I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas

María Elina Díaz Lozano
Universidad Nacional del Litoral
Argentina
mdiazlo@gmail.com
Egle Elisabet Haye
Universidad Nacional del Litoral
Argentina
elihaye@gmail.com
Fabiana Montenegro
Universidad Nacional del Litoral
Argentina
montenegrofabiana@yahoo.com.ar
Luis Córdoba
Universidad Nacional del Litora
Argentina
lmcordoba@hotmail.com

Resumen

Este trabajo forma parte de una investigación en curso, destinada a estudiar la incidencia de las representaciones visuales de los conceptos en el aprendizaje de matemática universitaria. Se reportan aquí los resultados de un estudio descriptivo y exploratorio sobre las dificultades en la articulación de registros gráficos y algebraicos que se observaron en 109 estudiantes de reciente ingreso a carreras de ingeniería. Se describen las actividades de conversión propuestas y se presenta el análisis de los resultados obtenidos, que se realiza sobre cada una de las variables de los dos sistemas de representación intervinientes. Los datos revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes no logró establecer una articulación exenta de errores de sus representaciones.

Palabras clave: matemática, funciones lineales y cuadráticas, registros de representación, variables gráficas y algebraicas, alumnos universitarios

Introducción

El estudio que aquí se presenta es parte de una propuesta más amplia, tendiente a buscar alternativas de solución a problemas detectados en la enseñanza de matemática en el primer año de las carreras de ingeniería de la Facultad de Ingeniería y Ciencias Hídricas de la Universidad Nacional del Litoral (Argentina).

Aunque las causas que originan tal situación obedecen, sin dudas, a aspectos sociales y económicos diversos, es una cuestión de larga data la preocupación sobre la relación entre las dificultades de adaptación de los alumnos a los estudios de matemática en el nivel superior y sus condiciones previas, referidas a las competencias cognitivas en matemática con las que inician su vida universitaria.

Una de las observaciones más frecuentes que realizamos los docentes de matemática al analizar las evaluaciones parciales o finales de las asignaturas es la incidencia que tienen en los resultados negativos, los errores provenientes de etapas anteriores y atribuibles a deficiencias de aprendizaje no relacionadas directamente con los temas propios de la materia.

Las encuestas y pruebas diagnósticas realizadas todos los años a los ingresantes, indican que los mismos comparten un marcado déficit en su formación matemática.

Referido a ello, uno de los aspectos a ser considerado es la posible ausencia de articulación entre distintos registros de representación de los conceptos.

Para determinar condiciones previas en ese sentido, se realizó una prueba, pensando en que los problemas de coordinación entre las diversas representaciones de los objetos matemáticos podían verse reflejados en los resultados de la misma.

Mediante la administración de cuestionarios destinados a alumnos que iniciaban su carrera universitaria en nuestra Facultad, que incluían cuestiones relacionadas con conjuntos del plano y de la recta real, se pudieron registrar muchas de las dificultades relacionadas con la problemática planteada. En este artículo se analizan los ítems referidos a rectas y parábolas.

En el punto 2 a continuación, se presentan los lineamientos teóricos sobre los que se apoyó el trabajo. En el punto 3 se describen y fundamentan las actividades propuestas a los estudiantes, cuyas respuestas se analizan en el punto 4.

Finalmente se exponen algunas reflexiones y primeras conclusiones.

Lineamientos teóricos

Este trabajo se encuadra en la Teoría sobre registros de representación semiótica de Duval (1998), a los cuales el autor define por medio de las tres actividades cognitivas que se pueden realizar en ellos. (pp. 177-178)

1) La *formación* de una representación identificable como una representación de un registro dado.

2) El *tratamiento* de una representación es la transformación de esta representación en el registro mismo donde ha sido formada. El tratamiento es una transformación interna a un registro.

3) La *conversión* de una representación es la transformación de esta representación en una representación de otro registro conservando la totalidad o solamente una parte del contenido de la representación inicial.

Desde un punto de vista ontológico, la particularidad de los objetos matemáticos, carentes de una existencia física o material, da lugar a que sólo sea posible su conceptualización y alguna actividad sobre ellos a través de sus representaciones semióticas y las actividades de conversión entre ellas (Duval, 1998).

"Sobre la construcción de los conceptos matemáticos Duval establece que, dado que cada representación es parcial con respecto al concepto que representa, debemos considerar como absolutamente necesaria la interacción entre diferentes representaciones del objeto matemático para su formación". (Hitt, 2003, p. 214)

En ese marco, el nivel de conceptualización de un objeto se analiza en base a las posibilidades de articulación de las diferentes representaciones del mismo, por lo que las dificultades para convertir una representación en otra pueden interpretarse como resultado de una conceptualización deficiente, ya que, como lo afirman Blázquez y Ortega (2001) "la diversificación de representaciones de un mismo objeto o concepto aumenta la capacidad cognitiva de los sujetos sobre ese objeto o concepto" (p. 221).

En los últimos años, muchas investigaciones en educación matemática pusieron el acento en la valoración de estrategias para el aprendizaje basadas en la coordinación y tránsito entre los diferentes contextos en los cuales los conceptos son presentados (Cantoral y Farfán, 1998; Blázquez, S. y Ortega, 2001; Hitt, 2003). Las nociones de registros de representación, tratamiento y conversión de representaciones y la tesis que sostiene que las diferentes representaciones de los conceptos son fundamentales para su comprensión (Duval, 1998 y 1999), han sido objeto de estudio por numerosos investigadores que sostienen, como puede apreciarse en Lupiañez y Moreno (2001), para el caso particular de la matemática, que no existe actividad cognitiva al margen de la actividad representacional.

En distintos trabajos (véase, por ejemplo, Castro y Castro, 1997), se señala el tema de la pluralidad de sistemas de representación para un mismo concepto, enumerando los diversos sistemas de representación mediante los cuales los objetos matemáticos pueden expresarse. Así, se mencionan representaciones verbales, numéricas, algebraicas, tabulares, gráficas, geométricas y, últimamente, representaciones ejecutables, en referencia a las posibilidades de procesar y manipular las representaciones de los objetos matemáticos sobre la pantalla de la computadora.

De entre las distintas posibilidades de representación de los conceptos referidos a funciones lineales y cuadráticas, es tradicional que las algebraicas y las gráficas sean de las más usadas en las clases de matemática.

Como se dijo anteriormente, cada tipo de representación evidencia ciertas propiedades de los objetos que representa, al mismo tiempo que deja de lado otras. Ello ocasiona que las características de cada sistema de representación guarden relación con las posibilidades que ofrecen para las actividades cognitivas en matemática en general, lo que involucra, en particular, a los temas abordados en este trabajo.

En lo que se refiere al sistema algebraico, el mismo muestra un aspecto formal, que ofrece un alto grado de precisión en los procedimientos. Sin embargo, puede pensarse que el nivel de abstracción que lo caracteriza puede ser un inconveniente en la comprensión de los conceptos.

Por su parte, el sistema gráfico, aún cuando limitado ya que sólo permite visualizar una parte de lo expresado en el algebraico, posibilita la formación de representaciones con una apariencia menos formal, más atractiva y posiblemente más amigable para los alumnos.

En relación con ello, la representación visual de las nociones ha sido muchas veces jerarquizada como herramienta para la construcción de significados en el proceso de aprendizaje y recibió tratamiento desde diversos enfoques.

Al respecto, se analizaron, entre otros aspectos, su relación con las representaciones internas y modelos mentales (Johnson Laird, 1996; Nersessian, 2007), las limitaciones y beneficios de la enseñanza por medio de lo visual y sus posibilidades en la enseñanza de Matemática (Castro y Castro, 1997; Davis, 1993; Dreyfus, 1994; Duval, 1999), propuestas y experiencias en la aplicación de estrategias didácticas con el uso de recursos visuales, tales como, por ejemplo, las que se detallan en Hitt, 2001; Buteler y Gangoso, 2001; Díaz Lozano, Haye y Macías, 2012; Otero, Greca y Silveira, 2003.

Pese a ello, varias investigaciones en Educación Matemática señalan que en general el sistema algebraico es el privilegiado por los profesores de matemática en su práctica docente: "…en la enseñanza tradicional se ha abusado del registro algebraico…" (Blázquez y Ortega, 2001, p. 231).

Tal vez debido a eso, como se expresa en el trabajo de González-Martín y Camacho (2005), "…se observa la preponderancia del pensamiento algebraico en los alumnos. Aunque el registro algebraico ocasiona grandes dificultades a veces, es el que están acostumbrados a trabajar" (p. 91). Una conclusión similar es manifestada por Guzmán Retamal (1998), en un estudio referido a funciones en general realizado sobre alumnos de primer año con conocimientos elementales de Cálculo.

En el caso de las funciones lineales y cuadráticas, lo anterior se manifiesta usualmente en el aula por medio de la preeminencia de actividades de tratamiento en el contexto algebraico, mientras que las representaciones gráficas se presentan como complemento de las anteriores. Sin embargo, la teoría de Duval postula que para propiciar la construcción de los conceptos no resulta suficiente el trabajo dentro de un solo sistema de representación, sino que es necesario inducir a los estudiantes a realizar las actividades de conversión de una representación a otra, en ambos sentidos.

Tal como lo manifiestan Castro y Castro (1997) "Consideramos que la comprensión alcanzada mediante procesamiento de información visual y la que se consigue por procedimientos analíticos se complementan, por lo que el aprendizaje debe lograrse integrando ambos tipos de códigos" (p. 100)

Teniendo en cuenta los lineamientos expresados precedentemente, resultó de interés averiguar si los alumnos que ingresan a los estudios universitarios en nuestra facultad, pueden, al momento de iniciar dichos estudios, realizar sin problemas tareas de conversión de representaciones entre registros gráficos y analíticos. Y en caso de no ser así, conocer las dificultades que se manifiesten. Con ese objetivo general, se llevó a cabo la experiencia que se describe en el punto siguiente.

Metodología

El estudio respondió a un enfoque descriptivo y exploratorio. Con el fin de obtener elementos de juicio sobre los posibles logros y dificultades de los estudiantes en la articulación de los sistemas algebraico y gráfico, se elaboró una prueba que se administró a 109 alumnos, de entre 17 y 20 años, de reciente ingreso en las distintas carreras de ingeniería, en la primera clase de matemática de sus carreras.

El instrumento a utilizar fue sometido a diversas instancias de evaluación, tanto por integrantes del equipo de investigación como por especialistas a cargo de investigaciones relacionadas. El resultado de las reestructuraciones y reformulaciones de diseño fue la versión final del cuestionario aplicado a los alumnos.

El cuestionario

Las tareas cuya ejecución se solicitó a los estudiantes se referían a temas de nivel secundario, que los alumnos, además, habían revisado en el curso introductorio que la universidad organiza previo al comienzo del año académico. Se elaboraron 12 ejercicios alrededor de conceptos relacionados con conjuntos del plano y de la recta: intervalos, rectas, parábolas, figuras y regiones. La prueba se centró en la conversión entre distintos sistemas de representación, si bien algunas actividades apuntaban también a la tarea de transformación en el interior de un registro determinado.

En este reporte se describen cuatro de las actividades propuestas: las relativas a la articulación de representaciones de conceptos relacionados con las funciones lineal y cuadrática. Para su resolución, los alumnos debían realizar procesos de conversión en los que debían poner en juego el cambio, en ambos sentidos, entre dos representaciones de dichos conceptos: gráfica y algebraica.

Las actividades propuestas

Las actividades se estructuraron en el seno de un plano determinado por dos ejes, que se denominaron *eje conceptual* y *eje contextual*, los cuales establecían las perspectivas desde las que se desarrolló el estudio.

Según el primero, se trabajó sobre las nociones de función lineal (L) y función cuadrática (C). Siguiendo el segundo, las acciones estuvieron dirigidas a inscribir las cuestiones en los dos contextos sobre los cuales se llevó a cabo el estudio: el algebraico (A) y el gráfico (G). Con base en los cruzamientos de ambos ejes, las actividades se denominaron según lo indica la Tabla 1.

Tabla 1

Denominación de las actividades.

<table>
<tr><td colspan="2"></td><td colspan="2">Eje Contextual: orientación</td></tr>
<tr><td colspan="2"></td><td>algebraico a gráfico</td><td>gráfico a algebraico</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Eje conceptual</td><td>función lineal</td><td>A→G (L)</td><td>G→A (L)</td></tr>
<tr><td>función cuadrática</td><td>A→G(C)</td><td>G→A (C)</td></tr>
</table>

Actividades de conversión del registro algebraico al gráfico (A→G). En la figura que sigue se muestra la propuesta realizada a los alumnos.

Ejercicio A→G (L) Realiza una gráfica que represente a una función de ecuación $y = ax + b$, en donde $a > 0$ y $b < 0$, sin dar valores numéricos a *a y b*. **Ejercicio A→G (C)** Realiza una gráfica que represente a una función de ecuación $y = ax^2 + bx + c$, en donde $a > 0; c < 0 \ y \ b \neq 0$, sin dar valores numéricos a *a, b* y *c*.

Figura 1. Ejercicios de conversión del registro algebraico al registro gráfico

En estos dos primeros ejercicios, se buscó saber si el alumno puede interpretar geométricamente los signos de los parámetros que intervienen en ecuaciones lineales y cuadráticas. A tal fin, las ecuaciones propuestas se presentaron en forma totalmente literal: $y = ax + b$; $y = ax^2 + bx + c$, agregándose, en cada caso, las condiciones sobre el signo de los coeficientes que los estudiantes debían considerar.

Previendo que una posible manera de encarar el ejercicio por parte de los alumnos fuera reemplazar los parámetros literales por números concretos, se les indicó expresamente que no asignaran valores numéricos a los literales *a, b* y *c.* Con ello se buscó conocer si los alumnos podían establecer una relación directa entre las variables intervinientes en los registros gráfico y algebraico, evitándose la mediación del registro tabular. Al respecto, refiriéndose a la regla que asocia puntos y pares de números, Duval (2006) afirma que: "…usar esta regla para trazar cualquier representación gráfica no puede llevar a notar las características visuales que corresponden a las características de la ecuación algebraica convertida, porque estas características visuales son cualitativas y globales y no numéricas y locales." (Duval, 2006, p. 150).

Dado que en la escuela secundaria la función $y = ax + b$ es trabajada en varios aspectos, se esperaba que los alumnos no tuvieran mayores dificultades en vincular la ecuación con la gráfica de una línea recta e identificar sus elementos *a* y *b* como pendiente y ordenada al origen respectivamente. Sin embargo, era de interés conocer hasta qué punto los estudiantes evidenciarían interpretar gráficamente, de acuerdo con los signos estipulados, cuál puede ser la inclinación de la recta y en dónde puede encontrarse la intersección con el eje *y*.

Análogamente, para la función $y = ax^2 + bx + c$ se deseaba indagar, en principio, si los alumnos identificaban la ecuación con la gráfica de una parábola, y por otro lado, si podían establecer correctamente las relaciones de los signos del coeficiente cuadrático y del término independiente con la concavidad y la ordenada al origen, respectivamente, de la parábola, como así también interpretar gráficamente la condición $b \neq 0$. Se previó que las tareas de conversión al sistema gráfico tendrían mejores resultados para los coeficientes *a* y *c* que en el caso del parámetro *b*, teniendo en cuenta la frecuente focalización de la enseñanza previa en parábolas con eje de simetría en el eje *y*.

Actividades de conversión del registro gráfico al algebraico (G → A).

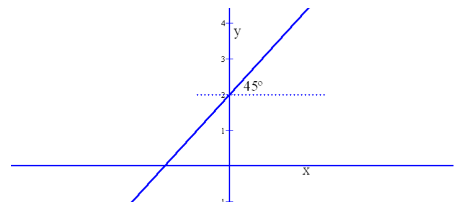
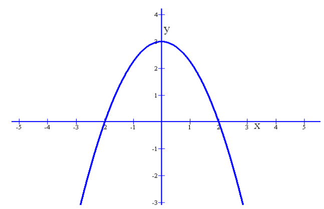
Ejercicio G→A (L). Escribe la ecuación explícita de la función cuya representación gráfica es la siguiente:	
Ejercicio G→A (C). Escribe la ecuación de la función cuadrática cuya representación gráfica es la siguiente:	

Figura 2. Ejercicios de conversión del registro gráfico al registro algebraico.

En estos ejercicios, se presentaron las gráficas de una recta y una parábola que contenían los datos suficientes para que las correspondientes expresiones algebraicas pudieran ser determinadas.

En el caso de la recta, se proporcionaron como datos el punto de intersección de la misma con el eje vertical y el ángulo que la recta determina con el semieje positivo de las x.

Es posible que la relación de la pendiente de una recta con la tangente trigonométrica del ángulo mencionado sea uno de los aspectos más dificultosos al intentar determinar la expresión algebraica de la función. Por ello, en este ejercicio, se pretendió averiguar si los estudiantes relacionaban el valor de la pendiente con la posición relativa de la recta con respecto al eje horizontal. Respecto de la obtención del parámetro *b*, se esperaba que las dificultades fueran menores, dado que la asociación de *ordenada del punto de intersección con el eje vertical – ordenada al origen* es un aspecto más trabajado (o trabajado con mejores resultados) en la escuela secundaria.

En el caso de la parábola también se apeló a pares ordenados de la gráfica que usualmente los alumnos no logran relacionar con los parámetros de la ecuación. El objetivo era ver si el alumno, a partir de un gráfico en el que se indican los valores de las intersecciones con los ejes, podía interpretar y extraer los datos que le servirían para determinar los parámetros en la construcción de la ecuación algebraica correspondiente. En ese ejercicio, se previó que la mayor dificultad estribaría en el reconocimiento del coeficiente del término cuadrático, dado que para ello los alumnos deberían realizar un procedimiento que haga uso de la conversión *punto de la gráfica – par ordenado que verifica la ecuación*. Pese al carácter congruente de esa conversión, se pensó como posible que los alumnos no tuvieran claro el sentido y posibilidades de dicha congruencia.

Análisis de las respuestas

Los resultados se presentan en tablas, diseñadas para exponer las respuestas de los estudiantes. A continuación de cada tabla, el análisis respectivo.

La primera columna de cada tabla refiere al registro de representación de partida, es decir, el registro en el que fue enunciado el ejercicio. En ella se distinguieron las variables correspondientes a la pregunta formulada en cada caso. La segunda columna corresponde al registro de llegada; en ella están especificadas las respuestas expertas para cada una de las conversiones solicitadas. En la última columna se muestran las cantidades de respuestas correctas obtenidas de los estudiantes para cada uno de los aspectos parciales que fueron analizados, aunque las respuestas no fueran necesariamente correctas en su totalidad.

Resultados de actividades de conversión del registro algebraico al gráfico (A → G)

Tabla 2

Respuestas al ejercicio A → G (L)

Registro de partida (algebraico)		Registro de llegada (gráfico)		N° de aciertos
Representación: $y = ax + b$		Representación: una recta		68
Valores de las variables algebraicas	$a > 0$	ángulo agudo con el eje x	Valores de las variables visuales	35
	$b < 0$	intersección con la rama negativa del eje y		38

Resulta significativo que casi el 40% de los estudiantes no reconoció a $y = ax + b$ como la expresión algebraica de una recta.

En términos absolutos, sobre el total de los 109 alumnos interrogados, sólo 35 relacionaron la condición $a > 0$ con un ángulo agudo con el eje x.

En lo que se refiere a la relación de la condición $b < 0$ con la intersección de la recta con el semieje negativo de y, casi las dos terceras partes del total de alumnos dio una respuesta equivocada o no respondió. Se observaron así dificultades que se presuponía no se harían tan presentes en la noción de ordenada al origen.

Tabla 3

Respuestas al ejercicio A → G (C)

Registro de partida (algebraico)		Registro de llegada (gráfico)		N° de aciertos
Representación: $y = ax^2 + bx + c$		Representación: una parábola		76
Valores de las variables algebraicas	$a > 0$	Concavidad hacia arriba	Valores de las variable s visuales	47
	$b \neq 0$	eje de la parábola distinto del eje y		22
	$c < 0$	intersección con la rama negativa del eje y		46

Se observa que aproximadamente el 70% de los alumnos asoció la gráfica de una parábola con la ecuación $y = ax^2 + bx + c$, aunque las características de la gráfica dibujada no estuvieron, en la mayoría de los casos, de acuerdo con el signo de los coeficientes de la expresión algebraica de la función. En relación con ello, el 43% de los alumnos pareció conocer que el signo del coeficiente cuadrático indica el sentido de la concavidad de la curva.

Los mayores desaciertos se produjeron en relación a la condición $b \neq 0$ pues la mayoría graficó parábolas con eje de simetría en el eje y. Si bien es de suponer que los alumnos habían aprendido a calcular las coordenadas del vértice dada la ecuación de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, no vincularon este conocimiento con la ubicación del vértice y con las condiciones $b = 0$ o $b \neq 0$

Del cotejo de las tablas 2 y 3, puede pensarse que el concepto de ordenada al origen de una función está más arraigado en lo alumnos en relación a funciones cuadráticas que a funciones lineales.

Resultados de actividades de conversión del registro gráfico al algebraico (G → A)

Tabla 4

Respuestas al ejercicio G → A (L)

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>N° de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una recta</td><td colspan="2">Representación: $y = ax + b$</td><td>50</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Valores de las variables visuales</td><td>intersección con el eje y en $(0,2)$</td><td>$b = 2$</td><td rowspan="2">Valores de las variables algebraicas</td><td>18</td></tr>
<tr><td>Ángulo con el eje x: 45°</td><td>$a = 1$</td><td>9</td></tr>
</table>

Todos los alumnos que lograron expresar la representación algebraica de una recta (45,9% del total), lo hicieron usando la forma explícita solicitada $y = ax + b$.

Sólo el 8,3% del total de alumnos relacionó el ángulo señalado en la gráfica dada con el parámetro correspondiente a la pendiente de la recta. En términos relativos al total de aquéllos que sí escribieron la ecuación en la forma $y = ax + b$, únicamente la quinta parte logró obtener el valor del coeficiente a. Podría conjeturarse que esto se debe a que en la enseñanza usual, el énfasis puede estar puesto en saber cómo calcular el valor de la pendiente, relegando la interpretación de los distintos significados que aquélla posee.

También se detectaron dificultades, aunque en menor medida, en la actividad de conversión en lo que refiere a la relación entre el punto en el que la recta interseca al eje y con el valor de b en la ecuación, ya que el 64% de los alumnos que propuso la ecuación en la forma solicitada no pudo estimarlo correctamente.

Ejercicio G→A (C). En este caso, los alumnos recurrieron a dos formas de la ecuación: general ($y = ax^2 + bx + c$) y factorizada ($y = a\ (x - r_1).(x - r_2)$), por lo que se vuelcan los resultados obtenidos en dos tablas, distinguiendo el pasaje del registro gráfico al algebraico en dos casos según el tipo de representación: Caso I (ecuación general) y Caso II (ecuación factorizada). En cada caso se contabilizó el número de quienes pudieron establecer la relación entre el dato otorgado por la gráfica (valor de la variable visual) y el parámetro (valor de la variable algebraica) correspondiente en la ecuación escogida.

Tabla 5

Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso I

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>N° de aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una parábola</td><td colspan="2">Representación: $y = ax^2 + bx + c$</td><td>56</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Valores de las variables visuales</td><td>intersección con el eje y en $(0,3)$</td><td>$c = 3$</td><td rowspan="4">Valores de las variables algebraicas</td><td>48</td></tr>
<tr><td>eje de simetría el eje y</td><td>$b = 0$</td><td>33</td></tr>
<tr><td>puntos sobre la gráfica: $(-2,0)$ y $(2,0)$</td><td>pares (x, y) que verifican la ecuación</td><td>3</td></tr>
<tr><td>concavidad hacia abajo</td><td>$a < 0$</td><td>40</td></tr>
</table>

El 51.4% de los alumnos vinculó la representación de la curva en forma de parábola con la representación algebraica $y = ax^2 + bx + c$

Para obtener el valor de c, se esperaba que el alumno observe del gráfico el valor de la intersección con el eje y asignándole dicho valor. Para obtener el valor de b, se pretendió que observe que, dado que las raíces de la parábola son números opuestos, el eje de simetría es el eje y, en consecuencia, $b = 0$. Los aciertos de estas correspondencias fueron del 85.7 % en la obtención de c y del 58.9 % en la de b. La concavidad hacia abajo de la parábola indicando que el coeficiente a es negativo, resultó en que el 71.4 % hiciera esta correspondencia. Aquí se buscó que el alumno determine un valor para este coeficiente recurriendo a la búsqueda de un punto (x, y)que verifique la ecuación, siendo los más evidentes las intersecciones con el eje x o con el eje y. En las respuestas se observó que este parámetro fue el que más costó determinar y se evidencia ello en el escaso porcentaje de aciertos (5.4%). Es de hacer notar que estos porcentajes corresponden al total de alumnos que propusieron la forma $y = ax^2 + bx + c$ de la expresión algebraica de la parábola y no referido a la totalidad de los alumnos que realizó la prueba.

Tabla 6

Respuestas al ejercicio G → A (C) Caso II

<table>
<tr><th colspan="2">Registro de partida (gráfico)</th><th colspan="2">Registro de llegada (algebraico)</th><th>N° aciertos</th></tr>
<tr><td colspan="2">Representación: una parábola</td><td colspan="2">Representación: $y = a\,(x - r_1).(x - r_2)$</td><td>10</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Valores de las variables visuales</td><td>intersecciones con el eje x en $(-2,0)$ y $(2,0)$</td><td>$r_1 = -2$ y $r_2 = 2$</td><td rowspan="3">Valores de las variables algebraicas</td><td>10</td></tr>
<tr><td>Punto sobre la gráfica: $(0,3)$</td><td>pares (x, y) que verifican la ecuación</td><td>1</td></tr>
<tr><td>concavidad hacia abajo</td><td>$a < 0$</td><td>3</td></tr>
</table>

En este caso, sólo el 9.2 % de los alumnos representaron algebraicamente con la ecuación $y = a\ (x - r_1).(x - r_2)$ a la parábola dada en el gráfico. Todos esos alumnos acertaron en asignar a los parámetros r_1 y r_2 los valores de los puntos donde la parábola interseca al eje x.

La determinación del parámetro a presentó mayor dificultad. El 30 % interpretó que el signo de a es negativo ya que la concavidad de la parábola es hacia abajo pero sólo el 10 % pudo determinar un valor específico utilizando un punto (x, y)que verifique la ecuación; por ejemplo, se esperaba que se utilice el punto de intersección con el eje y, ya que conducía a cuentas más sencillas para hallar a.

Aquí, la mayoría de los alumnos que no escribieron correctamente el valor de *a*, mostraron la ecuación factorizada de la parábola con un valor de *a* arbitrario pero negativo y otros lo dejaron indicado con las expresiones literales *"-a"* o "*a* ".

Conclusiones y reflexiones

Los datos obtenidos en este estudio revelan que, en lo que se refiere a las funciones lineales y cuadráticas, una considerable proporción de los estudiantes encuestados no logró establecer una articulación espontánea y exenta de errores de sus representaciones, lo cual proporciona indicadores de la ausencia de una aprehensión conceptual de los objetos en estudio considerados.

En lo que se refiere a la función lineal, los errores en la coordinación de los registros se observan tanto en la noción de pendiente como en la de ordenada al origen. Si bien se había previsto la dificultad de los alumnos en conectar el parámetro a de la expresión $y = ax + b$ con la inclinación de la recta, resultó un tanto sorpresivo que los problemas de articulación se manifestaran también, en un porcentaje similar, con respecto al concepto de ordenada al origen.

Respecto de las dificultades en articular representaciones en el caso de la función cuadrática, también es claro que se manifiestan en todas las variables en juego. Una de las más notorias resultó la relación entre el coeficiente del término lineal con la posición del eje de la parábola. También fue claro que los alumnos no acertaron a establecer el coeficiente del término cuadrático mediante la información visual contenida en la gráfica.

Los problemas se revelan con mayor fuerza cuando el registro de partida es el gráfico. Aparecen manifiestos los inconvenientes que habitualmente también se observan en el trabajo de los alumnos en el aula y que es posible que les dificulten el realizar generalizaciones, formalizaciones y abstracciones.

En ese sentido, es notoria la diferencia que existe, tanto en el caso de la función lineal como de la cuadrática, entre el número de respuestas correctas en la conversión del registro algebraico al gráfico con la cantidad de aciertos cuando se trata de realizar la conversión en sentido contrario. Por ejemplo, llama la atención que el porcentaje de alumnos que en el registro algebraico reconocieron que el signo de la ordenada al origen de una función lineal refiere a que ésta interseca al semieje y positivo o negativo (aproximadamente el 34,8%), duplica con creces al que representa a los estudiantes que en el registro gráfico identificaron el valor 2 dado en el eje y con el valor del parámetro b en la ecuación de la función (aproximadamente el 16,5%).

Es posible que las diferencias observadas se deban al desigual abordaje que se realiza en la enseñanza entre las formas en que se expresan en ambos registros las funciones polinómicas de primer y segundo grado. A pesar de que existe abundante investigación y resultados en

Educación Matemática sobre el tema expuesto, que expresan la potencialidad de pensar e implementar acciones en torno a las bondades del cambio de registros como una competencia a desarrollar, pareciera que, en el marco contextual en el que se desarrolló este estudio, aún es insuficiente la presencia de esos procedimientos tanto en las actividades áulicas como en los materiales de enseñanza utilizados.

Los datos obtenidos y las observaciones y conclusiones que pueden derivarse de los mismos, permiten formular interrogantes acerca del grado de incidencia de los errores provenientes de conocimientos previos, en los resultados conseguidos por los alumnos en el primer año de su vida universitaria. En este sentido, se prevé continuar el estudio con el análisis de la persistencia de los distintos tipos de errores en la primera materia de matemática de la carrera, relacionando la información obtenida en este trabajo con los resultados de los estudiantes en evaluaciones que incluyan la propuesta de problemas en los que se inserten posibles fuentes de error proveniente de dificultades de articulación de representaciones.

Referencias y bibliografía

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* (4), 3, 219-236.

Buteler, L. y Gangoso, Z. (2001). Diferentes enunciados del mismo problema: problemas diferentes?. *Investigações em Ensino de Ciências*. (6)3, 269-283.

Cantoral, R. y Farfán, R. (1998). Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Épsilon,* 42,353-369.

Castro E. y Castro E. (1997). Representaciones y modelización. En Rico, L. (comp.) *La educación matemática en la enseñanza secundaria*, 95-124. Horsori, Barcelona, España.

Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics* 24, 333-334.

Díaz Lozano, M., Haye, E., y Macías, M. (2012). Estrategias didácticas en la elaboración de un módulo destinado a la enseñanza a distancia de Trigonometría. *Revista de Educación Matemática de la Unión Matemática Argentina*. (27),nro.1.

Dreyfus T. (1992) Imagery and Reasoning in Mathematics and Mathematics. *Education. ICME-7 Selected Lectures*, Les Presses de l'Université Laval, 107-123

Duval, R. (1998). Registros de representación semiótica y funcionamiento cognitivo del pensamiento. En Hitt, F. (Ed), *Investigaciones en Matemática Educativa II*. Grupo Editorial Iberoamérica, México. 173-201

Duval, R. (1999). Representation, vision and visualization: cognitive functions in mathematical thinking, basic issues for learning. *Actas del PME, 23*, 3-26.

Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: la habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la RSME*, (9),1, 143-168.

González-Martín, A. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. Algunas dificultades, obstáculos y errores. *Enseñanza de las Ciencias*, 23(1), 81-94.

Guzmán Retamal, I. (1998). Registros de representación, el aprendizaje de nociones relativas a funciones: voces de estudiantes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa.* (1), 1, 5-21. México, D.F.

Hitt, F. (2001). El papel de los esquemas, las conexiones y las representaciones internas y externas dentro de un Proyecto de Investigación en Educación Matemática*.* En P. Gómez y L. Rico (Eds.), *Iniciación a la Investigación en Didáctica de la Matemática*, Universidad de Granada. 165-178.

Hitt, F. (2003) Una Reflexión Sobre la Construcción de Conceptos Matemáticos en Ambientes con Tecnología. *Boletín de la Asociación Matemática Venezolana*, (X), 2, 213- 223.

Johnson-Laird, P. N. (1996). Images, Models and Propositional Representations. 90-127. En De Vega, M; Intons-Peterson, M. J.; Johnson-Laird, P. N.; Denis, M. y Marschark, M. *Models of Visuospatial Cognition*. Oxford. University Press. 230.

Lupiañez, J. y Moreno, L. (2001). Tecnología y Representaciones Semióticas en el Aprendizaje de las Matemáticas. En Gómez, P., y Rico, L. (Eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática .Homenaje al profesor Mauricio Castro*. Granada: Editorial Universidad de Granada. 291-300.

Nersessian, N. (2007) Razonamiento basado en modelos y cambio conceptual. *Rev. Eureka sobre Enseñanza y Divulgación de las Ciencias.* (4), 3, 563-570.

Otero, M. R., Greca, I. M. y Silveira, F. L. (2003). Imágenes visuales en el aula y rendimiento escolar en Física: un estudio comparativo. *Revista Electrónica de Enseñanza de las Ciencias*, (2), 1, 1-30.