowder, L. (2007). Toward comprehensive perspective on the learning and teaching of proof. In F. K. Lester, Jr. (Ed.): *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 805-842). Charlotte, NC: U. S. A. National Council of Teachers of Mathematics.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of Algebra. In N.Bednarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.) Approaches to Algebra. Perspectives for research and teaching. London: Kluwer academic Publishers

*NCTM* [National Council of Teachers of Mathematics]. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: *NCTM*.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Radford, L. (2006a) Algebraic thinking and the generalization of patterns: A semiotic Perspective. *Proceedings of the 28th Annual Meeting of the North American Psychology Mathematics Education.* Mérida, México: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L. (2006b). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: A semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics, 42* (3), pp 237-268.

Rigo, M. (2009). *La cultura de racionalidad en el aula de matemáticas de la escuela primaria [The culture of rationality in the primary school mathematics classroom]*. Unpublished PhD. Dissertation, Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del I. P. N. México, D. F. México.

Rigo, M. (2013). Epistemic schemes and epistemic states. A study of mathematics convincement in elementary school classes. *Educational Studies in Mathematics*, 1-21.

Sánchez, E. (2009), La probabilidad en el programa de estudio de matemáticas de la secundaria en México, en *Educación Matemática*, 21 (2), pp. 39-77.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2006). *Reforma de la Educación Secundaria. Fundamentación Curricular. Matemáticas.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011a). *Plan de estudio 2006. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

SEP [Secretaría de Educación Pública]. (2011b). *Programas de estudio 2006. Educación Básica. Secundaria.* México: SEP.

Stein, M. K., Remillard, J. y Smith, M. S. (2007). How curriculum influences student learning. In F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 319-370). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Stylianides, A. J. (2007). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, *65*, 1-20.

Ursini, S., Escareño, F., Montes, D. y Trigueros M. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental: Una propuesta alternativa.* México: Editorial Trillas.

Wenger, E. (2001). *Comunidades de Práctica. Aprendizaje, significado e identidad.* España: Ediciones Paidos América, S. A.