I CEMACYC
I Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe
6 al 8 noviembre. 2013
i.cemacyc.org Santo Domingo, República Dominicana

Taller: Concepciones en torno al infinito actual: análisis mediado por el software Cabri - Geometre

Juan Carlos **Vega** Vega
Maestría en Educación, Universidad Militar Nueva Granada
Colombia
edumatematicas@hotmail.com

Resumen

El interés de este proyecto se centra en mostrar la relación entre un objeto matemático como lo es el infinito actual con el ámbito tecnológico en el campo educativo. Siendo el infinito actual un concepto matemático intuitivo, se piensa implementar de una serie de situaciones problema en forma de taller-capacitación a docentes de esta área del conocimiento para que por medio del software educativo Cabri Geometre, se modelen algunos de estos contextos y permitan un cambio de representación sobre la noción instintiva del infinito.

Palabras clave: Concepciones, Infinito Actual, Cabri Geometre, Situaciones Problema, Fractales

Presentación

El término infinito hace parte del lenguaje común en los seres humanos y juega un papel importante dentro de la matemática actual, pues aunque no tiene un fundamento empírico determinado, posee una estructura rigurosa que históricamente ha mostrado un desarrollo axiomático, evolución que se ha venido dando a la par con diferentes conceptos y nociones matemáticas desde la antigüedad hasta nuestros días.

Cuando se habla acerca de las concepciones intuitivas sobre el infinito, se escuchan frecuentemente percepciones relacionadas a situaciones en los que interviene este objeto matemático, incluyendo diversas representaciones que puede llegar a tener dicho término, lo que algunos autores llaman la intuición del infinito (Fischbein, Tirosh, & Hess. 1979) y también, aquellas definiciones que coinciden con la conceptualización matemática contemporánea del mismo.

En el contexto educativo, el concepto de infinito no aparece como una temática específica en el currículo de matemáticas, ni se establece un grado en el cual se deba aprender dicho término. En las aulas de clase, este objeto matemático es presentado intuitivamente, pues como lo explica Efraim Fischbein en su obra *Intuition in Science and Mathematics*, lo intuitivo es "una forma de conocimiento primitiva, opuesta a interpretaciones y concepciones científicas, afirma también que en la enseñanza, la intuición debe prevalecer a las prácticas formales, pero que las secuencias didácticas y metodológicas deben estar de acuerdo con el desarrollo formal de las matemáticas para no inducir a los estudiantes a concepciones erróneas.

Con lo mencionado anteriormente, se busca que por medio de la implementación del software Cabri Geometre y la generación de situaciones problemáticas se puedan determinar las concepciones que se tienen acerca del concepto de infinito actual en cuanto a su carácter intuitivo, tomando como base la visión que tienen de éste los profesores de matemáticas de todos los niveles de escolaridad, y analizar si es posible la re conceptualización del mismo por medio de la simulación y modelación dada por el software.

Marco teórico.

Para el desarrollo de este apartado se tendrán en cuenta tres aspectos relevantes para la respectiva contextualización de la propuesta:

Referente Matemático

En primer lugar se realizó un acercamiento histórico de la evolución conceptual del infinito basado en algunos personajes que dedicaron parte de su vida al estudio de este objeto matemático, ellos son: Aristóteles, Bernhard Bolzano y George Cantor.

Referente Didáctico

En segundo lugar se tomó como referencia a Bruno D´Amore, este autor ha realizado varias investigaciones en torno a las concepciones sobre el infinito actual en estudiantes de educación básica, media y superior utilizando contextos matemáticos como la biyección y equipotencia entre conjuntos, todos estos planteados con lápiz y papel. En estos estudios se manifiesta que al momento de presentar este objeto matemático se pueden llegar a contradicciones entre lo intuitivo y lo formal, ya que el medio físico no permite identificar la diferencia entre el infinito actual y el potencial por sus características. Por otra parte, se tomaron como referentes los obstáculos epistemológicos y didácticos del infinito actual planteados por D´Amore para determinar las posibles causas por las cuales los docentes de matemáticas, al momento de enfrentarlos a situaciones problema, identifican solamente la existencia de un infinito potencial, hipótesis que se tiene por el carácter intuitivo del infinito actual.

Referente Tecnológico

En este tercer momento se tuvieron en cuenta algunos de los aportes que el software Cabri Geometre ha tenido en la contribución de la enseñanza de las matemáticas por medio de su dinamismo, específicamente de Luis Moreno Armella y su implementación de dicho software en el ámbito educativo. En primer lugar se buscó una descripción del software así como también sus ventajas y desventajas en el aula de clase, seguidamente se desarrollaron algunas reflexiones en torno a la implementación de Cabri en el ámbito educativo específicamente en América Latina y finalmente se consultaron algunas de las actividades realizadas en este software desde el campo geométrico y variacional que sirvieron como base para la elaboración de las situaciones problema en relación con el infinito actual.

Infinito Actual

Algunos autores como De Lorenzo y Le Goff (De Lorenzo, 2001) consideran el infinito actual como un objeto matemático originado en un contexto geométrico puesto que es un infinito ilimitado y métrico, que permite la cuantificación y la resolución de problemas del mundo real y en el cual se involucran elementos de las matemáticas tales como: número infinito, punto infinito, construcciones infinitas en espacios finitos y series con infinitos elementos Esta concepción del infinito surge al ser considerado como una unidad, dicho en otras palabras, como “un objeto unitario” que es infinitamente grande o numeroso, un ejemplo de esto es el conjunto de los números naturales, racionales o simplemente subconjuntos propios de éstos, al tomar algunos de estos conjuntos aparece el infinito en acto cuando se puede establecer una correspondencia biunívoca entre el conjunto tomado y una parte propia de éste.

Metodología del taller.

A continuación se describirán cada una de las etapas que se desarrollarán en el taller:

Etapa Diagnóstica 1.

Para identificar cuáles son las concepciones que tienen los docentes de matemáticas en torno a este objeto matemático y que se esperan sean desde lo intuitivo, se implementará un instrumento de entrada en forma de cuestionario y que busca dar respuesta a algunas de las siguientes preguntas: ¿qué entiende por infinito actual? ¿Qué conjunto numérico tiene mayor cantidad de elementos? ¿Qué es un fractal? ¿Conoce el software Cabri Geometre? Esta etapa tiene una duración de 15 minutos.

Etapa Diagnóstica 2.

Con papel y tijeras se les mostrará a los docentes un primer acercamiento a la geometría fractal por medio de la construcción de dos fractales por medio de procesos reiterativos. Esta etapa tiene una duración de 15 minutos

Etapa De Aplicación.

Teniendo como base el contexto en el cual los docentes están inmersos, se les presentarán cuatro situaciones problema que deberán ser modeladas con el software Cabri Geometre, esto con el fin de determinar los cambios de representación que se hacen frente al concepto de infinito actual. Se necesitará una sala de cómputo con acceso al software.

Cada una de las situaciones problema involucra la construcción de un fractal en Cabri Geometre, por lo que se mostrará paso a paso la generación del fractal “copo de nieve” y contextualizar a los docentes del software antes de la aplicación de los instrumentos. Esta etapa tiene una duración de 90 minutos.

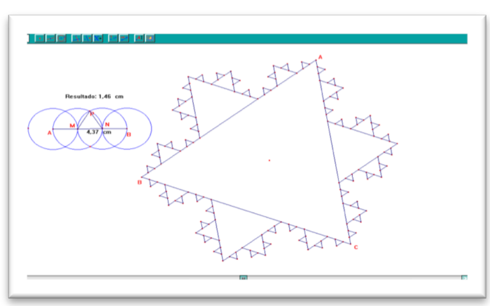

Figura 1. Representación del fractal “copo de nieve” en Cabri Geometre

Se muestra a continuación las situaciones problema con su respectivo objetivo y categoría de análisis:

SP1. Formatos de papel DIN y carnetización en la Universidad Militar

Los formatos de papel DIN fueron definidos en el año 1922 en la norma 476 del DIN -Deutsches Institut für Normung (Instituto Alemán de Normalización) y desarrollados por el ingeniero berlinés Dr. Walter Porstmann; ha sido la base de su equivalente internacional 216 de la ISO (Organización Internacional para la Estandarización). En la actualidad es más usual denominarlos sin prefijo alguno: "A4", "A3", etc.

Estos tamaños estandarizados están divididos en "series", cada una de las cuales está pensada para un uso concreto que determina sus proporciones. La forma de obtener el formato A1 se realiza doblando por la mitad el formato A0, así como el formato A2 se consigue doblando el formato A1 de la misma manera y sucesivamente hasta obtener un formato de menor área según el uso correspondiente1.(Figura 2)

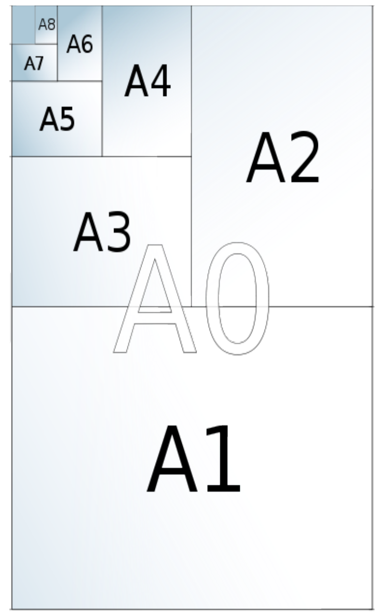

Figura 2. Formatos del papel DIN

Jaime Pedraza, encargado de la carnetización en la Universidad Militar Nueva Granada en la ciudad de Bogotá, recibe una resma de 500 hojas de tamaño A4 para la producción de los carnés de los estudiantes nuevos de primer semestre de 2013. Con las indicaciones dadas en la figura 1, Jaime debe realizar los cortes hasta obtener un formato estándar para cada uno de los carnés y que por cada hoja salgan la mayor cantidad de documentos. Si el encargado de la carnetización realiza los cortes adecuadamente en su totalidad y utiliza 24 hojas de la resma entregada. ¿Qué formato utilizó Jaime para los carnés? ¿Cuántos estudiantes se inscribieron en toda la Universidad para el periodo 2013 – I? (Utilice la información de la figura 3)

Nombre	Tamaño
4A0	2.378 × 1.682 mm.
2A0	1.682 × 1.189 mm.
A0	1.189 × 841 mm.
A1	841 × 594 mm.
A2	594 × 420 mm.
A3	420 × 297 mm.
A4	297 × 210 mm.

Figura 3. Dimensiones del papel

[1] Tomado de http://carlinvallecas.es/wp-content/uploads/2012/11/el-papel-procesos-de-fabricacion-historia-y-tipos.pdf

SP2. Viaje en bicicleta.

Natalia desea ir en su bicicleta desde el punto A hasta el punto B y para esto tiene que pasar por el punto C, que resulta ser el punto medio entre A y B. Luego ella debe pasar por el punto D, el punto medio entre C y B. Luego por el punto E, que es el punto medio entre D y B; y así sucesivamente debe ir pasando por el punto medio de cada segmento resultante. Siguiendo este proceso, ¿es posible que en algún momento Natalia alcance el punto B con su bicicleta?[2] Justifique su respuesta.

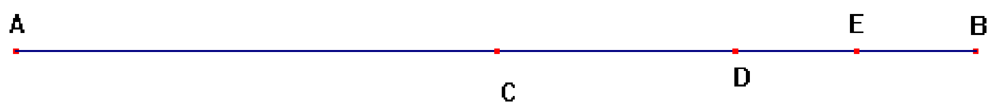

Figura 4. Recorrido de Natalia

SP3. Salones de clase del gimnasio campestre Sierpinski

Según las políticas del Ministerio de Educación, el tamaño estándar de las aulas de clase de una institución estará reglamentado según el número de estudiantes inscritos. Un salón de 1 a 15 estudiantes debe tener 24 metros cuadrados de área, de 16 a 30 estudiantes 48 metros cuadrados y de 31 a 40 estudiantes se requieren 64 metros cuadrados.

José Luis Suárez es un licenciado en matemáticas que ha decidido montar su propia institución educativa a la cual llamará Gimnasio Campestre Sierpinski en honor a Wacław Sierpinski, personaje quien describió por primera vez en 1916 el fractal “La alfombra de Sierpinski” y el cual se construye de la siguiente manera:

Se comienza con un cuadrado.

El cuadrado se divide en 9 cuadrados congruentes, y se elimina el cuadrado central.

El paso anterior vuelve a aplicarse recursivamente a cada uno de los 8 cuadrados restantes.

La alfombra de Sierpinski es el límite de este proceso tras un número infinito de iteraciones.

José decide aplicar la forma de este fractal para la construcción de sus salones de clase haciéndole las siguientes modificaciones:

1. El terreno tiene forma cuadrada y uno de sus lados mide 132 metros.

2. El cuadrado se corta en 9 cuadrados congruentes, y se obvian los cuadrados con números pares. (Ver figura 5)

3. Se realiza este procedimiento dos veces más a cada uno de los cuadrados resultantes.

---

2. Modificado de Fuenlabrada I. & Armella L. (2008)

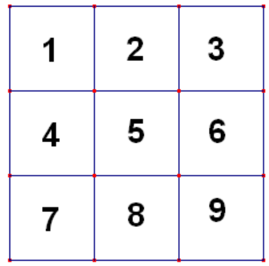

Figura 5. Numeración salones del gimnasio Sierpinski

Si los lados de cada uno de los salones del Gimnasio Campestre Sierpinski tendrán la medida de los cuadrados resultantes del paso número tres. ¿Qué rango de número de estudiantes tiene pensado el licenciado para cada uno de los salones de su institución educativa? ¿Estaría de acuerdo usted con esa cantidad?

SP4. Pirámide Telefónica Telecom Bogotá

En una reciente entrevista a Jorge Álvaro Ramírez al canal JcV, arquitecto quien diseñó la pirámide de la sede principal de Telefónica Telecom ubicada en la ciudad de Bogotá, Colombia, menciona que cada uno los lados de la pirámide están formados por mínimas figuras triangulares de vidrio azul teniendo en cuenta la construcción del fractal "Triángulo de Sierpinski" hasta su cuarta iteración.

Figura 6. Pirámide Telefónica Bogotá

Si la longitud de los triángulos de menor área resultantes del proceso fractal es de 1.16 metros. ¿Cuál es la altura de la sede Telefónica Telecom Bogotá?

Tabla 1.

Categorías de análisis para situaciones problema

INSTRUMENTO	FASE	OBJETIVO	SE ESPERA QUE	CATEGORÍAS E INDICADORES
PD	Diagnóstico	Identificar las concepciones intuitivas que los docentes de matemáticas tienen acerca del infinito actual	Por medio de una encuesta escrita, los docentes de matemáticas se enfrentarán a algunas preguntas que giran en torno a las concepciones acerca del infinito dividido en dos partes. En primer lugar se presentan algunos interrogantes acerca del infinito en su dualidad potencial-actual.	PRIMERA PARTE **REPRESENTACION** Geométrica y Verbal **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Infinito potencial • Cardinalidad • Correspondencia Uno a Uno. *Indicadores* 1.Intuición sobre el Infinito 2.Infinito Potencial 3.Infinito Actual
SP1	Contextualización	Identificar el significado del proceso de la “iteración” como acercamiento inicial con el concepto de infinito actual en una situación problema.	Utilizando como base la norma DIN que establece el formato del papel, se busca que por medio del software Cabri Geometre se hagan las construcciones correspondientes para que el docente de respuesta a los planteamientos dados y que con ayuda de la simulación, se encuentre una primera relación entre la iteración en mitades y el infinito actual	**REPRESENTACION** Geométrica y numérica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Iteración • Semejanza • Longitud • Área *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Traducir 2.Formular 3.Desarrollar 4. Expresar

SP2	Estructuración	Enfrentar al docente a una modificación realizada de la paradoja de Zenón en una situación específica y determinar concepciones en torno a su planteamiento y resolución.	Por medio de la simulación y dinamismo del software Cabri Geometre, se busca que el docente realice la construcción del segmento dado y por medio de macros encuentre los puntos medios correspondientes y deduzca una posible solución a la paradoja de Zenón.	**REPRESENTACION** Geométrica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Infinito Potencial • Iteración • Segmento • Punto medio *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Intuición sobre el Infinito 2.Infinito Potencial 3.Infinito Actual
SP3	Estructuración	Relacionar los términos “auto semejanza” e “iteración” con el concepto de infinito actual en una situación problemática específica por medio de la construcción del fractal “alfombra de Sierpinski”	La construcción de la alfombra de Sierpinski se utiliza como pretexto para que, en primer lugar, se obtengan las dimensiones de un salón de clase para deducir información adicional y en segundo lugar, se utilice la iteración y auto semejanza por medio de macros y se estructure un concepto sólido del infinito actual.	**REPRESENTACION** Geométrica y Numérica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Iteración • Polígono • Trisección de un segmento • Semejanza • Longitud *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Traducir 2.Formular 3.Desarrollar 4. Expresar

SP4	Validación	Aplicar los términos "auto semejanza" e "iteración" con el concepto de infinito actual en una situación problemática específica por medio de la construcción del fractal "Triángulo de Sierpinski"	La construcción del triángulo de Sierpinski se utiliza como pretexto para llegar a un concepto de infinito actual. Por medio de un proceso finito con macros y la ayuda del teorema de Pitágoras se obtendrá la respuesta a la situación problema y la modelación realizada se mostrará otra representación del infinito actual utilizando animaciones con el software Cabri Geometre.	**REPRESENTACION** Geométrica y numérica **CONCEPTOS EN ACCIÓN** • Intuición del infinito • Iteración • Polígono Regular • Punto medio • Semejanza • Longitud • Teorema de Pitágoras • Longitud *Indicadores en la resolución de problemas* 1.Traducir 2.Formular 3.Desarrollar 4. Expresar

Etapa De Verificación.

Finalmente se dejarán registros escritos de cada una de las intervenciones realizadas por los docentes así como también un cuestionario de salida para identificar si se modificaron o no las concepciones intuitivas sobre infinito luego de la aplicación del taller, a continuación se presentan algunas de las reflexiones a las que se esperan que los docentes identifiquen en cada actividad:

Prueba diagnóstica.

Se evidencia una concepción intuitiva sobre el infinito, pues de acuerdo con (Núñez, 1997) es más fácil comprender el infinito en lo grande como un proceso que continua sin parar y que no tiene fin, que el infinito en lo pequeño, en donde a pesar de conservarse el hecho de un proceso sin fin, aparece una nueva situación que sugiere que dicho proceso tiene un límite. Desde los primeros años de vida y aún durante la formación profesional, se asocia el infinito a la noción de crecimiento en la posibilidad de encontrar un número natural mayor a uno dado, la noción de límite, y en la cardinalidad de un conjunto numérico, por lo que se puede concluir que este objeto matemático no pasa de ser concebido como algo que no tiene fin, que no se puede contar o que no tiene límites.

Sp1.

Al realizar las construcción en Cabri se espera que el docente determine las dimensiones del papel para realizar los carnés correspondientes, sin embargo, más que el resultado numérico, se espera que en primer lugar, los docentes identifiquen que por medio de la creación de macros se pueden generan espacios geométricos infinitos en una superficie finita como lo es una hoja de papel y en segundo lugar, se genere un análisis de las potencialidades del software en la enseñanza de contextos disciplinares matemáticos pues a partir de construcciones en papel algunos de estas temáticas se mantienen de manera intuitiva, retomando lo inicialmente mencionado, conlleve a concepciones erróneas de dichos contenidos.

Sp2.

En esta situación hay una caracterización del todo como mayor que la parte. Es sin duda una de las características de los conjuntos finitos que se asocian a la noción de infinito, que además es compatible con la teoría de conjuntos estudiada en la matemática escolar. Este axioma, se constituye así en uno de los obstáculos necesarios de superar a fin de comprender una delas características fuertes de los conjuntos infinitos. (Arrigo, G. & D'Amore, B, 1999). Para esto se puedo tomar como ejemplo la cantidad de pasto de una hacienda, siendo esta última el "todo" y la cantidad de pasto que hay en el corral del ganado, "la parte". ¿Será posible hacer ese conteo?, ¿En dónde hay mayor cantidad de pasto, en la hacienda, en el corral o tendrán la misma cantidad?

Sp3. y Sp4.

Estas dos últimas situaciones problema modelan la concepción del infinito actual, pues al tener superficies finitas en contextos reales, permite que los docentes identifiquen por medio de la iteración y la autosemejanza, la caracterización de este tipo de infinito, que como plantea De Lorenzo, permite hacer construcciones infinitas en espacios finitos. Las situaciones problema a pesar que requieren el hallazgo de una respuesta numérica a partir de la construcción de fractales y operaciones matemáticas específicas, se utilizan como pretexto para que el docente caracterice de un tipo de infinito que va en contra de lo intuitivo, es decir hacia lo grande y de algo que no termina sino también hacia lo infinito en lo finito y que a pesar de que se puede extender el proceso de iteraciones hasta donde se quiera, es necesaria la implementación de herramientas tecnológicas que permitan visualizar este otro tipo de infinito.

Resultados y Conclusiones

Con la implementación de este taller se espera que en primer lugar, se conozcan las concepciones que tienen los docentes sobre el infinito actual y se puedan abstraer sus diferencias con el infinito potencial por medio del software Cabri Geometre, en segundo lugar, se mejoren las prácticas docentes y la formalización de conceptos matemáticos abstractos intuitivos como es el caso del infinito en acto y finalmente, que para futuras investigaciones, se busque el desarrollo de habilidades espaciales y de simulación con docentes y estudiantes por medio de la resolución de problemas y situaciones de cambio e incertidumbre, siendo estos últimos algunos de los retos educativos del siglo XXI.

El concepto de infinito está muy alejado de constituir un objeto de conocimiento que las personas, especialmente los docentes de matemáticas, generan fácilmente a partir de su interacción con el mundo físico. Tanto el análisis histórico como el análisis de la resolución de las situaciones problema indican que, para que el infinito se convierta en un objeto de estudio, es necesaria la implementación de herramientas tecnológicas en el aula que permitan la modelación y simulación de este tipo de objetos matemáticos.

Finalmente, las situaciones problema sirven como pretextos para enfrentar a las personas a contextos a los cuales no sólo necesiten realizar una serie de procedimientos para encontrar la solución numérica, sino que a partir de los hallazgos encontrados, generen una reflexión de los procesos involucrados en su resolución, es decir se encuentre la aplicabilidad de las matemáticas en la vida real.

Referencias y bibliografía

Arrigo, G. & D'Amore, B. (1999). Lo veo, pero no lo creo: Obstáculos epistemológicos y didácticos para la comprensión del infinito actual. En: Educación Matemática. México

Bolzano, B. (1857). Las Paradojas Del Infinito. En Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg. Departamento de investigaciones educativas. México

D'Amore, B. (2011). *Infinitos infinitos. Historia, filosofía y didáctica del infinito matemático.* Editorial Magisterio. Bogotá

De Lorenzo, J (2001) *"El infinito matemático".* Investigación y Ciencia, temas, 23.pp4-9

Fischbein, E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, Tirosh, & Hess. (1979). The Intuition Of Infinity. *Educational Studies in Mathematics*, 10 .pp. 2-20

Fuenlabrada I. & Armella L. (2008) Homenaje a una trayectoria: Guillermina Waldegg. Departamento de investigaciones educativas. México.

Ministerio de Educación Nacional. (2002). Memorias del Seminario Nacional Formación de Docentes sobre el Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Bogotá. MEN

Ministerio de Educación Nacional. (1998). Matemáticas. Lineamientos curriculares. Bogotá: MEN.

Moreno, L.; Waldegg, G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity.Educational Studies in Mathematic. ,pp 211-231.

Nuñez, R. (1997). Infinito en lo pequeño y desarrollo cognitivo: Paradojas y espacios consensuales. Educación Matemática, Madrid.

Orozco, J. (2006) Uso pedagógico de los programas Derive 6.1 y Cabri Geometré II Plus en las clases de matemáticas. Colegio Champañat. Bogotá