



I CEMACYC

I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe

6 al 8 noviembre. 2013

i.cemacyc.org

Santo Domingo, República Dominicana



Primer acercamiento de un análisis didáctico de la recta para el diseño de una propuesta de intervención en el aula desde un enfoque funcional

Mónica **Mora** Badilla
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
mokmora@gmail.com

Fabián **Gutiérrez** Fallas
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fgutierrez92@gmail.com

Francisco **Herrera** Arroyo
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
fherrera344@gmail.com

Resumen

Por medio de un estudio conceptual y cognitivo se pretende en esta comunicación presentar los avances realizados en una investigación para realizar un diseño de intervención en el aula, donde se realiza un análisis didáctico sobre el estudio de la recta utilizando un enfoque funcional de contenido matemático; El análisis didáctico se basa en un análisis de contenido, análisis cognitivo, análisis de instrucción y análisis de actuación, se tomarán solamente las tres primeras etapas; este trabajo es una investigación en proceso lo cual pretendemos mostrar nuestros avances del mismo.

Palabras clave: Análisis didáctico, enfoque funcional, unidad didáctica, recta.

En Costa Rica, la promoción de un nuevo Programa de Estudio en Matemática (2013) para la educación primaria y secundaria ha marcado cambios significativos en cuanto a contenidos y enfoque del proceso de enseñanza; se promueve el desarrollo de habilidades matemáticas, procesos y aprendizaje por resolución de problemas. Es por ello que esta investigación pretende plantear el análisis didáctico como una herramienta para la planificación del docente y alcanzar los objetivos propuestos en estas nuevas políticas establecidas en el país.

La geometría analítica toma mayor presencia en este currículum, por lo tanto el objeto de investigación es la recta en el plano cartesiano, considerándola como una de las primeras curvas que permite mostrar la relación entre dos sistemas de representación dominantes en la geometría analítica: la representación simbólica-algebraica y la representación gráfica. Por lo anterior, una de las preguntas que guían esta investigación es ¿cómo elaborar una intervención en el aula desde un enfoque funcional para la enseñanza y el aprendizaje de la recta en el plano cartesiano?

Fundamentación teórica

Las teorías que fundamentan nuestro trabajo son: la teoría de análisis didáctico, el enfoque funcional del conocimiento matemático, las reformas internacionales de este enfoque como PISA y su propuesta por competencias, la resolución de problemas como metodología del proceso de enseñanza e intervención en el aula.

En cuanto al análisis didáctico en Gómez (2009) se define como un procedimiento cíclico que incluye cuatro análisis en los cuales el profesor puede organizar la enseñanza: **el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción, el análisis de actuación**. En nuestro acercamiento abordaremos un ciclo de los tres primeros análisis que constituyen la base para que posteriormente se lleve a cabo la aplicación del análisis de actuación por docentes activos de secundaria. Cabe señalar que el análisis didáctico está tomando auge dentro de la formación de profesores, por ejemplo con el proyecto MAD en Colombia dirigido por Pedro Gómez y colaboradores.

Las tareas que dirigen el aprendizaje de la recta responden al enfoque funcional del conocimiento matemático. Según Rico, Lupiáñez, Marín y Gómez (2008) el enfoque funcional está situado en un análisis fenomenológico, que lo que pretende es establecer funcionalidad de los conceptos matemáticos, este enfoque permite modelar situaciones reales, como eje central la resolución de problemas en un contexto determinado. A nivel internacional el enfoque funcional responde a las políticas de currículos basados por competencias.

Nuestra investigación consiste en un experimento de enseñanza que se ubica dentro del paradigma de investigación de diseño o investigación basada en diseño (*Design Research*). Este paradigma según Confrey, 2006 y Sawyer, 2006; citados por Molina, Castro, Molina y Castro (2011) es de naturaleza principalmente cualitativa, que ha sido desarrollado dentro de las “*Ciencias del aprendizaje*” (*Learning Sciences*).

Análisis didáctico de la recta

Esta investigación toma primeramente el análisis didáctico como insumo para la elaboración de la propuesta de intervención en el aula con un enfoque funcional de la enseñanza y el aprendizaje de la recta. Como ya se mencionó, este análisis toma en cuenta distintos momentos, en este primer acercamiento, se presenta el avance del análisis didáctico en cuanto a los siguientes puntos: (a) un análisis de contenido, que involucra las distintas posiciones del conocimiento matemático referentes a la recta, una estructura procedimental, una organización

en subestructuras del contenido matemático y un análisis fenomenológico del conocimiento matemático; (b) un análisis cognitivo, que organiza las expectativas de aprendizaje en cuanto a objetivos, habilidades y procesos que se desean desarrollar en la realización de tareas, y (c) un análisis de instrucción, que permite el diseño de distintas tareas para el cumplimiento de las expectativas planteadas. Dado a que es una investigación en proceso, a continuación nos centraremos en los puntos (a) y (b), tomando en cuenta los resultados obtenidos en estos dos primeros análisis.

El análisis de contenido

En este apartado se desarrolla un análisis de contenido sobre la recta, entendiéndose por el mismo “*el procedimiento con el que es posible explorar, profundizar y trabajar con los diferentes y múltiples significados del conocimiento matemático escolar, para efectos de diseñar, llevar a la práctica y evaluar actividades de enseñanza y aprendizaje.*” (Gómez, 2002. p.252) En este primer acercamiento a la recta se busca hacer un estudio de los conceptos, representaciones, fenómenos, y contextos, y las relaciones entre estos, que conlleva el estudio de la recta.

Primeramente es necesario señalar que la recta se percibe dentro dos grandes áreas de la matemática: la Geometría Sintética y la Geometría Analítica; por ende se hace necesario hacer la distinción entre lo que se concibe como cada una de éstas, sus características, particularidades y su posición dentro de la enseñanza y aprendizaje de la geometría de un sistema educativo.

Con relación a la enseñanza de la geometría desde el enfoque sintético y analítico, Gascón (2001) afirma que hay una posible discusión en cuanto al modelo a seguir. Por un lado está la geometría sintética, propia del modelo euclidiano basada en una axiomática explícita y por otro lado una geometría analítica del modelo cartesiano cuya práctica se sustenta en técnicas del álgebra lineal y dejando implícita la axiomatización.

El mismo Gascón (2001) plantea que el uso de técnicas *analíticas* viene dado cuando se empieza a explorar un campo de problemas de la geometría sintética y aparece la necesidad de introducir pequeñas variaciones en los problemas de dicho campo y estos cambios desembocan en la utilización de dichas técnicas, también denominadas *cartesianas* o *algebraicas* porque su justificación e interpretación natural se da dentro del álgebra.

Nuestro interés es tratar los conocimientos de la recta dentro de la Geometría Analítica, porque permite una mayor transversalidad con otras áreas de la matemática como la geometría, el álgebra y el análisis. Así como también una mayor aprovechamiento de los sistemas de representación para la modelización de distintos contextos y fenómenos en los que están presentes estos contenidos; sin embargo para el análisis de contenido se consideran tres diferentes concepciones de la recta.

Desde lo sintético se pueden encontrar definiciones intuitivas de lo qué es la recta. Iniciando por Euclides, en su primer libro define “*una línea recta es aquella que yace por igual con los puntos sobre ella*”; esta definición es una de las más antiguas es por eso que forma parte de los conceptos llamados primitivos.

Sin profundizar en esta definición, otros autores de manera más convencional definen la recta como: “Dados dos puntos distintos cualesquiera, hay exactamente una recta que los contiene.” (Moise, 1966, p.57); Baldor. (2004) define línea como: “tipos especiales de conjuntos de puntos” (p.10), luego define la línea recta como: “Una imagen de este conjunto de puntos es un rayo luminoso... una recta geométrica se extiende sin límite en dos sentidos. No comienza ni

termina” (p. 10). Se considera que cada una de las definiciones de la geometría sintética, que otros autores presentan sobre la recta, puede ser una definición “actual” haciendo uso de un lenguaje más contemporáneo basándose en las ideas de Euclides.

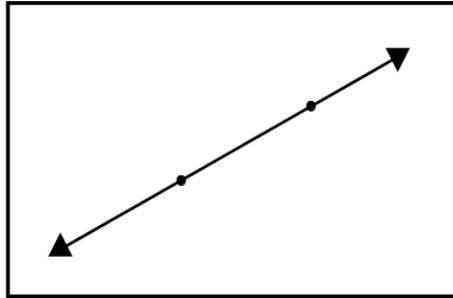


Figura 1. Representación usual gráfica de la

recta desde la perspectiva sintética a recta como “el lugar geométrico de los puntos cuya distancia desde dos puntos dados están en razón constante r , es una recta si $r = 1$.” (p.122). Esta definición está conecta con otros conceptos matemáticos como la razón y la proporcionalidad. Por otra parte, Kindle (1970) establece una relación entre el lugar geométrico y una ecuación de primer grado, al definir la recta como “una ecuación lineal o de primer grado en dos variables. Recíprocamente, la representación gráfica del lugar geométrico cuya ecuación sea de primer grado en dos variables es una recta.” (p.22)

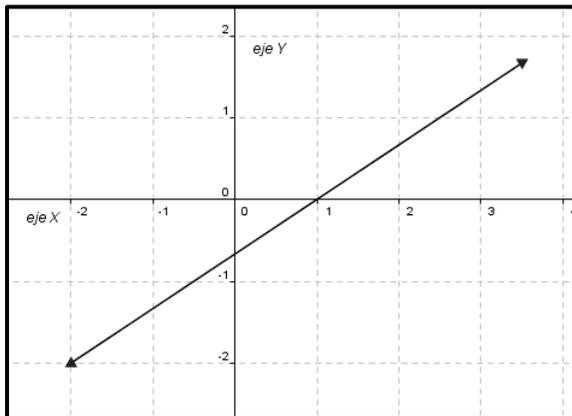


Figura 2. Representación gráfica de una recta en el plano cartesiano

En tercer lugar, dentro del análisis de funciones, la recta se concibe como la representación gráfica de una función lineal real de variable real, definida convencionalmente, mediante la siguiente representación simbólica:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = mx + b; \text{ con } m, b \in \mathbb{R}$$

La función lineal se puede observar como un caso particular de la recta, ya que solamente cumplen la relación de dependencia entre sus variables, por otro lado la recta no precisa esa relación, además el campo conceptual de la función lineal, es diferente a al campo de la recta como lugar geométrico.

Por otro lado, la recta posee diversas **representaciones algebraicas**, que mediante transformaciones sintácticas de unas se obtienen otras. Esas representaciones son las ecuaciones

que definen el lugar geométrico respectivo, llamadas convencionalmente como ecuación punto-pendiente: $y - y_1 = m(x - x_1)$, ecuación general $Ax + By + C = 0$, ecuación cartesiana $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, ecuación normal $x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0$.

Siguiendo la clasificación del conocimiento matemático propuesta por Hiebert y Lefevre que aparece descrita en Rico y Lupiáñez (2008) se han identificado ejemplos de conocimientos conceptuales asociados a la recta desde los enfoques sintético y analítico presentes en la siguiente tabla.

Tabla 1
Ejemplos desde el enfoque Sintético y Analítico de conocimientos conceptuales asociados a la Recta

	Ejemplos desde el Enfoque Sintético	Ejemplos desde el Enfoque Analítico
Términos	Constante, Concurrente, Creciente, Decreciente, Intersección, Oblicua, Paralela, Perpendicular, Punto, Punto, Plano, Recta.	Abscisa, Constante, Coordenada, Decreciente, Ecuación, Eje, Intersección, Intercepto, Ordenada, Origen, Parámetro, Par ordenado, Paralela, Perpendicular, Pendiente, Plano, Punto, Recta, Tangente,
Notaciones	$l_1 \parallel l_2, l_1 \perp l_2, \alpha, l, \overrightarrow{AB}, A$ $\overrightarrow{AB} \cap \overrightarrow{CD} = \{P\},$	$y = mx + b, (x, y), X, Y,$ $P(x, y), O, l_1 \parallel l_2, l_1 \perp l_2, \tan \theta, m \neq 90^\circ, l$
Convenios	Rectas paralelas con el símbolo \parallel y perpendiculares \perp , Punto se denota por letras mayúsculas, la recta por dos puntos que lo contengan.	“x” variable independiente; “y” variable dependiente, “m” pendiente de la recta, “b” constante de la recta, eje X es el eje horizontal, eje Y es el eje vertical. El origen es (0,0). Rectas paralelas con el símbolo \parallel y perpendiculares \perp ,
Resultados	Si dos rectas se intersecan en un punto se les llama concurrentes. Si dos rectas no se intersecan entonces se les llama rectas paralelas. Si dos rectas son perpendiculares a una tercera recta dada, entonces ambas rectas son paralelas. Si dos rectas se intersecan, su punto de intersección es un único punto.	La proporcionalidad se modela por medio de una función lineal. Si la pendiente se indefine obtenemos la ecuación de una recta vertical. Si la pendiente es cero obtenemos la ecuación de una recta horizontal, si la pendiente es positiva decimos que es creciente, si es negativa es decreciente y si es cero es paralela al eje de las ordenadas-

		Si dos rectas tienen la misma pendiente son paralelas, si el producto de las pendientes de dos rectas es -1 entonces son perpendiculares.
Conceptos	La línea recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, Rectas oblicuas, Rectas concurrentes, puntos.	Recta, función de proporcionalidad, ecuación de la recta, la pendiente como tangente, la línea recta, rectas paralelas, rectas perpendiculares, recta creciente, recta decreciente, rectas oblicuas, rectas concurrentes. Distancias entre dos puntos.
Estructuras	Sistema axiomático de geometría sintética, la recta como elemento de un plano. Teoría de conjuntos.	Sistema bidimensional de referencia: el plano cartesiano, \mathbb{R}^2 , estructura del campo de los polinomios con coeficientes reales.

Mediante una revisión bibliográfica realizada del tema de la recta, se encontraron cinco agrupaciones de conceptos específicos, procedimientos y relaciones, que expresan y organizan el desarrollo del contenido sobre la recta a los cuales llamaremos focos de contenido.

- 1) **La ecuación de la recta.** Se agrupan las distintas transformaciones que sufre la representación algebraica de la recta; en sí mismo, este foco relaciona el contenido matemático de la definición de la recta como curva en el plano cartesiano que satisface una ecuación lineal en dos variables.
- 2) **La pendiente de la recta.** Se encuentra las definiciones de pendiente, lo cual se trabaja para caracterizar la recta y a partir de este se determinan varias clasificaciones, como la monotonía de la recta (creciente, decreciente o constante) y la relación entre dos o más rectas (paralelas y perpendiculares).
- 3) **La posición relativa de dos rectas.** En este foco de contenido se presenta la clasificación de dos o más rectas en: paralelas, concurrentes o perpendiculares. Así mismo se relacionan otros conceptos como punto de intersección y sistemas de ecuaciones.
- 4) **Los puntos en el plano cartesiano.** Este foco involucra contenidos de puntos colineales pues una recta está formada por infinitos puntos y para representarla en el plano cartesiano es necesario ubicar al menos dos puntos.
- 5) **El trazo de la recta.** Este foco relaciona contenidos acerca de la geometría en el plano, relacionando ciertas propiedades geométricas para trazar una recta en el plano cartesiano.

La distribución de los conceptos de la recta se presenta un mapa conceptual que los mismos están distribuidos por focos; se pretende la visualización entre las relaciones que existe entre cada concepto matemático que se ve involucrado en el estudio de la recta.

Calcular distancias entre dos o más cuerpos.	Los puntos en el plano cartesiano. $\left[\begin{array}{l} d(P, Q): P(a, b) \in \mathbb{R}^2 \wedge \\ Q(c, d) \in \mathbb{R}^2 \end{array} \right]$	Concepto de distancia entre dos puntos ubicados en el plano cartesiano.
--	--	---

El análisis cognitivo

El análisis cognitivo es la segunda etapa del análisis didáctico. Ésta, a diferencia del análisis de contenido, centra la atención en el aprendizaje del estudiante. “El profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los escolares pueden progresar en la construcción de conocimiento sobre la estructura matemática cuando se enfrenta a las tareas que compondrán las actividades de enseñanza y aprendizaje” (Gómez, 2007, p. 29). Además Gonzales y Gómez (2013) afirman que “centrándonos en el nivel de planificación del profesor, el análisis cognitivo sirve para concretar, sobre un tema de matemáticas, las visiones del profesor sobre las matemáticas y el aprendizaje.” (p. 1).

El análisis cognitivo es un análisis que se desarrolla a priori; es decir, se busca predecir, y anticipar las acciones de los estudiantes en el momento en que las diferentes tareas sean puestas en el aula. Que a su vez está compuesto por tres organizadores del currículo: **expectativas de aprendizaje, errores y dificultades asociadas al contenido matemático y las trayectorias hipotéticas del aprendizaje.**

A continuación mencionaremos los objetivos, como uno de los niveles de las expectativas de aprendizaje, los cuales no son exhaustivos, más bien consideran los aspectos centrales de los contenidos a tratar.

- O1. Identificar la recta como el lugar geométrico en el plano que satisface una ecuación de primer grado con dos variables.
- O2. Determinar la ecuación de la recta utilizando datos relacionados con ella.
- O3. Aplicar la ecuación de la recta para el planteamiento y resolución de problemas que involucre diversos tipos de situaciones.
- O4. Relacionar la pendiente de la forma $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ donde (x_1, y_1) y (x_2, y_2) pertenecen a la recta, con la tangente del ángulo de inclinación de la recta con el eje x .
- O5. Aplicar la pendiente de la recta para el planteamiento y resolución de problemas que involucre diversos tipos de situaciones.
- O6. Establecer y clasificar la posición relativa de dos rectas en paralelas y concurrentes.
- O7. Aplicar la relación existente entre dos o más rectas en el plano en la resolución de problemas que involucre diversos tipos de situaciones.
- O8. Aplicar propiedades que se pueden establecer entre puntos en el plano cartesiano.
- O9. Ubicar el lugar geométrico de una recta en el plano cartesiano.

Para especificar las expectativas de aprendizaje que se esperan desarrollar en los estudiantes se define una serie de capacidades con las cuales se esperan que se logre el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Debido a que se presentan los resultados de una investigación en proceso, a continuación se muestran las capacidades asociadas al objetivo O1, así como una tarea propuesta para el desarrollo de esas capacidades y un camino de aprendizaje de dicha tarea.

Capacidades

- C1-Identificar el grado y la cantidad de variables en una ecuación.
- C2-Representar en lenguaje matemático los datos involucrados en el enunciado de un problema.
- C3-Deducir de un enunciado la información que se conoce y la que se debe hallar.
- C4-Interpretar el resultado obtenido según el sistema de representación utilizado.
- C5-Establecer una estrategia que permita la resolución del problema planteado.
- C6-Asociar parejas de datos relacionados en el problema con pares ordenados.
- C7-Representar gráficamente un par ordenado en el plano cartesiano.
- C8-Realizar una representación tabular a partir de un conjunto de datos.
- C9-Reconocer puntos alineados en el plano.
- C10-Trazar el lugar geométrico de un conjunto de puntos alineados en el plano.
- C11-Identificar que el lugar geométrico de un conjunto de puntos alineados en el plano representa una recta.
- C12-Identificar que una ecuación de primer grado en dos variables representa una recta.
- C13-Calcular el valor de una de las variables involucradas en una ecuación, de dos variables, a partir de la otra.
- C14- Elige un sistema de representación adecuado para la resolución de un problema.
- C15- Realizar una representación mediante un diagrama de Venn de un conjunto de datos.
- C16- Ubicar puntos en el plano cartesiano.

Tarea 1

José llama a su hermano Miguel, que se encuentra en Estados Unidos, para felicitarlo por su cumpleaños. Dentro de los temas que conversan, Miguel le dice a José que la condición climática ha estado muy difícil por allá, que en los últimos días la temperatura promedio ha estado en -4 grados Fahrenheit, mientras que José le dice que en Costa Rica se ha registrado temperaturas alrededor de 28 grados Celsius.

Al terminar la llamada, José decide investigar acerca de la relación entre los grados Celsius y los grados Fahrenheit; encuentra que la relación entre la indicación de temperatura en la escala Fahrenheit F y la correspondiente lectura en la escala Celsius C , está dada por la ecuación:

$$C = \frac{5}{9}(F - 32)$$

E48. Utiliza inadecuadamente los instrumentos de dibujo.

E50. Utilizan escalas inadecuadas para trazar una representación gráfica a partir de su representación tabular.

Un camino de aprendizaje para una tarea permite organizar esa tarea a partir de una posible dirección que puede seguir el estudiante, en relación con las capacidades y errores presentes en su aprendizaje. Cada camino de aprendizaje diseñado para un conjunto de capacidades que permiten el alcance de cada objetivo será un insumo para el análisis de instrucción, en el cual se diseñará la propuesta de intervención en el aula para la enseñanza y el aprendizaje de la recta desde un enfoque funcional del conocimiento matemático.

Conclusiones finales

Dentro de las conclusiones, se puede mencionar el logro de realizar el primer acercamiento al análisis de contenido y el análisis cognitivo de la recta, que serán insumos para uno de los objetivos a alcanzar en nuestra investigación, que consiste en diseñar una unidad didáctica como medio de intervención en el aula que guíe la labor docente en su proceso de enseñanza de los contenidos relacionados con la recta en el plano cartesiano y que esa intervención responda a las demandas de las políticas curriculares actuales.

Además, dentro de los resultados e impactos que se desprenden de la investigación está el diseño de tareas desde un enfoque funcional del conocimiento matemático, así como la organización de esas tareas y de los contenidos que involucran en cuanto a contextos y subestructuras; es decir, se propone un acercamiento a la relación que se puede hacer entre los contenidos meramente matemáticos y su aplicación en distintos contextos.

Como punto de referencia, es establecer la diferencia entre el estudio de la función lineal y la recta; su estudio y estructura es diferente por lo tanto se refieren a elementos matemáticos distintos; se deja abierto como un posible alternativa, el estudio de la función lineal tomando la recta como punto de partida.

Referencias

- Gascón, J. (2001b): Evolución de la controversia entre geometría sintética y geometría analítica. Un punto de vista didáctico-matemático. Seminario de Matemáticas Fundamentales (28). Universidad Nacional de Educación a Distancia.
- Gómez, P. (2007). Análisis didáctico. Una conceptualización de la enseñanza de las matemáticas (capítulo 2). En P. Gómez (Ed.), *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (pp. 31-116). Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada.
- Gómez, P. (2009). Procesos de Aprendizaje en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas de Secundaria. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 7(1), 471-498.
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP), (2013). Programa de Estudio en Matemática, [en línea]. San José: MEP. Disponible en: http://www.mep.go.cr/downloads/RecursosTecnologicos/Programa_matematicas.pdf [Consulta: 2013, 9 de marzo]

- Molina, M., Castro, E., Molina, J.L., y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(1), 75-88.
- OCDE (2004). *Marcos teóricos de PISA 2003. Conocimientos y destrezas en Matemáticas, Lectura, Ciencias y Solución de Problemas*. Madrid: Ministerio de Educación.
- Rico, L. y Lupiáñez, J. L. (2008). *Competencias matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. y Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Suma*, 58, 7-23.
- Socas, M. (2000). Dificultades obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la Educación Secundaria. En Rico, L Et all. *La educación matemática en la enseñanza secundaria 12* (2° ed.)(pp.125-148) Barcelona: Editorial Horsori.