

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

Trabajos invitados al IV CEMACYC



**Volumen 1. *Memorias* IV CEMACYC
República Dominicana, 2025**

**Patrick Scott, Yuri Morales y Angel Ruiz
Editores**



© 2025

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE)

www.redumate.org

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025

[Memorias IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe,
Santo Domingo, República Dominicana]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz

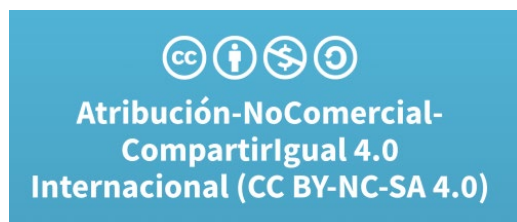
Colaboradora: Sarah González

ISBN Obra Completa: 978-9945-xx-xxx-x

Volumen 1: Trabajos invitados al IV CEMACYC

ISBN Volumen: 978-9945-xx-xxx-x

Todos los materiales incluidos en esta publicación pertenecen a la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe.



Estos materiales están bajo una [licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

En la reproducción de cualquier parte de este libro se deben consignar: los créditos a los autores y a la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera a REDUMATE y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no ha sido publicado previamente y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Para citar este libro y este volumen:

Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruíz. (Eds.) (2025) *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025, Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe*, Volumen 1: Trabajos invitados al IV CEMACYC. República Dominicana: Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra.

Contenidos

<u>Presentación</u>	i
Conferencias plenarias	
<u>Identidad(es) y subjetividad(es) matemática(s): El nexó entre ser y conocer en Matemáticas en medio de las crisis actuales</u> <i>Paola Valero</i>	2
<u>La enseñanza de las Matemáticas frente a los retos del mundo actual</u> <i>Michèle Artigue</i>	18
<u>La importancia de la enseñanza de las Matemáticas para todos en el siglo XXI</u> <i>Jaime Carvalho e Silva</i>	30
<u>Llegar a ser profesor de Matemáticas. Desafíos generados en la actualidad por las relaciones entre conocimiento, práctica y contextos</u> <i>Salvador Llinares</i>	43
<u>Tecnologías no ensino: Possibilidades, inovações e outras coisas, inclusive, as artificiais</u> <i>Marcelo Bairral</i>	53
Homenaje a Eduardo Mancera	
<u>In Memoriam: Eduardo Mancera Martínez</u> <i>Patrick Scott, Eduardo Basurto, Claudia Groenwald, Salvador Llinares, Eduardo Iván Mancera, Karen Mancera</i>	66
Mesa redonda plenaria	
<u>Desafíos de las pruebas comparativas internacionales para América Latina</u> <i>Ricardo Poveda, Paola Valero, Gilbert Valverde, Jaime Carvalho e Silva</i>	80
Conferencias paralelas	
<u>Criterios de idoneidad didáctica en la reflexión colectiva de profesores que enseñan Matemáticas: Una mirada desde la argumentación práctica</u> <i>Adriana Breda</i>	86
<u>Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral: Elementos teórico-prácticos desde un modelo de Enseñanza</u> <i>Luis Fabián Gutiérrez</i>	92
<u>El enigma de la quintica: Historia y Trascendencia</u> <i>Carlos Sánchez</i>	100

<u>El problema de la explicación en la filosofía de la práctica matemática y su aporte a la formación inicial de profesores</u>	110
<i>Luis Carlos Arboleda</i>	
<u>Entre la duda y la certeza, la tecnología digital es el eslabón</u>	122
<i>Eduardo Basurto</i>	
<u>Estudio de Clases en la formación de docentes de Matemáticas: Aprendizajes de una experiencia práctica e investigativa</u>	131
<i>Omar Hernández Rodríguez</i>	
<u>La Educación Matemática frente a la Inteligencia Artificial: Retos y posibilidades</u>	143
<i>Adrián Gómez Árciga</i>	
<u>La identidad profesional del profesor de matemáticas. Algunas herramientas de análisis</u>	151
<i>José Chamoso</i>	
<u>Modelización y generación de problemas matemáticos con fotografías, GeoGebra y herramientas de IA</u>	162
<i>Karina Rizzo</i>	
<u>Reformas curriculares de Matemática: Reflexiones desde las políticas públicas, la Educación Matemática y sus implicaciones en la región del caso El Salvador</u>	174
<i>Jeser Candray</i>	
<u>Sobre a importância de compreender as relações entre as noções de “contagem, comparação e medição” no ensino de Matemática elementar</u>	185
<i>Yuriko Baldin</i>	
Minicursos	
<u>Ansiedad y autoeficacia en la Matemática: Explorando el aprendizaje desde la investigación y la neurociencia</u>	195
<i>Claudia Vargas</i>	
<u>Aprendiendo estadística a través de proyectos: Una experiencia activa y significativa en el aula</u>	204
<i>Jorge Mello Román</i>	
<u>Conocimiento pedagógico del profesor de Matemáticas y su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático</u>	208
<i>Claudia Groenwald</i>	
<u>Deducción de la fórmula del área del trapecio en la formación inicial docente</u>	215
<i>Luis Antonio Soto Hernández</i>	

<u>Desafíos de la Educación Matemática en América del Sur: Ecuador, Bolivia, Paraguay y Perú</u>	227
<i>Fredy Rivadeneira-Loor; Augusta Osorio Gonzales, Gabriela Gómez Pasquali, Sonia Cordero</i>	
<u>Formación docente con BlueBot: Pensamiento computacional y enfoque de género en contextos simulados</u>	232
<i>Adriana Breda, Gemma Sala-Sebastià</i>	
<u>Funciones y funcionales en la teoría del cálculo</u>	240
<i>Carlos Sánchez Fernández</i>	
<u>La historia de las prácticas de enseñanza como recurso para movilizar la agencia crítica en maestros de Matemáticas</u>	254
<i>Gilberto Obando</i>	
Sesiones temáticas	
<u>¿Cómo renovar la formación inicial de profesores de Matemáticas en el escenario que vivimos?</u>	267
<i>Salvador Llinares</i>	
<u>Oportunidades y desafíos de la Inteligencia Artificial para la Estadística y la Probabilidad en los currículos escolares de Matemáticas</u>	272
<i>Edwin Chaves-Esquivel</i>	
<u>Perspectivas de la preparación de docentes en el contexto actual</u>	281
<i>Soledad Estrella</i>	
<u>Índice alfabético de autores</u>	288

Presentación

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 es el título de las *Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (IV CEMACYC) que se llevó a cabo en Santo Domingo, República Dominicana, del 2 al 7 de noviembre de 2025.

Este congreso fue organizado por la [*Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*](#) (REDUMATE) y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM). Este cuarto congreso tuvo un gran éxito con más de 300 ponencias con ponentes de 29 países que decidieron venir a esta región. Esto duplica la cantidad de ponencias que se suelen presentar en los CEMACYC. Es ahora un congreso consolidado, con mucho prestigio. La comunidad internacional decidió integrarse a este evento. El impacto regional es impresionante.

El congreso tuvo casi 800 participantes. Más de 400 docentes de la República Dominicana se beneficiaron directamente de conferencias, talleres, comunicaciones, carteles, sesiones informativas, reuniones de grupo, exposiciones de libros.

Varias instituciones dominicanas, con lucidez, apoyaron a sus maestros (incluso de lugares alejados del país) y aprovecharon esta valiosa oportunidad. Esto constituye un impacto formidable para la educación local.

En 2013 REDUMATE y la PUCMM organizaron el I CEMACYC. Muchos docentes aún recuerdan con orgullo el primer congreso y agradecen haber estado también en este. Hay una relación estratégica entre REDUMATE y PUCMM. República Dominicana es un foco clave para apoyar los esfuerzos regionales.

Esos días de noviembre completaron un proceso de tres años de preparación internacional y local, con autores, revisores, coordinadores de temas, equipos de plataforma (casi 200 personas), que ha apoyado cuidadosamente el fortalecimiento de capacidades en esta región.

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de los CEMACYC es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, los CEMACYC piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden leerse y descargarse en nuestras plataformas varios meses antes del congreso).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Científico Internacional* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, y a los casi 200 *Revisores científicos*.

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y

articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencias con base en *Open Journal Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

Agradecemos el valioso patrocinio de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). Debe recordarse que REDUMATE nació en Costa Rica, en el año 2012, dentro del *Capacity and Networking Project* (CANP) de ICMI. Con ya cuatro congresos exitosos y múltiples acciones educativas en la región, de impacto internacional, esta Red CANP es un ejemplo y un modelo.

En el IV CEMACYC fueron esenciales los apoyos del [*Comité Interamericano de Educación Matemática*](#) y del [*Proyecto Reforma Matemática*](#) en Costa Rica en la organización científica y en la logística tecnológica del congreso.

El *Comité Organizador Local* en la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente humano muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de este congreso, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.



Foto de grupo del IV CEMACYC

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 tiene 11 volúmenes con base en los temas del congreso:

1. Trabajos invitados del IV CEMACYC
2. Formación inicial de profesores
3. Formación continua y desarrollo profesional
4. Dimensiones culturales, políticas, económicas, y ambientales, de las Matemáticas y de la Educación Matemática
5. Currículo y evaluación
6. Historia y filosofía de las Matemáticas y de la Educación Matemática
7. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática
8. Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática
9. Investigación en Educación Matemática.
10. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar y Primaria
11. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, mesa redonda, minicursos, homenaje a Eduardo Mancera) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, pósteres en papel y digitales), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes. *REDUMATE* desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en el IV CEMACYC.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos), con el apoyo de Yuri Morales (Costa Rica). Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el respaldo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las página web oficial de REDUMATE: <https://redumate.org/>.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la Educación Matemática en América Central y El Caribe.

Saludos afectuosos



Ángel Ruiz

Presidente

Consejo Internacional

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe

16 diciembre 2025

Conferencias plenarias



Identidad(es) y subjetividad(es) matemática(s): El nexos entre ser y conocer en Matemáticas en medio de las crisis actuales

Paola Valero

Department of Teaching and Learning, Stockholm University

Suecia

paola.valero@su.se

Resumen

Las nociones de identidad y subjetividad matemática han proporcionado en la investigación internacional una manera de explorar los efectos de la Educación Matemática en los estudiantes. Esta noción permite entender la relación complementaria entre los procesos de “objetivación” del conocimiento y los procesos de “subjetivación” de quienes aprenden, es decir, la relación entre lo que sabemos y en quienes nos volvemos a través de la educación. Las Matemáticas como parte de los currículos escolares contribuyen a formar tipos determinados de personas o sujetos, con ciertas características y habilidades cognitivas, y con posturas morales, éticas y de comportamiento asociadas con las visiones de Matemáticas que se promueven en el currículo. En esta plenaria muestro la potencialidad de dichas nociones para comprender cuáles son los tipos de personas que deseamos formar y cómo estos tipos de personas pueden ser más o menos útiles para enfrentar los retos de este momento histórico de crisis y cambio climático. Con base en distintos proyectos de investigación, quiero ilustrar que tales nociones son importantes para entender tanto aspectos frecuentemente ignorados de los estudiantes, como los efectos de poder de las prácticas de enseñanza y aprendizaje en ellos.

Introducción

¿Por qué es de interés para la Educación Matemática abordar la pregunta de qué tipo de ser nos volvemos con y a través de las Matemáticas? Con frecuencia para los educadores matemáticos las preguntas sobre lo que llegamos a *saber* o *aprender*, cómo y con qué utilidad han sido más interesantes. Tal vez no solo por la historia de la configuración disciplinar del campo de investigación y su gran interés en el conocimiento matemático en circulación en

relaciones de aprendizaje y enseñanza, sino también por la narrativa en la sociedad sobre la importancia de las Matemáticas —inseparables de la ciencia y la tecnología— para generar y aumentar el progreso y bienestar de todos los seres humanos. Las preguntas sobre el conocimiento matemático y su apropiación por parte de quienes tratan de aprenderlo han sido, en este contexto disciplinar y social, fundamentales. Desde este interés, mi pregunta inicial no es un interrogante legítimo, o es un asunto que de antemano se responde con que la apropiación efectiva del conocimiento matemático nos hace personas “empoderadas” por poseer un conocimiento potente y deseado en la sociedad, o personas “competentes” por poseer un conocimiento que permite actuar para resolver grandes problemas de pequeña o gran escala.

En el campo internacional de investigación durante las últimas décadas se ha ampliado tal configuración disciplinar para comprender de manera más matizada qué significa tal apropiación del conocimiento matemático y cuáles son sus efectos tanto en quienes aprenden como en la sociedad (e.g., Jablonka et al., 2013). La consolidación de lo que podríamos llamar las perspectivas “socio-cultural-políticas” (Planas & Valero, 2016) en la Educación Matemática ha permitido ampliar el foco de interés disciplinar para estudiar los procesos de apropiación de conocimiento matemático en sus relaciones de inseparabilidad de los contextos sociales-culturales y de sus efectos políticos. Tal ampliación ha abierto paso a que una variedad de teorías —más allá de las provenientes de la psicología, las ciencias cognitivas y la pedagogía— se hayan tomado como herramientas en tal estudio. De ahí, que el interés por comprender al estudiante de diversas maneras —y no sólo y fundamentalmente como un ser cognitivo— hayan presentado un avance en entender el encuentro entre los sujetos de la educación, lo que se aprende y su contexto.

Este punto fundamental lo explica claramente Luis Radford (2021) en su construcción de la teoría didáctica de la objetivación matemática al resaltar el principio de que cualquier proceso de apropiación de las formas culturales que conocemos como Matemáticas es inseparable del volverse alguien con y a través de tal apropiación. Por esto, si *conocer* y *ser* son inseparables como procesos centrales en la educación, el énfasis en el conocer sin el estudio sistemático del volverse alguien deja incompleto el proyecto de la investigación en Educación Matemática. De ahí que profundizar en nuestra comprensión como comunidad de investigación sobre cómo nos volvemos alguien con y a través del aprender Matemáticas y cuáles son los efectos sociales, culturales, éticos y políticos de tal proceso de transformación del ser sea igualmente importante para la Educación Matemática que el comprender la apropiación u objetivación del conocimiento. En términos de distintos enfoques teóricos no obstante emparentados con el enfoque histórico cultural de Radford, nociones como *identidad*, *subjetividad* y *subjetivación* han ayudado a capturar esta dinámica.

En particular, los estudios sociopolíticos de la Educación Matemática (e.g., Kollosche et al., 2019; Penteado & Skovsmose, 2022; Valero & Skovsmose, 2012) han investigado críticamente el problema de quienes (no) tienen acceso y (no) logran tener éxito en Matemáticas y cuáles son las consecuencias de tal acceso y/o éxito. Nótese aquí mi uso de opuestos en estas expresiones. Aunque aparentemente complicado, lo que quiero señalar es que cada vez que tratamos de identificar lo que significa tener acceso y éxito —y lo que se requiere para ello—, simultáneamente y de manera ineludible trazamos separaciones que demarcan lo que significa no acceder y no tener éxito. Esta propiedad de las relaciones sociales en la cultura es lo que Popkewitz llama la *abyección* (Popkewitz, 2009) o el hecho de que cualquier norma que

establece lo que se desea y se valora en sí encarna la definición de lo no deseado, del “otro” diferente y no deseable. A este “otro no deseable” se le debe separar del ser deseado y se le debe tratar de modificar para asimilarse al ser deseado. Por eso inclusión y exclusión son teórica y prácticamente inseparables. Tales explicaciones de la in(ex)clusión y el éxito/fracaso de los estudiantes en Matemáticas —que van más allá de las narrativas de déficit cognitivo individual— nos muestran que el problema de quién nos volvemos y qué se requiere para volvemos un tipo de persona con y a través de las Matemáticas es central para comprender las prácticas de la Educación Matemática como parte del funcionamiento del conocimiento y el poder en la sociedad. En otras palabras, si la apropiación del conocimiento matemático se considera socialmente como algo fundamental para los individuos y las sociedades, es porque ese proceso de adquisición hace algo en nosotros que va más allá del empoderamiento y la competencia en estos conocimientos; sus efectos son más profundos. Tal proceso, como dice Chronaki (2016), tiene que ver con las experiencias de las personas y su sentido de sí mismos y de su relacionamiento, en contexto, con las Matemáticas. La Educación Matemática, entonces, es una práctica a través de la cual el poder opera en las relaciones sociales donde se generan experiencias del ser y de los “otros”. Mirar de esta manera a la Educación Matemática significa comenzar a examinar sistemáticamente aquello que hemos tendido a dejar “fuera de foco” y nos invita a afinar, digámoslo así, una “visión periférica” para mirar aquello que sabemos es parte de la **Educación Matemática** y que no podemos seguir ignorando.

Para dar cuenta de la pregunta inicial, voy a presentar distintas nociones relacionadas con el problema y ejemplificaré con investigaciones que muestran las potencialidades de tales nociones. Para terminar, entraré en el tema de la relevancia de las nociones frente a los retos actuales de cambio climático y el deseo de la Educación Matemática de ser relevante para el momento actual.

Identidad(es) y subjetividad(es) matemática(s): desde lo individual/psicológico a lo cultural/político

Se podría decir que las conceptualizaciones el papel del sentido del ser y de quienes nos volvemos con respecto al aprendizaje surgieron en los 1990, cuando las explicaciones sobre los mecanismos del cambio conceptual comenzaron a desplazarse desde el individuo y su mente, hacia la colectividad con su lenguaje y cultura, es decir, lo que se ha llamado el “viraje sociocultural” (e.g., Lerman, 2000). Una diferencia conceptual fundamental con respecto a, por ejemplo, las teorías del desarrollo intelectual humano basadas en la epistemología genética de Jean Piaget, es la relación fundamental constitutiva entre el individuo y su entorno con otros y sus producciones materiales y simbólicas. Uno de los puntos central de esta diferencia para explicar el aprendizaje es que las trazas del cambio en lo que sabemos y vamos adquiriendo no necesariamente debe ir a buscarse en lo que vamos construyendo mentalmente, sino en las maneras como se transforman las posibilidades y capacidades de relacionarse con otros y de hacer algo en la cultura. Las “evidencias” de cambios en el conocimiento pueden verse en el lenguaje, las relaciones, las experiencias y en el sentido que les damos y que nos damos a nosotros mismos por ser parte de tales relaciones. De ahí que el asunto de la *identidad* —como un sentido de ser y de volverse alguien creado en relación con las formas repetitivas de hacer algo de comunidades y sus recursos— haya ofrecido una nueva forma productiva de explorar el aprendizaje.

Esta pequeña nota teórica no hace justicia a la cantidad de debates sobre las diferencias o complementariedades entre visiones racionalistas y socioculturales del aprendizaje. Tratarlas no es el objetivo aquí y muchos otros han discutido estas diferencias con amplitud y detalle con respecto a las Matemáticas (e.g., Radford, 2008, 2021). Mi punto es que tal desplazamiento teórico es fundamental para entender por qué diferentes nociones relacionadas que conceptualizan el “volverse alguien” a través del aprendizaje y la educación han ampliado de manera significativa las posibilidades de la investigación en Educación Matemática sobre qué sucede en esos procesos de enseñanza–aprendizaje y cómo afectan a los estudiantes.

El “viraje a lo sociocultural” y posteriores extensiones hacia lo político han ampliado las herramientas teóricas que se manejan en el campo —y las concepciones mismas de qué tanto cubre el campo de estudio mismo (e.g., Jablonka et al., 2013; Wagner et al., 2023). Las bases teóricas de la conceptualización de “quienes nos volvemos” con y a través de la apropiación de las Matemáticas también son múltiples. Nuevamente, no es mi intención presentar una revisión comprensiva de la literatura existente al respecto. De hecho, en la última década se han publicado varias revisiones muy sólidas de este tipo de investigaciones (Darragh, 2016; Graven & Heyd-Metzuyanim, 2019; Heyd-Metzuyanim & Graven, 2024; Langer-Osuna & Esmonde, 2017; Radovic et al., 2018). En este texto voy a dejar a un lado las investigaciones sobre la identidad del profesor de Matemáticas (e.g., Lutovac & Kaasila, 2018) y también las conceptualizaciones que asumen una visión del problema de la identidad matemática de los estudiantes como una característica central y perdurable del individuo que, si bien está conectada con experiencias en el entorno, se fortalece y estabiliza en su relación con otras características psico-sociales de individuo (e.g., Cribbs & Utley, 2024). En esta perspectiva, la identidad Matemática de los estudiantes se relaciona con otros constructos como sus creencias sobre las Matemáticas, su interés y actitudes por las Matemáticas, el auto-reconocimiento y el reconocimiento de otros de que el individuo es una “persona matemática”, y la competencia y percepción de la capacidad de poder hacer Matemáticas. Incluso, algunos investigadores emparentan el concepto de identidad en cercanía con la afectividad con las Matemáticas (e.g., Gómez-Chacón, 2000; Heyd-Metzuyanim, 2019). Este tipo de conceptualización, aunque algunas veces parece reconocer la premisa sociocultural antes presentada, suele tender más hacia conceptualizaciones y tipos de metodologías de investigación que resuenan más con visiones psicológicas de los fenómenos de la Educación Matemática.

Mi interés se centra más en aquellas visiones que no solamente se basan en el principio sociocultural antes expuesto, sino también claramente exploran asuntos de poder a través de cuestionamientos sobre los efectos de la Educación Matemática en los tipos de personas que nos volvemos con y a través de ella. De los artículos de revisión de la literatura de investigación antes mencionados se puede concluir que el concepto de identidad matemática se utiliza en una variedad de sentidos relacionados con el posicionamiento teórico de los investigadores. Estos detalles pueden consultarse en dichos artículos de revisión, en particular Graven y Heyd-Metzuyanim (2019), al igual que en los varios artículos que componen el número especial de la revista ZDM sobre el tema de identidad en Educación Matemática. Aquí quiero resaltar aportes sobresalientes de algunas de tales conceptualizaciones con respecto a los efectos de poder o dimensiones políticas de la Educación Matemática. Entremos entonces en el tema.

Las narrativas de identidad matemática

“No soy bueno para Matemáticas” es una afirmación que puede ser frecuente escuchar de parte de los estudiantes en instancias de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Sfard y Prusak (2006) dirían que tal afirmación no sólo manifiesta, sino que *vuelve real* lo que quien la enuncia percibe sobre sí mismo con respecto a las Matemáticas. Frecuentemente tal afirmación no aparece sola, sino que va acompañada de muchas otras afirmaciones, emitidas por otros cercanos, sobre esa persona y las Matemáticas: “Mi hija y las Matemáticas no la van bien; es que en nuestra familia no somos buenos para las Matemáticas” puede ser la afirmación de alguno de los padres de familia. También la profesora puede decir: “Tal vez puedas tener mejor resultado en la próxima prueba. Puedes ser mejor”, lo cual, aunque aparentemente suena como una frase motivante, puede actuar como la confirmación negativa de la insuficiencia de esa persona y por lo tanto puede actuar como una afirmación de la profesora sobre lo que el estudiante (no) es con respecto a las Matemáticas.

Con base en la visión enraizada en la mediación del lenguaje en el pensamiento —luego desarrollada por Sfard en su teoría de la comognición (Sfard, 2008), Sfard y Prusak propusieron una visión discursiva y operacional del concepto de identidad matemática de los estudiantes. Ellas proponen entender la identidad matemática como aquel vínculo clave entre el pensamiento individual y la cultura. La identidad matemática, ellas proponen, no está “dentro” de las personas sino “afuera”, en todas aquellas afirmaciones *significativas* que hacemos sobre nuestro relacionamiento con las Matemáticas, como parte de la enseñanza y aprendizaje. Estas afirmaciones “*vuelven real*” o “cosifican” — en inglés *reify*— lo que expresan. Además, son *reconocibles* o pueden ser reafirmadas por otros alrededor. En otras palabras, las identidades matemáticas son los relatos colectivos sobre las relaciones de alguien con las Matemáticas.

En su momento, la propuesta de Sfard y Prusak fue desafiante frente a visiones que asociaban la identidad con alguna característica más permanente, interna y fundamental del sujeto —como la expresada por Cribbs y Utley (2024). Esta conceptualización resalta la importancia de aquello que los estudiantes dicen en clase, fuera de ella, en situaciones formales o informales, sobre su relación con las Matemáticas. No se trata de ir a develar lo que hay detrás de las afirmaciones sino de atender a las afirmaciones mismas y lo que muestran sobre qué efectos tiene la Educación Matemática sobre lo que los estudiantes dicen sobre su relación con ella. Esto significa que la identidad matemática de los estudiantes está en las afirmaciones, historias y narrativas que repetitivamente se articulan sobre los estudiantes y su relación con las Matemáticas, en el contexto comunicativo y de práctica donde emergen.

Que un estudiante diga “No soy buena para Matemáticas” es un hecho perfectamente serio que no necesariamente expresa una discapacidad individual para aprender, sino que forma parte de una historia que muchos estudiantes expresan como resultado de su experiencia y participación en la Educación Matemática. Si la conceptualización de Sfard y Prusak es robusta, entonces podríamos hacer la pregunta de cómo surge esta afirmación y sus afirmaciones asociadas, qué revelan y qué podemos hacer al respecto. Aquí quisiera ejemplificar con una investigación que me parece ilustra muy bien posibles respuestas a estas preguntas.

Andersson, Valero y Meaney (2015) estudiaron las narrativas de identidad de estudiantes de secundaria en Suecia en un programa con énfasis en ciencias sociales, pero donde los cursos de Matemáticas son parte obligatoria del currículo. Muchos de los estudiantes en este tipo de programa expresan que “las Matemáticas no son para ellos”, y en general sus resultados e involucramiento con la materia “podrían ser mejores”. Un par de chicas, Malin y Petra, en entrevistas iniciales sobre su relación con las Matemáticas, expresaron “tener ansiedad” y “odiarlas”. La manera como se habían acostumbrado a narrar su relación con las Matemáticas provenía de la forma como los profesores “siempre dicen qué vale y cómo todo está en el libro de Matemáticas”. Las Matemáticas son “aburridas” y “desagradables”, algo “tóxico” de lo que no querían hablar. A pesar de presentarse como interesadas y competentes en otras materias de la escuela, las Matemáticas no eran para ellas, al menos como siempre las habían vivido en formas de enseñanza tradicional. Parte de la investigación de Annica Andersson (2011) consistió en poner en marcha algunos momentos de enseñanza donde la profesora implementó secuencias de innovación pedagógica inspiradas en elementos de la Educación Matemática crítica y la etnomatemática (Andersson & Valero, 2016). La intención de estos momentos pedagógicos diferentes fue dar espacio a que otros tipos de actividad matemática pudiera surgir por parte de los estudiantes. Al analizar la documentación de cómo Malin y Petra vivenciaron esos nuevos tipos de Educación Matemática, fue muy evidente el cambio en su manera de referirse a sí mismas: del “odio” pasaron a expresar una “neutralidad” y un nuevo sentido de “poder usarlas en algo real que me importa mucho”. No obstante, cuando las formas de enseñanza volvían a las prácticas regulares guiadas por el libro, sus expresiones volvían a referirse a una “falta de ganas y foco” en la clase. Al seguir de cerca y estudiar cuidadosamente la manera como Malin y Petra expresaban su relación con las Matemáticas en el contexto de los cambios de la pedagogía, fue evidente que ellas “(no siempre) detestaban las matemáticas”. Es decir, lo que se podría interpretar inicialmente como una narrativa significativa totalizada de odio o ansiedad con las Matemáticas era en verdad una historia maleable con relación a las nuevas experiencias e historias asociadas que otras formas de pedagogía hacían posible emerger.

Esta investigación de identidad matemática de los estudiantes me permite ilustrar varios puntos importantes. Primero, se confirman algunas de las observaciones generales identificadas en las revisiones de la literatura —por ejemplo, Heyd-Metzuyanim y Graven (2024)— con respecto a la utilidad del concepto para explorar la tensión entre pedagogías tradicionales y nuevas alternativas, en tanto las historias negativas de identidad para muchos estudiantes suelen provenir de experiencias negativas en configuraciones tradicionales de enseñanza. Segundo, se evidencia que esas historias o narrativas de identidad se forman en las relaciones entre las personas y las normas de las prácticas educativas, y que tienen implicaciones sobre la manera como los estudiantes deciden (o no) participar y, por lo tanto, llegar a aprender Matemáticas. Esto quiere decir que el “aprender Matemáticas” no se centra en el proceso de cambio cognitivo sobre los conceptos, sino que está distribuido en la red intensa y cambiante de elementos que constituyen las prácticas de enseñanza y aprendizaje. Esto nos acerca a la visión de Radford antes expuesta. Tercero, y tal vez lo más importante desde un punto de vista político, es que el poder reconocer esas historias, escucharlas y entender cómo se configuran nos permite ver que las narrativas de identidad son maleables y que los profesores pueden hacer algo con ellas —para bien o para mal. Esta sensibilidad nos acerca de manera ética a aquellos seres a quienes queremos formar.

La formación de sujetos matemáticos en configuraciones discursivas

Otra manera relacionada, mas no idéntica, de abordar la pregunta de quiénes nos volvemos con las Matemáticas conceptualizan los asuntos de formación de la identidad matemática tejiendo una conexión más fuerte y visible con los procesos y estructuras sociales que sostienen clasificaciones y diferencias entre distintos seres humanos, es decir, marcadores de diferencias de género, preferencias e identificación sexual, nacionalidad, etnicidad, raza, habilidad, clase o posición socioeconómica y cualquier otro marcador que opere en un espacio y tiempo determinado. En otras palabras, la conceptualización de las historias y narrativas significativas, “cosificantes” y corroborables de los individuos sobre su relación con las Matemáticas no solo se leen en el contexto de la comunicación y discurso matemático del aula o de la escuela, sino que se leen como parte de los mecanismos de identificación y diferencia sociales que se ponen en juego en la red amplia de prácticas de la Educación Matemática. En la relación entre manifestaciones locales e individuales de identidad y su sustrato de relaciones materiales, culturales y económicas de formación de la *subjetividad*, el “volverse matemático” se comienza a ver como un proceso inseparable del poder en la sociedad (e.g., Valero, 2018).

Traigamos un ejemplo histórico para iniciar. En muchas sociedades ha navegado la idea de que “las mujeres no son tan aptas como los hombres para hacer Matemáticas de alto nivel”. Esto se reflejaba en la educación con ideas como “las niñas no son buenas para Matemáticas, lo cual está demostrado con las diferencias frecuentes en mediciones estandarizadas”. Hace unas décadas existían formas de pensar sobre el ser llamado “mujer”, sus capacidades físicas y mentales y, por lo tanto, su papel en la sociedad. Si aquellos cuerpos llamados “mujer”, con rasgos biológicos determinados aptos para la reproducción de la especie humana, tenían asignada una función “natural” dentro de la organización familiar y el funcionamiento práctico y moral del hogar, entonces había ciertas ideas de qué educación para la formación de qué virtudes y para el desarrollo de qué habilidades ofrecer a tales cuerpos. El hecho del sexo biológico se unía con *tesis culturales* sobre las posibilidades de tal cuerpo para producir ideas tales como que las mujeres no necesariamente eran aptas para un trabajo intelectual demandante como el aprender y hacer Matemáticas. Por lo tanto, no hacía mucho sentido abrir muchos espacios para mujeres para avanzar en el estudio de las Matemáticas. Estas ideas de una inferioridad del cuerpo femenino frente al masculino en términos de varias características, entre ellas la capacidad cognitiva, se basaba en resultados científicos del siglo XIX y XX sobre lo que significaban las diferencias biológicas —como el tamaño del cuerpo y, entre otros, el tamaño cerebral— y la asignación de valoraciones culturales a dichas diferencias. Hoy en día en muchos grupos sociales estas ideas han cambiado; y en otros continúa cierta creencia de que, en todo caso, “las Matemáticas no son para las mujeres”. Este tipo de entrelazamientos de las mujeres con las Matemáticas y la sociedad han sido recientemente exploradas por Maria Tamboukou y su proyecto “Números y narrativas”. Su página muestra trabajo reciente al respecto (<https://sites.google.com/view/numbersandnarratives/a-feminist-genealogy-of-automathographies>).

Aquí la noción de *tesis cultural* de Popkewitz (2009) es importante para entender que aquellas formas de pensar sobre quiénes son las personas y qué pueden hacer, aprender y cómo deben vivir son una composición temporal donde creencias culturales y resultados científicos de un momento dado presentan “verdades” sobre los seres humanos. Siguiendo el razonamiento de Popkewitz podríamos decir entonces que esa idea de que “las mujeres no pueden hacer

Matemáticas de alto nivel” es una tesis cultural determinada sobre el cuerpo femenino y sus atributos, que moviliza poder en tanto enmarca lo que es posible (o no) pensar y cómo es posible (o no) actuar con respecto a esos cuerpos en un momento determinado. Además, y en conexión con la noción de *abyección* antes presentada, las tesis culturales encarnan visiones de qué tipo de seres son deseados y cuales no; y por lo tanto las tesis culturales efectúan diferenciaciones y abyecciones. Cuando individuos concretos se enfrentan a esas tesis y sus normas de in(ex)clusión, se forma su *subjetividad* como sentido de quién es y sus posibilidades como ser dentro de los marcos de su cultura. Los procesos de subjetivación se entienden como efectos de poder que moldean ideas colectivas que perduran más allá de lo individual para organizar lo colectivo y generar mecanismos de diferenciación, ordenamiento y selección en una sociedad. En otras palabras, son los procesos a través de los cuales el poder opera. Y el conocimiento —en particular el científico y sus verdades y resultados en cada momento histórico— es parte de tales mecanismos, como bien lo mostró el filósofo Michel Foucault (2000).

En otros términos teóricos diferentes —pero emparentados— Vargas-Plaça y Radford (2023) explican que en la formación inicial de la teoría de la objetivación, el papel de la subjetividad no estaba claramente enunciado y la objetivación y apropiación del conocimiento eran preponderantes. Sin embargo, las evidencias sobre las transformaciones de los participantes en el aprender ayudó a resaltar que, en todo proceso epistemológico, el ser humano hace sentido de lo que encuentra a su alrededor y al mismo tiempo haya trazas de quién es como parte de los “sistemas semióticos de significados culturales (SSSC)” (Radford, 2021). Y éstos a su vez están vinculados con procesos económicos, estéticos, políticos, etc. En palabras de estos autores, “estos sistemas delinean (sin determinarlos causalmente) el poder de acción del individuo (o sea su agenciamiento) de maneras siempre relativas a su momento político e histórico” (Vargas-Plaça & Radford, 2023, pp. 5, mi traducción del original en portugués). Los autores, en conclusión, proponen entender la noción de ser como “formas culturales de existir y vivir en el mundo: formas de concebirse y ser concebido, formas de posicionarse y ser posicionado, y formas del “yo” y la alteridad (o sea, de relacionamientos consigo y con los otros)” (pp. 6). Ellos distinguen entre *subjetividades* como manifestaciones posibles individuales —lo que otros y yo misma en este texto hemos denominado como identidades— y el *ser* como una categoría general cultural, y también se refieren a la subjetivación como los procesos dialécticos entre un sujeto y las múltiples dimensiones que organizan la vida de ese sujeto (pp. 7).

Con el ejemplo anterior sobre los cuerpos femeninos —y el uso de las nociones de tesis culturales y abyección de Popkewitz y de subjetividad de Radford y Vargas-Plaça— no quiero expresar mi juicio personal de valor sobre esta situación: si estoy de acuerdo o no, o si es bueno o malo que sigan navegando afirmaciones que relacionan diferencias de género y Matemáticas de maneras determinadas. Mi punto es explicar y proveer un ejemplo concreto de que el mecanismo cultural, histórico de diferenciación basado en una visión de la biología humana que ha servido para organizar sociedades, diferenciando roles, acceso y privilegios, no deja de operar ni en la educación, ni en la escuela, ni en la Educación Matemática. Al contrario, es en los espacios de la educación (Matemática) donde, en el día a día, con las pequeñas afirmaciones y acciones repetitivas sobre la capacidad de las “niñas o mujeres” y las Matemáticas, donde se van constituyendo identidades individuales y subjetividades históricas que entienden el cuerpo femenino como (no) apto para las Matemáticas. Este ha sido el tema de estudio de muchos investigadores que han explorado cómo las identidades de género e identidades Matemáticas se

relacionan y se manifiestan en distintos ámbitos de la Educación Matemática. La revisión más reciente de la literatura que presentan Leyva y Nazemi (2024), además de ilustrar la ampliación en las categorías de identificación de género en la actualidad, provee detalles sobre la interseccionalidad entre las identidades de género y otras identidades y la formación de identidades matemáticas.

Otro ejemplo de un tipo de investigación que ha florecido en los Estados Unidos y que comienza a tener resonancia en otras geografías es la investigación sobre las diferenciaciones de raza, el racismo, la racialización y la constitución de identidades y subjetividades en la Educación Matemática. El reciente número especial de la revista *Educational Studies in Mathematics* (Martin et al., 2024) presenta un avance en esta línea de trabajo. En particular, las investigaciones de Valoyes-Chávez con niños de comunidades negras en Colombia (Valoyes-Chávez, 2015, 2017) y con inmigrantes negros en Chile (Valoyes-Chávez, 2021) es de destacar. La tesis cultural que permite organizar y reproducir la violencia racial, el racismo y la potencial exclusión de muchos niños se basa en la asociación entre las características de su cuerpo e ideas histórica y culturalmente conformadas sobre las capacidades cognitivas de esos cuerpos. Valoyes-Chávez y Darragh (2024) presentan una investigación sobre cómo esas tesis culturales operan en contextos de Educación Matemática progresiva donde profesores han aprendido a trabajar con la resolución de problemas con la intención de incluir a todos los estudiantes. En la documentación sistemática de las prácticas de profesores en estos ambientes aparecen episodios repetidos del relacionamiento con los estudiantes inmigrantes negros en la clase organizada bajo los principios de reforma de la resolución de problemas.

En el análisis que las investigadoras presentan hay dos puntos centrales. Primero, es importante entender la violencia racial evidente en las instancias de clase no como manifestaciones individuales de racismo de un profesor determinado con unos estudiantes particulares, sino como el efecto de un ordenamiento histórico de la sociedad chilena con respecto al “otro”, inmigrante con cuerpo negro, pues es justamente en estos ordenamientos estructurales de una sociedad donde se encuentra parte de la forma colectiva de actuar en la educación frente a ciertos tipos de estudiantes, es decir, de reproducir *prácticas educativas racializantes* y de construir *subjetividades racializadas*. Segundo, hay mecanismos particulares, *tecnologías político-raciales*, que operan en las clases de Matemáticas que se acentúan en la articulación entre las ideas del “otro” y sus capacidades matemáticas. Las investigadoras identificaron en los datos de aula el “*marcar como único*”— *single out*, en inglés— como aquella tecnología político-racial que hace del cuerpo del niño negro públicamente único y diferente en la clase e incapaz de cumplir con las normas sociales y matemáticas establecidas. También identificaron la “*invisibilización*” como la tecnología que permite hacer como si no existiera la presencia del estudiante negro. Esta tecnología no sólo la utiliza la profesora al ignorar sistemáticamente, por ejemplo, la mano levantada de los niños negros que quieren contribuir respuestas a las preguntas de la profesora, sino también los mismos compañeros en el trabajo en grupo que no escuchan a sus compañeros negros y por lo tanto descartan la posibilidad de que un cuerpo negro tenga algo relevante que decir para resolver un problema, cuando de hecho se muestra que tal cuerpo tiene el conocimiento y competencia matemática para contribuir.

El resultado de la operación sistemática de estos mecanismos constituye una subjetividad racial de los niños negros como un “otro ineducable matemáticamente”, que se diferencia de los

otros niños “normales”. Esta idea —o tesis cultural y la abyección que insta— contribuye a dar forma a las posibilidades de participación y actuación de los niños negros en la clase de Matemáticas. De tal manera, “la normalización del niño negro inmigrante consiste en fabricar a un niño que encaja con el estereotipo de ser un niño matemáticamente ineducable” (Valoyes-Chávez & Darragh, 2024, p. 495). Un punto final álgido de la crítica que presentan las autoras es que situaciones como las analizadas y sus efectos son endémicas, incluso en ambientes de pedagogía innovadora como la resolución de problemas. Por lo tanto, las promesas de la inclusión de ciertas reformas tienen límites claros cuando se trata de ofrecer oportunidades de inclusión real a quienes estructuralmente se trata como excluidos.

Esta investigación en particular evidencia la manera como la indagación sobre la formación de identidades y subjetividad matemática es relevante para completar nuestro acervo de conocimiento de la disciplina, sobre todo en lo concerniente a aquellos procesos que inseparablemente acompañan y constituyen la apropiación del conocimiento matemático. En esta investigación podemos ver claramente los efectos de poder en las descripciones mismas de episodios de violencia contra los niños, y en las historias de identidad que cuentan sobre su relación con las Matemáticas. Y al mismo tiempo la investigación nos muestra una lectura de cómo identidades e ideas particulares del “ser negro” —sentidos culturales del ser y la subjetividad— se co-constituyen. Un punto adicional es que, dado que estas relaciones se forman en el ámbito de la clase de Matemáticas, donde circulan formas de conocimiento altamente valoradas y deseadas socialmente, los efectos de violencia, marginalización y exclusión son más profundos y perdurables en el sentido de ser que forman los niños a quienes se les otorga el rótulo de “no educable matemáticamente”, y también en el sentido de aquellos en la situación opuesta: los que sí son “normales” y pueden acceder a y tener éxito con la apropiación del conocimiento matemático. Por esta razón, la contribución de este tipo de investigaciones radica en iluminar los procesos de subjetivación de muchos estudiantes en posiciones marginadas, y también crecientemente los de aquellos que tienen éxito en Matemáticas en diversos niveles del sistema educativo (e.g., Beccuti et al., 2024).

De forma similar a estas investigaciones sobre las subjetividades raciales en Matemáticas, muchos otros investigadores han explorado los encuentros, choques e invisibilizaciones que surgen entre las identidades y subjetividades sociales y Matemáticas de los estudiantes con respecto a su nacionalidad (e.g., Yolcu, 2025), su lenguaje y etnicidad (e.g., Leyva & Joseph, 2023), su situación de vulnerabilidad (e.g., García et al., 2013; Valero et al., 2022) o incluso su ubicación geográfica (Franco Neto & Valero, 2025). Este me parece ser un tema que el *Fourth International Handbook of Mathematics Education* (Clements et al., 2024) aborda extensamente, y que es de gran relevancia para entender los efectos políticos de la Educación Matemática en los territorios de América Latina y el Caribe, donde la historia de colonización y la persistencia de la colonialidad en muchas sociedades resalta el doble papel de las Matemáticas escolares en las dinámicas de formación de las naciones y el gobierno de sus poblaciones. Estos han sido temas que se han tratado especialmente por investigadores en Educación Matemática en el Brasil y en Colombia (Charry et al., 2020; Parra & Valero, 2021; Tamayo & Mendes, 2021), y que empiezan a explorarse más en otros países de la región, pero donde todavía hay mucho campo para avanzar, en especial dada la precariedad endémica en las condiciones de la mayoría de los estudiantes en las aulas de Matemáticas.

Retos a la subjetivación matemática en tiempos de crisis

En mi propia investigación de la última década la formación de subjetividades con respecto a las Matemáticas ha sido el foco de atención sobre el estudio de los efectos de poder de la Educación Matemática. De ahí que la pregunta inicial *¿qué tipo de persona nos volvemos con las Matemáticas?* haya sido central para la investigación que hemos realizado en colaboración con estudiantes doctorales y con colegas en Dinamarca, Suecia y otros países como Brasil, Chile y Colombia. Las propuestas de la Educación Matemática crítica que se han expandido gracias al trabajo del recientemente fallecido Ole Skovsmose en la UNESP de Rio Claro (e.g., Penteadó & Skovsmose, 2022; Skovsmose, 2023; Valero & Skovsmose, 2012) han despertado gran interés en la región para explorar alternativas para la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas en contextos difíciles de conflicto y exclusión. Hoy en día, hay un número creciente de profesores y estudiantes de maestría y doctorado que han buscado inspiración en estas ideas para responder a las necesidades sentidas de contextos que difieren de aquellos en los que se basan muchas de las investigaciones publicadas en revistas regionales o internacionales. Como ejemplo podemos mencionar el número especial de la *Revista Latinoamericana de Etnomatemática* donde se presentan investigaciones que han tomado y recontextualizado estas ideas a las condiciones y problemas de la Educación Matemática en Colombia (ver volúmenes 14 (1) y 13(4) en <https://www.revista.etnomatematica.org/index.php/RevLatEm/issue/archive>).

Si bien los estudios sociopolíticos de la Educación Matemática han aumentado, sigue habiendo una gran necesidad de cuestionar por qué en la Educación Matemática, entre más se aumenta el deseo explícito de incluir, se terminan reforzando y expandiendo exclusiones de estudiantes en contextos de conflicto, fragilidad y crisis (Valero, 2017a). Como señalan Valoyes-Chávez, Parra y Alshwaikh (2024) es el momento de cuestionar y entender el funcionamiento de la Educación Matemática en la creación y reproducción misma de las crisis y conflictos generados por los órdenes económicos, políticos y sociales de exclusión en sociedades del Sur Global. Esto porque, como ya lo hemos explicado en las secciones anteriores, los procesos de objetivación del conocimiento matemático son inseparables de los sistemas simbólicos y materiales que nos hacen quienes somos, en todas sus multiplicidades, con y a través de nuestra participación (exitosa o no) en las prácticas de la Educación Matemática.

Sostenido por el papel que se les ha otorgado a las Matemáticas en la constitución económica y tecnológica del mundo moderno, parte del discurso de la Educación Matemática como campo de investigación y práctica es la presentación positiva de todas aquellas bondades que ofrece el poseer capacidad matemática para el desarrollo individual y el progreso tecnológico y el fortalecimiento económico de la sociedad (e.g., Harouni, 2015). Una muestra sencilla de esto es la centralidad que han adquirido las Matemáticas en las mediciones comparativas internacionales del currículo y las competencias representados por los estudios TIMSS y PISA (Wolfmeyer, 2024) y el deseo de los educadores matemáticos por contribuir a lograr los objetivos de las pruebas y las promesas de las organizaciones que las administran. Tal vez podríamos ser más críticos con respecto a lo que alcanzar tales objetivos significa (Boistrup & Valero, 2024). Con frecuencia, los educadores matemáticos nos vemos a nosotros mismos como agentes de cambio fundamentales, educadores e investigadores que ofrecen un producto deseado y que cumplen una función loable en la sociedad. ¡Vendemos un producto con alta demanda! (Montecino & Valero, 2017). Genuinamente deseamos mejorar la sociedad y

contribuir a mejorar el mundo a través de nuestro amor por las Matemáticas. Esto es muy entendible, si miramos la conexión estrecha que ha habido entre la función reciente de la Educación Matemática en los sistemas educativos y el apoyo que se ha recibido de organismos internacionales y nacionales, en especial la OCDE desde sus inicios. No obstante, nuestras buenas intenciones a veces se ven opacadas por la realidad.... ¿Por qué?

Al discurso exacerbado sobre los efectos positivos y las bondades de la Educación Matemática lo podríamos llamar “salvacionista” pues ofrece una promesa de redención y mejora del individuo y de la sociedad al proponer expandir la cantidad y calidad de las “Matemáticas para todos” —que en realidad son unos pocos (Valero, 2017b). Ese discurso ha sido críticamente analizado (e.g., Radford, 2023; Valoyes-Chávez et al., 2024) frente a las realidades crueles de exclusión y opresión que siguen reproduciéndose diariamente en muchas instancias de la Educación Matemática. En particular, el deseo de alineamiento con el progreso tecnocientífico posiciona a la Educación Matemática como piedra angular de la reproducción económica capitalista y su lógica neoliberal, y tiene efectos claros en la formación de identidades y subjetividades que se conciben a sí mismas como partícipes fundamentales de esta lógica (e.g., Llewellyn, 2016; Skovsmose, 2023). Investigaciones existentes muestran cómo estos procesos suceden en la Educación Matemática (e.g., de Toledo e Toledo et al., 2018; Doğan & Haser, 2014) y hacen parte de la manera como la investigación misma promueve tesis culturales sobre la formación de sujetos matemáticos modernos, neoliberales y capitalistas (Valero & Knijnik, 2015; Ziols & Kirchgasler, 2021). Aunque con frecuencia pasa inadvertida —o incluso a veces se considera como deseable— esta asociación es problemática dados los efectos de las inequidades materiales y educativas crecientes que afectan seriamente las posibilidades de vida de muchos estudiantes. Frente a estas inequidades, las promesas —incumplidas— de la Educación Matemática se quedan cortas como argumentos para sostener ciertos tipos de narrativas y prácticas y sus efectos de poder.

Este es uno de los elementos de la encrucijada en que nos encontramos en este momento histórico. La agravación de los conflictos y crisis existentes junto con los inminentes riesgos del colapso de muchos sistemas ecológicos del planeta nos ponen nuevos retos serios e ineludibles. Una nueva área a la que la Educación Matemática está llamada a responder es aquella de la sostenibilidad y cambio climático, que es el tema del nuevo estudio internacional del ICMI “*La Educación Matemática y lo socioecológico*” (le Roux et al., 2025). Frente a la problemática que el entrelazamiento de las múltiples crisis del momento —inequidad, explotación, guerras, militarización, resquebrajamiento de instituciones democráticas, el avance de tecnologías como la inteligencia artificial y los cambios de la materialidad física del planeta como consecuencia de la acción humana— podríamos generar una narrativa de salvación renovada que re-posicione la importancia de la Educación Matemática para responder y actuar en este momento. Si sólo lográramos mejores conocimientos matemáticos, más desarrollo de competencias de modelación con tecnología, más contextualización con las realidades de sostenibilidad, más pensamiento crítico... Nuestra reacción histórica y culturalmente aprendida es la de encontrar relevancia para justificar los repertorios de la Educación Matemática sobre lo que creemos saber cómo hacer pero que, sin embargo, también sabemos, no ha dado mayor resultado. Como educadores solemos ser optimistas, por ejemplo, replanteándonos las ideas usuales para proponer una Educación Matemática más ética y liberadora. Esta es la propuesta de Radford (2023) o la de Coles, Solares-Rojas y Le Roux (Coles et al., 2024).

Mi punto de vista crítico es aparentemente más pesimista y radical. En otros escritos (Valero, 2023) he discutido la imposibilidad de conciliar las formas de subjetivación matemática que han dominado en el devenir del currículo de Matemáticas en la escuela masiva moderna con los cambios de sentido de ser —y sus formas relacionadas de entendernos y entender nuestro entorno— a los que las múltiples crisis del cambio climático nos enfrentan urgentemente. Siguiendo los análisis de Bruno Latour sobre la imposibilidad de continuar con el proyecto cultural de la modernidad y con su visión de la naturaleza como inacabable y separada del ser humano (Latour, 2017, 2018), es imposible mantener el deseo de avanzar subjetividades modernas para continuar con formas irresponsables de progreso, explotación y capitalismo que han producido el entrelazamiento de las crisis actuales con la ciencia, la tecnología y las Matemáticas. Esta advertencia cuestiona de manera profunda si es posible para la Educación Matemática mantener el deseo y objetivo de contribuir a la formación de subjetividades capitalistas modernas, y promover narrativas de salvación como las que se han discutido anteriormente. A mi modo de ver, nos encontramos frente a una contradicción fundamental para el campo de investigación y práctica de la Educación Matemática. Puesto de una manera provocadora, desear más y mejores Matemáticas del tipo que deseamos socialmente y como comunidad de investigación implica proclamar una sentencia de muerte al planeta. De esta encrucijada no hay ninguna salida fácil.

Mi intención con esta formulación es resaltar la seriedad del reto del momento. Por supuesto los efectos políticos y culturales en la formación de subjetividades no son totalitarios. Es decir que no todas las personas construyen las mismas identidades y subjetividades frente a las Matemáticas. Esta diversidad también está documentada en la investigación que discutí al inicio de este artículo. Además, como he mostrado antes, las narrativas de identidad y el sentido de quienes somos con las Matemáticas son maleables. No obstante, el esfuerzo de este momento es mayor que la reinención de nuevos contextos problemáticos de sostenibilidad para los mismos contenidos matemáticos y relaciones pedagógicas típicas de nuestro repertorio. Esto sería una pura estrategia de “lavado de imagen verde” que no conduce a transformaciones reales sino cosméticas (Valero & Beccuti, 2025). Si las Matemáticas como formas de conocimiento y relacionamiento con el mundo son poderosas y se han transformado en la historia, podríamos embarcarnos en la labor difícil pero urgente de imaginar otras posibilidades de lo que podrían ser lo matemático en la educación y las sensibilidades y responsabilidades que podrían promover en quienes se relacionan con ellas. Esto implica un trabajo filosófico y cultural extenso, que tal vez estamos preparados para emprender.

Referencias y bibliografía

- Andersson, A. (2011). *Engagement in education: Identity narratives and agency in the contexts of mathematics education*. Aalborg University. Aalborg.
- Andersson, A., & Valero, P. (2016). Negotiating critical pedagogical discourses: Stories of contexts, mathematics, and agency. In P. Ernest, B. Sriraman, & N. Ernest (Eds.), *Critical mathematics education. Theory, praxis and reality* (pp. 199–226). Information Age Publishing.
- Andersson, A., Valero, P., & Meaney, T. (2015). “I am (not always) a maths hater”: Shifting students’ identity narratives in context. *Educational Studies in Mathematics*, 90(2), 143–161. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9617-z>
- Beccuti, F., Valero, P., & Robutti, O. (2024). Stories of devoted university students: the mathematical experience as a form of ascesis. *Educational Studies in Mathematics*, 115(1), 51–67. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10259-4>

- Boistrup, L. B., & Valero, P. (2024). Networks, controversies, and the political in mathematics education research. In B. Greer, D. Kolloosche, & O. Skovsmose (Eds.), *Breaking Images. Iconoclastic Analyses of Mathematics and its Education* (pp. 373–404). Open Book Publishers. <https://doi.org/10.11647/obp.0407.15>
- Charry, O., Tamayo, C., & Jaramillo, D. (2020). ¿Matemáticas para todos? Deconstrucciones desde un territorio chocoano. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 13(4), 95–119. <https://doi.org/10.22267/relatem.20134.74>
- Chronaki, A. (2016). Mathematics education as a matter of identity. In M. A. Peters (Ed.), *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory* (pp. 1–6). Springer. https://doi.org/10.1007/978-981-287-532-7_517-1
- Clements, M. A., Kaur, B., Lowrie, T., Mesa, V., & Prytz, J. (Eds.). (2024). *Fourth International Handbook of Mathematics Education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-51474-6>
- Coles, A., Solares-Rojas, A., & Le Roux, K. (2024). Socio-ecological gestures of mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 165–183. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10318-4>
- Cribbs, J. D., & Utley, J. (2024). Mathematics identity instrument development for fifth through twelfth grade students. *Mathematics Education Research Journal*, 36(4), 767–789. <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00474-w>
- Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education [journal article]. *Educational Studies in Mathematics*, 93(1), 19–33. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9696-5>
- de Toledo e Toledo, N., Knijnik, G., & Valero, P. (2018). Mathematics education in the neoliberal and corporate curriculum: the case of Brazilian agricultural high schools. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 73–87. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9825-4>
- Doğan, O., & Haser, Ç. (2014). Neoliberal and nationalist discourses in Turkish elementary mathematics education. *ZDM*, 46(7), 1013–1023. <https://doi.org/10.1007/s11858-014-0605-z>
- Foucault, M., & Faubion, J. D. (2000). *Power*. New Press – W.W. Norton.
- Franco Neto, V., & Valero, P. (2025). Learning to become a modernized peasant-citizen through Brazilian mathematics textbooks. In A. Chronaki & A. Yolcu (Eds.), *Troubling Notions of Global Citizenship and Diversity in Mathematics Education* (pp. 221–236). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003130673-15>
- García, G., Valero, P., Salazar, C., Mancera, G., Camelo, F., & Romero, J. (2013). *Procesos de inclusión/ exclusión. Subjetividades en educación matemática*. Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.
- Gómez-Chacón, I. M. (2000). *Matemática emocional. Los afectos en el aprendizaje matemático*. Narcea.
- Graven, M., & Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Mathematics identity research: the state of the art and future directions. *ZDM*, 51(3), 361–377. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01050-y>
- Harouni, H. (2015). Toward a political economy of mathematics education. *Harvard educational review*, 85(1), 50–74. <https://doi.org/10.17763/haer.85.1.2q580625188983p6>
- Heyd-Metzuyanim, E. (2019). Identity at the crossroads, collision or conciliation? A commentary. In M. S. Hannula, G. C. Leder, F. Morselli, M. Vollstedt, & Q. Zhang (Eds.), *Affect and Mathematics Education: Fresh Perspectives on Motivation, Engagement, and Identity* (pp. 419–428). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-13761-8_19
- Heyd-Metzuyanim, E., & Graven, M. (2024). Identity as a critical lens on teaching and learning mathematics. In M. A. Clements, B. Kaur, T. Lowrie, V. Mesa, & J. Prytz (Eds.), *Fourth International Handbook of Mathematics Education* (pp. 413–438). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51474-6_17
- Jablonka, E., Wagner, D., & Walshaw, M. (2013). Theories for studying social, political and cultural dimensions of mathematics education. In M. A. Clements, A. J. Bishop, C. Keitel, J. Kilpatrick, & F. K. S. Leung (Eds.), *Third International Handbook of Mathematics Education* (pp. 41–67). Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4684-2_2
- Kolloosche, D., Marcone, R., Knigge, M., Penteadó, M., & Skovsmose, O. (2019). *Inclusive mathematics education: State-of-the-art research from Brazil and Germany*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-030-11518-0>
- Langer-Osuna, J. M., & Esmonde, I. (2017). Insights and advances on research on identity in mathematics education. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 637–648). National Council of Teachers of Mathematics.
- Latour, B. (2017). *Facing Gaia: Eight Lectures on the New Climatic Regime*. Polity Press.
- Latour, B. (2018). *Down to Earth: Politics in the New Climatic Regime*. Polity Press.
- le Roux, K., Coles, A., Solares-Rojas, A., Bose, A., Vistro-Yu, C. P., Valero, P., Sinclair, N., Makramalla, M., Gutiérrez, R., Geiger, V., & Borba, M. (Eds.). (2025). *Proceedings of the 27th ICMI Study Conference Mathematics Education and the Socio-Ecological*. MATHTED – ICMI. <https://www.mathunion.org/icmi/icmi-study-27>

- Lerman, S. (2000). The social turn in mathematics education research. In J. Boaler (Ed.), *Multiple Perspectives on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 19-44). Ablex Publishing.
- Leyva, L. A., & Joseph, N. M. (2023). Intersectionality as a lens for linguistic justice in mathematics learning. *ZDM Mathematics Education*, 55, 1187–1197. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01489-0>
- Leyva, L. A., & Nazemi, M. (2024). Toward intersectional understandings of gender in mathematics education. In M. A. Clements, B. Kaur, T. Lowrie, V. Mesa, & J. Prytz (Eds.), *Fourth International Handbook of Mathematics Education* (pp. 439–482). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51474-6_18
- Llewellyn, A. (2016). Problematising the pursuit of progress in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 92(3), 299-314. <https://doi.org/10.1007/s10649-015-9645-8>
- Lutovac, S., & Kaasila, R. (2018). Future directions in research on mathematics-related teacher identity. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16(4), 759–776. <https://doi.org/10.1007/s10763-017-9796-4>
- Martin, D. B., Valoyes-Chávez, L., & Valero, P. (2024). Race, racism, and racialization in mathematics education: Global perspectives. *Educational Studies in Mathematics*, 116(3), 313–331. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10346-0>
- Montecino, A., & Valero, P. (2017). Mathematics teachers as products and agents: To be and not to be, that's the point! In H. Stahler-Pol, N. Bohmann, & A. Pais (Eds.), *The Disorder of Mathematics Education. Challenging the Socio-political Dimensions of Research* (pp. 135–152). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-34006-7_9
- Parra, A., & Valero, P. (2021). Propio as a decolonising tool for mathematics education. In A. Andersson & R. Barwell (Eds.), *Applying critical mathematics education* (pp. 71–99). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004465800_004
- Penteado, M., & Skovsmose, O. (Eds.). (2022). *Landscapes of Investigation: Contributions to Critical Mathematics Education*. Open Book Publishers. <https://doi.org/10.11647/OBP.0316>
- Planas, N., & Valero, P. (2016). Tracing the socio-cultural-political axis in understanding mathematics education. In A. Gutiérrez, G. C. Leder, & P. Boero (Eds.), *The Second Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education. The Journey Continues* (pp. 447–479). Sense Publishers.
- Popkewitz, T. S. (2009). El cosmopolitismo y la era de la reforma escolar: la ciencia, la educación y la construcción de la sociedad mediante la construcción de la infancia. Ediciones Morata.
- Radford, L. (2008). Culture and cognition: Towards an anthropology of mathematical thinking. In L. D. English & M. G. Bartolini Bussi (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 439–464). Routledge.
- Radford, L. (2021). *The Theory of Objectification*. <https://doi.org/10.1163/9789004459663>
- Radford, L. (2023). Política, saber y ética: la necesidad de replantear la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educação matemática pesquisa*, 25(2), 45–68. <https://doi.org/10.23925/1983-3156.2023v25i2p45-68>
- Radovic, D., Black, L., Williams, J., & Salas, C. E. (2018). Towards conceptual coherence in the research on mathematics learner identity: A systematic review of the literature. *Educational Studies in Mathematics*, 99(1), 21–42. <https://doi.org/10.1007/s10649-018-9819-2>
- Sfard, A. (2008). *Thinking as Communicating*. Cambridge University Press.
- Sfard, A., & Prusak, A. (2006). Telling identities: In search of an analytic tool for investigating learning as a culturally shaped activity. *Educational Researcher*, 34(4), 14–22.
- Skovsmose, O. (2023). *Critical mathematics education*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-26242-5>
- Tamayo, C., & Mendes, J. R. (2021). Opção decolonial e modos outros de conhecer na Educação (Matemática). *REMAT*, 18, e021038. <https://doi.org/10.37001/remat25269062v18id599>
- Valero, P. (2017a). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 99–128. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce97.126>
- Valero, P. (2017b). Mathematics for all, economic growth, and the making of the citizen-worker. In T. S. Popkewitz, J. Diaz, & C. Kirchgasser (Eds.), *A Political Sociology of Educational Knowledge: Studies of Exclusions and Difference* (pp. 117–132). Routledge.
- Valero, P. (2018). Political perspectives in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 1-4). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77487-9_126-4
- Valero, P. (2023). Mathematical subjectivation: Death sentence to the planet or chances for a terrestrial life. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel, & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME)* (Vol. 1, pp. 53–68). PME – University of Haifa. <https://www.igpme.org/wp-content/uploads/2023/08/PME-46-Vol-1-PL-RF-WG-CQ-SE-OC-PP-NP.pdf>

- Valero, P., & Beccuti, F. (2025). Troubling the aims of mathematics education in the socio-ecological. In K. le Roux, A. Coles, A. Solares-Rojas, A. Bose, C. P. Vistro-Yu, P. Valero, N. Sinclair, M. Makramalla, R. Gutiérrez, V. Geiger, & M. Borba (Eds.), *Proceedings of the 27th ICMI Study Conference Mathematics Education and the Socio-Ecological* (pp. 132–139). MATHTED – ICMI. <https://www.mathunion.org/icmi/icmi-study-27>
- Valero, P., García Oliveros, G., Camelo, F. J., Mancera, G., & Romero, J. (2022). La educación matemática y la dignidad de estar siendo. *Revista de Educación Matemática*, 37(3), 38–59. <https://doi.org/10.33044/revem.39920>
- Valero, P., & Knijnik, G. (2015). Governing the modern, neoliberal child through ICT research in mathematics education. *For the Learning of Mathematics*, 35(2), 34–39.
- Valero, P., & Skovsmose, O. (2012). Educación matemática crítica: una visión socio-política del aprendizaje y enseñanza de las matemáticas. una empresa docente – Ediciones Uniandes.
- Valoyes-Chávez, L. (2015). Los negros no son buenos para las matemáticas: ideologías raciales y prácticas de enseñanza de las matemáticas en Colombia. *Revista CS. Estudios sociales sobre América Latina*, 16, 169–206. <https://doi.org/10.18046/recs.i16.1909>
- Valoyes-Chávez, L. (2017). Inequidades raciales y educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 127. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce127.150>
- Valoyes-Chávez, L., & Darragh, L. (2024). Interrogating the equity promise for Black immigrant students in reformed mathematics classrooms. *Educational Studies in Mathematics*, 116(3), 479–499. <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10314-8>
- Valoyes-Chávez, L., Parra, A., & Alshwaikh, J. (2024). Mathematics, mathematics education, and “conflict”: Denial, suspension, and resistance. In M. A. Clements, B. Kaur, T. Lowrie, V. Mesa, & J. Prytz (Eds.), *Fourth International Handbook of Mathematics Education* (pp. 483–506). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-51474-6_19
- Valoyes-Chávez, L. E. (2021). “Me dicen negro, pero eso ya no es una molestia para mí”: historias de agencia racial en la escolaridad chilena. *Nodos y Nudos*, 7(50), 45–60. <https://doi.org/10.17227/nyn.vol7.num50-12550>
- Vargas-Plaça, J., & Radford, L. (2023). Teoría de la objetivación: Un enfoque en la producción de subjetividades. *Revista Venezolana de Investigación en Educación Matemática*, 3(3), 1–17. <https://doi.org/10.54541/reviem.v3i3.71>
- Wagner, D., Prediger, S., Artigue, M., Bikner-Ahsbahs, A., Fitzsimons, G., Meaney, T., Mesa, V., Pitta-Pantazi, D., Radford, L., & Tabach, M. (2023). The field of mathematics education research and its boundaries. *Educational Studies in Mathematics*, 114(3), 367–369. <https://doi.org/10.1007/s10649-023-10270-9>
- Wolfmeyer, M. (2024). Globalisation of mathematics education and the world’s first monoculture: Assessment spread’s association with consumerism and human capital. In B. Greer, D. Kollosche, & O. Skovsmose (Eds.), *Breaking Images. Iconoclastic Analyses of Mathematics and its Education* (pp. 405–433). Open Book Publishers. <https://doi.org/10.11647/obp.0407.16>
- Yolcu, A. (2025). Travellings of mathematically able bodies to Turkey. In A. Chronaki & A. Yolcu (Eds.), *Troubling Notions of Global Citizenship and Diversity in Mathematics Education*, (pp. 153–169). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781003130673-11>
- Ziols, R., & Kirchgasler, K. L. (2021). Health and pathology: a brief history of the biopolitics of US mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1), 123–142. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10110-8>



La enseñanza de las Matemáticas frente a los retos del mundo actual

Michèle Artigue

Laboratorio de Didactica André Revuz, Université Paris Cité

Francia

michele.artigue@univ-paris-diderot.fr

Resumen

La enseñanza de las Matemáticas se enfrenta constantemente a nuevos retos, y esto es particularmente cierto hoy en día dada la acumulación de crisis, los avances tecnológicos y el hecho de que esta enseñanza no está contribuyendo como debería a la lucha contra las desigualdades y las discriminaciones, y a la formación de ciudadanos comprometidos y críticos. En esta ponencia, examinaré lo que la investigación didáctica puede aportar hoy para enfrentar estos retos, cruzando cuatro problemáticas: las reformas curriculares, la integración tecnológica, la modelización y la interdisciplinariedad, la formación inicial y el desarrollo profesional del profesorado.

Palabras clave: Educación Matemática; Retos educativos; Reformas curriculares; Integración tecnológica; Modelización; Interdisciplinariedad; Formación inicial docente; Desarrollo profesional docente.

Introducción

La enseñanza de las Matemáticas se enfrenta constantemente a nuevos retos. Esto es particularmente cierto hoy en día dada la acumulación de crisis, los avances tecnológicos y el hecho de que la enseñanza no está contribuyendo como debería a la lucha contra las desigualdades y las discriminaciones, y a la formación de ciudadanos comprometidos y críticos. Por supuesto, la enseñanza de las Matemáticas no es la única afectada por estas cuestiones, pero está claro que tiene un papel especial que desempeñar en un mundo en el que, aunque sigan siendo invisibles para muchos, las Matemáticas, a través de las tecnologías que permiten desarrollar, están cada vez más omnipresentes, en una evolución que parece volverse incontrolable. ¿Imaginábamos, por ejemplo, hace unos años, cuando nos enfrentábamos a la pandemia creada por la COVID-19 y sus efectos nocivos en los sistemas educativos, de los que

aún no nos hemos recuperado completamente en muchos países, el tsunami que iba a provocar la explosión de las tecnologías de inteligencia artificial generativa, de las que ChatGPT se ha convertido en un símbolo? ¿Previmos la necesidad de que los sistemas educativos se adaptaran con urgencia a estas tecnologías digitales que alumnos y profesores parecen estar adoptando con una rapidez que contrasta con la laboriosa integración de las tecnologías digitales cuyas posibilidades se ha intentado hasta ahora poner al servicio de la enseñanza de las Matemáticas: calculadoras, programas informáticos de geometría dinámica, hojas de cálculo, etc.?

Vivimos en un mundo cada vez más incierto, atrapados en espirales que parecen escapar a todo control. Los retos a los que se enfrenta la enseñanza en general, y la enseñanza de las Matemáticas en particular, son inmensos. Es necesario introducir cambios en los planes de estudios, en la formación del profesorado y en el acompañamiento de su desarrollo profesional y, de manera más general, en la forma de concebir las relaciones entre la Escuela y la sociedad. ¿En qué medida pueden ayudarnos los conocimientos acumulados durante más de medio siglo por la investigación didáctica? ¿En qué medida pueden ayudarnos tanto a pensar en estos cambios como a evitar las trampas en las que han caído regularmente las diversas reformas, a pesar de sus loables intenciones?

En esta conferencia, me gustaría compartir algunas reflexiones sobre estas cuestiones, basadas en mi experiencia personal y mis lecturas. Me enfocaré en cuatro problemáticas: las reformas curriculares, la integración tecnológica, la modelización y la interdisciplinariedad, y la formación y el desarrollo profesional de los docentes. Por supuesto, estas problemáticas están lejos de abarcar todo lo que requeriría un abordaje mínimamente exhaustivo del problema, pero corresponden a aspectos en los que he tenido oportunidades de trabajar y trataré de extraer algunas lecciones de esto. Aunque las separo por razones de exposición, no son en absoluto independientes. Por otra parte, aunque estoy convencida de que los conocimientos y la experiencia acumulados durante décadas pueden ayudarnos a afrontar los retos actuales, también estoy convencida de que tienen claras limitaciones a la hora de pensar en posibles respuestas, y trataré de señalarlo. Las necesidades de investigación que generan estos retos son, en efecto, también inmensas.

Las reformas curriculares

En diciembre de 2018 se organizó en Tsukuba (Japón) la conferencia asociada al estudio ICMI 24 dedicada a las reformas curriculares. El libro resultante de este estudio (Shimizu y Vithal, 2023) ofrece un útil estado actual de la reflexión sobre estas cuestiones a principios de la década de 2020. Por supuesto, no se hace referencia a las cuestiones relacionadas con la inteligencia artificial generativa que han surgido más recientemente, pero ya se observa, en la descripción y el análisis de las reformas curriculares llevadas a cabo en muchos países, la preocupación de los sistemas educativos por afrontar los retos que plantean las crisis energéticas y medioambientales, junto con la constatación de que, para contribuir a superar estos retos, la enseñanza de las Matemáticas no puede seguir aislada de la de las demás disciplinas científicas, como sigue ocurriendo con demasiada frecuencia. De hecho, para abordar eficazmente los problemas que hay que resolver se necesitan enfoques interdisciplinarios o incluso transdisciplinarios, sobre lo que volveré más adelante. Estas reformas también reflejan la creciente incertidumbre del mundo contemporáneo y la importancia de una sólida formación en

probabilidades y estadísticas para comprenderla y gestionarla, así como para formar ciudadanos informados. No es casualidad que, en muchos países, la enseñanza de las probabilidades y estadísticas, y el desarrollo de las formas de pensamiento asociadas, comience cada vez más temprano, hoy en día a menudo desde la escuela primaria, y si las directrices curriculares abogan por la inclusión en esta enseñanza en particular de proyectos sobre cuestiones socialmente candentes, basándose en datos reales recopilados mediante encuestas realizadas por los alumnos o mediante el uso de las numerosas bases de datos estadísticos ampliamente accesibles. Otra dimensión común a las recientes reformas curriculares que se destaca en esta obra es el desarrollo del llamado pensamiento computacional y algorítmico, que se convierte en un objetivo de la enseñanza de las Matemáticas, una evolución especialmente necesaria en un mundo dominado por los algoritmos. Por supuesto, se observan muchas otras evoluciones, como, por ejemplo, las reestructuraciones curriculares en torno al concepto de competencia, que expresan además la influencia de organizaciones internacionales como la OCDE en un mundo educativo ampliamente globalizado.

Las diferentes secciones de la obra abordan la cuestión de las reformas curriculares desde distintos ángulos, y todas ellas son muy instructivas. Dentro de las limitaciones impuestas a este texto, he decidido centrarme en una sección, la que se refiere más específicamente a la implementación de las reformas curriculares, en la que contribuí más directamente. A través del análisis de numerosos ejemplos de implementaciones más o menos exitosas, los capítulos de esta sección muestran la complejidad de los procesos en juego, la multiplicidad de variables y actores que los condicionan, y el contraste que a menudo se observa entre el currículo prescrito y el currículo implementado. Mogens Niss, por ejemplo, en el capítulo 16, define un currículo como un vector de seis componentes (objetivos, contenidos, materiales, formas de enseñanza, actividades de los alumnos, evaluación) y subraya la importancia de una gestión coherente y coordinada de estos seis componentes para el éxito de una reforma. Ilustra esto con el contraejemplo que, en cierto modo, representó para él la reforma curricular asociada al proyecto KOM (Competencies and the Learning of Mathematics) en Dinamarca (Niss y Højgaard, 2011) del que fue uno de los principales protagonistas. Subraya, por ejemplo, el desfase entre los objetivos formulados en términos de competencias, una organización de la enseñanza que siguió estando dirigida por los dominios y los contenidos, y métodos de evaluación que no cambiaron.

En el mismo capítulo, en mi contribución, adopto, de forma complementaria, la perspectiva ecológica e institucional propuesta por la teoría de la transposición didáctica y su extensión a la teoría antropológica de la didáctica (Bosch, 2023) para insistir en el hecho de que toda reforma curricular constituye una perturbación ecológica que interviene en un sistema dinámico complejo y abierto, y en la importancia de identificar la naturaleza exacta de esta perturbación (cómo afecta a los nichos y hábitats, a las cadenas tróficas, en particular) y cómo reacciona el sistema ante ella, para analizarla y comprender sus efectos. Estas características sistémicas provocan una incertidumbre intrínseca, lo que hace muy difícil anticipar el futuro de las reformas, por mucho cuidado que se ponga en su diseño. De ahí la importancia de establecer procesos de regulación y sistemas de recopilación de datos entre los diferentes actores implicados en el proceso, que permitan gestionar racionalmente estas regulaciones, como ilustra, por ejemplo, el caso de Japón. Desde este punto de vista y con la perspectiva que dan los años, analizo, por un lado, la reforma de la enseñanza media general (lycée, grados 10-12) llevada a cabo en Francia en 2000 y, por otro, tres reformas llevadas a cabo en países o regiones

francófonos: la Federación de Valonia-Bruselas en Bélgica, Quebec en Canadá y Túnez. La reforma de la enseñanza media fue una reforma ambiciosa cuyos ejes principales eran un refuerzo muy importante de la enseñanza de la estadística y el énfasis en la interdisciplinariedad y la modelización. Su éxito estaba lejos de estar garantizado. Las tres reformas tenían como objetivo el desarrollo de planes de estudios estructurados por competencias y tuvieron efectos contrastados. En ambos casos, el análisis sistémico y ecológico desarrollado permitió comprender su evolución, cómo se superó la perturbación ecológica, de forma positiva o no.

Ángel Ruiz concluye esta sección formulando lo que denomina las leyes de la implementación curricular. Son las siguientes: *la ley de la diversidad* (puede haber una combinación de factores para la implementación de una reforma curricular que tenga éxito en un país y no en otro), *la ley de las dos direcciones* (para alcanzar el éxito, se debe considerar la existencia de recursos adecuados, especialmente para los docentes, y estrategias de implementación, permitiendo desarrollos tanto de arriba hacia abajo como de abajo hacia arriba; lo esencial es crear una buena sinergia entre estos dos procesos), *la ley de la alineación* (para la implementación más adecuada de una reforma curricular debe haber una alineación de todos los medios educativos con los esfuerzos de reforma), *la ley del largo plazo* (excepto en el caso de cambios curriculares de muy poco alcance, las reformas deben concebirse como procesos a largo plazo) y *la ley de la incertidumbre* (las reformas curriculares no son procesos in vitro y, por lo tanto, conllevan inevitablemente una gran carga de imprevisibilidad e incertidumbre). Por último, la experiencia de la pandemia le llevó a añadir una sexta ley (toda implementación curricular debe incluir un factor (RRR) que implique al menos tres acciones relacionadas con los objetivos: replanteamiento, reformulación y reprogramación), un factor que le parece de particular importancia en países o regiones dentro de un país con un menor desarrollo socioeconómico, educativo y cultural. Son leyes que no debemos olvidar cuando pensando en los cambios curriculares futuros.

Un riesgo denunciado, por otra parte, en este estudio e ilustrado con numerosos ejemplos es el de la acumulación de reformas, ya sea como resultado de la sujeción de las reformas a calendarios políticos a corto plazo o de la rápida y potencialmente caótica evolución de las demandas sociales dirigidas a la Escuela. Se trata, evidentemente, de un riesgo importante en la actualidad por las razones expuestas anteriormente. Como bien muestran los ejemplos, la acumulación de reformas impide una regulación satisfactoria. También agota a los actores y los desmotiva.

La última lección de esta obra en la que me gustaría insistir es la importancia de tener en cuenta la agencia de los actores, en particular de los actores esenciales de cualquier reforma curricular que son los docentes. Esto se destaca especialmente en la sección de la obra dedicada al tema E del estudio ICMI (*Agents and Processes of Curriculum Design, Development and Reforms in School Mathematics*) y se ilustra con numerosos ejemplos. Me parece especialmente importante hoy en día para afrontar el reto que plantea el desarrollo de los usos escolares de la IA generativa, habida cuenta de todas las iniciativas que están surgiendo para apoyar los aprendizajes matemáticos y el trabajo docente.

La integración tecnológica

Desde hace más de cincuenta años, la investigación didáctica ha estudiado el potencial de las tecnologías digitales para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas a medida que estas iban surgiendo. También ha contribuido al desarrollo de estas tecnologías, como lo ilustra, por ejemplo, el desarrollo de programas de geometría dinámica. Dos estudios del ICMI se han dedicado a estas cuestiones, el primero y el decimoséptimo (Churchhouse, 1986; Hoyles y Lagrange, 2010). Desde entonces, se han multiplicado las publicaciones, artículos y obras, basadas en una diversidad de enfoques teóricos. En el marco de esta conferencia, me limitaré a uno de estos enfoques, el Enfoque Instrumental (EI), al desarrollo del cual he contribuido activamente desde mediados de los años 90. De hecho, dediqué mi unidad del proyecto AMOR (Awardee Multimedia Online Resources) del ICMI a esta aventura colectiva (Artigue, 2020) y el lector encontrará en la unidad muchas referencias que no repetiré aquí para limitar la lista de referencias. Su aparición se produjo en un momento en el que, en Francia, se planteaba la cuestión de la integración de herramientas de cálculo simbólico, los CAS, en la enseñanza secundaria, y de los cambios curriculares que se necesitaba prever. Se planteaban numerosas preguntas y se expresaban inquietudes, aunque los promotores de los CAS y las primeras investigaciones afirmaban que los CAS podían favorecer el aprendizaje matemático, ya que, al liberar a los alumnos de las tareas técnicas, les permitían dedicarse a actividades más conceptuales y estratégicas. Por ejemplo, desde 1989, se permitía todo tipo de calculadora en el examen de Matemáticas del bachillerato, que cierra los estudios secundarios y permite el acceso a la universidad. ¿Qué pruebas proponer si los alumnos disponían de calculadoras que calculaban derivadas y límites y resolvían ecuaciones? ¿Qué debían ser las metas de la enseñanza si estas tareas emblemáticas de las Matemáticas de secundaria eran realizadas por las calculadoras? A pesar de las evidentes diferencias, no puedo evitar ver una resonancia entre estas preguntas y las que se plantean hoy en día debido al uso por parte de muchos alumnos de herramientas como ChatGPT, y ello desde el comienzo de la secundaria.

En aquel momento, las observaciones que realizamos con los alumnos demostraron rápidamente que las cosas eran mucho más complejas de lo que afirmaban los promotores de esta tecnología. La actividad técnica cambiaba de naturaleza, pero no desaparecía, y el cambio hacia actividades conceptuales y estratégicas no se producía necesariamente. El enfoque instrumental que surgió entonces combinaba la perspectiva de la ergonomía cognitiva desarrollada por Verillon y Rabardel (1995) y la perspectiva institucional de la teoría antropológica de la didáctica (TAD) ya mencionada. Permitió un avance significativo en las cuestiones de integración tecnológica. La perspectiva ergonómica, a través de la distinción entre *artefacto* e *instrumento*, conceptualizaba el hecho de que una herramienta, sea cual sea, no es de por sí un instrumento para quien la utiliza, sino que esto es el resultado de un proceso generalmente complejo denominado *génesis instrumental*, que se traduce en la elaboración o apropiación de esquemas de uso y acción instrumentada. La TAD ayudaba a tener en cuenta la dimensión institucional de estos procesos de génesis instrumental, las condiciones y restricciones que los influyen en los diferentes niveles de la escala de co-determinación didáctica distinguidos en esta teoría. También ayudaba, a través de su modelo praxeológico de las actividades humanas, a superar la contraproducente oposición entre actividad técnica y conceptual, al pensar sus relaciones de forma dialéctica. De este modo, llevaba a considerar la *doble valencia, epistémica y pragmática*, de las técnicas enseñadas. En efecto, estas tienen una valencia pragmática al

transformar las situaciones y producir resultados, pero también tienen una valencia epistémica, ya que contribuyen a la comprensión de los objetos que ponen en juego. Y su enseñanza se justifica por estas dos valencias, y no solo por la pragmática. Si no fuera así, ¿por qué se daría siempre tanta importancia a la enseñanza de técnicas operatorias como la de división? Esta distinción, por último, ayudaba a apuntar el desequilibrio creado entre estas dos valencias por el uso de los CAS en detrimento de la valencia epistémica, y la necesidad de crear nuevas tareas para restablecer un equilibrio satisfactorio entre ellas. Está claro que con un CAS, un alumno puede resolver en pocos minutos una larga lista de ecuaciones cuadráticas, pero ¿qué habrá aprendido?

Iniciado en el contexto de los CAS, el enfoque instrumental demostró posteriormente su pertinencia para otras tecnologías, ya fueran tecnologías como las hojas de cálculo que, al igual que los CAS, no se habían concebido inicialmente para la enseñanza, o tecnologías diseñadas para la enseñanza, como los programas informáticos de geometría dinámica. Centrado inicialmente en el alumno, el enfoque se extendió posteriormente al profesor, lo que condujo a nuevas construcciones conceptuales, como la de *orquestración instrumental* introducida por Trouche o de *doble génesis instrumental*, para tener en cuenta la necesidad de que el profesor se apropie de estas herramientas tecnológicas para su propia actividad matemática, pero también para convertirlas en instrumentos de su actividad didáctica.

No puedo entrar en más detalles, pero creo que los numerosos conocimientos empíricos, conceptuales y metodológicos adquiridos gracias a los trabajos de investigación que han utilizado este enfoque instrumental, a menudo combinándolo con otras perspectivas teóricas, pueden ayudarnos a abordar los retos que plantea la irrupción de tecnologías como la IA generativa, a pesar de las evidentes diferencias de contexto. Al igual que otras tecnologías, estas tecnologías no son, en sí mismas, instrumentos para la actividad de los alumnos y profesores. Las observaciones realizadas con alumnos y estudiantes, por ejemplo, muestran la aparición de fenómenos similares a los ya observados, la búsqueda de respuestas a través de la multiplicación de «prompts» en lugar del análisis de las respuestas proporcionadas, o la confianza excesiva en las respuestas propuestas por las IAG. De ello se derivan numerosas preguntas: ¿Cuáles son las necesidades matemáticas y tecnológicas de estas nuevas génesis instrumentales? ¿Qué nivel de conocimiento del funcionamiento de estas herramientas se requiere y cómo acceder a la información necesaria? ¿Cómo acompañar institucionalmente estas génesis instrumentales y cuál debe ser la responsabilidad de los profesores de Matemáticas? Y también: ¿Qué tipos de tareas para encontrar un balance productivo entre las valencias epistémicas y pragmáticas de estas herramientas? ¿Qué contratos didácticos establecer para su uso? Son cuestiones muy abiertas y, si bien la búsqueda de respuestas puede beneficiarse de los logros de los trabajos realizados sobre estos temas tecnológicos durante varias décadas, no cabe duda de que será necesario enriquecer las praxeologías de investigación desarrolladas hasta ahora para encontrar respuestas.

Modelización e interdisciplinariedad

Como he señalado en la introducción, la enseñanza de las Matemáticas no puede contribuir a la comprensión y la acción frente a los retos a los que se enfrenta hoy la humanidad si permanece aislada en una torre de marfil. Tanto la comprensión como la búsqueda de soluciones requieren la sinergia de diferentes disciplinas, tanto de las ciencias naturales como de las

humanidades, y, por lo tanto, que la enseñanza de las Matemáticas aborde de manera más eficaz las cuestiones relacionadas con la modelización. Como escribimos en (Maass y al., 2002, p. 33), en el contexto post-pandémico, “mathematical modelling is a key element of citizenship education” y las nuevas exigencias en la materia han ampliado su alcance, “from a focus on learning to apply mathematics to real-world context generally and developing mathematical literacy to include capabilities such as evidence-based decision-making, dealing with uncertainty, and fostering critical and scientific attitudes”. Esta preocupación se refleja claramente en las recientes evoluciones curriculares en todo el mundo. En este ámbito, la investigación didáctica también ofrece numerosos recursos. Por supuesto, se debe mencionar al grupo internacional ICTMA (The International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications)¹, hoy afiliado al ICMI, y así como las publicaciones derivadas de las conferencias que organiza cada dos años desde 1983, el estudio ICMI 14 (Blum y al., 2014) y los números especiales de revistas que se dedican regularmente a este tema.

Por mi parte, aunque desde el inicio de mi carrera he colaborado con didactas de la física, empecé a trabajar realmente en estas cuestiones a principios de la década de 2000 (Artigue, 2012; a parecer), cuando se introdujeron proyectos interdisciplinarios en la enseñanza secundaria y la competencia de modelización se convirtió en una de las seis competencias que la enseñanza de las Matemáticas debía permitir desarrollar a los alumnos, durante la reforma de la enseñanza media mencionada anteriormente. Los profesores, en particular los de Matemáticas, estaban muy mal preparados para ello, al igual que sus formadores. Esto nos llevó a crear un grupo de trabajo específico en el IREM de París con profesores y didactas de Matemáticas, ciencias físicas y químicas, ciencias de la vida y de la tierra, y también a implantar un curso de modelización en el máster didáctico de formación de formadores de la universidad, en el que participé durante unos diez años.

Además, a partir de 2010, fui invitada a participar como experta científica en una serie de proyectos europeos destinados a difundir métodos de investigación en la enseñanza de las Matemáticas y las ciencias. La modelización y la interdisciplinariedad iban de la mano con el desarrollo de estos métodos. Así, pude apreciar la amplitud y la riqueza del trabajo de investigación, experimentación y producción de recursos para la enseñanza y la formación del profesorado que se ha desarrollado en torno a estas temáticas a lo largo de este cuarto de siglo. Esto ha ido acompañado de una creciente consideración de cuestiones socialmente candentes, como por ejemplo en el proyecto MOST (Meaningful Open Schooling Connects Schools to Communities – 2020-2023), la atención prestada a cuestiones energéticas y medioambientales (gestión de residuos) en la realización de cientos de SCPs (School Community Projects) que movilizaron a una diversidad de actores más allá de la mera institución escolar². Como se precisa en la página web del proyecto:

He aprendido mucho de estas diversas experiencias sobre los requisitos de una verdadera colaboración interdisciplinaria, en particular la necesaria sensibilidad hacia las diferencias epistemológicas entre las disciplinas, diferencias que hacen que, por ejemplo, los términos clave de la actividad científica, como hipótesis, modelo, experimentación, validación y prueba, no

¹ <https://www.ictma.net/>

² <https://icse.eu/international-projects/most/>

tengan el mismo significado para todos. También he aprendido a tener más en cuenta, en la comunicación interdisciplinaria, las relaciones diferenciadas, forjadas por la historia, que las diversas disciplinas mantienen con las Matemáticas, desde aquellas como la física, en las que las Matemáticas son constitutivas de los conceptos clave, hasta aquellas que, como las ciencias de la vida, no han comenzado a matematizarse hasta hace relativamente poco tiempo y en las que coexisten una variedad de modelos, matemáticos o no.

También he aprendido mucho sobre los numerosos obstáculos institucionales que se oponen a la implementación de prácticas verdaderamente interdisciplinarias y de modelización en la enseñanza, la falta de dispositivos y medios adecuados en las organizaciones escolares para poner en marcha proyectos, las limitaciones de la formación inicial y continua de los docentes en este ámbito y, en particular, las prácticas de evaluación, que a menudo permanecen inalteradas y, por lo tanto, son incapaces de tener en cuenta los aprendizajes asociados, a pesar de los discursos de los responsables institucionales que afirman la necesidad de desarrollar estas prácticas y competencias. Estos obstáculos afectan a los docentes de todas las disciplinas, pero afectan especialmente a los docentes de Matemáticas. Lo observamos durante la implementación de los proyectos en la reforma curricular de 2000. Más que los profesores de otras disciplinas científicas, les costaba encontrar su lugar en este sistema. Los problemas elegidos por los alumnos casi nunca eran matemáticos, y el lugar que ocupaban las Matemáticas en su trabajo solía ser muy limitado, lo que resultaba poco satisfactorio para los profesores, que hubieran deseado que los alumnos volvieran a movilizar las Matemáticas que estaban aprendiendo en ese nivel. El problema no está realmente resuelto. En la introducción del número especial de ZDM dedicado a las Matemáticas en la educación interdisciplinaria STEM (Goos y al., 2023) reconocen que “the role of mathematics in STEM education often appears to be marginal, and we do not understand well enough how mathematics contributes to STEM-based problem-solving or how STEM education experiences enhance students’ learning of mathematics”. Y, tras presentar una revisión narrativa de 53 artículos de investigación publicados en este ámbito entre 2017 y 2022, el artículo concluye subrayando la necesidad de desarrollar la investigación, en particular en los cinco temas siguientes:

- estudiar los métodos y las razones que permiten relacionar las disciplinas que componen las STEM de manera que se preserve la integridad disciplinaria de las Matemáticas;
- aclarar lo que se entiende por «éxito» de los estudiantes en los programas, proyectos y otros enfoques educativos interdisciplinarios en materia de STEM;
- estudiar cómo se puede ayudar a los profesores a modificar su visión del posible papel de las Matemáticas en la enseñanza interdisciplinaria de las STEM, e ir más allá de las prácticas actuales que posicionan las Matemáticas como una herramienta para resolver problemas de otras disciplinas;
- comprender qué hace que una tarea STEM sea matemáticamente rica;
- y preguntarse también cómo la investigación sobre la enseñanza de las STEM puede influir de manera productiva en la política de enseñanza de las STEM.

Todo esto demuestra que, a pesar de las investigaciones y los logros existentes, aún queda mucho por hacer.

Formación y desarrollo profesional docente

Lo anterior nos lleva naturalmente al cuarto punto que deseo abordar, el de la formación y el desarrollo profesional de los docentes. También en este ámbito, la investigación y los logros se han desarrollado especialmente durante las últimas décadas. Al igual que en el caso de las cuestiones tecnológicas, dos estudios del ICMI se han centrado en estas problemáticas, el estudio ICMI 15 (Even y Ball, 2009) y el reciente estudio ICMI 25 (Borko y Potari, 2024) centrado en el trabajo colaborativo de los docentes. Es en esta colaboración, la colaboración entre docentes, pero también entre docentes, formadores e investigadores, en lo que deseo insistir. Me parece una condición esencial para cualquier progreso sostenible en la enseñanza de las Matemáticas y sigue siendo problemática en muchos contextos, aunque el estudio ICMI 25 ofrece numerosos ejemplos de logros instructivos.

Lo he vivido personalmente a lo largo de mi carrera, ya que muy pronto, tras mi contratación en la Universidad Paris 7, comencé a desempeñar parte de mi labor en el Departamento de Matemáticas en el IREM de París, una estructura original y especialmente propicia para estas colaboraciones creada en 1969³. Así, participé en diversos grupos de trabajo temáticos del IREM que reunían a investigadores universitarios, matemáticos, historiadores de las Matemáticas, didactas y profesores. De acuerdo con las misiones del IREM, a partir de nuestros experimentos e investigaciones, elaborábamos recursos para la enseñanza y organizábamos sesiones de formación continua para profesores de Matemáticas. Pero debo admitir que, aunque colaborábamos estrechamente en la preparación y la implementación de las formaciones, y aunque estas producían recursos de calidad y muy acordes con las expectativas del terreno, el desarrollo de prácticas colaborativas no era un objetivo en sí mismo de las formaciones y los profesores que las seguían no percibían necesariamente su importancia. Esto limitaba su impacto.

Se produjo una evolución gracias al contacto con el modelo japonés de *lesson studies* (LS en lo sucesivo), que ha experimentado una impresionante difusión internacional desde la década de 2000 (Quaresma y al., 2018). Algunos investigadores ya habían destacado su compatibilidad con la cultura IREM (Clivaz, 2015 por ejemplo), pero fue a partir de 2017 cuando realmente se desarrollaron los ensayos de hibridación en Francia. Desde entonces, participo y estudio con otros investigadores de mi laboratorio, el LDAR, en una iniciativa pionera en este ámbito, puesta en marcha en el IREM de Rouen⁴. De hecho, los miembros de un grupo de trabajo de este IREM habían participado en la elaboración de un recurso nacional destinado a reforzar las relaciones entre las Matemáticas y la vida cotidiana en la enseñanza, uno de los objetivos de la reforma de la enseñanza primaria y secundaria básica (*collège* en Francia) de 2016. Las autoridades regionales pidieron al grupo organizar sesiones de formación continua para ayudar a los profesores de Matemáticas a apropiarse de este recurso y explotarlo. Conscientes de las limitaciones de las formaciones continuas usuales, y habiendo descubierto la proximidad entre las LS y el trabajo que ellos mismos habían realizado para desarrollar estos recursos, gracias al contacto con Stéphane Clivaz, especialista en LS, decidieron organizar esta formación en forma

³ Para informaciones en español sobre la red de los IREM se puede acceder al documento preparado para la presentación nacional francesa al congreso ICME 14 por la CFEM (Comisión Francesa para la Educación Matemática): http://www.cfem.asso.fr/icmi/icme-14/NP_France_ICME14Espanol.pdf

⁴ <https://irem.univ-rouen.fr/presentationactivites>

de LS. El concepto de LS fue adaptado para tener en cuenta las condiciones de la formación continua del profesorado en Francia, muy diferentes del contexto japonés, así como algunas especificidades de la cultura IREM. Esto ha dado lugar a un objeto híbrido denominado «Lesson Study adaptada» (LSa), que combina una formación presencial de tres días y un trabajo colaborativo a distancia en una plataforma institucional que se extiende a lo largo de varios meses (Masselin, 2020). Este objeto integra desde el principio a didactas y se basa en recursos producidos en LS internas de los miembros del grupo IREM, que se enriquecen progresivamente a medida que se realizan las LSa (gérmenes de situaciones, planillas para estructurar su análisis a priori, para anticipar las intervenciones necesarias del profesor encargado de la lección de investigación y para apoyar el trabajo de los facilitadores, banco de extractos de vídeos comentados para apoyar los análisis a priori y la preparación de la lección de investigación, etc.), todo ello compartido y accesible para todos al final de la formación.

Tras ocho años de existencia, podemos empezar a extraer lecciones de esta historia, que ha sido documentada con precisión por sus protagonistas y estudiada por los investigadores. Junto con dos actores clave del dispositivo, miembros del grupo IREM, Blandine Masselin y Frédéric Hartman (Masselin y al., 2023), he estudiado, por ejemplo, los diferentes roles que desempeñan los facilitadores en este dispositivo, el papel que desempeñan los gérmenes de situación, una especificidad de este dispositivo, tanto en la formación de los profesores como en la de los facilitadores. Otras investigaciones se han centrado en el tratamiento de la modelización, un objetivo constante de las LSa organizadas, y su evolución a lo largo de los años, o se están llevando a cabo sobre el efecto de las LSa en las prácticas de los profesores que han seguido varios ciclos de LSa. Siempre con Blandine Masselin, me he interesado especialmente por la dinámica de este dispositivo (Artigue y Masselin, 2024), adoptando la perspectiva ecológica e institucional de la TAD y utilizando la teoría de los hipergrafos para tener en cuenta el papel esencial que desempeñan las redes institucionales en esta compleja dinámica. Porque, a lo largo de los años, el dispositivo LSa se ha ampliado desde la formación continua de profesores hasta su formación inicial y también la de formadores; sin dejar de centrarse en cuestiones de modelización, se ha puesto al servicio de otras problemáticas, como las transiciones institucionales, y más recientemente de otras disciplinas, como las ciencias físicas y químicas; Ha migrado a otras regiones distintas de la región en la que surgió, Normandía, y se ha utilizado para actividades de desarrollo profesional docentes en los laboratorios de Matemáticas creados en los centros de enseñanza secundaria en el marco del Plan Matemáticas que siguió a la publicación del informe Villani-Torrossian (Villani-Torrossian, 2018), etc. Todo ello ha movilizado a un número cada vez mayor de actores e instituciones, entre las cuales los propios actores navegan.

Hemos denominado a esta dinámica «dinámica de spin-off» (essaimage en francés). Implica una combinación original de iniciativas de abajo hacia arriba procedentes de actores sobre el terreno, e iniciativas institucionales, de arriba hacia abajo. La difusión es muy progresiva y no está organizada jerárquicamente, lo que deja un importante margen de maniobra a los diferentes actores. Al mismo tiempo, numerosos escritos, el papel desempeñado por el grupo fundador del IREM de Rouen y encuentros regulares garantizan la fidelidad al concepto, a pesar de las adaptaciones necesarias. Estas características me parecen importantes para explicar la resiliencia de este dispositivo, a pesar de la acumulación de reformas, de las condiciones cada vez más difíciles para la formación continua de los docentes y del empeoramiento de sus

condiciones de trabajo. Porque los resultados obtenidos, aunque no son milagrosos, muestran que el dispositivo está vivo, que se han creado comunidades que siguen activas y que la colaboración avanza. Quiero ver en ello un mensaje de esperanza frente a los inmensos retos a los que nos enfrentamos, al caos y a la violencia del mundo.

Observaciones finales

En este texto, al preguntarme sobre los recursos que la investigación didáctica acumulada durante décadas ofrece para permitir que la enseñanza de las Matemáticas haga frente a los retos del mundo actual, he intentado compartir reflexiones y experiencias cruzando cuatro perspectivas: cambios curriculares, integración tecnológica, modelización e interdisciplinariedad, formación inicial y desarrollo profesional docente. He intentado mostrar que la investigación didáctica proporciona efectivamente numerosos recursos, incluso si lo hice muy parcialmente para cada una de estas perspectivas. También he intentado mostrar que los retos del mundo actual renuevan las problemáticas y que los recursos acumulados para apoyar cada una de estas perspectivas distan mucho de ser suficientes.

Sin embargo, hay otras problemáticas igualmente esenciales, en particular la de las desigualdades educativas. De hecho, esta está presente en todas las demás. Por ejemplo, la ambición de reducir estas desigualdades y desarrollar una enseñanza de las Matemáticas más inclusiva es un objetivo compartido por todas las reformas curriculares recientes, aunque, una vez más, existe una gran diferencia entre el discurso y la realidad. La pandemia de COVID-19 nos ha mostrado claramente los efectos devastadores de las desigualdades sociales en el acceso a las tecnologías digitales y hoy en día es necesario preguntarse por el efecto que puede tener la IA en las desigualdades escolares. Existen también numerosos recursos sobre esta problemática de las desigualdades escolares, que no se mencionan aquí, pero que son tan importantes para el avance de la enseñanza y del aprendizaje de las Matemáticas como los evocados, que son ya muy numerosos. No me cabe duda de que este congreso CEMACYC otorgará a esta problemática, especialmente sensible y trabajada a nivel regional, el lugar que merece, con contribuciones mucho más valiosas que las que yo personalmente habría podido hacer.

Referencias

- Artigue, M. (2012). Reflections around interdisciplinary issues in mathematics education. En W. Blum, R. Booromeo Ferri y. K. Maass (Eds.), *Mathematik unterricht im Kontext von realität, Kultur und Lehrerprofessionalität* (pp. 24-33). Springer Spektrum. https://doi.org/10.1007/978-3-8348-2389-2_3
- Artigue, M. (2020). *ICMI AMOR Project – Michele Artigue Unit – The Instrumental Approach*. <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/michele-artigue-unit>.
- Artigue, M. (a parecer). L'enseignement des mathématiques à l'heure des STIM. En H. Squalli y A. Adihou (Eds.), *Actas del Coloquio ADiMA 4, Université Mohammed 6 Polytechnique*, 20-24 mai 2024. Université de Sherbrooke y ADiMA.
- Artigue, M. y Masselin, B. (2024). The role of institutional networks in the implementation of innovative collaborative devices of teacher professional development: the case of adapted lesson studies. *Implementation and Replication Studies in Mathematics Education*, 4(1), 50–82. <https://doi.org/10.1163/26670127-bja10019>
- Blum, W., Galbraith, P.L., Henn, H.-W. y Niss, M. (Eds.) (2007). *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI Study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-29822-1>
- Bosch, M. (2023). *ICMI AMOR Project – Yves Chevallard Unit – The Anthropological Theory of the Didactic*. <https://www.mathunion.org/icmi/awards/amor/yves-chevallard-unit>.

- Borko, H. y Potari, D. (Eds.) (2024). *Teachers of Mathematics Working and Learning in Collaborative Groups. . The 25th ICMI Study*. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-56488-8>
- Churchhouse, R. F. (Ed.) (1986). The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching. ICMI Study Series. Cambridge University Press.
https://www.mathunion.org/fileadmin/ICMI/ICMI%20studies/ICMI%20Studies%201-5/ICMI_STUDY_01.1_1985_Strasbourg_The_Influence_of_Computers_and_Informatics_on_Mathematics_and_its_Teaching.pdf
- Clivaz, S. (2015). French didactique des mathématiques and lesson study: A profitable dialogue? *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 4(3), 245–260. <https://doi.org/10.1108/ijlls-12-2014-0046>
- Even, R y Ball, D. (Eds.) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics. The 15th ICMI Study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-0-387-09601-8>
- Goos, M., Carreira, S. y Namukasa, I.K. (2023). Mathematics and interdisciplinary STEM education: recent developments and future directions. *ZDM Mathematics Education* 55, 1199–1217.
<https://doi.org/10.1007/s11858-023-01533-z>
- Hoyles, C. y Lagrange, J. B. (2010). *Mathematics Education and Technology-Rethinking the Terrain. The 17th ICMI Study*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4419-0146-0>
- Maass, K. y al. (2022). Mathematical modelling – a key to citizenship education. En Buchholtz, N., Schwarz, B., Vorhölter, K., (Eds.) *Initiationen mathematikdidaktischer Forschung*. Springer Spektrum, Wiesbaden.
https://doi.org/10.1007/978-3-658-36766-4_2
- Masselin, B. (2020). *Ingénierie de formation en mathématiques de l'école au lycée: des réalisations inspirées des lesson studies*. Presses Universitaires de Rouen et du Havre.
- Masselin, B., Hartmann, F. y Artigue, M. (2023). Étude du rôle des facilitateurs dans un dispositif de lesson study adapté. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 1, 213–260. <https://doi.org/104000/adsc.1816>
- Mission Villani–Torossian. (2018). *21 mesures pour l'enseignement des mathématiques*.
<https://www.education.gouv.fr/21-mesures-pour-l-enseignement-des-mathematiques-3242>
- Niss, M. y Højgaard, T. (Eds.). (2011). *Competencies and mathematical learning: Ideas and inspiration for the development of mathematical teaching and learning in Denmark*. Roskilde University – IMFUFA. (English edition: Translation of parts of Niss & Jensen, 2002).
- Quaresma, M., Winsløw, C., Clivaz, S., da Ponte, J. P., Shúilleabháin, A. N. y Takahashi, A. (Eds.) (2018). *Mathematics lesson study around the world*. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-75696-7>
- Shimizu, Y. y Vithal, R. (Eds.). (2023). *Mathematics Curriculum Reforms Around the World. The 24th ICMI Study*. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4>
- Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *Eur J Psychol Educ* 10, 77. <https://doi.org/10.1007/BF03172796>



La importancia de la enseñanza de las Matemáticas para todos en el siglo XXI

Jaime Carvalho e Silva
Department of Mathematics, University of Coimbra
Portugal
jaimecs@mat.uc.pt

Resumen

Las Matemáticas son cada vez más importantes en el mundo actual. La UNESCO reconoció este hecho y recientemente lanzó una publicación que contiene textos breves que enfatizan el papel de las Matemáticas en muchos temas de relevancia global, que según la UNESCO son de gran importancia para los tomadores de decisiones en todo el mundo. Desde las epidemias hasta la lucha contra la pobreza, desde la eficacia de las vacunas hasta el cambio climático, las estructuras matemáticas son la base de los estudios de estos problemas y sólo la comprensión de las Matemáticas permitirá tomar un conjunto de decisiones correctas que se basen efectivamente en el conocimiento de la ciencia de estos fenómenos.

La misma publicación también indica que la enseñanza de Matemáticas es importante ya que desarrolla habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico que deberían ser accesibles a todos los jóvenes. En nuestra época, quienes abandonan la escuela sin haber desarrollado las habilidades adecuadas ven limitadas sus opciones de futuro.

Se deben entonces modificar los planes de estudios de Matemáticas y extender la escolaridad a todos los jóvenes hasta el final de la escuela secundaria. ¿Qué opciones se ofrecen para un currículum para TODOS? ¿Cuáles son las condiciones para que estos cambios entren en vigor?

Analizaremos la situación a partir de dos documentos: las "Recomendaciones" elaboradas en 2020 por un equipo que coordiné en Portugal y las propuestas de Ángel Ruiz para las "Leyes" de Implementación Curricular que surgieron en el ámbito del estudio del ICMI sobre el currículo.

Finalmente, compararemos los planes de estudio más recientes de Portugal y Costa Rica y sus condiciones de implementación a la luz de nuestra discusión. La Educación Matemática para TODOS es imprescindible pues “La Educación Matemática es importante para formar ciudadanos reflexivos y críticos capaces de afrontar las exigencias matemáticas de la vida cotidiana”. Si es necesario que la Educación Matemática sea para TODOS ¿es eso posible? Las reformas de Portugal y Costa Rica, en dos continentes diferentes, muestran que la respuesta es ¡SÍ!.

Palabras clave: Educación Matemática; Matemática para todos; Reformas curriculares; Desarrollo profesional docente; Leyes de Implementación Curricular.

La importancia de las Matemáticas en el mundo actual

Todas las organizaciones internacionales que analizan la evolución futura de la educación a nivel mundial coinciden en un hecho: las Matemáticas son parte de la solución. En el futuro, necesitaremos dominar más herramientas digitales que nos permitan abordar más problemas y seguir avanzando. Por ejemplo, este año la Comisión Europea escribió en su “Plan de Acción para las Competencias Básicas” que:

Las competencias matemáticas son esenciales para la vida cotidiana en nuestro mundo rico en tecnología. (...) Estas competencias, incluida la alfabetización financiera, permiten a las personas tomar decisiones con conocimiento de causa basadas en datos y les ayudan a desarrollar un enfoque medido de la asunción de riesgos; asimismo, capacitan a los ciudadanos para que tomen decisiones financieras con conocimiento de causa a lo largo de la vida, además de mejorar sus perspectivas en el mercado laboral (Comisión Europea, 2025).

Y más adelante:

Los avances en materia de tecnología, investigación educativa y necesidades sociales han dado lugar a un mayor énfasis en las capacidades de resolución de problemas y de pensamiento crítico de los aprendientes, animándolos a comprender y aplicar conceptos matemáticos, en lugar de limitarse a memorizar fórmulas. El uso cada vez mayor de herramientas digitales en matemáticas pone de relieve la creciente conexión entre la alfabetización matemática y la digital (Comisión Europea, 2025).

Hay muchos ejemplos de cómo las competencias matemáticas son visibles en la vida cotidiana y también como aparece de forma concreta la creciente conexión entre la alfabetización matemática y la digital. En su documento “Matemáticas para la Acción - Apoyo a la toma de decisiones basada en la ciencia” (Dhersin et al., 2023), la UNESCO presenta numerosos aspectos de cómo las Matemáticas están abordando los desafíos más urgentes del mundo. Son detallados ejemplos de cómo Mapas de Visualización adecuados nos permiten comprender mejor la distribución detallada de la pobreza en el mundo. Cómo las técnicas matemáticas pueden ayudar a evaluar tanto los riesgos como las respuestas a los conflictos y la inseguridad, las condiciones climáticas extremas y las epidemias que interrumpen las cadenas de suministro de alimentos, para que los sistemas alimentarios sean más resilientes a las crisis actuales y futuras. Cómo los modelos matemáticos ayudan a la toma de decisiones en salud pública, tanto al pronosticar el probable impacto de una epidemia como al predecir la eficacia de las medidas de contención y prevención de enfermedades. Cómo los métodos matemáticos son especialmente útiles para ayudar a los gobiernos, las empresas de servicios públicos y el sector privado a abordar problemas complejos relacionados con el suministro y la calidad del agua, estimando la

probabilidad de un evento con base en información o conocimiento previo. Y muchos otros ejemplos.

Las habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico

El mismo documento de la Comisión Europea, el “Plan de Acción para las Competencias Básicas”, muestra como las competencias matemáticas son esenciales en el mundo moderno. Se propone desarrollar:

La capacidad de razonar matemáticamente y de formular, emplear e interpretar las matemáticas para resolver problemas en situaciones reales y emitir juicios y tomar decisiones bien fundamentadas basadas en datos (Comisión Europea, 2025).

Y no solo en Matemáticas mas también en las ciencias en general y en el contexto de las CTIM o las CTIAM (ciencia, tecnología, ingeniería, artes y Matemáticas).:

Las competencias científicas son esenciales para el pensamiento crítico y la resolución de problemas y son la piedra angular de una enseñanza y unas carreras más avanzadas en el ámbito de las CTIM.

Desarrollar el pensamiento científico y las capacidades en una fase temprana facilita la consecución posterior en estos ámbitos estratégicos. Una sólida alfabetización científica también es necesaria para el éxito de la transición ecológica. Además, en una época de manipulación de la información cada vez mayor, es fundamental que las personas desarrollen sólidas competencias científicas para evaluar de forma crítica la información, separar los hechos de la ficción y extraer conclusiones basadas en pruebas (Comisión Europea, 2025).

Un currículum para todos

Matemáticas para Todos (Mathematics for All) fue el tema de un grupo temático hace treinta años en el V Congreso Internacional de Educación Matemática (ICME), celebrado en Adelaida, Australia, del 24 al 29 de agosto de 1984. En el informe publicado por UNESCO (Damerow, 1984) se afirma que:

Muchos factores han provocado un cambio en la situación general de la educación matemática. Estos incluyen la transición a la educación primaria universal en los países en desarrollo, la transición a la educación secundaria universal en los países industrializados (donde también ha habido una creciente demanda de competencia matemática en un mundo cada vez más orientado a la tecnología y la ciencia). (Damerow, 1984, p. 3).

Varias preguntas fueran plantearon hace treinta años: “¿Qué tipo de currículo de Matemáticas se adapta a las necesidades de la mayoría?” ¿Están los factores y las demandas del siglo XXI impulsando un nuevo cambio en la situación general de la Educación Matemática a nivel mundial?

En este artículo afirmo que todos los estudiantes deben estudiar Matemáticas en la educación secundaria, no solo la mayoría, ya sea en países en desarrollo o industrializados. Además, hay que crear nuevos currículos de Matemáticas para todos, incluido un tronco común para todos los estudiantes, dirigido a la preparación de cualquier ciudadano para los desafíos de la vida del siglo actual (Carvalho e Silva, 2024b).

Las "Recomendaciones" en Portugal

En 27 de marzo de 2020 se presentó al Ministro de la Educación de Portugal un documento con recomendaciones para mejorar la enseñanza de la Matemática en Portugal (Carvalho e Silva (coord.), 2020).

Este documento fue hecho por un equipo de Matemáticos, Investigadores en Educación Matemática y Profesores, que estudió todos los documentos publicado em Portugal en los últimos treinta años y también muchos documentos internacionales incluyendo del “Institute For the Future – IFTF” (Davies et al., 2011) y de la Bill & Melinda Gates Foundation (Bill & Melinda Gates Foundation, 2019). También fueran considerados los estudios PISA, TIMSS y TIMSS Advanced, así como los currículos de países como Finlandia, Singapur, Estonia y los “Common Core State Standards” estadounidenses.

En el conjunto de recomendaciones hay doce sobre el desarrollo de un nuevo currículo de Matemáticas que debería regirse por principios estructurantes, estar dirigido a todos los estudiantes, centrarse en contenidos relevantes, enfatizar la comprensión matemática y promover experiencias matemáticas significativas. El currículo de Matemáticas debe adherirse a los principios: Universalidad, Coherencia Interna, Relevancia, Enfoque y Alto Nivel Cognitivo. Además, debe ser de la responsabilidad de un equipo con un perfil adecuado, incluyendo Matemáticos, Investigadores en Educación Matemática y Profesores.

El documento “Recomendaciones” también incluye tres recomendaciones para la dinámica de los cambios curriculares, que deben basarse en argumentos técnicos y científicos, ser participativos y estar programados.

El nuevo currículo de Portugal

La primera recomendación del documento referido era la creación de un nuevo currículo de Matemática para la Enseñanza Básica y la Enseñanza Secundaria en Portugal. En Portugal, la estructura de la Educación Secundaria cambió entre 2001 y 2004 y, tras algunos cambios menores en los años posteriores, es la siguiente Tabla 1:

Tabla 1

Cursos de Matemáticas ofrecidos en la educación secundaria en diferentes itinerarios y escuelas.

<i>Educación Secundaria (10.º, 11.º y 12.º grado)</i>	
Itinerario de la Educación Secundaria general o de la Escuela Especializada	Asignatura
Itinerario de Ciencias y Tecnologías	Matemáticas A
Itinerario de Ciencias Socioeconómicas	Matemáticas A
Itinerario de Artes Visuales	Matemáticas B (Aplicadas a las Artes Visuales)
Itinerario de Lenguas y Humanidades	Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales (MACS)
Estudios Profesionales	Módulos en Matemáticas Aplicadas
Escuelas de Artes Especializadas	Matemáticas Aplicadas
Escuelas de Música	---

La peculiaridad de un curso como «Matemáticas Aplicadas a las Ciencias Sociales» (MACS) se ha discutido en otros estudios (Carvalho e Silva, 2018, 2021a, 2021b, 2021c) y se mantiene en esta última reforma. Los módulos de las Escuelas Profesionales también se han analizado (Carvalho e Silva, 2012) y en esta última versión han sido ampliados con nuevos módulos como “Criptografía” y “Biomatemática”.

En Portugal, la Educación Secundaria es obligatoria, por lo que los jóvenes permanecen en la escuela hasta los 18 años. Por lo tanto, todos asisten a la escuela secundaria. Pero ¿qué estudian? Las Escuelas Secundarias Generales ofrecen cuatro itinerarios diferentes y existen otros tipos de Escuelas Secundarias que ofrecen estudios más específicos. Los Estudios Profesionales pueden cursarse en Escuelas Secundarias Generales y en Escuelas Profesionales.

Nueve Ideas Clave del nuevo currículo de Portugal

El nuevo currículo de Matemática para la Enseñanza Secundaria en Portugal está estructurado en torno de nueve Ideas Clave, un conjunto de principios y directrices metodológicas, cuya implementación y especificación se adaptan a cada grado y tema matemático.



Figura 1. Nueve Ideas Clave del nuevo currículo de Portugal.

Las nueve ideas clave son: resolución de problemas, modelación y conexiones (dar sentido a las Matemáticas y poner énfasis en la modelación y las aplicaciones), razonamiento y lógica matemática (fomentar los procesos de razonamiento deductivo, integrando la lógica matemática en diversos temas), uso sistemático de la tecnología (fomentar la exploración de ideas y conceptos, integrando la tecnología como palanca para la comprensión y la resolución de problemas), tareas y recursos educativos (apoyar el aprendizaje en diversas tareas, contextos y recursos), historia de las Matemáticas (valorar la importancia de las Matemáticas en la evolución de la sociedad), prácticas enriquecedoras y creatividad (innovar e invertir en prácticas enriquecedoras, fomentando el desarrollo de la creatividad y actitudes positivas hacia las Matemáticas), organización del trabajo del alumnado (valorar el trabajo colaborativo en un entorno de ayuda mutua y responsabilidad compartida, cultivando comunidades de aprendizaje), comunicación matemática (comunicarse utilizando múltiples representaciones, con claridad y

rigor y un nivel adecuado de formalización), evaluación para el aprendizaje (priorizar la evaluación formativa en la regulación del proceso de aprendizaje) (Carvalho e Silva (coord.), 2023).

El trabajo por proyectos desempeña un papel fundamental, sugiriendo el documento oficial propuestas concretas en las áreas de Estadística, Modelos Matemáticos para la Ciudadanía, Geometría, Funciones y Matemáticas Discretas. Se debe desarrollar al menos un proyecto cada año, y se puede elaborar otra propuesta sobre cualquier tema que el profesor considere oportuno (Carvalho e Silva, Domingos, Rodrigues, Almiro, Gabriel, 2024a, 2024b).

Un tema que surgió solo en el programa de 2023 y es común a todos los programas, incluidos los de las escuelas vocacionales, es el de ‘Modelos Matemáticos para la Ciudadanía’, que incluye ‘Modelos Matemáticos en Elecciones’, ‘Modelos matemáticos en la Compartición’ y ‘Modelos Matemáticos en Finanzas’. El programa entiende que todas las disciplinas, incluidas las Matemáticas, deben contribuir al desarrollo de los estudiantes como ciudadanos activos, conscientes, informados y proactivos (Carvalho e Silva (coord.), 2023). Por lo tanto, la creciente relevancia de las Matemáticas en la sociedad actual resalta la importancia y la necesidad de dotar a los estudiantes de herramientas matemáticas para analizar los procesos sociales, que son la base de una ciudadanía activa (Carvalho e Silva (coord.), 2023).

El nuevo currículo de Matemática para la enseñanza secundaria en Portugal tiene muchas influencias de lo que se pasa internacionalmente como es claro en lo que fue dicho. Pero también tiene influencias en la tradición portuguesa de enseñanza de la Matemática como la que produjo el gran matemático portugués José Sebastião e Silva (Carvalho e Silva, 1995) en el siglo pasado. Sus mayores influencias fueran italianas con referencias a Federico Enriques y Guido Castelnuovo. También estuvo en contacto con Emma Castelnuovo (Sebastião e Silva, 1962). Hoy todo el trabajo internacional tiene mucha influencia con ICMI, OCDE y UNESCO en primer plano (Carvalho e Silva, 2024a). En una carta a Emma Castelnuovo, Sebastião e Silva afirmó: "Las matemáticas no deben ignorar lo concreto; deben estar conectadas con la realidad física, en la que el pensamiento matemático hunde sus raíces" (Castelnuovo, 1982).

Toda la actividad internacional de matemáticos, educadores matemáticos y profesores permite discutir las reformas curriculares de forma intensa y la actividad de ICMI es un buen ejemplo, notablemente con el Estudio ICMI número 24 sobre “Reformas del Currículo de Matemáticas en el Mundo”.

La implementación del nuevo currículo de Portugal

El nuevo currículo de Matemática para la Enseñanza Secundaria en Portugal introduce algunos cambios, mantiene otros aspectos de anteriores reformas, pero su implementación eficaz necesita de un apoyo importante a los profesores. El Ministerio de la Educación diseñó un proyecto llamado “Contexto y Visión para la Revisión Curricular de los Aprendizajes Esenciales en Matemáticas”. Con este proyecto fueron escogidas escuelas piloto para crear una base de datos de recursos pedagógicos relacionados con el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. También fue desarrollado un modelo conceptual para la formación docente

empezando por capacitar a un grupo de formadores para después desarrollar procesos de formación en centros educativos.

Actualmente hay 38 colecciones de tareas comentadas de lecciones de clases piloto, dos publicaciones temáticas y grabaciones de cuatro conferencias online (webinars) sobre nuevos temas curriculares (DGE, 2021).

Las "Leyes" de Implementación Curricular de Ángel Ruiz

Quiero abordar ahora la evaluación del éxito de las reformas educativas, en particular en Matemáticas. Ángel Ruiz abordó este tema en un artículo publicado en el Volumen de Estudio del ICMI sobre "Reformas del Currículo de Matemáticas en el Mundo", donde escribió un capítulo titulado "Leyes Concluyentes de la Implementación del Currículo y el Futuro en el que Vivimos". Ángel Ruiz propuso cuatro leyes (y una más en el escenario de la pandemia, que no vamos a discutir aquí). Vamos a aplicar estas leyes a la reforma portuguesa y analizar en qué grado se cumplen.

La primera ley es:

Laws of Curriculum Implementation – 1. The Law of Diversity. Puede haber una combinación de factores para la implementación de una reforma curricular que tenga éxito en un país y no lo tenga en otro.

Aquí analizamos si las reformas portuguesas afectan directamente solo a algunos componentes de los vectores curriculares o a la totalidad de ellos. También analizamos si los diferentes agentes y niveles de intervención (autoridades, organizaciones científicas o profesionales, docentes, asesores, inspectores, directores) están involucrados. Finalmente, el momento oportuno fue determinado por circunstancias políticas o sociales que, de alguna manera, determinaran el ritmo de la reforma.

La presente reforma curricular en Matemáticas en Portugal en la enseñanza secundaria es en realidad la tercera hecha por equipos coordinadas por mi desde 1995, todas con gobiernos diferentes, no en modo continuo pero todas coherentes unas con las otras. La primera, en 1995, fue hecha por causa de una grave crisis en 1994 en la enseñanza secundaria de Matemática (momento oportuno: circunstancias políticas) porque el anterior documento era completamente irrealista y era imposible de aplicar en las escuelas y también en la preparación del examen nacional de Matemáticas propuesto por la primera vez para 1997 (Carvalho e Silva (coord.), Martins, Fonseca, 1995). Hubo una gran discusión pública en 1995 (con autoridades, con organizaciones científicas y profesionales, con docentes de enseñanza secundaria y superior, con todos los interesados en la enseñanza secundaria de Matemática). Con nuevas elecciones en el final de 1995 cambió el gobierno pero la reforma fue continuada e intensificada, con la publicación de documentos de soporte a los profesores y con formación de profesores que fue ancorada en la preparación de líderes escolares (Carvalho e Silva (coord.), Martins, Fonseca, 1995), (Martins, 1997). La segunda fue una solución de continuidad de iniciativa de un responsable que estaba en funciones en 1996 y en 2001 (circunstancia política favorable). La tercera fue muy diferente con nuevos responsables políticos en seguida aun desastroso currículo de Matemática en secundaria (momento oportuno: circunstancias políticas). Todas las tres reformas portuguesas de secundaria referidas afectaran directamente todas las componentes de

los vectores curriculares incluso los exámenes nacionales de final de secundaria. Claro que todas estas reformas fueran determinadas en primera plaza por las opciones políticas determinantes en cada momento (o el desespero de los responsables como en 1994/1995 y 2018-2020 con la confusión en las escuelas). Solo la segunda reforma, de 2001 a 2004, surgió de un plan deliberado de reforma curricular que diversificó los programas de Matemáticas (con la creación de Matemáticas A, B y MACS). Aun así, se detuvo parcialmente tras el cambio político posterior a elecciones nacionales.

La única evaluación internacional fue el *TIMSS Advanced* de 2015 (Mullis et al., 2016): Los resultados fueran muy buenos para Portugal, pero la indiferencia fue en realidad la reacción oficial y de la prensa.

Vamos ahora analizar las reformas portuguesas de secundaria de Matemática con la segunda ley de Ángel Ruiz:

Laws of Curriculum Implementation – 2. The Law of Two Directions. Para alcanzar el éxito, es fundamental contar con recursos adecuados, especialmente para el profesorado, y con estrategias de implementación que permitan desarrollos tanto de arriba hacia abajo como de abajo hacia arriba. Es fundamental crear una buena sinergia entre ambos procesos.

¿Qué es el éxito? Vamos a analizar solo dos dimensiones. La primera fue el uso generalizado de calculadoras gráficas en las escuelas y los exámenes nacionales que comenzó con la reforma de 1995 (Carvalho e Silva, 1994, 1998, 2000, 2013). La tecnología moderna es usada regularmente hoy y esta es una evolución muy significativa de las prácticas de la enseñanza de la Matemática en las escuelas secundarias con implicaciones significativas para la enseñanza de las aplicaciones y la modelación matemática (Torres, Coutinho & Fernandes, 2008). La otra dimensión es la mensurable en los estudios internacionales. Para la enseñanza secundario solo hay el *TIMSS Advanced* y Portugal solo participó en 2015 (y no hay otros estudios de este tipo más recientes). Los resultados fueran muy buenos, con Portugal con más estudiantes estudiando Matemática considerada avanzada y mejores resultados que Francia, Italia, Noruega y Suecia. ¡Pero las implicaciones políticas de esos resultados fueran casi inexistentes!

Vamos ahora analizar las reformas portuguesas de secundaria de Matemática con la tercera ley de Ángel Ruiz de la Implementación Curricular:

Laws of Curriculum Implementation – 3. The Law of Alignment. Para la más adecuada implementación de una reforma curricular debe haber una alineación de todos los medios educativos con los esfuerzos reformadores.

Esta es efectivamente una ley muy importante. En 1995, el equipo que desarrolló el nuevo programa reconoció que, además de modificarlo, era necesario crear otras condiciones, como la capacitación docente continua (incluyendo autoformación, capacitación entre pares y capacitación participativa), así como reuniones regionales de representantes escolares para debatir estrategias de gestión del programa de Matemáticas y la remediación (Carvalho e Silva (coord.), Martins, Fonseca, 1995). También sería necesario publicar materiales para apoyar el trabajo de docentes y estudiantes, y crear laboratorios de Matemáticas en las escuelas con calculadoras gráficas, sensores de recolección de datos, modelos geométricos, películas matemáticas y otros materiales físicos y electrónicos. Asimismo, se propuso la creación de asignaturas optativas como "Temas de Matemática Contemporánea", que incluiría teoría de

grafos, teoría de números y sistemas dinámicos (temas que no se impartían en las escuelas en 1995).

Lo que fue producido a partir de 1997 fueron nueve publicaciones con temas de apoyo a los profesores, una formación de profesores con capacitación de líderes, reuniones de estos líderes con grupos de profesores de diferentes escuelas, y después una formación continuada, un boletín informativo y varias páginas de soporte en internet.

Los programas de 1991 introdujeron la calculadora científica, y la reforma de 1995, la calculadora gráfica. Los exámenes nacionales para estos estudiantes comenzaron a recomendar el uso de calculadoras científicas y gráficas, respectivamente. Al menos una pregunta en cada examen requería el uso de calculadora para resolverse correctamente.

La cuarta ley de Ángel Ruiz de la Implementación Curricular es la ley del largo plazo: **Laws of Curriculum Implementation – 4. Law of the Long-Term and Uncertainty.** Salvo en el caso de cambios curriculares de muy escaso alcance, las reformas deben concebirse como procesos a largo plazo.

No es realista esperar resultados a corto plazo, ya que las reformas educativas tardan en ser adoptadas por el profesorado, las escuelas y el sistema educativo en general (a menos que sean tan inconsistentes que la insatisfacción general provoque disrupciones en el sistema). Se espera cierta continuidad para que podamos observar resultados concretos, como mejores resultados escolares en exámenes nacionales o estudios internacionales. Además, la incertidumbre que plantea la práctica en el aula implica que el funcionamiento del sistema debe ser monitoreado y adaptado regularmente. En 1995, se propuso que los programas se revisaran cada cinco años (Carvalho e Silva (coord.), Martins, Fonseca, 1995), y el documento de 2020 propuso la creación de un "Instituto de Desarrollo Curricular" (Carvalho e Silva (coord.), 2020), como existe en varios países como Singapur y Corea del Sur, para recomendar revisiones periódicas de los programas escolares y las directrices educativas, y proponer acciones que apoyen mejor al profesorado y al alumnado en los nuevos aspectos identificados.

En conclusión, las Leyes de Ángel Ruiz de la Implementación Curricular coinciden con aspectos importantes de las reformas educativas de los programas de Matemáticas secundarias en Portugal y fueron ampliamente consideradas en las reformas portuguesas de 1995, 2001 y 2023.

Los planes de estudio de Portugal y Costa Rica

Hay muchas conexiones entre las reformas educativas. Como ha señalado Ángel Ruiz “un texto curricular nunca morderá la realidad si no se concibe a priori en función de esa realidad” (Ruiz, 2013). Eso fue la base de la reforma portuguesa. La primera gran reforma después del final de la dictadura portuguesa en 1974 fue en 1990-1991 pero no tuvo en cuenta la realidad y las condiciones concretas. Eso fue la causa de los nuevos programas de 1995 (Carvalho e Silva (coord.), Martins, Fonseca, 1995).

Otro aspecto idéntico es que en Portugal el nuevo currículo de 2023 tiene nueve ideas clave. Lo de Costa Rica tiene cinco ejes curriculares (énfasis o estrategias): la resolución de

problemas, contextualización activa, uso intenso pero inteligente de las tecnologías, cultivo de actitudes y creencias positivas sobre las Matemáticas y la utilización de la historia de las Matemáticas (Ruiz, 2024). Hay una gran intersección con las nueve ideas clave ya descritas. Otra semejanza enorme fueran las condiciones de implementación que empezaran en Portugal en 1995 y ya están descritas. Ángel Ruiz describe “una base humana de docentes y agentes educativos que avanzara la implementación en todo el país. Es decir: una vanguardia de líderes que fueran la referencia y el acicate para todos los agentes educativos” (Ruiz, 2024). La capacitación fue exactamente la misma: “capacitaciones en dos etapas: cursos para líderes y cursos para el resto de los docentes” (Ruiz, 2024).

Una gran diferencia en Costa Rica fue “el diseño de MOOCs, durante 2014 y 2016” (Ruiz, 2024). Estos fueron “los primeros MOOCs que se hicieron en Costa Rica” donde “se usaron plataformas muy nuevas en el mundo dedicadas a esta Modalidad” (Ruiz, 2024). No solo para docentes, pero también “MOOCs para los estudiantes que debían realizar el examen [pruebas nacionales de Bachillerato, obligatorias para que los estudiantes pudieran graduarse de la secundaria]” (Ruiz, 2024). Como escribe Ángel Ruiz “esto fue extraordinario. Se pasó de cursos para docentes con 200 a 400 participantes, a cursos con cinco mil estudiantes”. Además de todo eso “se diseñaron Mini-MOOCs también para docentes” pues “también eran útiles cursos más cortos y enfocados” (Ruiz, 2024). Esto es extraordinario sobre todo porque no es nada fácil organizar todo eso.

Tanto en Portugal como en Costa Rica fueran creados recursos que están disponibles en línea, para garantizar que se consigue llegar en permanencia a todos. Ángel Ruiz describe los importantes “Recursos Libres de Matemáticas” (RLM): “materiales virtuales (...) siempre disponibles, gratuitos, con simulación de la resolución de problemas con énfasis en contextos reales (...), con tareas matemáticas colocadas en diversos grados de complejidad” (Ruiz, 2024).

Conclusiones

Los dos currículos analizados de Portugal y Costa Rica son dos ejemplos de suceso que muestren como se puede conseguir un cambio sustentado y eficaz. Son dos ejemplos de currículos necesarios para el siglo XXI con un equilibrio entre la teoría matemática y las aplicaciones, con un uso equilibrado de tecnología, sin olvidar su propia historia.

El informe de UNESCO muestra como

En un momento en que las matemáticas se están convirtiendo en una herramienta cada vez más valiosa para los responsables de la toma de decisiones, una gama cada vez mayor de modelos matemáticos nos permite analizar hasta qué punto los fenómenos naturales y aquellos que hemos generado afectarán nuestra forma de vida y si logramos preservar nuestro entorno cada vez más frágil (Dhersin et al., 2023, pp. XV).

En este escenario el mismo documento de UNESCO defiende que

La educación matemática desarrolla habilidades de resolución de problemas y pensamiento crítico que pueden transferirse a nuevas situaciones y a una variedad de campos ocupacionales (Dhersin et al., 2023, pp. 15).

Y más:

La educación matemática es importante para formar ciudadanos reflexivos y críticos capaces de afrontar las exigencias matemáticas de la vida cotidiana, así como para formar un número suficiente

de matemáticos y científicos capaces de afrontar los retos del mundo contemporáneo (Dhersin et al., 2023, pp. 15).

Muchos otros documentos dicen cosas semejantes. El informe de 2019 de la *Bill & Melinda Gates Foundation* titulado “Investigación y desarrollo educativo: aprendizaje sobre el terreno” dice que una meta debe ser:

Preparar a todos los estudiantes para comprender y aplicar en profundidad las habilidades y conocimientos matemáticos, así como las mentalidades relacionadas (Bill & Melinda Gates Foundation, 2019, 2).

Una recomendación de este informe es de

Brindar oportunidades para explorar conceptos matemáticos de formas interesantes (por ejemplo, con materiales manipulativos, elementos visuales, juegos, actividades interactivas o en entornos del mundo real con significado para la comunidad local) puede ayudar a involucrar a los estudiantes y desarrollar su identidad como estudiantes de matemáticas (Bill & Melinda Gates Foundation, 2019, 16).

También es una constante en todos los informes la necesidad de apoyar los profesores a mejorar la enseñanza de la Matemática. El informe de 2019 de la *Bill & Melinda Gates Foundation* propone:

Los docentes necesitan acceso a una educación y formación matemática suficiente, incluyendo desarrollo profesional sobre cómo los estudiantes aprenden matemáticas, cómo anticipar sus procesos de pensamiento y conceptos erróneos, cómo implementar eficazmente la resolución de problemas complejos y no rutinarios en el aula y cómo vincular conceptos y habilidades matemáticas para motivar ejemplos y prácticas (Bill & Melinda Gates Foundation, 2019, 16).

La Educación Matemática para TODOS es imprescindible pues “La educación matemática es importante para formar ciudadanos reflexivos y críticos capaces de afrontar las exigencias matemáticas de la vida cotidiana”. Si es necesario que la Educación Matemática sea para TODOS ¿es eso posible? Las reformas de Portugal y Costa Rica, en dos continentes diferentes, muestran que la respuesta es SÍ!

Podemos decir también de la reforma portuguesa lo que Ángel Ruiz escribe sobre la experiencia en Costa Rica:

Esta experiencia en América Central (2010-2024) ofrece elementos para docentes e investigadores en diversas áreas de la Educación Matemática, pero sobre todo insumos para quienes tienen o vayan a tener responsabilidades en el diseño e implementación curricular en las matemáticas escolares (Ruiz, 2024).

Referencias y bibliografía

- Bill & Melinda Gates Foundation (2019). Education Research & Development: Learning from the Field. Obtido de <http://k12education.gatesfoundation.org/researchanddevelopment/>
- Dhersin, J-S, Kaper, H., Ndifon, W., Roberts, F., Rousseau, C., Ziegler, G. (2023). MATHEMATICS FOR ACTION Supporting Science-Based Decision-Making (MATEMÁTICAS PARA LA ACCIÓN Apoyo a la toma de decisiones basada en la ciencia). Paris: UNESCO.
- Carvalho e Silva, J. (1993). A reforma curricular e a história da matemática. *Educação e Matemática*, 27, pp. 27-31.
- Carvalho e Silva, J. (1994). The Mathematics Education Reform Movement in Portugal and the use of Calculators -- publicado nos Proceedings of the 7th International Conference on Technology in Collegiate Mathematics - ICTCM (Addison-Wesley).
- Carvalho e Silva, J. (1995). O pensamento pedagógico de José Sebastião e Silva: Uma primeira abordagem. *Boletim da SPM*, 32, pp. 101-114.

- Carvalho e Silva, J. (coord.), Martins, A., e Fonseca, G. (1995). Matemática, 10º, 11º e 12º anos, Programa. Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.
- Carvalho e Silva, J. (1998). A Tecnologia, as Imagens e o Currículo. In Conselho Nacional de Educação. A Sociedade da Informação na Escola (pp. 133–139). Lisboa: Ministério da Educação.
- Carvalho e Silva, J. (2000) Son las calculadoras gráficas el catalizador para un Cambio real en la educación matemática. Pedro Gómez y Bert Waits. Papel de las Calculadoras en el Salón De Clase. 1. ed. Bogota: una empresa docente, v. 1, pp. 21-30.
- Carvalho e Silva, J. (coord.), Fonseca, G., Martins, A., Cruchinho, C., e Lopes, I. (2001). Programa de Matemática A. Departamento do Ensino Secundário, Ministério da Educação.
- Carvalho e Silva, J. (2003). Novos Programas de Matemática no Ensino Secundário-2003/2004, Gazeta de Matemática, nº 145, Ano LXIV, pp. 10-17.
- Carvalho e Silva, J. (2004). A importância do estudo internacional PISA, Boletim da SPM, N. 51, 2004, pp. 67-80.
- Carvalho e Silva, J. (2008). O impacto nulo em Portugal dos resultados do estudo internacional PISA, jornal Página da Educação, N. 175, Fevereiro 2008.
- Carvalho e Silva, J. (2012). The mathematics teaching in Vocational schools in Portugal. PreProceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education, pp. 1838-1843. Seoul: ICMI.
- Carvalho e Silva, J. (2013). Learn Functions with Graphing Calculators, Periodico di matematiche, Numero 2 Mag-Ago 2013, Volume 5 Serie XI - Anno CXXIII, pp. 75 – 84, 2013.
- Carvalho e Silva, J. (2018). Secondary Mathematics for the Social Sciences, pre-Proceedings ICMI Study 24, School Mathematics Curriculum Reforms: Challenges, Changes and Opportunities (pp. 309-316). Tsukuba, 26-30 November 2018.
- Carvalho e Silva, J. (coord.), (2020). Recomendações para a melhoria das aprendizagens dos alunos em Matemática (Recomendaciones para mejorar el aprendizaje de los estudiantes en Matemáticas). Grupo de Trabalho de Matemática. Direção Geral da Educação, Ministério da Educação. Online: <http://www.dge.mec.pt/noticias/recomendacoes-para-melhoria-das-aprendizagens-dos-alunos-em-matematica-0>
- Carvalho e Silva, J. (2021a). The role of Discrete Mathematics in secondary mathematics for non-stem paths. The 14th International Congress on Mathematical Education, Shanghai, 12th –19th July, 2020). *TSG 15 Teaching and Learning of Discrete Mathematics*. Shanghai: ICMI.
- Carvalho e Silva, J. (2021b). Opções curriculares num Programa de Matemática para o Ensino Secundário. *Educação & Matemática*, nº 161, pp. 26-30.
- Carvalho e Silva, J. (2021c). A resolução de problemas em Matemática e o Pensamento Computacional. In Santos, V. et al (org.). *Matemática Com Vida: Diferentes olhares sobre a Tecnologia*, UA Editora: Univ. Aveiro, pp. 9-17.
- Carvalho e Silva, J. (coord.), (2023). Aprendizagens Essenciais, 10º ano, Ensino Secundário, Matemática A (Aprendizajes esenciales, 10º año de Educación Secundaria, Matemáticas A). Direção Geral da Educação, Ministério da Educação. Online: <https://www.dge.mec.pt/noticias/homologacao-das-novas-aprendizagens-essenciais-de-matematica-para-o-ensino-secundario>
- Carvalho e Silva, J. (2024a). Contribuciones antiguas y recientes de la UNESCO para mejorar la enseñanza de la Matemática. *UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20 (71).
- Carvalho e Silva, J. (2024b). Curricular changes for a secondary education with mathematics for all in the XXIst century (worldwide). 15th International Congress on Mathematical Education. TSG 5.6 Research and development on mathematics curriculum. Sydney, 7-14 July 2024.
- Carvalho e Silva, J., Domingos, A., Rodrigues, A., Almiro, J., Gabriel, L. (2024a). Desenvolvimento profissional do professor: mudando a prática na sala de aula nas novas AE para o ensino secundário, *Educação e Matemática*, N.º 174, pp. 29-33.
- Carvalho e Silva, J., Domingos, A., Rodrigues, A., Almiro, J., Gabriel, L. (2024b). As Aprendizagens Essenciais de Matemática do Ensino Secundário e o PASEO nas práticas do professor, *Educação e Matemática*, N.º 174, pp. 18-20.
- Castelnuovo, E. (1982). Para um ensino da Matemática capaz de produzir cultura científica. *Ensino da Matemática: Anos 80*. Actas do colóquio realizado no âmbito do encontro internacional de homenagem a José Sebastião e Silva. Lisboa: Reproscan, pp. 29-41.
- Comisión Europea (2025). Comunicación de la Comisión al Parlamento Europeo, al Consejo, al Comité Económico y Social Europeo y al Comité de las Regiones sobre el Plan de Acción para las Competencias Básicas, Bruselas, 5.3.2025, COM(2025) 88 final. <https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/?uri=CELEX:52025DC0088>

- Damerow, P., Dunkley, M. E., Nebres, B. F & Werry, B. (ed.), (1984) *Mathematics for All - Problems of cultural selectivity and unequal distribution of mathematical education and future perspectives on mathematics teaching for the majority*. Paris: Division of Science Technical and Environmental Education, UNESCO.
- Davies, A., Fidler, D., & Gorbis, M. (2011). *Future work skills 2020*. California: Institute for the Future for the University of Phoenix Research Institute, Palo Alto. Obtido de www.iftf.org
- DGE (2021). *Aprendizagens Essenciais de Matemática - Projeto “Contexto e Visão para a revisão curricular das Aprendizagens Essenciais em Matemática”*, Direção-Geral da Educação (DGE), Portugal. <https://aem.dge.mec.pt>
- Martins, A. (1997). Ensino secundário de Matemática: processo de um programa. *Educação e Matemática*, N.º 44, pp. 9-11.
- Martins, A., Carvalho e Silva, J. (2000). Exames nacionais do ensino secundário - Algumas notas, *Gazeta de Matemática*, nº 138, ANO LXI. pp. 51-58.
- Mullis, I. V. S., Martin, M. O., Foy, P., & Hooper, M. (2016). TIMSS Advanced 2015 International Results in Advanced Mathematics and Physics. Retrieved from Boston College, TIMSS & PIRLS International Study Center website: <http://timssandpirls.bc.edu/timss201>
- Ralha, M. E., Castanheira, J.M., Nápoles, S., Carvalho e Silva, J. (2009). Didactics of Mathematics as a Mathematical Discipline: A Portuguese reflection upon a Kleinean challenge - *Boletim do CIM*, 26 - 2009, pp. 24-26.
- Ruiz, A. (2013). La reforma de la educación matemática en Costa Rica: Perspectiva de la praxis. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8 (special), pp. 7-9. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/issue/view/1186>
- Ruiz, A. (2023). Conclusion ‘Laws’ of Curriculum Implementation and the Future in Which We Are Living (Las ‘leyes’ de conclusión de la implementación curricular y el futuro en el que vivimos). In: Shimizu, Y., Vithal, R. (eds) *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*. New ICMI Study Series. Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_19
- Ruiz, A. (2023). Implementation of Reformed Mathematics Curricula Within and Across Different Contexts and Traditions (Introduction). In Y. Shimizu, R. Vithal (eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*, New ICMI Study Series, https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_15
- Ruiz, A, Niss, M., Artigue, M., Vao, Y., & Reston, E. (2023). A First Exploration to Understand Mathematics Curricula. Implementation: Results, Limitations and Successes. In Y. Shimizu, R. Vithal (eds.), *Mathematics Curriculum Reforms Around the World*, New ICMI Study Series, https://doi.org/10.1007/978-3-031-13548-4_15
- Ruiz, A. (2024). Lecciones desde una reforma matemática en América Central. *UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 72, pp. 1-30.
- Sebastião e Silva, J. (1962). Sur l'introduction des mathématiques modernes dans l'enseignement secondaire, *Gazeta de Matemática*, nº 88-89, ANO XXIII. pp. 25-29.
- Torres, T., Coutinho, C., & Fernandes, J. (2008). Aplicações e modelação matemática com recurso à calculadora gráfica e sensores. *UNION - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 15, pp. 9-31.



Llegar a ser profesor de Matemáticas. Desafíos generados en la actualidad por las relaciones entre conocimiento, práctica y contextos

Salvador **Llinares**
 Universidad de Alicante
 España
sllinares@ua.es

Resumen

Los retos a los que se enfrenta la enseñanza de las Matemáticas en la actualidad se trasladan a desafíos en la formación de profesores. La gestión de estos desafíos se apoya en llegar a comprender la noción de competencia docente del profesor vista a través de las relaciones entre el conocimiento necesario para enseñar Matemáticas, la práctica de la enseñanza y los contextos específicos del trabajo docente. En esta conferencia se comparten reflexiones sobre (i) lo que la didáctica de la Matemática aporta a dicha comprensión considerando dicha competencia como un conglomerado de prácticas docentes específicas y (ii) los retos generados para apoyar su desarrollo en las propuestas formativas de profesores

Palabras clave: Aprendizaje del docente; Competencia docente; Conocimiento especializado para la enseñanza de las Matemáticas; Formación docentes; Prácticas profesionales específicas.

Los retos a los que se enfrenta la enseñanza de las Matemáticas en la actualidad se trasladan a desafíos en la formación de profesores y la gestión de estos desafíos se apoya en comprender la multidimensionalidad de las relaciones entre el conocimiento necesario para enseñar Matemáticas, la enseñanza de las Matemáticas como una práctica y los contextos específicos de trabajo docente (McDonald et al, 2013). Las relaciones entre conocimiento, práctica y contexto se evidencian a través de la noción de competencia docente del profesor al realizar la práctica profesional de enseñar Matemáticas (y de cómo se desarrolla/aprende esta competencia).

Si asumimos que la práctica docente de enseñar Matemáticas se puede caracterizar como un conglomerado de prácticas profesionales específicas, el aprendizaje profesional de la práctica de enseñar se puede caracterizar mediante el uso del conocimiento de manera pertinente en las situaciones de acción vinculadas a cada una de estas prácticas profesionales específicas. Una implicación de esta hipótesis es plantear la formación docente organizada a través del aprendizaje de estas prácticas profesionales (MacDonald, et al. 2013; Grossman, 2018). Esta cuestión sobre cómo organizar la formación docente considerando el aprendizaje de un sistema de prácticas profesionales específicas genera desafíos para el diseño de oportunidades de aprendizaje de estas prácticas profesionales específicas (Llinares, 2023). De esta manera, asumir que la enseñanza de las Matemáticas es una práctica que debe ser comprendida y puede ser aprendida conlleva el tener que identificar prácticas docentes (core practices) que son claves para apoyar el aprendizaje de los estudiantes. Desde una perspectiva analítica de la enseñanza de las Matemáticas, cuatro ejemplos de estas prácticas docentes específicas son (Figura 1):

- Dotar de sentido al pensamiento matemático de los estudiantes. Atender a los elementos matemáticos que son movilizados por los estudiantes en la resolución de problemas, interpretarlos para generar información sobre las características o niveles de desarrollo de su comprensión, para fundamentar las decisiones sobre cómo continuar la enseñanza. Esta práctica docente suele denominarse “mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes” (Callejo, et al, 2022; Espinoza-González, et al, 2025; Ivars et al, 2020; Jacobs & Spangler, 2017),
- Gestionar discusiones matemáticamente en el aula. La gestión del docente de estas situaciones puede apoyar el aprendizaje de los estudiantes sobre la comunicación matemática y formas de generar argumentos matemáticamente adecuados (Stein et al, 2008),
- Seleccionar, diseñar y adaptar tareas matemáticas al planificar la secuencia de enseñanza (lecciones), definiendo objetivos de aprendizaje acordes al desarrollo de diferentes aspectos de la competencia matemática de los estudiantes en clases específicas y anticipando las demandas cognitivas de las actividades y problemas matemáticos que le permitan adaptar las lecciones a los contextos particulares de sus aula y a los objetivos previstos (Moreno et al, 2024, 2025; Morris & Hiebert, 2017), y
- Aprender a reflexionar sobre su propia enseñanza (o la de otros) aprendiendo a identificar oportunidades de aprendizaje de sus estudiantes y como una forma de apoyo al aprendizaje a lo largo de la vida profesional. La identificación de estas oportunidades de aprendizaje permite a los docentes estar en condiciones de proponer cuestiones que permitan fomentar las discusiones, conectar ideas y valorar diferentes formas de razonamiento matemático (Font et al, 2024; Moreno, Bernabeu, Llinares, 2025; Moreno, Santonja, Llinares, 2025).

La hipótesis que subyace a esta conceptualización de la competencia docente (y al aprendizaje de la práctica de enseñar Matemáticas) es que llegar a ser competente en la enseñanza de las Matemáticas se apoya en aprender a conocer cómo actuar en cada momento en función del significado dado a la situación. Así, el desarrollo de la competencia está vinculado a aprender a seleccionar momentos relevantes, observar e interpretar aspectos de la situación de

enseñanza de que previamente no se era consciente, y disponer de acciones para actuar teniendo en cuenta lo que ha sido observado e interpretado (Mason, 2002).

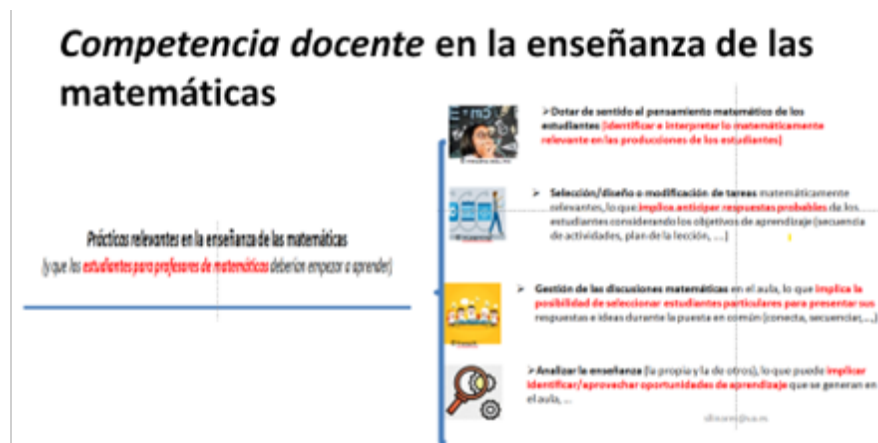


Figura 1. Competencia docente en la enseñanza de las Matemáticas como un conglomerado de prácticas profesionales específicas

Esta situación genera desafíos en relación a cómo los formadores de profesores toman decisiones en los contextos institucionales para conseguir los objetivos de aprendizaje de los estudiantes para docentes. Una manera de aproximarse a este objetivo es organizar programas de formación de docentes de Matemáticas “basados en la práctica” (Llinares, 2023). Uno de los objetivos de esta aproximación es apoyar el desarrollo de la competencia docente en el aprendizaje de un conjunto de prácticas profesionales específicas subrayando la relación entre conocimiento y práctica (acción). Desde esta perspectiva, generar estas oportunidades se apoya en buscar la coherencia entre los dos aspectos siguientes: (i) la conceptualización de la idea de competencia docente para la enseñanza de las Matemáticas en contextos específicos, y (ii) cómo los formadores de docentes entienden el desarrollo de esta competencia en los programas de formación. De esta manera, reflexiones sobre cómo buscar esta coherencia pueden ayudarnos a mejorar nuestras decisiones como formadores de docentes de Matemáticas considerando las instituciones en la que los programas de formación se insertan.

Programas de formación de docentes de Matemáticas “basados en la práctica”

Las hipótesis que apoyan el diseño de programas de formación de docentes de Matemáticas “basadas en la práctica” son dos. En primer lugar, se intenta integrar el aprendizaje del conocimiento necesario para enseñar Matemáticas y el desarrollo de la competencia docente mediante la articulación entre diferentes prácticas específicas profesionales. En segundo lugar, la organización del programa de formación alrededor de un conjunto de prácticas profesionales específicas, puede ayudar a los futuros docentes a aprender a razonar sobre la enseñanza de las Matemáticas para justificar líneas de acción. Los procesos de razonamiento generados en este tipo de contextos de aprendizaje se apoyan en establecer relaciones entre ideas o conceptos distintos para generar conclusiones o formar un juicio (Oxford Languages) ordenar y relacionar ideas para llegar a una conclusión (RAE). Por lo tanto, el aprendizaje de las prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las Matemáticas, se apoya en la relación dialéctica entre

- el conocimiento de Matemáticas para la enseñanza,
- el discurso generado en la justificación de la acción, y
- la acción derivada de la toma de decisiones.

Esta relación se ejemplifica cuando se vincula las evidencias (los datos) desde registros de la enseñanza con ideas generales procedentes de la didáctica de las Matemáticas (que ayudan a explicar lo observado). Es decir, los procesos de razonamiento permiten vincular lo particular a lo general (como una forma de justificar líneas de acción) a través de destrezas cognitivas tales como identificar/reconocer, interpretar, anticipar y decidir.

En este sentido, la implicación de los estudiantes para docentes de Matemáticas en las diferentes prácticas profesionales específicas durante la formación inicial puede ayudarles a desarrollar formas de pensar (razonamiento pedagógico) que puede apoyar su aprendizaje profesional como docentes conectando la teoría y la práctica (McDonald, et al., 2013). La relación entre los focos de atención (las prácticas profesionales específicas) y las destrezas cognitivas que organizan los procesos de razonamiento que se pretenden generar en los estudiantes para docentes permite visualizar el “andamio” de una propuesta de formación docente desarrollada en la Universidad de Alicante (España) para hacer operativo el aprendizaje del carácter multidimensional de la competencia docente del profesor/a de Matemáticas (Figura 2).

Prácticas profesionales específicas (“core practices”)							
FOCOS DE ATENCIÓN							
DESTREZAS COGNITIVAS		Pensamiento matemático de los estudiantes	Tareas matemáticas	Secuencias de tareas / Plan de lecciones	Interacción profesor- alumnos	Gestión del profesor de la discusión matemática, ...)	.../...
	Describir						
	Interpretar						
	Decidir						
	Anticipar						
	Reflexionar						
	.../...						

Figura 2. Relación entre destrezas cognitivas y prácticas profesionales específicas que articulan la toma de decisiones de los formadores de docentes para generar oportunidades de aprendizaje de los estudiantes para docentes.

La realización de determinadas prácticas como intersección entre el conjunto de destrezas cognitivas que ayudan a configurar los procesos de razonamiento docente y la particularización en determinados focos de atención (las prácticas profesionales específicas) permiten visualizar la secuencia que articula la propuesta formativa (Figura 3).

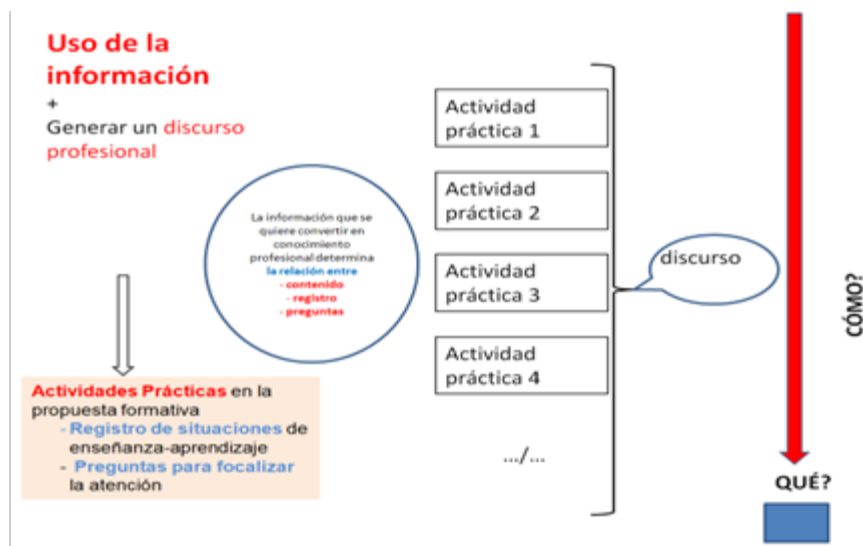


Figura 3. Secuencia actividades prácticas (Tareas de aprendizaje profesional) articulando la propuesta formativa

Desde estas referencias se generan dos desafíos para nosotros como formadores de docentes:

- i. caracterizar/diseñar oportunidades de aprendizaje (actividades prácticas/ las tareas de aprendizaje profesional) para los estudiantes con el objetivo de que aprendan a razonar sobre las situaciones de enseñanza y a desarrollar las prácticas que articulan la enseñanza de las Matemáticas (Ivars et al, 2017), y
- ii. generar indicadores del desarrollo de las competencias docentes vinculadas a estas oportunidades de aprendizaje proporcionadas por el programa de formación (Llinares, 2023). Lo que implica adoptar de manera explícita un modelo teórico para el desarrollo de competencias docentes que nos permita contestar a la cuestión ¿cómo los estudiantes para docentes aprenden en el programa de formación?

Tareas de aprendizaje profesional: Oportunidades para el aprendizaje de prácticas profesionales específicas

La estructura de las tareas de aprendizaje profesional dirigidas al aprendizaje de prácticas profesionales específicas, tales como analizar el pensamiento matemático de los estudiantes, analizar y secuencias de tareas, planificar lecciones, entre otras suelen reflejar principios de diseño similares (Ivars, et al. 2017; Llinares et al, 2020). Cuatro de estos principios usados de manera sistemática en nuestro programa de formación son:

- *Documentos proporcionando información teórica.* Esta información viene definida por un foco de atención determinado por el formador,
- *Registros de la práctica.* Descripciones de aspectos particulares de una situación de aula (respuestas de estudiantes, secuencia de actividades, descripción de interacciones docente alumnos , ...) que pueden adoptar el formato de narrativas/casos, videos, comics, ...
- *Cuestiones guía que sirven para focalizar la atención* de los estudiantes para docente sobre los aspectos que el formador ha decidido, y
- *Contextos de interacción* en el programa de formación donde las tareas profesionales se presentan a los estudiantes para docentes.

Ejemplos de estas tareas de aprendizaje profesional en un programa de formación docente para educación primaria se recogen en la Figura 4. La situación 1 (Figura 4a) tiene el formato de comic. Su foco son las características de las interacciones entre la tarea matemática, las respuestas de los estudiantes y la gestión del docente conectando diferentes modos de representación con el objetivo de apoyar la construcción del significado de algoritmos de cálculo. La práctica profesional específica foco de atención aquí sería “mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza de las Matemáticas”.

La situación 2 (Figura 4b) tiene el formato de caso presentando respuestas de estudiantes a varias tareas. En la primera parte, respuestas a tareas con fracciones y en la segunda respuestas ante situaciones proporcionales y no proporcionales. Las respuestas de los estudiantes muestran diferentes niveles de comprensión del concepto de fracción como parte-todo, y características del reconocimiento de situaciones proporcionales y no proporcionales centradas en el significado de la idea de razón y proporción y de las relaciones multiplicativas entre las cantidades. La tarea de aprendizaje profesional crea el contexto para el uso de trayectorias de aprendizaje de los conceptos matemáticos (concepto de fracción como parte- todo) y/o niveles de desarrollo de la comprensión de algún concepto (razón y proporción). La práctica profesional específica que es el foco de atención aquí es mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes.

La situación 3 (Figura 4c) tiene el formato de caso presentado una situación en la que un grupo de docentes tiene que planificar una lección sobre poliedros (cuerpos geométricos) para estudiantes de 11-12 años con el objetivo de que los estudiantes comprendan las “relaciones de inclusión de los primos”. La tarea de aprendizaje profesional presenta una actividad dirigida a este objetivo y se pide a los estudiantes para docentes que anticipen posibles respuestas de los estudiantes reflejando diferentes niveles de comprensión de las relaciones de inclusión entre los prismas. Esta Tarea profesional permite centrar la atención de los estudiantes para docente sobre el uso del conocimiento para justificar las posibles transiciones en la comprensión de los estudiantes de educación primaria desde un nivel de análisis de los atributos de los cuerpos geométricos a un nivel de comprensión centrado en las relaciones de inclusión y las definiciones mínimas de los prismas. La práctica profesional específica que es el foco de atención aquí es anticipar respuestas de los estudiantes a determinadas tareas reflejando diferentes características de su comprensión en un contexto de justificar la inclusión de una tarea en un plan de lección (es decir, la evaluación del potencial de la tarea matemática para el aprendizaje pretendido de los estudiantes de educación primaria).

La situación 4 (Figura 4d) tiene el formato de la fotocopia de una actividad desde una lección de libro de texto sobre fracciones. La tarea de aprendizaje profesional presenta diferentes cuestiones centradas en determinar el potencial de esta actividad para el aprendizaje de los estudiantes. El foco es sobre el diseño de tareas adicionales usando diferentes variables de tarea (elementos matemáticos, modos de representación, números usados, tipo de tareas, ...). La práctica profesional específica es analizar recursos didácticos (la tarea matemática) como parte de aprender a mirar profesionalmente los materiales curriculares.

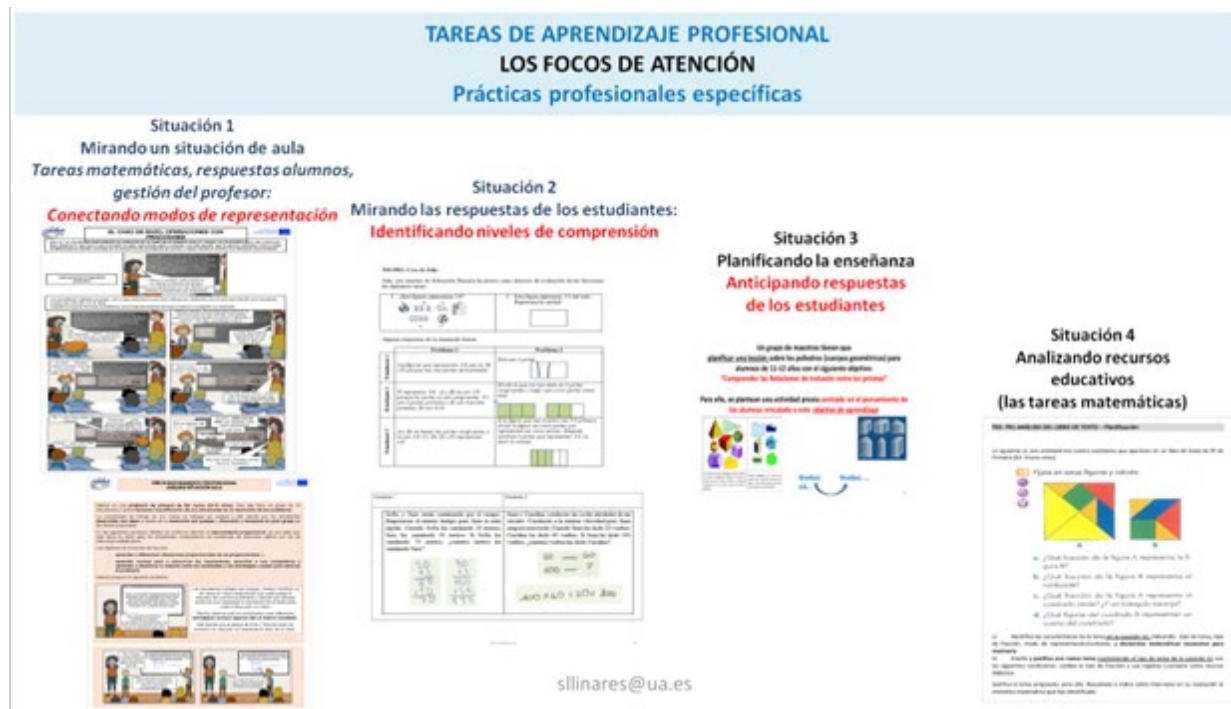


Figura 3. Ejemplos de tareas profesionales centradas en prácticas profesionales específicas. Figura 4a- mirar profesionalmente las situaciones de aula (*professional noticing of teaching situations*). Figura 4b, Mirar profesionalmente las respuestas de los estudiantes (*profesional noticing of students' mathematical thinking*). Figura 4c, Anticipar respuestas de estudiantes vinculadas a tareas específicas en una situación de planificación (*Anticipate students' responses*). Figura 4d, Mirar profesionalmente recursos educativos (*curricular noticing*)

Desafíos generados en la formación docente. Identificando indicadores del desarrollo de la competencia docente

Las relaciones que se establecen entre el conocimiento, la práctica y el contexto en el que los formadores de los docentes de Matemáticas intentamos tomar decisiones se centran en hacer operativa la relación entre el conocimiento y la enseñanza de las Matemáticas considerada como una práctica que debe ser comprendida y aprendida. La respuesta dada a través del diseño y uso de tareas de aprendizaje profesional intenta crear oportunidades para el aprendizaje de los estudiantes para docentes de prácticas profesionales específicas que se apoyan en dos tipos de transiciones. En primer lugar, para que puedan establecer relaciones explícitas entre lo que es observado en una situación de enseñanza (la evidencia) y las interpretaciones realizadas. Es decir, pasar de lo particular a lo general generando explicaciones de lo observado. En segundo lugar, para pasar desde las interpretaciones realizadas (las explicaciones) a decidir qué hacer a continuación. Es decir, para pasar de lo general a lo particular, decidiendo qué hacer en una situación específica intentando reflejar “principios generales”. La manera en la que se dan estas dos transiciones y cómo se articulan en la formación docente inicial ayudan a generar indicadores del desarrollo de la competencia docente (Ivars, et al, 2020; Márquez et al, 2021; Montero et al., 2022; Moreno et al, 2025).

La articulación de los procesos cognitivos de identificar, interpretar y decidir que configuran la competencia docente “mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza” con

los aspectos de la enseñanza de las Matemáticas observados (los focos de atención) tales como las respuestas de los estudiantes, las tareas la acción del docente, ... permite identificar características que ayudan a generar indicadores del desarrollo de la competencia docente. Por ejemplo, en relación a la coherencia en el uso del conocimiento especializado para razonar sobre las situaciones de enseñanza, y las características de la articulación entre los focos de atención y las ideas usadas para generar explicaciones sobre la situación. La coherencia en el uso del conocimiento pone el centro de atención en la relación lógica entre las ideas usadas al razonar sobre la situación. Mientras que, la articulación entre ideas y focos pone el centro de atención en la manera en la que las ideas se conectan, organizan y presentan para dirigir la atención hacia los aspectos que el estudiante para docente considera relevante en la situación.

Desde estas perspectivas, el desarrollo de la competencia docente en los programas de formación inicial lo podemos comprender como el proceso por el cual los estudiantes para docentes dotan de sentido y usan las ideas procedentes de la didáctica de la Matemática en las situaciones de enseñanza (entendidas estas ideas como instrumentos conceptuales para interpretar y gestionar la enseñanza). De esta manera, los instrumentos conceptuales pueden ayudar a los estudiantes para docentes a desarrollar una “mirada selectiva” de las situaciones de enseñanza, aprendiendo a determinar niveles de relevancia de los diferentes aspectos que se pueden considerar en una situación para el aprendizaje matemático en sus aulas.

En este sentido, se generan dos ideas claves ante los desafíos generados en la formación inicial docente. En primer lugar, el uso progresivo de los instrumentos conceptuales para considerar lo observado como ejemplos particulares de un fenómeno general transforma la información teórica proporcionada en el programa de formación (el contenido del programa) de artefacto de la cultura de la enseñanza hasta llegar a ser un instrumento en el proceso de llegar a ser un profesor. En segundo lugar, lo que se enfatiza es la actividad de conocer mediante el uso de instrumentos conceptuales (la información teórica proporcionada que forma parte del contenido del programa formativo) como un medio para guiar el proceso de identificar, interpretar y tomar decisiones. Es decir, cuando la acción es mediada por los instrumentos conceptuales, en este caso, la información teórica usada en el discurso. Desde estas referencias, las destrezas de identificar e interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes, las tareas matemáticas, o las situaciones de enseñanza, para tomar decisiones de acción, constituyen el andamiaje de la competencia docente “mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas.

En estos momentos, los desafíos para los formadores de docentes de Matemáticas se presentan en una doble vertiente. Por una parte, en el desarrollo de esquemas conceptuales que nos ayuden a comprender mejor (el conocimiento) los procesos de desarrollo de la competencia docente vinculada a la enseñanza de las Matemáticas como una práctica (la práctica) que se pueden empezar a generar en los programas de formación docente inicial (el contexto). En segundo lugar, los aportes desde la investigación empírica que nos ayude a generar los indicadores que nos permitan determinar niveles de desarrollo (el aprendizaje) en los estudiantes para docentes.

La respuesta a estos desafíos en la formación docente se apoya en el desarrollo de agendas de investigación internacionales en el campo de la Educación Matemática generando

conocimiento complementario que permite considerar las especificidades de los contextos. En particular, teniendo en cuenta las características de los programas de formación docente en cada institución. En este sentido, lo que nos permite avanzar son las reflexiones compartidas sobre (i) lo que la didáctica de la Matemática aporta a nuestra comprensión del desarrollo de la competencia docente considerándola como un conglomerado de prácticas docentes específicas, y (ii) la naturaleza de las respuestas dadas a estos desafíos a través del diseño, implementación y análisis en contextos específicos de tareas de aprendizaje profesional. Estas reflexiones compartidas en esta conferencia están dirigidas a llegar a comprender mejor la multidimensionalidad de las relaciones entre Conocimiento, Práctica y Contexto en la formación docente.

Reconocimiento

Este trabajo forma parte del proyecto Referencia: PID2023-149624NB-I00, Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España, y del grupo de Investigación en Didáctica de la Matemática de la Universidad de Alicante, GIDIMAT-UA, <https://web.ua.es/es/gidimat/grupo-de-investigacion-de-didactica-de-la-matematica.html>

Referencias y bibliografía

- Alpízar-Vargas, M., Fernández, C. & Llinares, S. (2024). Competencia docente del profesorado de educación primaria en el área de medidas en un contexto de reforma curricular. *Uniciencia*, 38(1), 1-24. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.22>
- Bufo, A., Llinares, S., Fernández, C., Coles, A., & Brown, L. (2022). Pre-service teachers' knowledge of the unitizing process in recognizing students' reasoning to propose teaching decisions. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(2), 425-443. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1777333>
- Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2022). The use of a length and measurement HLT by pre-service kindergarten teachers' to notice children's mathematical thinking. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20, 597-617. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10163-4>
- Espinoza-González, J.; Bufo, A. & Llinares, S. (2025). Perfiles de estudiantes para profesor de matemáticas al mirar profesionalmente el razonamiento proporcional. *Enseñanza de las ciencias*, 43(3), 31-50, <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.6472>
- Fernández, C., Ivars, P., & Llinares, S. (2023). El desarrollo de la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes durante los periodos de práctica. *Revista Interuniversitaria de Formación del Profesorado*, 98(37.2), 127-146. <https://doi.org/10.47553/rifop.v98i37.2.99296>
- Fernández, C.; Llinares, S.; & Choy, B.H. (2025). Innovations in Initial Mathematics Teacher Education. New Development and Insights. Springer Nature
- Font, V., Breda, A., Sala-Sebastià, G., et al. (2024). Future teachers' reflections on mathematical errors made in their teaching practice. *ZDM Mathematics Education*, 56, 1169-1181, <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01574-y>
- Grossman, P. (2018). *Teaching core practices in teacher education*. Harvard Education Press.
- Ivars, P., Bufo, A., & Llinares, S. (2017). Diseño de tareas y desarrollo de una Mirada profesional sobre la enseñanza de las matemáticas de estudiantes para maestro. En A. Salcedo (coord.) *Alternativas pedagógicas para la educación matemática del siglo xxi* (p. 65-88). Centro de Investigaciones Educativas. Escuela de Educación, Universidad Central de Venezuela, Venezuela
- Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A Learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18, 529-548. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4>
- Jacobs, V.R. & Spangler, D.A. (2017). Research on Core Practices in K-12 Mathematics Teaching. En J. Cai (Ed). *COMPEDIUM for Research in Mathematics Education* (p. 766-792). NCTM, Reston VA

- Llinares, S., Ivars, P., Buform, A. & Groenwald, Cl. (2020). “Mirar Profesionalmente” las situaciones de enseñanza: Una competencia basada en el conocimiento. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández & y M. T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Salamanca: Ediciones Universidad Salamanca.
- Llinares, S. (2023). Formación de profesores de matemáticas “basada” en la práctica. El aprendizaje de prácticas profesionales específicas. Conferencia paralela en XVI CIAEM-IACME, Lima Perú,
- Márquez, M., Fernández, C., & Callejo, M.L. (2021). Pre-service primary school teachers' knowledge and their interpretation of students' answers to a measurement division problem with fractions. *Mathematics*, 9(24), 3163. <https://doi.org/10.3390/math9243163>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice. The discipline of noticing*. London: Routledge-Falmer. <https://doi.org/10.4324/9780203471876>
- McDonald, M.; Kazemi, E.; Kavanagh, S. (2013). Core Practices and Pedagogies of Teacher Education: A Call for a Common Language and Collective Activity. *Journal of Teacher Education*, 64(5), 378-386, DOI:10.1177/0022487113493807
- Montero, E., Callejo, M.L., & Valls, J. (2022). Anticipación de estrategias de resolución de problemas de división-medida con fracciones mediante una progresión de aprendizaje. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa - RELIME*, 25(3), 289 - 310. <https://doi.org/10.12802/relime.22.2532.Montero>
- Montero, E., Callejo, M. L., & Valls, J. (2020). Instrumentación de una progresión de estrategias por estudiantes para maestro. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(2), 83-101. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3038>
- Moreno, M.; Santonja, P.; & Llinares, S. (2025). Levels of articulation in prospective mathematics teacher noticing. *Educational Studies in Mathematics*. <https://doi.org/10.1007/s10649-025-10442-9>
- Moreno, M.; Bernabeu, M.; & Llinares, S. (2025). Prospective early childhood teachers’ articulated noticing of mathematics teaching through writing narratives. *Journal of Early Childhood Teacher Education*, 1-20. <https://doi.org/10.1080/10901027.2025.2566431>
- Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P. & Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education*, 53, 57-72. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5>
- Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Valls, J. (2025). Influence of Professional materials on the decision-making of preservice secondary teachers when noticing students’ mathematical thinking. *Education Science*, 15(4), 418, <https://doi.org/10.3390/educsci15040418>
- Morris, A., & Hiebert, J. (2017). Effects of Teacher Preparation Courses: Do Graduate Use what they learned to plan mathematics lessons?. *American Educational Research Journal*, 54(3), 524-567, <https://doi.org/10.3102/0002831217695217>
- Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Valls, J. (2021). Instrumental Genesis of a learning Trajectory: The Case of Pedro's Professional Noticing. *Acta Scientiae*, 23(7), 91-119. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6296>
- Smith, M.S. & Stein, M.K. (2011). *Five practices for orchestrating productive mathematics discussions*. NCTM: Reston, VA.



Tecnologias no ensino: Possibilidades, inovações e outras coisas, inclusive, as artificiais

Marcelo Bairral

Instituto de Educação, Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro

Brasil

mbairral@ufrj.br

Resumo

A integração de tecnologias digitais no currículo sempre instiga educadores matemáticos. Que tipo de tarefas elaborar? Como analisar o aprendizado? Que mudanças curriculares e singularidades – didáticas, cognitivas ou epistemológicas – podem ser observadas? Nessa palestra apresentarei exemplos que utilizamos com alunos da Educação Básica e com futuros professores, particularmente, com celulares e tablets. Exemplificarei também o uso do rastreador ocular e o de dispositivo de Inteligência Artificial. Optei por deixar esse texto mais teórico e na apresentação mostrarei os exemplos com mais detalhes. Para finalizar deixo o alerta de que tecnologia é uma criação humana e atende as demandas do homem. Tecnologia e Matemática não são neutras e nosso ensino deve colocar a criatividade, a autoria e o pensamento crítico sempre em primeiro plano.

Palavras-chave: Dispositivos móveis; Rastreador ocular; Toques em tela; Inteligência artificial.

Introdução

Nesse artigo ilustro resumidamente cinco iniciativas provenientes de dois projetos de pesquisa que coordeno e que são financiados por agências de fomento brasileiras, o Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) e a Fundação Carlos Chagas Filho de Amparo à Pesquisa do Estado do Rio de Janeiro (Faperj). Optei por deixar esse texto mais teórico e na apresentação mostrarei os exemplos com mais detalhes. Em nossas investigações abordamos conteúdos matemáticos ausentes no currículo (Assis; Bairral, 2022) e conteúdos que são ensinados, mas que carecem de maior dinamicidade com tecnologias digitais (Bairral; Henrique, 2021).

C. Plenária; Geral

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

Dispositivos móveis com toques em tela - *smartphone* ou *tablet* - constituem uma extensão física do corpo, e a comunicação que tais interfaces promovem passa a ser entendida como deslocamento. Considerando especificidades - como mobilidade, convergência e ubiquidade -, para relacionar as iniciativas que serão sintetizadas aqui e exemplificadas na minha palestra, usarei as seis dimensões (contemporaneidade, sócio-técnica, perceptivo-afetiva, neuro-cognitiva, discursivo-comunicativa, político-pedagógica) que podem ser consideradas em processos de ensino, de aprendizagem e de pesquisa com aparatos móveis (Bairral, 2018; 2019).

Uma síntese teórica para iniciar

A dimensão da **contemporaneidade** nos convida a refletir que a ideia de que o conceito de dispositivo não é recente. O tempo (não necessariamente físico, do relógio) e a política são exemplos de dispositivos. Também há dispositivo oriundo de um discurso militar. Um dispositivo de natureza tecnológica, por exemplo, analisa como estão dispostas as partes de um mecanismo em uma máquina ou o próprio mecanismo em si. Então, a reflexão sobre o que é um dispositivo, de como ele entra e interfere nossa vida e em nosso modo de pensar seria um refletir sobre obscuridades e desafios em nossa trajetória. Dispositivos distintos contribuem, diferentemente, em nosso aprendizado. Interagindo com eles, seguimos procedimentos ou conceitos já constituídos ou geramos outros. Na verdade, o grande desafio é produzir novos conceitos matemáticos.

O avanço computacional tem mudado a forma de ser e estar no mundo da vida e, conseqüentemente, de aprender, de ensinar e de pesquisar. A dimensão **sócio-técnica** surge com a técnica. Graças a ela a conectividade nos permite navegar por lugares não imaginados. Da mesma forma que ela nos permite voar, ela também nos aprisiona. Permite-nos participar de coletivos variados, mas nos isola em um mundo de suposta felicidade e prazer constantes. Atualmente, estar conectado pressupõe a possibilidade de navegar por lugares (des)conhecidos. Temos dificuldade de imaginar nosso celular sem conexão à Internet. Parece que falta (e falta mesmo!) algo em nossa corrente sanguínea. A convergência e a ubiquidade também surgem graças ao avanço da informática. Nosso *smartphone* possui uma série de funcionalidades. Tiramos uma foto e podemos editá-la, compartilhá-la e usá-la na produção de conteúdos diversos. Na verdade, quase não usamos nosso telefone para realizar uma chamada. A convergência e a ubiquidade reconfiguraram a utilidade inicial do celular. Este tipo de dispositivo faz parte de nossa memória, nossa memória expandida.

A dimensão **perceptivo-afetiva** tem o afeto, os sentimentos e a sedução como algumas de suas características detonadoras. A forma com a qual nos apropriamos de tecnologias está em constante interação com o ambiente, ou seja, a tecnologia influencia o meio, e este também reage com (ou sobre) ela. Sendo, portanto, o *smartphone* uma tecnologia expansiva e não reparadora do aspecto físico do nosso corpo, passamos a constituir com ele atividades que não faríamos sem o dispositivo.

A dimensão **neuro-cognitiva** nos alerta que as mudanças anatômicas em nosso cérebro ocorrem ao longo de nossa vida e com elas as capacidades, as habilidades e a própria personalidade que um indivíduo forja e desenvolve. Nossa mente, nosso corpo e o ambiente

físico trabalham em constante sinergia. O espaço físico (a sala de aula, por exemplo) inclui diferentes aparatos (tecnológicos, cognitivos, culturais etc.) com os quais lidamos. A entrada deles em nossa vida (e corpo) altera nosso jeito de ser e estar no mundo. Nosso ambiente também se reconfigura.

Discurso é uma prática comunicativa contextualmente situada. Estamos aqui, neste artigo, em um contexto discursivo. Em um espaço que tem regras explícitas e implícitas. Embora ocorra um ato comunicativo, não necessariamente temos interação entre mim (o autor) e você, o leitor(a). Toda interação é um ato comunicativo, mas nem toda comunicação detona um processo interativo. Interagir (sujeito-sujeito, sujeito-dispositivo) é uma ação imprescindível no desenvolvimento humano. Um discurso se produz e se interpreta em contextos específicos. Nesse processo consumimos, agregamos, produzimos e distribuimos conteúdos em diversos formatos, espaços e tempos. Essas são algumas reflexões instigadas pela dimensão **discursivo-comunicativa**.

No mundo globalizado, um currículo deve contemplar aspectos culturais (de escolas, de regiões) e pessoais (de professores, de alunos), e valorizar características culturais locais, que não podem ser vistas como menores no processo educativo. Além do mais, não faz sentido pensar em universalização curricular. Da mesma forma que um aluno de uma escola da cidade de Santo Domingo pode conhecer o que acontece (história, arquitetura, linguagem, modo de vida, economia, meios de transporte etc.) em uma cidade do interior desse país, o inverso também é importante. O desafio curricular é dar conta desse intercâmbio cultural, discursivo e cognitivo e da interação entre os aprendizes. Para isso, as tecnologias móveis podem ser muito úteis e nesse desafio temos a dimensão **político-pedagógica**. Cabe destacar que essas dimensões estão inter-relacionadas.

Iniciativa 1: Dispositivos móveis com toques em tela

As manipulações em tela constituem uma nova forma de manifestação da linguagem e passam a fazer parte da nossa cognição corporificada (Bairral, 2021). Embora a possibilidade de tocar em tela não seja recente, a mobilidade e o tipo de sensibilidade e *performance* oferecidos por certos dispositivos o são e têm mexido conosco. Essas mudanças, que fazem parte de um processo criativo, geram inovação. Bairral et al. (2017) apontam dois domínios de manipulações *touchscreen* em suas pesquisas: o **construtivo**, que envolve toques simples e específicos na tela (como duplos toques, por exemplo) e observações isoladas, geralmente, em momentos de construção de objetos matemáticos, ou verificação de uma observação pontual; e o **relacional**, que abrange a combinação e a articulação de múltiplos toques mais rebuscados ou não, como, por exemplo: o movimento de aproximar e arrastar simultaneamente, ou somente o aproximar. Neste último domínio a consideração de aspectos globais na observação do diagrama dinâmico é uma característica marcante. Além disso, a conjectura é um tipo de ação do pensamento específico do domínio relacional. O Quadro 1 ilustra exemplos de toques predominantes em cada domínio.

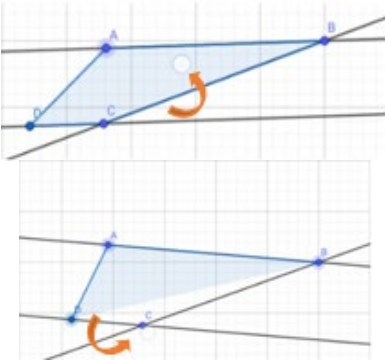
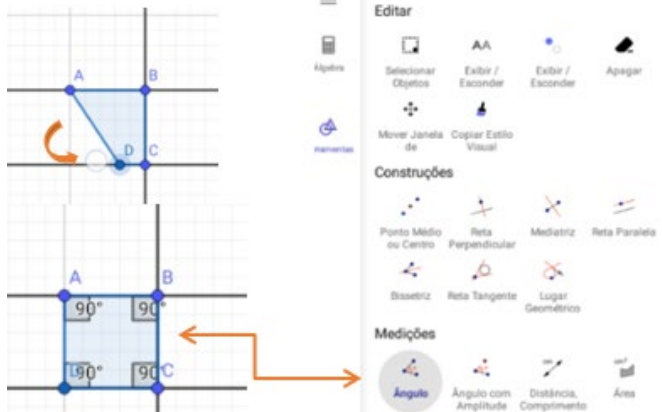
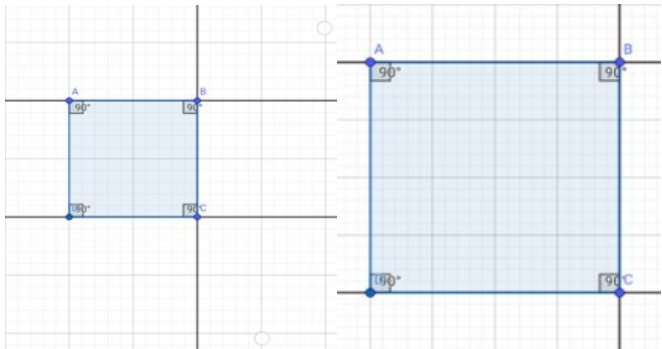
Toques simples, sem movimento de arrasto, típicos do domínio construtivo	
 Um único toque na tela	 Dois toques seguidos na tela
Toques combinados, com movimentos de arrasto, típicos do domínio relacional	
 Manipulação de arrasto para cima e para baixo, sem retirar o dedo da tela	 Manipulação de arrasto para a direita, sem retirar o dedo da tela

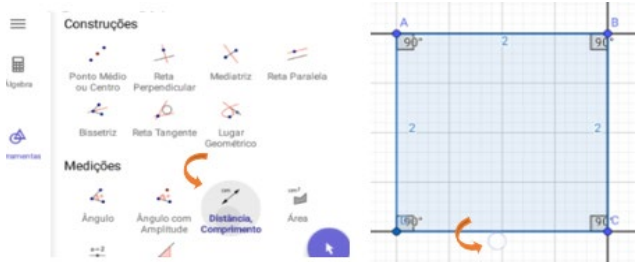
Quadro 1. Exemplos de toques e domínios de raciocínio

Destacamos (Bairral et al., 2017) que, no **domínio construtivo** o olhar do sujeito se volta a aspectos pontuais do objeto geométrico explorado no aplicativo, isto é, são momentos em que as manipulações realizadas na tela possuem a função de medir, construir, editar e nomear elementos. Como o processo de criação de um objeto geométrico no dispositivo envolve a seleção de ferramentas específicas do APP, as manipulações de toques são mais frequentes. Contudo, os pesquisadores sublinham que o raciocínio neste domínio está orientado para o olhar específico de um elemento do objeto explorado. No **domínio relacional**, as manipulações na tela passam a ter a função de deformar (ou não) a figura por meio do arrasto, aproximar o objeto a figuras familiares e aumentar ou diminuir a figura. Especificamente sobre o raciocínio, os estudiosos destacam a emergência de conjecturas, hipóteses, observação de relações, questionamentos e refinamento etc. como elementos pertinentes ao domínio relacional.

Iniciativa 2: Dispositivos móveis com a emergência de mediadores semióticos

Os toques ilustrados na Iniciativa 1 constituem mediadores semióticos na aprendizagem dos envolvidos (Assis; Bairral, 2022). No Quadro 2 vemos estratégias do aluno Estevão - do Ensino Fundamental – para construir um quadrilátero com todos os lados medindo o mesmo valor. A construção da figura por Estevão ocorreu de maneira espaçada e sequencial, com intervalos de tempo entre os toques (setas em vermelho). Nesse processo, ele executou diversas ações, incluindo a ativação de ferramentas e a ampliação da figura. No início, Estevão seguiu a sequência de toques: <Exibir Malha><Polígono><pontos nas retas><Mover><vértice A><vértice C><vértice D><Ângulo>. Posteriormente, após ampliar a figura, ele realizou as seguintes ações: <Distância><lado AD><lado AB><lado BC><lado CD> (Silva & Bairral, submetido).

Toques	Visualização na tela	Considerações
<Exibir Malha><Polígono>		Habilita a malha antes de construir o quadrilátero e, em sequência, utiliza a ferramenta polígono.
<pontos nas retas><Mover>		Seleciona um ponto (D) em uma das retas paralelas e utiliza os outros existentes para construir a figura. Depois, move a figura de modo que os seus lados coincidam com um dos quadrados da malha.
<vértice A><vértice C><vértice D><Ângulo>		Movimenta os vértices da figura utilizando como base o quadrado da malha. Em seguida, verifica os ângulos internos com toque na área interna da construção.
Ampliação		Demonstra preferência em ampliar a figura.

<Distância>	 The image shows the GeoGebra interface. On the left, there are two panels: 'Construções' (Constructions) and 'Medições' (Measurements). The 'Construções' panel includes tools like 'Ponto Médio ou Centro' (Midpoint or Center), 'Reta Perpendicular' (Perpendicular Line), 'Mediatriz' (Perpendicular Bisector), 'Reta Paralela' (Parallel Line), 'Bissetriz' (Angle Bisector), 'Reta Tangente' (Tangent Line), and 'Lugar Geométrico' (Locus). The 'Medições' panel includes tools like 'Ângulo' (Angle), 'Ângulo com Amplitude' (Angle with Amplitude), 'Distância, Comprimento' (Distance, Length), and 'Área' (Area). On the right, a square is constructed on a grid. The vertices are labeled A, B, C, and D. The side lengths are marked as 2 units. The angles are marked as 90 degrees.	Exibe as medidas dos lados com toques específicos.
-------------	--	--

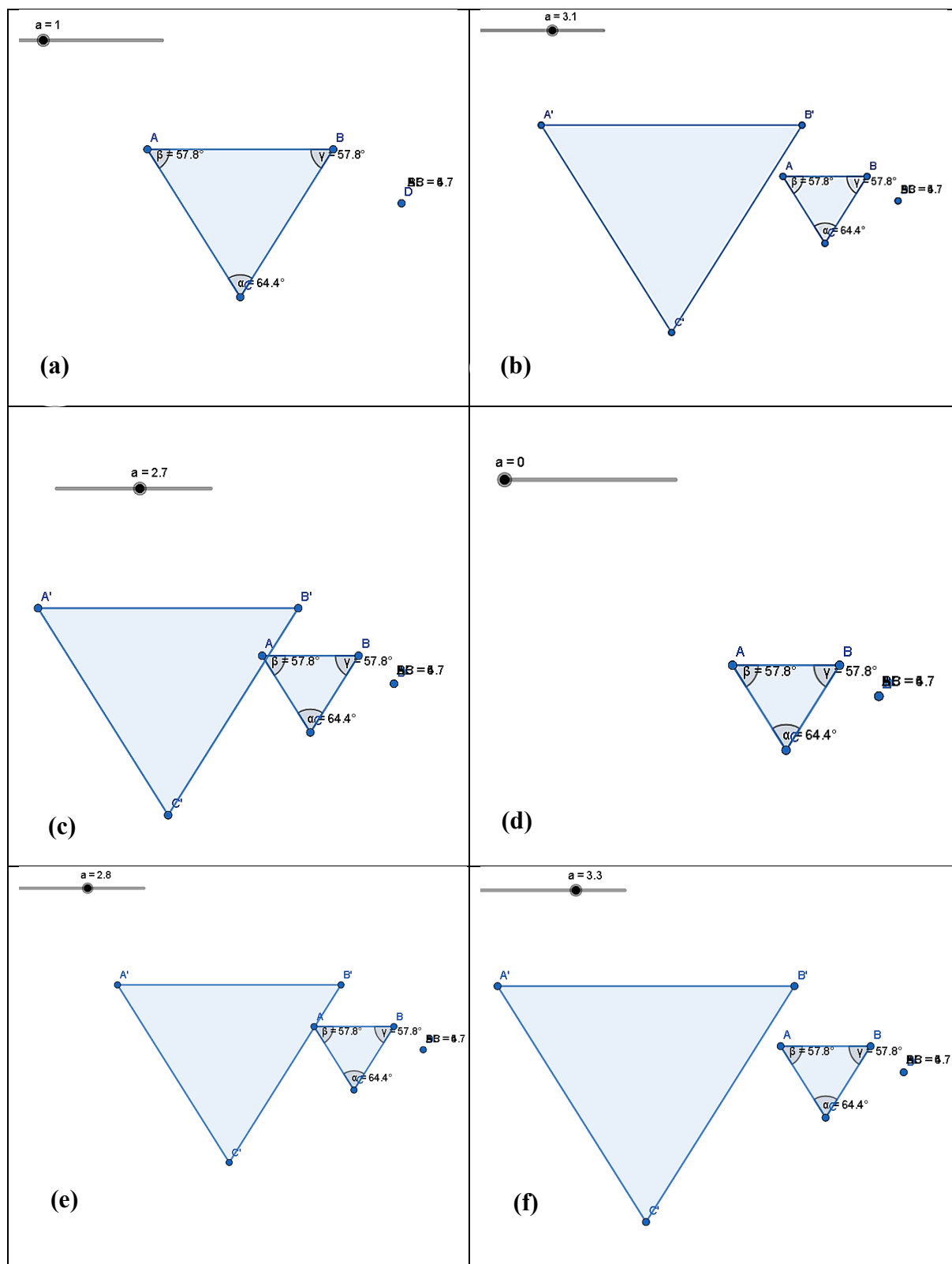
Quadro 2. Imagens dos toques para construção do quadrilátero (Silva e Bairral, submetido)

Vemos na construção de Estevão o uso da malha quadriculada como suporte semiótico para medição. O seu propósito, de construir um quadrilátero com todos os lados medindo o mesmo valor, ao posicionar os lados da figura em um mesmo quadrado da malha, foi confirmado. As ferramentas sugeridas e a abordagem escolhida por ele, como ilustrado anteriormente, contribuíram para a construção do pensamento geométrico em relação a essa figura. Essa conclusão se torna mais evidente nas afirmações feitas por ele: "Deu tudo certinho.", "É exatamente trezentos e sessenta.", "Noventa, noventa, noventa, noventa."

Iniciativa 3: Dispositivos em ambiências online de interação síncrona

É usual tarefas elaboradas no GeoGebra usarem o recurso do controle deslizante. Temos visto que esse controle pode representar uma forma potente no raciocínio matemático, pois implica tanto a observação global de propriedades como a validação de conjecturas (Brito; Bairral, 2023).

Nessa iniciativa três futuros professores de Matemática utilizaram o controle deslizante para explorar a razão de semelhança entre dois triângulos. O objetivo da tarefa era construir um triângulo qualquer, um controle deslizante, e um segundo triângulo dependente do primeiro, pela função de "homotetia" do GeoGebra de modo a explorar as propriedades angulares e da razão entre o comprimento dos lados dos triângulos semelhantes. A equipe era formada apenas por licenciandos, com os seguintes nomes fictícios: Júlio, Suzi, Nicole e Maria. Júlio entrou uma hora antes do horário programado e apontou suas observações iniciais no *chat*. Algumas delas foram consideradas pelo grupo durante a tarefa proposta. Após a construção do controle deslizante e dos triângulos dependentes, os integrantes do grupo começaram a alterar o valor do controle deslizante e, em seguida, compartilharam no *chat* as suas observações. O quadro 3 apresenta os dados do *Replayer* – recurso que revisitamos a construção em vídeo – ocorridos durante a exploração do controle deslizante por Nicole.



Quadro 3: Elaboração dos autores, com base nos dados do *Replayer* (Brito; Bairral, 2023).

Os valores explorados por Nicole pertencem ao intervalo entre zero e cinco (Figura *a* a *d*) e depois se concentram nos valores maiores que um (Figura *e* e *f*). O mesmo padrão de variação dos valores se repetiu no momento posterior, em que Maria arrastou primeiro entre os intervalos de um a cinco e depois alterou até o valor zero e para valores maiores que cinco. Ambas exploraram de forma mais ampla, entre o valor inicial e o final do controle deslizante. Como consequência disso, as observações feitas no *chat* são de aspectos mais genéricos. Maria observou a existência da relação do movimento do controle deslizante com o aumento e a diminuição do triângulo $A'B'C'$, e Nicole conjecturou sobre o afastamento ou a aproximação do triângulo ao D, ponto em que foi aplicada a função de homotetia do GeoGebra, na medida em que variou os valores do controle deslizante.

Maria e Nicole geraram signos diferentes, apesar do uso do mesmo artefato, já que estavam compartilhando com o grupo os seus significados pessoais resultantes da experiência de cada uma com o controle deslizante. Posteriormente os participantes exploraram valores mais específicos do controle deslizante. Eles notaram casos degenerados, como $a=1$ e $a=0$, e observaram que triângulos são congruentes e que no segundo caso os pontos do triângulo têm distância nula ao ponto D. Em relação ao primeiro momento, houve um avanço dos aspectos mais genéricos aos mais específicos, à medida que os significados pessoais começaram a convergir.

Os participantes ainda não haviam interagido sobre o intervalo entre um e cinco, não mediram o comprimento dos lados, apenas dos ângulos internos. Utilizaram o arrasto aleatório, para descobrir regularidades da figura, e pela reação do ambiente identificaram os ângulos correspondentes e a igualdade deles. Os integrantes do grupo mediram o comprimento dos lados dos triângulos.

No passo 8 do roteiro da tarefa solicitávamos aos participantes: “Comparem os comprimentos dos lados do triângulo $A'B'C'$ com os lados correspondentes do triângulo ABC. Para isso, selecionem o campo de entrada com ícone $a=b$. Nesse campo calculem a razão do segmento AB por $A'B'$ ”. Os participantes tentaram inserir a razão do comprimento dos lados na caixa de entrada de comandos, mas não tiveram êxito, por conta de uma limitação do VMT, que não disponibilizou a inserção de fórmulas.

Iniciativa 4: Dispositivos com toques integrados aos de captura de olhares em tela

Na pesquisa no âmbito da cognição corporificada em Educação Matemática, a relação corpo-todo foi priorizada, dadas as particularidades dos dispositivos disponíveis à época (sensores acoplados em calculadoras gráficas) e pela própria natureza do estudo. Atualmente, com o surgimento de novas interfaces, podemos também analisar partes do nosso corpo mediante capturas de olhares projetados na tela ou mapeando toques feitos nela. Nessa iniciativa integramos o Rastreador Ocular (RO) como mais uma forma de produção de dados sobre a aprendizagem, particularmente, em geometria (Bairral et al. 2024).

A tecnologia de RO é um método de pesquisa em sintonia com a perspectiva da cognição corporificada, ao assumir a simbiose mente-corpo-ambiente. Existem duas formas, complementares, de direcionar a nossa atenção no ambiente conscientemente, por meio de

estímulos visuais ou sonoros: atenção básica e atenção focalizada (Damásio, 2000). A atenção básica está relacionada à capacidade humana de manter-se consciente sem focar em um ponto específico. Por exemplo, o som de um pássaro – ou a música do vizinho ao lado – emitido há horas que você, mesmo sabendo da existência, somente percebeu agora. Diferentemente, a atenção focalizada ocorre quando a direcionamos para um estímulo ou tarefa específica, o que permite selecionar o que é mais relevante. Um bom exemplo é a concentração exigida na leitura deste texto.

O RO é um dispositivo que possibilita rastrear e quantificar os movimentos dos olhos a partir de um estímulo, como uma imagem ou um texto. Com o aparato, pode-se identificar a atenção por meio da fixação do olhar em uma área e mapear a sequência de exploração visual. O dispositivo possibilita formas diversas de captura e de métricas. A Figura 1 ilustra a captura expressa em mapa de calor e a de sequenciamento do olhar.

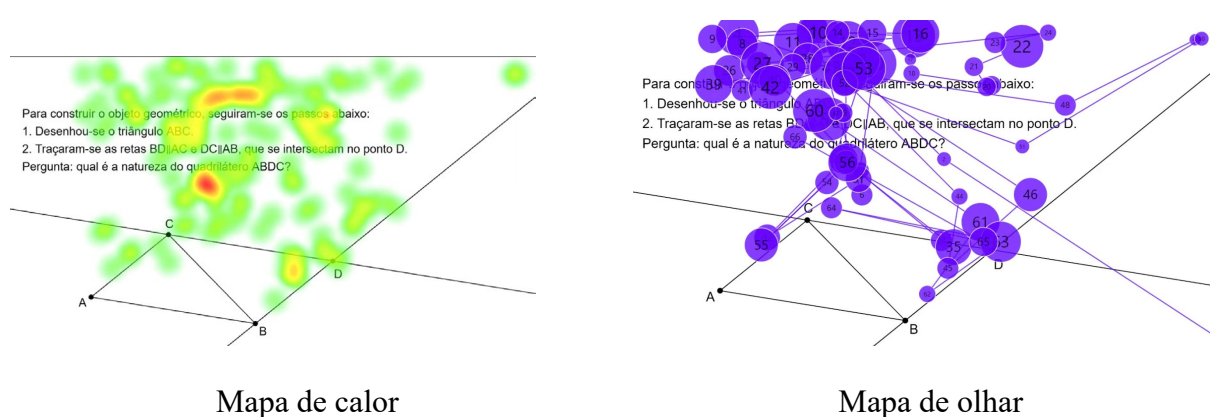


Figura 1. Captura de olhares na tela

A contrário das outras iniciativas, nessa ainda estamos na fase de testes e aprendizado com o equipamento (Tobii Pro Spark). Fizemos alguns experimentos, mas não temos dados para socializar nesse artigo. Para a apresentação espero ter algo para mostrar.

Como humanos, nos desenvolvemos e nos constituímos pela linguagem. A iniciativa seguinte enriquece nossa prática de produzir conhecimento matemático com criatividade e reflexão crítica integrando dispositivos de inteligência artificial em nossas atividades formativas.

Iniciativa 5: Dispositivos integrados à recursos e Inteligência Artificial

A tecnologia é uma criação humana e atende as demandas do homem. O homem cria, se redimensiona, e a tecnologia também se altera com a mudança humana. O poder da ação humana foi sublinhado na psicologia (Bandura, 1989), e os estudos de letramento, em particular, ressaltam que o conteúdo gerado no texto é influenciado de maneiras importantes por quem o lê e pela forma como ele é lido (Mcneaney, 2006). Na Educação Matemática Souto e Borba (2018) reinterpretem o papel dos artefatos para além da ideia de mediação da teoria da atividade, considerando-os como parte do coletivo que possui agência em uma relação de dialeticamente transformar-se e transformar o modo de produzir Matemática.

A IA é uma ciência no campo na computação e uma linguagem (Palmeiro *et al.*, 2025). Como ciência a IA data dos anos 1950, com tarefas concretas e de conhecimento de sistema. Temos dois tipos de IA, a preditiva e a generativa. A primeira tem um funcionamento mais personalizado a partir de usos habituais do dispositivo de uma pessoa. Sugestão de conteúdos (viagens, filmes, músicas etc.) nas plataformas ou portais que o sujeito usa, correção automática em nossas digitações e traduções são algumas dessas possibilidades. A IA generativa (IAG) funciona a partir de uma imensa quantidade de dados crus tomados da Internet e entregues às máquinas para que elas, por si só, identifiquem padrões e gerem *outputs*. Essas saídas não são provenientes somente dos dados capturados, ou seja, o dispositivo pode gerar outros *outputs*. Um exemplo conhecido desse tipo de IA é o ChatGPT¹.

Adoto a IA como linguagem, ou seja, sistemas que capturam, manipulam e elaboram padrões. Estarei aqui circunscrito à IAG, e os exemplos que utilizamos em nossos projetos são oriundos de dispositivos gratuitos. Fala-se com frequência da inteligência das máquinas, mas o que nos difere destas é o nosso poder criativo e o nosso funcionamento cerebral, que é único em cada pessoa. A seguir ilustro um excerto (Bairral, 2025) no qual reflito sobre a importância da ação de perguntar em atividades com as Torres de Hanoi (TH).

Excerto: Exemplo de perguntas² de diferentes futuros professores Matemática

Nas aulas introdutórias com as TH as perguntas que surgiram foram do tipo:

1. Quais³ conhecimentos matemáticos podemos adquirir no jogo Torre de hanoi? Allan
2. Quais conteúdos de Matemática eu consigo ensinar usando a Torre de Hanói?
3. Chat me fale sobre a origem da torre de hanoi Davi
4. Chat, eu vou resolver as torres nas mãos, como eu faço? Felipe
5. Chat, explique a importância de trabalhar torre de hanoi na sala de aula
6. Para que serve a Torre de Hanoi?
7. Que tipo de representação podemos utilizar para descrever a movimentação dos discos da torre de hanoi?

Esses questionamentos eram discutidos com toda a turma – inclusive com captura e compartilhamentos de tela, como a da pergunta 7 na Figura 2.

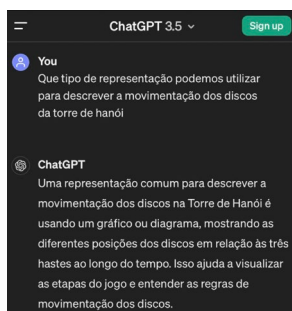


Figura 2. Resposta⁴ do ChatGPT à pergunta 7 (Bairral, 2025)

¹ Generative pre-trained chat.

² Textos transcritos na forma em que foram postados.

³ Sublinhados meus.

⁴ Transcrição: Uma representação comum para descrever a movimentação dos discos na Torre de Hanói é usando um gráfico ou diagrama, mostrando as diferentes posições dos discos em relação às três hastes ao longo do tempo. Isso ajuda a visualizar as etapas do jogo e entender as regras de movimentação dos discos.

Uma educação de perguntas é a única educação criativa e apta a estimular a capacidade humana de assombrar-se, de responder. Para um educador nessa posição, não há perguntas bobas nem respostas definitivas. Se um educador que não castra a curiosidade do educando ensinasse o aluno a perguntar, este teria a necessidade de perguntar-se a si mesmo e de encontrar ele próprio respostas criativamente (Freire; Faundez, 1985). Particularmente, com as perguntas 3, 4 e 5 vemos o agenciamento retroalimentado leitor-*chat*-leitor.

Iniciativa 6: Elaboração e disponibilização de materiais para a formação docente

Essa iniciativa é a confluência de ações dos dois projetos de investigação. Nela produzimos os Materiais Curriculares Educativos Online (MCEO)⁵. Os MCEO produzidos em nosso grupo de pesquisa são materiais que objetivam inspirar e apresentar alternativas inovadoras com diferentes tecnologias em aulas. Um MCEO envolve a vivência real em contexto de aprendizagem e não a divulgação de situações hipotéticas (Bairral; Marins, 2025). Cada MCEO possui 8 abas no total: 5 delas para contextualizar e compreender o material e outras 3 para compartilhar, comentar e conversar com leitores e criador(es) do material sobre seu ponto de vista a respeito dele, deixando dicas, dúvidas, experiências, entre outros, de modo síncrono ou assíncrono.

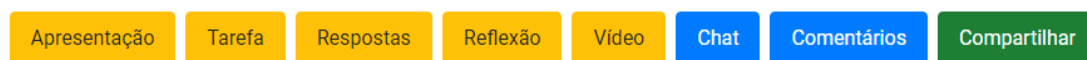


Figura 3. A organização das abas em cada MCEO no Portal do GEPETICEM.

Fonte: GEPETICEM

As três últimas abas – *chat*, comentários e compartilhar – são abertas para os visitantes do portal exporem sua visão sobre aquele material de modo assíncrono, com comentários e compartilhamento, e de modo síncrono: *chat*.

Algumas palavras para finalizar

Nossas iniciativas estão no âmbito da cognição corporificada, que trabalha com a constante sinergia entre nossa mente, nosso corpo e o ambiente físico ao qual circulamos e estamos circundados. A realização de tarefas com dispositivos móveis com toques em tela faz emergir dois domínios de manipulações: o construtivo e relacional. Além disso, precisamos valorizar os diferentes mediadores semióticos – toques, malha quadriculada, controle deslizante etc. – que emergem dos dispositivos. Quanto à integração de dispositivos de IAg nos processos de ensino e de aprendizagem e nos de investigação, a inquietação dos educadores deve estar no que se pergunta e não apenas na resposta gerada. Fica o convite para você acessar nossos MCEO e para produzir o seu a partir da inovação em sua prática.

Referências

- Assis, A. R. de, & Bairral, M. A. (2022). Touches on Screen as New Signs in Blended Ways to Think Mathematically. *Journal of Educational Research in Mathematics*, 32(4), 423-441.
[doi:10.29275/jerm.2022.32.4.423](https://doi.org/10.29275/jerm.2022.32.4.423)

⁵ <https://gepeticem.ufrj.br/materiais-educacionais/materiais-curriculares-educativos/>

- Bairral, M. (2025). Leituras e escritas em tempos de Inteligência Artificial. Seminário de Escritas e Leituras em Educação Matemática, 7., 2025, Belo Horizonte. **Anais** [...]. Belo Horizonte: UFMG, p. 1-10.
- Bairral, M. (2021). *Tecnologias móveis, neurocognição e aprendizagem matemática*. Campinas: Mercado de Letras.
- Bairral, M. (2019). Dimensions to Be Considered in Teaching, Learning and Research with Mobile Devices with Touchscreen. *Acta Scientiae*, 21(2), 93-109. [doi:10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5040](https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5040)
- Bairral, M. (2018). Dimensões a considerar na pesquisa com dispositivos móveis. *Estudos Avançados*, 32(94), 81-95. [doi:10.1590/s0103-40142018.3294.0007](https://doi.org/10.1590/s0103-40142018.3294.0007)
- Bairral, M., Arzarello, F., & Assis, A. (2017). Domains of manipulation in touchscreen devices and some didactic, cognitive and epistemological implications for improving geometric thinking. In G. Aldon, F. Hitt, L. Bazzini, & U. Gellert (Eds.), *Mathematics and technology: a C.I.E.A.E.M source book* (pp. 113-142). Hamburg, Germany: Springer.
- Bairral, M. A., & Henrique, M. P. (Eds.). (2021). *Smartphones com toques da Educação Matemática: Mãos que pensam, inovam, ensinam, aprendem e pesquisam*. Curitiba: CRV.
- Bairral, M. A., & Marins, V. de S. (2025). Interações entre futuros professores de matemática: ideias emergentes sobre um MCEO com GeoGebra. *Paradigma*, 46(1), e2025021. [doi:10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025021.id1611](https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025021.id1611)
- Bairral, M. A., Menezes, R. O., & Henrique, M. P. (2024). Uso do rastreamento ocular na formação de professores: uma revisão em geometria. *Boletim Gepem*, 83, 179-201. [doi:10.69906/GEPEM.2176-2988.2024.997](https://doi.org/10.69906/GEPEM.2176-2988.2024.997)
- Bandura, A. (1989). Human agency in social cognitive theory. *American Psychologist*, 44(9), 1175-1184. [doi:10.1037/0003-066X.44.9.1175](https://doi.org/10.1037/0003-066X.44.9.1175)
- Damásio, A. (2000). *O mistério da consciência: do corpo e das emoções do conhecimento de si*. (Tradução Laura T. Motta). São Paulo: Companhia das Letras.
- Souto, D. L. P., & Borba, M. C. (2018). Humans-with-internet or internet-with-humans: a role reversal? *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 8(3), 2-23.
- Brito, C. da S., & Bairral, M. A. (2023). Triangle similarity: interactions in meshes and slider. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 13(3), 1-21. [doi:10.37001/ripem.v13i3.3543](https://doi.org/10.37001/ripem.v13i3.3543)
- Freire, P., & Faundez, A. (1985). *Por uma Pedagogia da Pergunta* (3 ed.). Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- Mcneaney, J. E. (2006). Agent-based literacy theory. *Reading Research Quarterly*, 41(3), 352-371. [doi:https://doi.org/10.1598/RRQ.41.3.3](https://doi.org/10.1598/RRQ.41.3.3)
- Silva, A. P. da; Bairral, M. (submetido). Toques que contribuem para o direito à aprendizagem matemática.

Homenaje a Eduardo Mancera



In Memoriam: Eduardo Mancera Martínez

Patrick Scott
New Mexico State University
Estados Unidos
psscott@nmsu.edu

Resumen

El 31 de octubre de 2024 falleció Eduardo Mancera Martínez. El Dr. Mancera fue presidente de [Equipo Ejecutivo](#) del [Comité Interamericano de Educación Matemática](#) (CIAEM) de enero a noviembre del 2024. La *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (REDUMATE) y el *IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* han querido rendir homenaje a Eduardo Mancera, quien fuera en 2012 uno de los fundadores de REDUMATE y miembro desde entonces de su [Consejo Internacional](#). Este documento es testimonio de las participaciones de varios oradores de diversas partes del mundo en una sesión plenaria especial dentro de ese homenaje. Este documento es una colección de textos escritos por estos compañeros, amigos e hijos de Eduardo. El Homenaje incluye además de la sesión plenaria un poster digital y una galería de fotos y videos.

Palabras clave: CIAEM, Eduardo Mancera, México, REDUMATE.

Introducción por Patrick Scott

Conocí a Eduardo Mancera por primera vez en 1984 en la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) donde él estaba trabajando como docente (y llegó a ser Secretario Académico desde 1996 hasta 1999). Me invitó muchas veces para participar en los Congresos Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas de la Asociación de Profesores de Matemáticas de México (ANPM) y aceptó invitaciones para participar en las Reuniones Anuales del Consejo de Profesores de Matemáticas de Nuevo México. Participamos juntos en muchas CIAEM y en Reuniones Anuales del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM). Por muchos años funcionamos como los dos Vicepresidentes del CIAEM. Le agradezco por todo lo que me enseñó, mucho sobre la cultura (con un énfasis en música, comida y lenguaje) y política de México. Su sentido de humor y goce de la vida siempre me impresionaron.

Para esta sesión del homenaje hemos invitado a

- Eduardo Basurto de México, colaborador en muchos proyectos y amigo por muchos años,
- Claudia Groenwald quien sirvió con él en el Consejo Ejecutivo del CIAEM y le invitó muchas veces para participar en proyectos y eventos en Brasil,
- Salvador Llinares de España quien conoce bien su trabajo y su impacto dentro y fuera de las Américas, y
- Sus hijos, Eduardo Iván y Karen para compartir no solamente como era de papá pero como era de músico y poeta.



Figura 1. UPN 1984

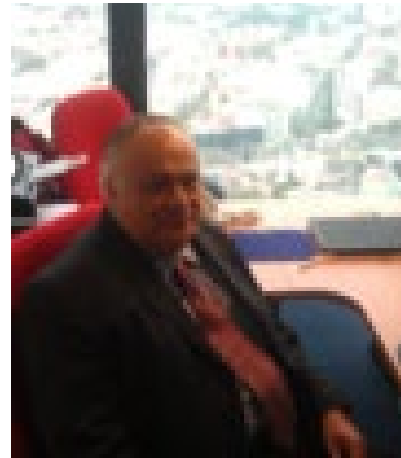


Figura 2. CDMX 2011



Figura 3. Brasil 2018



Figura 4. CIAEM 2023

Eduardo en México por Eduardo Basurto¹

El 31 de octubre de 2024, la comunidad académica recibió una noticia profundamente triste: la partida de Eduardo Mancera Martínez. Su ausencia deja un vacío imposible de llenar en el campo de la Matemática Educativa y en el corazón de quienes compartieron con él proyectos, ideas y afectos. Hoy nos toca rendirte homenaje, aunque sabemos que a ti seguro no te gustaría tanta solemnidad.

Eduardo fue un académico de gran trayectoria, pero, sobre todo, una persona cercana, generosa y profundamente humana. Formado en el Instituto Politécnico Nacional, donde cursó desde la vocacional hasta el doctorado, dedicó su vida a transformar la educación desde todos los frentes posibles: la docencia, la investigación, la divulgación, la innovación tecnológica y la gestión educativa. Su tesis doctoral, centrada en la enseñanza a través de la resolución de problemas, marcó el inicio de una vida profesional comprometida con el cambio.

Desde sus inicios, Eduardo asumió la educación como un espacio donde había que involucrarse a fondo, “ser entrometido”, como solía decir. Fue docente en secundaria, preparatoria y educación superior, dejando huella en instituciones como la UNAM, UPN, IPN, UAM, entre muchas otras. En el posgrado, impulsó programas en todo el país, incluso en regiones con escaso acceso a formación avanzada, convencido de que el conocimiento debe llegar a todos.

Eduardo no se limitó a las aulas. Fue artífice de reformas curriculares, participó en el rediseño de planes educativos y ocupó cargos clave en instituciones como la SEP, el ILCE y la Universidad Pedagógica Nacional. Fue un pionero en el uso de tecnología digital en el aula: desde calculadoras y software hasta plataformas multimedia, recorrió América Latina y el Caribe promoviendo nuevas formas de enseñar matemáticas con sentido, creatividad y herramientas del siglo XXI.

En la investigación, sus estudios abordaron temas como el pensamiento matemático, la comprensión de fracciones, el uso de materiales digitales y el currículo escolar. Coordinó proyectos con impacto nacional e internacional y fue autor y coautor de más de cincuenta libros, además de fundar y colaborar en publicaciones especializadas, como la revista Educación Matemática. Nunca dejó de crear: materiales, guías, artículos, propuestas, siempre con un propósito claro y accesible.

Su carisma y capacidad de conexión lo llevaron a organizar decenas de congresos, encuentros y seminarios, tejiendo redes que aún hoy sostienen a comunidades académicas enteras. Su papel en el Comité Interamericano de Educación Matemática fue fundamental, y bajo su liderazgo, México fue sede del CIAEM en dos ocasiones. Pero más allá de los títulos, quienes lo conocimos sabemos que lo suyo nunca fueron las jerarquías: no le gustaban los formalismos. Nunca quiso que lo llamaran “doctor”, solo Eduardo.

¹ Benemérita Escuela Nacional de Maestros y Universidad La Salle, México
eduardo.basurto@aefcm.gob.mx

Compartimos contigo trabajo, proyectos locos, risas, ideas, comidas, brindis, siempre nos brindó amistad sin filtros ni etiquetas. No estabas para los discursos sentimentales ni los consuelos tradicionales, y quizás por eso tu presencia se sentía tan auténtica. En cada viaje y cada charla dejaste una huella que no se borra. Fuiste mentor de muchos, impulsor de ideas, creador de espacios, pero también un amigo alegre, roquero, con alma libre y corazón generoso.

Eduardo impartió más de 200 conferencias, participó en innumerables capacitaciones docentes y fue guía de generaciones enteras de estudiantes y colegas. Su legado vive en cada persona a la que acompañó, motivó e inspiró. Nos enseñó que la Matemática, cuando se imparte con empatía y pasión, tiene el poder de cambiar vidas.

Hoy no decimos adiós, sino gracias.
Gracias por ser quien fuiste.
Gracias por estar en los momentos clave.
Gracias por ser un gran maestro y un gran ser humano.

Aquí seguimos, con el recuerdo de cada experiencia compartida, y con la influencia de todo lo que nos dejaste, que es mucho más de lo que quizás supiste.

Descansa en paz, tocayo.

Tu huella sigue viva en todos nosotros.



Figura 5. NCTM, Boston, MA, 2015



Figura 6. Costa Rica 2019

Eduardo em Brasil por Claudia Lisete Oliveira Groenwald²

Com profundo respeito e gratidão, presto esta homenagem ao querido amigo **Eduardo Mancera**, educador matemático de excelência, parceiro em tantos trabalhos acadêmicos e verdadeiro inspirador de caminhos e de sonhos, sempre comprometido com a formação humana e profissional de professores e estudantes. Nossa trajetória conjunta foi marcada por diálogos férteis, pela troca generosa de saberes e pelo compromisso compartilhado com uma Educação Matemática que forma, emancipa e transforma vidas.

Eu conheci Mancera na Venezuela, quando um outro grande amigo acadêmico Fredy Enrique Gonzalez me convidou, juntamente com amiga e companheira Carmen Kaiber, a ir a Venezuela e realizar um convênio entre nossos grupos de pesquisa e nesta viagem fomos ao IV COVEM em Trujillo e, neste evento conheci o professor Eduardo Mancera. Ele estava como convidado neste evento e sempre rodeado de alunos e amigos, sempre alegre e extremamente comprometido com a Educação Matemática.

Depois de 4 meses eu recebi um convite da Sociedade de Professores do México para participar do evento anual deles e o convite partiu do professor Mancera. Nesta viagem conheci o México, e fiz outras amizades e pude compartilhar minhas experiências de pesquisa com os professores do México, esta foi a primeira de muitas viagens ao México. Eu e a professora Carmen tínhamos profunda amizade pelo professor Mancera.

Também por intermédio do professor Mancera conheci Angel, Patrick, Llinares, Basurto e fiz outras amizades e outros compartilhamentos de pesquisa e de trabalho que muito enriqueceram minha vida profissional e que me fez crescer academicamente.

Tenho uma profunda amizade pelo professor Eduardo Mancera e que vai me acompanhar por toda minha vida. Não poderia deixar de salientar o quanto Mancera auxiliou meu grupo de pesquisa e a própria instituição que atuo com o início do doutorado em 2010, nós tínhamos o mestrado desde o ano 2000 e com o auxílio do professor Mancera tivemos oportunidade de implantar o doutorado. Foi ele o grande responsável pelo convênio com a HP calculadoras e que nos deu um grande aporte financeiro (com equipamentos de tecnologia) para o início do doutorado. Professor Mancera com o professor Basurto ensinaram o curso de HP Calculadoras na ULBRA no ano de 2018.

Também estive muitas vezes na Universidade que atuo, para participar de um evento que organizávamos o CIEM e também para compartilharmos pesquisas, trocas de experiência com os estudantes do mestrado e doutorado e da graduação. Com todos tinha atenção e carinho, além de conselhos acadêmicos sobre o mestrado e doutorado e sobre a importância de exercer a docência com responsabilidade e compromisso social. Deixou muitas lembranças na ULBRA.

No Brasil, entre outros trabalhos, saliento o capítulo de livro publicado pelo professor Mancera organizado pela Grupo de Trabalho - GT2 – que pesquisa as questões didáticas de Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, intitulado: Os

² Universidade Luterana do Brasil
claudiag@ulbra.br

recursos didáticos no trabalho docente do professor de Matemática, no livro: Recursos didáticos em aulas de matemática: o proposto pelas pesquisas e o praticado, organização Maria Elisa Esteves Lopes Galvão, Maria Lucia Panossian, Brasília, DF: SBEM Nacional, 2022, (<https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>).

Nossas experiências acadêmicas são muitas e inesquecíveis, temos um capítulo de livro que publicamos no ano de 2023: Números Naturais e suas Operações – possibilidades didáticas com o uso de materiais concretos para os anos iniciais do Ensino Fundamental, no livro Construindo Saberes – Práticas Pedagógicas para Ciências e Matemática, com os organizadores Clarissa de Assis Olgin, Marlene T. Fernandes e Agostinho Iaquan Ryokiti Homa, pela editora da Física, SP São Paulo.

Eduardo não foi apenas um pesquisador competente, mas um mestre que acreditava no potencial de cada professor e estudante. Seu entusiasmo pela docência e pela pesquisa era contagiante, sempre incentivando, apoiando e mostrando que a educação se constrói na colaboração e no afeto.

Sua presença deixará marcas profundas na comunidade acadêmica e em todos que tiveram o privilégio de aprender e caminhar ao seu lado. Que seu legado continue inspirando novas gerações a ensinar com compromisso, a pesquisar com paixão e a acreditar no poder transformador da educação.

Ele estava com passagem para participar do IX SIPEM – a convite da SBEM onde faria parte de uma mesa redonda, que aconteceu no Rio Grande do Norte no Brasil.

Encerro com a mensagem que a Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBEM do Brasil fez quando tivemos a notícia triste da partida deste amigo querido (Figura 1).

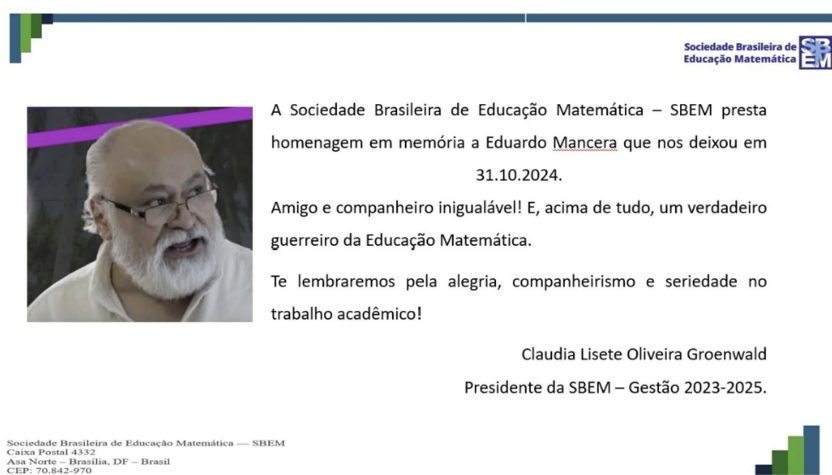


Figura 7. Homenagem da SBEM para Eduardo Mancera.

Fonte: <https://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>

Eduardo más allá de las Américas por Salvador Llinares³ (con el apoyo de José Chamoso)

Mi primer contacto con Eduardo fue en Lujan, Argentina, a principio de los años 2000. Los dos fuimos invitados por Jorge Sagula (Universidad de Lujan) a impartir sendas conferencias invitadas. Desde el primer momento pensé que Eduardo era una persona especial. No sé decir en qué sentido pensaba que era especial, pero en aquellos momentos yo estaba inmerso en un proyecto para desarrollar propuestas de formación de profesores a través de una plataforma online en la que se insertaban videos, espacios de interacción virtual (debates) y acceso a documentos con propuestas de trabajo docente. Ahora en el año 2025 parece una propuesta bastante común en algunas universidades, pero hace 25 años teníamos más preguntas que respuestas ante este tipo de iniciativas. Eduardo se interesó por lo que hacía cuando se dio cuenta que yo necesitaba unos espacios de tiempo (durante el congreso en Argentina, para interaccionar con mis alumnos en España). Una de las características de Eduardo es que siempre tenía ganas de comprender lo que los demás hacíamos en un tema que le apasionaba, la enseñanza de las Matemáticas y la formación de profesores. Mis conversaciones con Eduardo sobre las dudas y las incertidumbres que se generaban al intentar implementar en aquellos momentos condiciones online (formación virtual) para formar a los profesores me permitió conocer su pasión por la tecnología y por su necesidad de comprender.

En los años siguientes, pude mantener el contacto con Eduardo ya que yo viajaba a México con asiduidad por mis colaboraciones con otros compañeros de diferentes universidades, en particular, desde la Universidad Pedagógica Nacional en México DF (sede Ajusco), con Verónica Hoyos y Alicia Ávila. Eduardo y Alicia eran colegas y pude compartir con ellos cenas y conversaciones personales y académicas. Ellos dos siempre hacían un esfuerzo para poder reunirse conmigo cuando yo iba a México DF a realizar alguna actividad académica. Me di cuenta que, algunas veces, no habían coincidido en una cena desde la última vez que la habíamos compartido los tres. Aprendí con ellos los inicios de las comidas con un buen tequila. La relación de Eduardo y Alicia estaba vinculada al apoyo de la revista *Educación Matemática*, y sus esfuerzos con un grupo de colegas mexicanos por mantenerla y potenciarla (<https://www.revista-educacion-matematica.org.mx/revista/>). Compartir, no siempre significa coincidir, pero la lealtad y la transparencia eran dos características que permitían mantener un diálogo constructivo.

La relación con Eduardo y Alicia permitió facilitar los intercambios y colaboraciones con España. Eduardo compartía una estrecha relación con los colegas de la Universidad de Salamanca, especialmente con José Chamoso. Lo que facilitó los viajes de Eduardo a España en los que compartimos tribunales de tesis doctorales y seminarios con estudiantes.

La vinculación de Eduardo con la CIAEM y la amplia mirada de Eduardo en todo lo relativo con la Educación Matemática ayudó a que a través de José Chamoso los vínculos entre la CIAEM y colegas españoles se fortalecieran. Eduardo valoraba ciertos planteamientos, y era muy crítico con otras perspectivas pero favoreció el intercambio académico generando oportunidades de colaboración con los diferentes eventos vinculados a la CIAEM. Pero Eduardo también tenía una gran actividad en otras iniciativas asociativas de profesores en México y las aprovechaba para apoyar las relaciones entre colegas españoles y latinoamericanos mediante

³ Universidad de Alicante, España
sllinares@ua.es

invitaciones a congresos nacionales de México y de otro tipo. En este contexto la relación con los colegas de la Universidad de Salamanca José Chamoso, Ana Maroto y María José Cáceres fue especial lo que facilitó su contacto con una gran cantidad de colegas españoles. Como dice José Chamoso, Eduardo “era tajante con ideas claras, acertadas o no”, pero generaba oportunidades para apoyar y colaborar en una de sus pasiones que era la formación de maestros y la producción de materiales. Con motivo de este recordatorio, le pregunté a José Chamoso que me resumiera algunas ideas de su relación desde España con Eduardo. Transcribo a continuación parte de las palabras de José Chamoso que creo que refleja bastante bien esta última característica

Recuerdo que, en una ocasión, cuando asistí a un Congreso al que me invitó a dar una conferencia, le llevé el último [libro] que había salido y estuvo desaparecido dos días. Pidió disculpas y dijo que había estado leyendo el libro en su habitación, que estaba terminando los libros de texto que escribía y que le faltaban cosas, y que estaba cogiéndolas del libro. Me dijo que en sus libros de texto que escribía siempre incluía, en cada capítulo, un par de referencias de “Para Saber Más”, y que, casi siempre, una de ellas era uno de mis libros, algo que pude comprobar en algún caso aunque no sé si lo de casi siempre era realmente casi siempre. Creo que los libros de texto que Mancera son una de las mayores aportaciones que hizo a la Educación Matemática, no solo los de texto. Aportan una visión diferente. Otra de las aportaciones de Mancera es como enlazaba a unas personas con otras.

La vinculación de Eduardo con CIAEM y CEMACYC y su talante personal de intentar enlazar unas personas con otras permitió que la colaboración de colegas españoles como directores de temas en estos eventos se intensificara y ampliara. En este sentido, cuando vemos las relaciones en las organizaciones supra nacionales como CIAEM y CEMACYC con colegas de diferentes países no deberíamos olvidar que detrás siempre ha habido personal que las ha apoyado. Algunas veces con más acierto que otras pero siempre con el objetivo de aprovechar el potencial que puedan tener estas organizaciones para la mejora de las competencias matemáticas de los estudiantes y de las competencias docentes de los maestros en los diferentes países. En cierta medida, CIAEM y CEMACYC en los últimos años no se pueden concebir sin el grupo de colegas en los que se integraba Eduardo.

CIAEM en la Universidad de Lima 2023 fue mi último congreso coincidiendo con Eduardo. En Lima, coincidí en conversaciones de Eduardo con colegas planificando proyectos de diversos tipos como escritura de libros, elaboración de materiales e impartición de charlas y conferencias con docentes. Algo que Eduardo no pudo llegar a completar pero, seguramente, lo harán los colegas con la iniciativa de Eduardo siempre presente.



Figura 8. Xalapa 2007



Figura 9. Coatepec 2007

Eduardo como papá y poeta por Karen Mancera⁴

Mi papá, Eduardo, no era perfecto. Nadie lo es, pero para mí es importante recalcar esto, porque creo que el amor que yo y muchos le profesamos en vida viene precisamente de sus imperfecciones: su excesiva generosidad, su honestidad a veces brutal, sus ganas imparables de que todo mundo estuviera contento a su alrededor, sus manías perfeccionistas que a veces molestaban y muchas otras veces me salvaron a mí y a otros de nuestros propios descuidos. Incluso en sus últimos días, dentro de sus momentos de mayor lucidez, trataba de fingir, en medida de lo posible, que no estaba incómodo, que no estaba triste y asustado por la repentina enfermedad y diagnóstico que finalmente lo llevó a trascender de forma tranquila el 31 de octubre del 2024.

Entre muchas de sus aficiones artísticas estaba la poesía. Comenzó en 2013 a escribir de forma modesta algunos de sus pensamientos en Facebook y poco a poco, acumuló una basta colección de poemas, muchos de ellos de amor, pues quienes tuvimos el placer de conocerlo de forma cercana sabemos que él era, en el fondo, un enamorado empedernido, a veces de la idea del amor misma. También acumuló algunos pensamientos sobre la vida diaria, ocasiones especiales e incluso un par de versos dedicados a gente que repentinamente se fue de su vida y con la que se encuentra compartiendo ahora.

Es difícil para mí, su hija, poner en palabras lo mucho que lo amo. Él está impregnado en todo lo que hago, en las cosas que me gustan y las que me desagradan, en la forma en la que odio y en la que amo, en mis virtudes y mis defectos. Pero a pesar del dolor de su partida, me da gusto que, pensándolo o no, nos haya dejado este pedacito de su alma para recordarlo de la forma que él quería ser recordado: divertido, filosófico, juguetón, profundo, enamorado, relajado, inteligente y seductor con sus palabras. Se qué es así, porque siempre nos compartía orgulloso, a mí y a mi hermano, todos los likes que sus poemas acumulaban modestamente en su página cada vez que los compartía.

Eduardo no quiso un funeral porque no era religioso y no le gustaban los momentos tristes ni incómodos, por lo que no deseaba hacer pasar a sus seres queridos por uno. Sin embargo, sé que tampoco quería ser olvidado y espero de todo corazón que estos poemas que hoy les comparto y todos lo que viven en perpetuidad en sus redes sociales sean un motivo para que recuerden con una sonrisa a este hombre que tal vez no fue el más maravilloso de este mundo, pero sí el más maravilloso de mi vida.



Figura 10. Toluca 2022

⁴ dra.kelokumpu@gmail.com

Mayo 15, 2020

Cambiar pensamientos ajenos
Es magia que se práctica en aulas
Sólo la falta de oficio nos hace torpes
Pero cada día se logra comprender más
Nadie sabe el secreto, pero se hace
Se logra ver el cambio del rostro
Cuando se transita de confusión al insight
Instante donde lo oscuro ya es luminoso
Sentir el coraje de quien no puede
Pero tener oportunidad de impulsarlo
Pasar por la calle y recibir su saludo
O simplemente saber que ahí está, diferente
Hablando el lenguaje de las ciencias
De las artes o las personas
Que ahora tiene diferentes mundos
Y enfrenta distintos retos
Haber estado cerca de ese crecimiento
Es tener lugar privilegiado.

Mayo 13, 2022

Casi siempre atiendo ideas disparatadas
Trazos de pensamientos que surgen de la nada
Las coloreo con lo que me gusta o divierte
Tal vez, si, para no pensar en algo escabroso
Me divierte ese juego, causado por cafeína, dicen
No importa alimenta fantasías y arregla mi historia
Cómo lo que se me antoja y bebo sin medida
Canto disonante y profundo sin armonía
Lo imposible pierde la “im”
No hay reto fuera de alcance
Ni malestares sin remedios caseros
Veo y siento mi entorno sin atenderlo
Está ahí como inevitable y pretencioso
Pero las ideas le dan formas amigables
Que pensar de la riña entre bueno y malo
Si apenas conviven y pueden guardar equilibrio
Así las ideas y sus mundos inventados
Nos empujan de uno a otro lado
Sin recatos ni exageraciones
Qué más da hacer esto o aquello
Siempre es posible intentarlo
Hasta vemos resultados de varias audacias
Buscamos algo y encontramos otra cosa
Nos burlamos de limitaciones y tardanzas
Pero igual de aciertos y correcciones
Nada inquieta con obsesión ni cansa
Es así que lo cotidiano puede sobrellevarse
En el rito diario de las ideas y realidades
Inconformes con sucesos nos construimos otros
Tal vez no mejores pero llevaderos
Es la forma de pasar el tiempo caminando
Recorriendo de lo inevitable a lo posible
Haciendo acuerdos y negociaciones
Con nuestros personales términos
Con nuestras especiales convicciones.

Enero 8, 2022

Esperaba unos tacos y el hambre despertó musas
Después de las juergas de fin de año
Se quedaron dormidas y con sabores extraños
De pronto ven que no se ha terminado la amenaza
Y volvemos a inoculaciones de entidades placebo
En fin, de nuevo a la vida para tener oportunidades
Hacer y deshacer con tino y desatino
Pero procurando estar mejor o al menos convencido
Ya se han ido muchos guerreros, sin armas ni visitas
Se fueron como entraron, sin esperanzas
Pero no los invoquemos ya padecieron tanto
¿Para qué preocuparlos con demandas cotidianas?
Me topé con series y películas predecibles
Pero aprendí historia y algo de inglés
Recordé los viejos padecimientos sociales
Sus consecuencias y negaciones
El ansía de vivir sin restricciones con ideas fijas
No por aprovechar cada instante y disfrutarlo
Sino para hacer la propia voluntad y los antojos
Hablando de chips y controles humanos
Cómo si no existieran ya y no los consideramos
Entre datos dudosos e inciertas acciones
Pero algunos se han dejado llevar por sus sueños
Y los persiguen despiertos y los ven más claros
Han aprendido a seguir la intuición
En el océano de puntos suspensivos.
Ha quedado tiempo para andar la caverna de Platón
Y jugar con las razones y pensamientos
Por ahora: cambio y fuera ...

Eduardo como papá y como músico por Eduardo Iván Mancera⁵⁵

Mi padre, el Dr. Eduardo, era un gran entusiasta de la guitarra y de la música. Incluso me compartió su deseo de ser músico profesional, sin embargo, el amor a Las Matemáticas, y posteriormente a la docencia, le hizo decidirse por desarrollar su vocación científica y docente mientras terminaba su carrera en La Escuela Superior de Física y Matemáticas del Instituto Politécnico Nacional.

El Dr. Mancera comenzó sus pasos en la música con sus amigos del rumbo en el que habitaba en la segunda mitad de la década de los 70's del siglo pasado, el norte de La Ciudad de México, específicamente, lo que hoy es el pueblo de Zacatento, La Unidad Habitacional Juan de Dios Bátiz, La Colonia Lindavista y sus alrededores. Primero llamó su atención El Rock integrándose al grupo Los Tacos y Las Tortillas y, posteriormente, a La Resurrección de Morrison tocando la guitarra y cantando temas que estaban de moda en esos días, principalmente temas del grupo estadounidense The Doors que era su grupo favorito.

Al mismo tiempo mi tío, Víctor Mancera, se desarrollaba como baterista de rock pero no colaboraba con mi padre debido a diferencias estéticas ya que Víctor prefería a The Rolling Stones. Estas diferencias estéticas se acentuaron cuando mi padre, debido a su participación en diversos grupos estudiantiles que, como consecuencia de los movimientos estudiantiles de 1968 y 1971 surgieron en las instituciones de educación superior mexicanas, descubrió el folclore latinoamericano que resultó ser una alternativa al rock como propuesta estética y escénica para la juventud urbana de ese tiempo.

Fue en esa vorágine juvenil, entre la exigencia de justicia, protesta y un cambio en la cultura y las costumbres de la sociedad mexicana de ese entonces que se gestó el antecedente de lo que durante los años 80's se conocerá como El Movimiento Rupestre que, apoyado en el canto, la poesía y la búsqueda de nuevos horizontes, fue germen de agrupaciones musicales que acompañaron la lucha social de esos tiempos. Uno de estos grupos lo integró mi padre junto con Armando Vega Gil, Ramón Sánchez Aviña, Felipe de Jesús Reyes, Mario Mota, Enrique Contreras y Amin Wejebe más otros colaboradores eventuales. Esta agrupación fue nombrada "Canek" en honor a uno de nuestros héroes nacionales que no figura entre los oropeles nacionales del discurso oficialista: Jacinto Canek.

Con Canek mi padre participó en diversos eventos políticos y culturales como manifestaciones, marchas y conciertos forjando su identidad, y vocación rebelde y combativa; entre peñas, cafés y escenarios diversos siempre que hubiera un micrófono, una bocina y un transporte.

Canek, en su notable labor, se presentó en importantes recintos como El Auditorio Nacional, alternó con grandes figuras y agrupaciones de la época como: Amparo Ochoa, Gabino Palomares, Los Folcloristas e Inti-Illimani con quienes alternó en un histórico evento en El Foro Cultural Siqueiros de La Ciudad de México.

⁵⁵ eduardoivanma@gmail.com

Mesa redonda plenaria



Desafíos de las pruebas comparativas internacionales para América Latina

Paola Valero

Universidad de Estocolmo

Suecia/Colombia

paola.valero@mnd.su.se

Gilbert Valverde

University of Chicago

Costa Rica/Estado Unidos

valverde@albany.edu

Jaime Carvalho e Silva

Universidade de Coimbra

Portugal

jaimecs@mat.uc.pt

Ricardo Poveda (Coodinador)

Universidad Nacional de Costa Rica

Costa Rica

ricardo.poveda.vasquez@una.cr

En esta mesa plenaria tiene como tema central las distintas evaluaciones comparativas internacionales que son realizadas en países de América Latina por distintas organizaciones internacionales. Discutiremos aspectos de sus resultados, metodologías, impacto y uso en la Educación Matemática de la región. Dado que estamos localizados en distintos países del mundo y que mantenemos lazos de colaboración con países latinoamericanos, traeremos experiencias internacionales para reflexionar no solo sobre los puntos críticos que merecen atención, sino en especial sobre las oportunidades que se abren para la Educación Matemática tras el examen minucioso de las pruebas comparativas internacionales.

A continuación brevemente esbozamos algunos aspectos que nos interesa tratar en la mesa, con el propósito de invitar a los participantes en el congreso a preparar preguntas y puntos de vista sobre cómo estos aspectos se desenvuelven en sus contextos.

El propósito de las pruebas comparativas

Las evaluaciones comparativas internacionales como PISA de la Organización de Cooperación para el Desarrollo Económico (OCDE), TIMSS de IEA (International Association for the Evaluation of Educational Achievement) y ERCE (Estudio Regional Comparativo y Explicativo) de la UNESCO representan herramientas para reflexionar sobre la calidad, equidad y pertinencia de la Educación Matemática. Si bien tales evaluaciones suelen usarse como fuentes de comparación de los resultados escolares entre países, también pueden actuar como instrumentos de diagnóstico y mejora pedagógica. La promoción de estas pruebas se basa en una “defensa radical de la educación” que presupone que la adopción de estándares globales genera automáticamente mejoras educativas, aunque carece de evidencia empírica sólida. En América Latina y el Caribe, la participación obedece con frecuencia a demandas de legitimidad internacional en lugar de estrategias pedagógicas coherentes, lo que induce una “homogeneización global” que disminuye la diversidad educativa. Esta aproximación genera una paradoja al priorizar estándares globales sin vías definidas para su logro, por lo que se recomienda emplear la evaluación como medio para la mejora continua, en vez de limitarla a la rendición de cuentas.

Las pruebas PISA son uno de los elementos de un gran programa comprensivo que tiene por objetivo medir competencias fundamentales necesarias para el bienestar y desarrollo de los países miembros de la OCDE, monitorear la evolución de dichas competencias, y asesorar a los gobiernos sobre las estrategias que, basadas en datos sólidos acumulados, conducen al mejoramiento del sistema educativo. Las pruebas de Matemáticas evalúan específicamente la competencia y los conocimientos matemáticos relacionados con las capacidades de razonamiento matemático y el uso de herramientas, datos, procedimientos y conceptos matemáticos para describir, explicar y predecir fenómenos, posicionándose como instrumento esencial para abordar problemas cotidianos y profesionales. La evolución de la prueba desde su inicio en el año 2000 ha incorporado áreas específicas de medición como el pensamiento computacional y la modelización matemática como enfoque hacia aplicaciones reales, permitiendo detectar deficiencias en la enseñanza y los sistemas educativos para ofrecer asesoría que conduzca a reformular programas oficiales. Además de las pruebas específicas de conocimiento, recopila datos contextuales de las escuelas y estudiantes participantes que facilitan la comprensión de elementos del sistema educativo y la implementación de acciones correctivas. PISA se configura como un estudio estadístico, no como un examen exhaustivo de conocimientos, centrado en determinar si los estudiantes aplican el razonamiento matemático en contextos reales, con énfasis en experiencias enriquecedoras en el aula.

Una tensión evidente que surge frente al propósito de las pruebas radica en las direcciones diferentes que existen entre el propósito de asesoría y apoyo a los sistemas educativos del programa PISA y el propósito de monitorear y ofrecer información relevante a los procesos educativos de currículo y su implementación en contextos diversos de las pruebas. El propósito de apoyo basado en datos a los gobiernos sigue una lógica comparativa que necesita de homogeneización para poder operar confiablemente. Esto refuerza el valor del PISA como un sistema de clasificación y ordenamiento de las prestaciones de los estudiantes en diversos países a pesar de la existencia de diferencias incomparables entre las oportunidades de aprendizaje de las Matemáticas que sistémicamente se ofrece en cada país. Mientras que el propósito de

relevancia para los currículos y las prácticas educativas requiere de un grado alto de contextualización y atención a las condiciones reales y locales de profesores, escuelas y comunidades para ofrecer oportunidades de aprendizaje de las Matemáticas que efectivamente puedan conducir a un mejoramiento de las competencias y conocimientos de los estudiantes. El punto de debate que surge es si estos dos propósitos de homogeneización y contextualización son reconciliables o si son propósitos inconmensurables.

Calidad, equidad y contextos en América Latina

Los datos de ERCE, cuyo objetivo es la evaluación regional de aprendizajes en América Latina y el Caribe, revelan brechas significativas entre los resultados del aprendizaje entre diversos grupos de estudiantes con respecto al nivel socioeconómico, tipo de escuela, género y pertenencia étnica. En comparación con PISA y TIMSS, ERCE ofrece resultados ajustados a las condiciones económicas y culturales de la región. Por ejemplo, los estudiantes del quintil más rico superan en más de una desviación estándar a los del quintil más pobre, mientras que las escuelas privadas urbanas registran resultados superiores a las públicas rurales. Estos resultados diferenciales reflejan disparidades tanto en la calidad de las oportunidades de aprendizaje que se ofrece a distintos grupos de estudiantes, como en el efecto de compensación de desigualdades e inequidades estructurales en el acceso de los estudiantes y comunidades a recursos que impactan la educación. Por el contrario, se constata que siguen operando prácticas de enseñanza orientadas a la memorización que no promueven la comprensión conceptual.

La “apuesta por la calidad” en conjunción con la “apuesta por la equidad” no han producido avances sustantivos; al contrario, han marginado dimensiones esenciales de la educación como por ejemplo el desarrollo de habilidades críticas, la creatividad, la formación integral del estudiante y la atención a las necesidades individuales de aprendizaje. Estas dimensiones que fomentan el pensamiento autónomo, la innovación y la adaptabilidad a menudo quedan relegadas frente a un enfoque excesivo en métricas estandarizadas y resultados cuantitativos. Este hecho puede limitar una educación más holística y significativa.

Lo anterior subraya la necesidad de reconocer la agencia de los países de América Latina para desarrollar modelos educativos adaptados a contextos locales. Entre los interrogantes relevantes se incluyen estrategias para mitigar brechas de aprendizaje entre grupos sociales y escolares, así como el análisis de debilidades en el currículo, la formación inicial y continuada de maestros, la disponibilidad de recursos escolares que pueden generar cambios en la enseñanza matemática regional. Para tal efecto, la recopilación de datos contextuales sobre estudiantes, escuelas y padres de familia permite identificar correlaciones con el rendimiento, facilitando la comprensión de aspectos del sistema educativo y la formulación de intervenciones. Mucho más uso de este tipo de información puede conducir a nuevos entendimientos para la investigación y la política local y regional.

La influencia del programa PISA en los currículos nacionales, como en el caso de Costa Rica y Portugal, ha llevado a adoptar perspectivas pragmáticas para contrarrestar el efecto de homogeneización global. Esto se ve claramente en el esfuerzo por generar conexiones entre las Matemáticas y la vida real, adaptadas a entornos locales.

Metodología y comparabilidad de las pruebas

Los resultados de PISA 2022 indican que más del 75% de los estudiantes de América Latina no alcanzan el nivel 2, mientras que TERCE 2013 muestra que solo el 8% llega al nivel alto y más del 50% permanece en el nivel bajo. A grandes rasgos, esto quiere decir que una porción muy limitada de los jóvenes de la región alcanza los niveles altos en Matemáticas definidos por las pruebas, y que la gran mayoría de esos jóvenes de hecho se encuentran en un nivel bajo en Matemáticas. Comparaciones entre países como República Dominicana (con desempeños críticos) y Chile, México o Uruguay (mejores, aunque inferiores al promedio de la OCDE) muestran la diversidad de prestaciones en la región. Las diferencias sistemáticas en el rendimiento en las pruebas se atribuyen a desigualdades educativas estructurales y a variaciones en la implementación curricular. Existen desconexiones entre el currículo prescrito e implementado, manifestadas en dificultades con habilidades complejas como la resolución de problemas y el razonamiento proporcional, incluso en contenidos cubiertos. La adopción acrítica de estándares internacionales carece de reflexión sobre su pertinencia y viabilidad local, fundamentada en “especulación inspirada en datos”.

El marco de PISA evalúa el razonamiento matemático en seis niveles, con evoluciones desde 2003/2012 que incorporan pensamiento computacional y modelización, configurándose como estudio estadístico con incertidumbre comparativa, no como un examen exhaustivo. La transición a la Prueba de Matemáticas por Ordenador (PMO) amplía el rango de preguntas y habilita evaluación adaptativa, como el uso de hojas de cálculo en 2023. Esta metodología identifica si los programas incorporan modelización aplicada a la realidad, promoviendo su reformulación con énfasis en competencias contextualizadas.

Currículos nacionales contra competencias globales

La “superficialidad curricular” en América Latina se caracteriza por cobertura limitada de temas, escasa profundidad y baja exigencia cognitiva, con ausencias en áreas como el razonamiento algebraico y la proporcionalidad en grados iniciales, y la introducción tardía de contenidos en comparación con la OCDE (por ejemplo, fracciones desde preescolar en la OCDE versus tercer o cuarto grado en América Latina).

Los docentes enfrentan limitaciones para implementar prácticas centradas en el razonamiento, resultando en enseñanza superficial y descontextualizada. Esto requiere inversiones en formación de maestros para integrar representaciones visuales, análisis de errores y manipulativos. Interrogantes clave abordan el fortalecimiento de currículos para aprendizajes profundos y pertinentes, así como las condiciones para que los docentes fomenten el pensamiento matemático.

PISA prioriza competencias matemáticas en contexto, influyendo en reformas curriculares: en Costa Rica, se adopta una perspectiva pragmática con énfasis socio-empírico; en Portugal, se potencia la modelización y la conexión con la vida real. Los programas oficiales que omiten la modelización como enfoque real deben reformularse para desarrollar capacidades contextuales, más allá de conocimientos abstractos.

Impacto y uso de resultados internacionales

Iniciativas tecnológicas como Plan Ceibal en Uruguay y Enlaces en Chile presentan evidencia mixta: programas no guiados, como “Una Laptop por Niño” en Perú, no mejoran el rendimiento matemático, mientras que los guiados, con integración pedagógica, sí lo hacen, aunque se advierte contra enfoques reduccionistas centrados en eficiencia para pruebas.

La centralidad de las evaluaciones en políticas no ha generado mejoras sustantivas, lo que insta a repensar la enseñanza matemática con rigor conceptual, equidad y relevancia local. Interrogantes clave exploran el rol de las evaluaciones en la transformación pedagógica y política, y estrategias para evitar su conversión en fines en sí mismos, priorizando su uso como medios de mejora. PISA identifica deficiencias para reflexionar sobre reformas programáticas, con impactos evidentes en cambios curriculares en Costa Rica y Portugal.

La recopilación de datos contextuales facilita correlaciones y acciones correctivas, minimizando abusos al centrarse en la comprensión de aspectos educativos para fomentar innovación y cooperación.

Referencias y bibliografía

- Arias Ortiz, E., Cristia, J., & Cueto, S. (Eds.). (2020). *El aprendizaje de matemática en América Latina y el Caribe*. Banco Interamericano de Desarrollo.
- Carvalho e Silva, J. (2004). A importância do estudo internacional PISA. *Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática*, Lisboa, v. 51, p. 67-80.
- Marshall, J. & Sorto, M. (2012). “The Effects of Teacher Mathematics Knowledge and Pedagogy on Student Achievement in Rural Guatemala.” *International Review of Education* 58 (2): 173–97.
- ICFES (2019). *Marco para prueba de matemáticas PISA 2021*, Bogotá D.C., noviembre de 2019 (versión del Instituto Nacional de Evaluación Educativa (INEE) de España).
- OECD (2023), *PISA 2022 Assessment and Analytical Framework*, PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/dfe0bf9c-en>
- Pinto, J., Neto, T. B., & Carvalho e Silva, J. (2019). Fatores influenciadores do desempenho de estudantes portugueses, singapurenses, holandeses, espanhóis e brasileiros em Literacia Matemática no PISA: Revisão Integrativa. *Revista De Estudios Y Experiencias En Educación*, 18(37), 41-60. <https://www.rexe.cl/index.php/rexe/article/view/718>
- Ruiz, Á. (2024). Lecciones desde una reforma matemática en América Central. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20(72).
- Sebastian, J., Claudia, S., Tomas, et al. (2015). Cooperation and innovation for good practices: Teachers and researchers understanding mathematics in PISA (TRUMP). *CERME 9*, Charles University in Prague, Faculty of Education; ERME, Feb 2015, Prague, Czech Republic. pp.1774-1775. fffhal-01288051f
- Valverde, G. (2014). “Educational Quality: Global Politics, Comparative Inquiry, and Opportunities to Learn.” *Comparative Education Review* 58 (4): 575–89.
- Valverde, G., Marshall, J. & Sorto, M. (2020). “El Aprendizaje de Matemática En América Latina y El Caribe.” In *Aprender Matemática en el Siglo XXI. A Sumar Con Tecnología*, edited by Elena Arias Ortiz, Julian Cristia, and Santiago Cueto, 107–52. Washington DC: Banco Interamericano de Desarrollo.
- Valverde, G., & Näslund-Hadley, E. (2010). “The State of Numeracy Education in Latin America and the Caribbean.” *IDB Technical Note IDB-TN-185*. Technical Notes. Washington D.C.: Inter-American Development Bank.

Conferencias paralelas



Criterios de idoneidad didáctica en la reflexión colectiva de profesores que enseñan Matemáticas: Una mirada desde la argumentación práctica

Adriana Breda
Universitat de Barcelona
España
adriana.breda@ub.edu

Telesforo Sol
Universitat de Barcelona
España
telesforo.sol@ub.edu

Resumen

En esta conferencia se dialogará sobre los criterios de idoneidad didáctica que emergen en la reflexión de un colectivo de profesores cuando valoran los procesos de instrucción matemática a partir de la perspectiva de la argumentación práctica. Para ello, primero se explicará lo que son los Criterios de Idoneidad Didáctica y su papel en la reflexión docente. En segundo, se explicará lo que se entiende por argumentación práctica. Por fin, a modo de ejemplo, se explicará cómo se manifiestan los Criterios de Idoneidad Didáctica en la tomada de decisiones de un colectivo de profesores de Matemáticas en diferentes ciclos de formación docente.

Palabras clave: Argumentación práctica; Criterios de Idoneidad Didáctica; Formación de profesores de Matemáticas; Reflexión docente.

Introducción

La formación continua debe proporcionar al profesor la adquisición de conocimientos relacionados con la profesión, entre ellos, la reflexión docente orientada al proceso de toma de decisiones. Por un lado, el desarrollo de la reflexión docente puede ser fomentado a través del enfoque de Estudios de Clase (EC) (Fernández & Yoshida, 2004; Richit & Tomkelski, 2022).

Por otro lado, existen los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Font et al., 2010), propuestos como una herramienta para organizar la reflexión del profesor con el fin de analizar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y su correspondiente mejora.

Para analizar en profundidad la reflexión que los profesores o futuros profesores realizan sobre las acciones relacionadas con la práctica docente, se puede recurrir al estudio de la argumentación práctica. Algunos estudios previos han mostrado que los docentes presentan argumentaciones sobre las acciones que deciden llevar a cabo y que, en dichas argumentaciones, emplean criterios sobre lo que consideran mejor (entre otros, Sol et al., 2024a; Sol et al., 2024b; Sol et al., 2025; Sol et al., en prensa). Estos criterios pueden reinterpretarse como componentes e indicadores de los CID (Sol et al., 2023a; Sol et al., 2023b).

El objetivo de esa conferencia es dialogar sobre los criterios de idoneidad didáctica que emergen en la reflexión de un colectivo de profesores, participantes de un ciclo de Estudio de Clases, cuando valoran los procesos de instrucción matemática a partir de la perspectiva de la argumentación práctica. Para ello, primero se explicará lo que son los Criterios de Idoneidad Didáctica y su papel en la reflexión docente. En segundo, se explicará lo que se entiende por argumentación práctica. Por fin, a modo de ejemplo, se explicarán tres investigaciones de cómo se manifiestan los Criterios de Idoneidad Didáctica en la tomada de decisiones de un colectivo de profesores de Matemáticas en diferentes ciclos de formación docente.

Idoneidad Didáctica

La idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje se define como el grado en que dicho proceso (o parte de él) cumple con ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para lograr la adecuación entre los significados personales alcanzados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), considerando las circunstancias y los recursos disponibles (ambiente) (Font et al., 2010). Un proceso de enseñanza y aprendizaje alcanzará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular, de forma coherente y sistemática, los siguientes seis criterios parciales de idoneidad didáctica (CID), referidos a cada una de las seis facetas que intervienen en la enseñanza proceso y aprendizaje. La Tabla 1 presenta los criterios y los componentes de cada CID, con base en las pautas de Breda et al. (2017).

Tabla 1
Criterios y componentes de la idoneidad didáctica

Criterios	Descripción	Componentes
Epistémico	Para valorar si la Matemática que se enseña es una «buena Matemática».	Errores; Ambigüedades; Riqueza de procesos; Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes.	Conocimientos previos; Adaptación curricular a las diferencias individuales; Aprendizaje; Alta demanda cognitiva.
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes.	Interacción docente–discente; Interacción entre discentes; Autonomía; Evaluación formativa.

Criterios	Descripción	Componentes
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	Recursos materiales; Número de estudiantes, horario y condiciones del aula; Tiempo.
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	Intereses y necesidades; Actitudes; Emociones.
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.	Adaptación al currículo; Conexiones intra e interdisciplinarias; Utilidad sociolaboral; Innovación didáctica.

Fuente: Breda et al. (2017).

Argumentación Práctica

Asumimos como argumentación práctica la “argumentación que tiene como objetivo decidir un curso de acción” Lewiński (2018, p. 219). El modelo argumentativo propuesto por Toulmin (2003) funciona de la siguiente manera: a partir de unas pruebas (datos), se formula una premisa (afirmación). Una garantía vincula los datos con la afirmación, que se sustenta en un fundamento teórico, práctico o experimental: el respaldo. Los calificadores modales (seguramente, definitivamente, etc.) indican cómo se interpreta la declaración como verdadera, posible o probable. Finalmente, se consideran sus posibles refutaciones u objeciones.

Estudio de clases

EC es el diseño colaborativo y detallado de una clase o secuencia de clases, su implementación y observación directa en el aula, y su análisis conjunto posterior a la implementación realizado por un grupo de docentes (Fernández & Yoshida, 2004). Un ciclo de EC debe seguir las siguientes etapas: 1) definición del problema de investigación, estudio del plan de estudios y objetivos; 2) planificar la lección o la secuencia de lecciones; 3) ejecución y observación de la clase; 4) reflexión conjunta sobre los datos recogidos (Lewis & Hurd, 2011).

Investigaciones realizadas en diferentes ciclos formativos

La primera investigación se centra en el papel que desempeñan los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) en el análisis de la argumentación práctica de un grupo de docentes durante su reflexión sobre un proceso de enseñanza y aprendizaje de Matemáticas. Metodológicamente, se trata de un estudio de caso realizado en un curso de formación destinado a fomentar la reflexión docente, en el que participaron ocho profesores brasileños de Matemáticas en ejercicio, quienes diseñaron, implementaron y rediseñaron una lección sobre el teorema de Pitágoras en el contexto de un Estudio de Clases.

Analizamos la argumentación práctica que emerge de la reflexión docente, para lo cual propusimos una adaptación del modelo de Toulmin que incorpora el constructo CID con el fin de estructurar y representar los argumentos prácticos emergentes. Este uso se ejemplificó mediante dos episodios de argumentación práctica. El principal resultado muestra que los Criterios de Idoneidad Didáctica permitieron: (a) reinterpretar los diálogos que contenían la argumentación

práctica de los docentes participantes, en términos de algunos de los criterios, componentes e indicadores del constructo; (b) inferir las creencias y valores de los docentes en sus propuestas de acción; y (c) matizar la relación entre la justificación y la acción de cada argumento práctico en la toma de decisiones (Sol et al., 2025).

La segunda investigación se enfoca en analizar los Criterios de Idoneidad Didáctica que emergen de los argumentos prácticos de futuros maestros brasileños que participaron en un ciclo de Estudio de Clases al planificar una sesión sobre geometría plana para estudiantes de educación infantil. Las sesiones del ciclo fueron grabadas en video y se analizaron dos de ellas, primero utilizando los modelos pragma-dialéctico y de Toulmin, y luego aplicando los Criterios de Idoneidad Didáctica.

Como resultado, se observa que los argumentos prácticos de los futuros educadores para elegir el material manipulativo a utilizar apuntan al uso de bloques lógicos, sustentado principalmente en criterios relacionados con los medios, seguidos de los epistémicos. Además, se evidencia un consenso entre los participantes respecto a la dinámica de la clase: esta debe comenzar con la exploración de bloques lógicos, seguida de la producción, grabación y exhibición de obras de arte. Los criterios que sustentan esta toma de decisiones son, respectivamente, interaccionales, ecológicos y afectivos (Sol et al., 2024a).

En la tercera investigación, analizamos los argumentos prácticos de un grupo de formadores de profesores de Matemáticas durante la valoración del diseño de una unidad didáctica sobre funciones, dirigida a estudiantes de educación secundaria (15–16 años), en el contexto español. Se adoptó una metodología cualitativa mediante un estudio de caso intrínseco, en el que participaron ocho formadores que ya conocían el constructo Criterios de Idoneidad Didáctica, y que tomaron parte en un ciclo de Estudio de Clases. En la etapa de reflexión, los participantes utilizaron dicho constructo para valorar el diseño de la unidad (planificación del profesor y dossier para los estudiantes).

Los argumentos prácticos emergentes se estructuraron utilizando el modelo de Toulmin. Destacamos tres resultados principales: primero, la valoración de la unidad didáctica a partir de los componentes de los Criterios de Idoneidad Didáctica permitió identificar tanto los aspectos positivos como aquellos que requerían mejora en el proceso de enseñanza y aprendizaje de funciones; segundo, dichos componentes se emplearon como datos, respaldos y garantías en los argumentos prácticos formulados por los participantes, en virtud de su familiaridad con el constructo; y tercero, todos los componentes fueron utilizados por los formadores para valorar la unidad y argumentar sus propuestas de cambio en función de ellos (Sol et al., en prensa).

Conclusiones

En las investigaciones realizadas, analizamos en detalle la estructura de los argumentos prácticos y el importante papel que desempeñan los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) en la toma de decisiones didácticas de un colectivo de futuros docentes. A través del análisis de la argumentación práctica, identificamos tanto las acciones propuestas para un proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas como las razones que las sustentan; estos elementos pueden considerarse relevantes para la mejora de dichos procesos.

Por lo tanto, las investigaciones aquí presentadas podrían contribuir a comprender mejor por qué algunas tendencias actuales en Educación Matemática —que en teoría se consideran interesantes e innovadoras— son adoptadas en la práctica docente, mientras que otras no.

Con relación a las implicaciones de los resultados para futuros estudios se recomienda que las futuras propuestas de formación docente deberían enfocarse en promover una reflexión sobre la práctica, en la cual se utilicen de manera equilibrada todos los componentes de los CID y fomenten la argumentación práctica docente. Para ello, se subraya la importancia de incorporar, en la etapa de reflexión de los ciclos de Estudio de Clases, la valoración del diseño de la unidad didáctica y no solamente la de la implementación. Además, el moderador de las sesiones de los ciclos de EC podría fomentar la argumentación práctica, utilizando expresiones que permitan desencadenar justificaciones o explicaciones en los participantes que se puedan estructurar como argumentos prácticos.

Finalmente, como perspectiva futura, se propone investigar el papel de los CID en la argumentación práctica de docentes y futuros docentes durante el diseño y rediseño de situaciones de aprendizaje orientadas a promover el pensamiento computacional mediante el uso de robots educativos, en contextos de educación infantil y primaria.

Agradecimientos

Proyectos: *Criteris i recursos per al desenvolupament del Pensament Computacional amb robots educatius i per a la seva avaluació a l'Educació Infantil i Primària* (2024 ARMIF 00017), Generalitat de Catalunya (AGAUR); *Pensament Computacional i robòtica amb perspectiva de gènere a l'educació Infantil i Primària* (EDU145/23/000006) Generalitat de Catalunya (Departament d'Educació); La argumentación práctica del profesor al reflexionar sobre secuencias didácticas interdisciplinarias que incorporan las nuevas tendencias sobre la enseñanza de las Matemáticas (PID2021-127104NB-I00 (MICIU/AEI/10.13039/501100011033) "FEDER Una manera de hacer Europa").

Referencias y bibliografía

- Breda, A., Pino-Fan, L. R., & Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Fernández, C., & Yoshida, M. (2004). *Lesson study: a Japanese approach to improving mathematics teaching and learning*. Mahwah: Erlbaum
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89–105. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Lewis, C. C., & Hurd, J. (2011). *Lesson study step by step: how teacher learning communities improve instruction*. Heinemann Educational Books.
- Lewiński, M. (2018). Practical argumentation in the making: Discursive construction of reasons for action. In S. Oswald, T. Herman & J. Jacquin (Eds.), *Argumentation and Language – Linguistic, Cognitive and Discursive Explorations* (pp. 219–241). https://doi.org/10.1007/978-3-319-73972-4_10
- Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2022). Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(9), 1–15. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12325>

- Sol, T., Breda, A., Richit, A., & Sala-Sebastià, G. (2024a). Critérios de adequação didática emergentes na argumentação prática de futuros pedagogos. *Zetetike*, 32, e024004. <https://doi.org/10.20396/zet.v32i00.8676234>
- Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Font, V., & Sala-Sebastià, G. (2024b). Argumentación práctica sobre ambigüedades en la valoración del diseño de una unidad didáctica sobre funciones en el marco de un ciclo de Lesson Study. En N. Adamuz-Povedano et al. (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 497–504). SEIEM.
- Sol, T., Breda, A., Sánchez, A., Font, V., & Sala-Sebastià, G. (2023a). Criterios de idoneidad didáctica en la argumentación práctica docente al seleccionar problemas para introducir el tema de función. In C. Jiménez-Gestal, Á. A. Magreñán, E. Badillo & P. Ivars (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVI* (pp. 515–522). SEIEM.
- Sol, T., Ledezma, C., Breda, A., & Font, V. (2025). Didactic suitability criteria in the practical argumentation of mathematics teacher educators. *Uniciencia*, 39(1), 1-23. <https://doi.org/10.15359/ru.39-1.6>
- Sol, T., Ledezma, C., Sánchez, A., & Font, V. (2025). Teachers' Practical Argumentation on the Teaching of the Pythagorean Theorem. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-025-10591-6>
- Sol, T., Sánchez, A., Breda, A., & Font, V. (2023b). Didactic suitability criteria in teachers' practical argumentation in the phase of design of a Lesson Study cycle about functions. In M. Ayalon, B. Koichu, R. Leikin, L. Rubel & M. Tabach (Eds.), *Proceedings of the 46th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 4, pp. 227–234). PME 46
- Toulmin, S. (2003). *The Uses of Argument* (2.^a ed.). Cambridge University Press (Trabajo original publicado en 1958).



Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral: Elementos teórico-prácticos desde un modelo de Enseñanza Exploratoria

Luis Fabián Gutiérrez-Fallas

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

Costa Rica

luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

Resumen

En esta conferencia paralela se abordarán tres ejes temáticos principales de la Didáctica del Cálculo Diferencial e Integral (CDI): (i) *la naturaleza epistemológica* de los contenidos en el CDI y la noción de procept, (ii) *el pensamiento matemático avanzado* y sus procesos de razonamiento, y (iii) *las tareas matemáticas fenomenológicas* y sus principios de diseño. Estos ejes temáticos serán articulados con una metodología de clase basada en la *Enseñanza Exploratoria*, dentro de un contexto de enseñanza superior universitaria. Será tomado como referencia un estudio de desarrollo profesional en el que participaron profesores de Matemática de CDI que se llevó a cabo durante dos años en una universidad pública de Costa Rica.

Palabras clave: Costa Rica; Tareas matemáticas fenomenológicas; Razonamiento matemático; Enseñanza exploratoria; Cálculo Diferencial e Integral.

Introducción

La enseñanza del Cálculo Diferencial e Integral (CDI) ha representado históricamente un desafío central en la Educación Matemática universitaria. Su complejidad conceptual y alto nivel de abstracción han generado, en muchos contextos, persistentes dificultades de aprendizaje entre el estudiantado, así como elevados índices de reprobación y deserción. Estos indicadores, aún vigentes a pesar de los avances en la Didáctica de la Matemática, señalan la necesidad de replantear los enfoques tradicionales de enseñanza del CDI y de promover propuestas didácticas que propicien aprendizajes más significativos para los estudiantes que cursan carreras afines a las ingenierías, a la economía, la salud, entre otras.

En las últimas dos décadas, la investigación en Educación Matemática ha prestado especial atención al CDI, no solo para analizar las dificultades que enfrentan los estudiantes, sino también para diseñar estrategias de enseñanza innovadoras que integren componentes epistemológicos, cognitivos, tecnológicos y didácticos (Fonseca & Henriques, 2019; Trevisan & Araman, 2021). Entre estas propuestas emergen con fuerza aquellas orientadas a favorecer una comprensión relacional del conocimiento matemático (Skemp, 1976), es decir, un aprendizaje que articule de forma coherente los significados, procedimientos y representaciones de los conceptos, y que se fundamente en procesos de razonamiento matemático (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017; Trevisan et. al, 2023).

El razonamiento matemático es esencial para el desarrollo de aprendizajes con sentido en el CDI, en particular por el carácter avanzado de sus conceptos, como el límite, la continuidad, la derivada o la integral. Estos requieren que el estudiantado transite desde formas elementales de pensamiento, basadas en experiencias concretas, hacia procesos propios del pensamiento matemático avanzado, tales como la definición formal, la demostración y la abstracción (Jaffar & Dindyal, 2011; Fernández-Plaza et al., 2013). Como lo indican estos autores, el paso de una concepción empírica a una formalizada implica una transformación profunda en la forma de entender y construir el conocimiento matemático, especialmente en momentos de transición como el primer encuentro con los conceptos fundamentales del análisis.

Las formas en que las personas docentes abordan estos conceptos varían considerablemente: algunas optan por una introducción intuitiva, otras adoptan una presentación basada estrictamente en el análisis formal, y otras combinan ambas perspectivas (Fonseca & Alfaro, 2018). Sin embargo, independientemente del enfoque, muchas veces se elude el trabajo con contextos reales o significados personales, lo que dificulta la apropiación profunda del contenido por parte del estudiantado (Fernández-Plaza et al., 2013; Trevisan et al., 2023).

En este escenario, la integración de tecnologías digitales, como GeoGebra, ha mostrado potencial para transformar la experiencia de aprendizaje en el CDI. Estas herramientas permiten representar de forma dinámica y visual conceptos complejos, abren posibilidades para la experimentación matemática y favorecen la interacción activa con los objetos de estudio (Fonseca & Henriques, 2019).

No obstante, los enfoques de enseñanza del CDI que articulen tareas exploratorias, integración tecnológica y desarrollo del pensamiento matemático avanzado han sido poco sistematizados en la literatura. En particular, resulta aún incipiente la investigación sobre propuestas basadas en un modelo de *Enseñanza Exploratoria*, el cual plantea tres principios didácticos fundamentales: (i) iniciar el trabajo con nociones intuitivas y con práctica de cálculo antes de introducir definiciones formales, (ii) diseñar tareas matemáticas de carácter exploratorio que incorporen tecnologías digitales, y (iii) promover el desarrollo de significados correctos y articulados de los conceptos del CDI a través del uso de múltiples representaciones y procesos de razonamiento (Canavarró, 2011; Muñoz-Ortiz et. al, 2025).

A partir de estas ideas, este trabajo presenta una propuesta didáctica teórico-práctica para la enseñanza del CDI en la educación superior, fundamentada en un modelo de Enseñanza Exploratoria. La propuesta se construye a partir de una revisión bibliográfica sobre la temática y

en articulación con una experiencia de desarrollo profesional docente llevada a cabo en una universidad pública costarricense, en la que participaron profesores de CDI durante dos años.

Fundamentos teóricos para una didáctica del cálculo centrada en la enseñanza exploratoria

Comprensión de conceptos en el Cálculo: una mirada epistemológica y didáctica

La enseñanza del CDI ha sido históricamente un campo de tensiones entre la formalización matemática y los procesos de comprensión por parte del estudiantado. Una revisión de la literatura especializada evidencia que las dificultades de aprendizaje en esta área están asociadas, en gran medida, a concepciones instrumentales del conocimiento, centradas en el dominio de técnicas y algoritmos, y alejadas de una comprensión relacional y significativa de los conceptos involucrados (Skemp, 1976).

Autores como Gray y Tall (1991, 1994) proponen la noción de *procept* para explicar la flexibilidad cognitiva que se requiere al abordar objetos matemáticos que pueden ser entendidos tanto como procesos como productos. Por ejemplo, el símbolo " $f'(x)$ " puede representar tanto la operación de derivar – *aplicar un procedimiento* – como el objeto “la derivada” – *aplicar un concepto* –. Esta ambigüedad, lejos de ser un obstáculo, constituye una oportunidad para promover un pensamiento matemático más rico, en el que el simbolismo adquiera significados interconectados. En este sentido, el *pensamiento proceptual*, según estos autores, es una capacidad clave para la comprensión relacional de los conceptos del CDI.

Las investigaciones en el campo de la Educación Matemática también han dado cuenta de la complejidad que representa el tránsito desde una comprensión intuitiva de los conceptos hacia una formalización rigurosa. Tall y Vinner (1981) introducen las nociones de *concepto-imagen* y *concepto-definición*, así como el *factor de conflicto potencial*, para dar cuenta de las tensiones cognitivas que se producen cuando el conocimiento informal del estudiante entra en contradicción con la definición formal del concepto.

Complementariamente, Tall (2004) propone la teoría de los tres mundos del pensamiento matemático: *el mundo personalizado-empírico* (basado en la experiencia sensorial y visual del sujeto cuanto interactúa con las nociones desde contextos iniciantes), *el mundo simbólico-proceptual* (vinculado a la manipulación de símbolos y reglas en la ejecución de procedimientos matemáticos), y *el mundo formal* (centrado en definiciones, teoremas y demostraciones matemáticas). Según esta teoría, el aprendizaje de los conceptos del CDI ocurre en el tránsito entre estos mundos, siendo deseable que los procesos de enseñanza puedan orientar a los estudiantes a navegar entre ellos de manera consciente y articulada.

Representaciones, visualización y pensamiento matemático avanzado

Un elemento fundamental para potenciar el aprendizaje en el CDI es el uso articulado de múltiples *representaciones*: gráficas, numéricas, simbólicas y verbales. Según Duval (2006), la comprensión matemática depende en gran medida de la capacidad de los estudiantes para realizar conversiones entre distintos registros de representación, proceso que constituye una puerta de entrada a la comprensión relacional de los conceptos.

Tall (2002) y Karatas et. al (2011) argumentan que la enseñanza del CDI debe fomentar la coordinación intuitiva entre representaciones gráficas y algebraicas. La *visualización*, en este sentido, no es un recurso auxiliar, sino una herramienta cognitiva de primer orden para el razonamiento matemático (Arcavi, 2003; Rivera, 2011). No obstante, el potencial de la visualización suele ser subutilizado en la enseñanza tradicional del CDI, la cual privilegia el tratamiento simbólico en detrimento de las representaciones visuales (Fonseca & Henriques, 2019).

Desde esta perspectiva, el *pensamiento matemático avanzado* (Fernández-Plaza et. al, 2013) se concibe como una capacidad para integrar y transitar entre representaciones, formular conjeturas, justificar resultados y construir conexiones entre conceptos. La comprensión de los conceptos fundamentales del CDI —como el límite, la continuidad, la derivación y la integración— requiere de procesos de razonamiento que vayan más allá de la simple manipulación algebraica, como la visualización, la abstracción reflexiva y la autorregulación del aprendizaje (Tall, 2002).

La promoción del razonamiento matemático es una de las claves para una didáctica del CDI orientada a la comprensión relacional. El razonamiento deductivo, inductivo y abductivo permite a las personas estudiantes formular conjeturas, argumentar soluciones y validar resultados (Mata-Pereira & Ponte, 2017; Trevisan & Araman, 2021). En el contexto del CDI, estos tipos de razonamiento se articulan con tareas que demandan exploración, inferencia y justificación.

Una enseñanza orientada al razonamiento debe incluir tareas que movilicen procesos de generalización, validación y justificación, permitiendo que los estudiantes exploren, manipulen e interioricen los conceptos matemáticos abordados. Tal como señalan Trevisan et al. (2023), el diseño de tareas exploratorias, centradas en fenómenos y con múltiples representaciones, es fundamental para fomentar el razonamiento covariacional y estructural, tan necesarios en el estudio del CDI.

En este sentido, la labor docente no consiste únicamente en presentar técnicas y algoritmos, sino en diseñar situaciones didácticas que permitan a las personas estudiantes construir sus propias conjeturas y validarlas en un entorno dialógico y reflexivo (Muñoz-Ortiz et. al, 2025; Trevisan & Araman, 2021).

Enseñanza Exploratoria y escenarios de aprendizaje: principios metodológicos

La Enseñanza Exploratoria, tal como ha sido conceptualizada por Canavarro (2011), Oliveira et al. (2013) ofrece un marco metodológico que permite articular las dimensiones antes mencionadas. Este enfoque promueve un aprendizaje activo y autónomo, centrado en la exploración de fenómenos, la formulación de conjeturas, el uso de múltiples representaciones y la reflexión colectiva.

En el marco del proyecto de desarrollo profesional docente que se realizó durante dos años, 2023 y 2024, en una universidad pública de Costa Rica, las propuestas didácticas fueron

orientadas desde escenarios de aprendizaje que responden a los principios de esta metodología de Enseñanza Exploratoria, articulando tareas fenomenológicas, tecnología digital y momentos de discusión colectiva. Entre los elementos metodológicos más destacados se encuentran: (i) la presentación de una situación o fenómeno significativo; (ii) el trabajo autónomo y colaborativo con apoyo de recursos tecnológicos como GeoGebra; y (iii) la sistematización colectiva de resultados y la formalización de los conceptos matemáticos emergentes.

Propuestas didácticas articuladas con un modelo de enseñanza exploratoria

Como parte del proyecto de desarrollo profesional docente, en el cual participaron 20 docentes universitarios, se diseñaron e implementaron **cuatro propuestas didácticas**, cada una estructurada en torno a un escenario de aprendizaje específico. Estas propuestas buscaron operacionalizar los principios de la Enseñanza Exploratoria mediante el diseño de tareas matemáticas fenomenológicas, el uso de múltiples representaciones y la integración de tecnologías digitales como GeoGebra. A continuación, se sintetizan brevemente las propuestas y se establece su articulación con los fundamentos teóricos discutidos.

Propuesta 1: Exploración del concepto de límite

- **Eje temático:** Límite de una función real de variable real
- **Duración:** 3 horas
- **Herramienta principal:** Libro digital interactivo en GeoGebra

Esta propuesta introdujo el concepto de límite a través de tareas organizadas en cinco capítulos progresivos, que integraron representaciones numéricas, gráficas y simbólicas. Se trabajó con aproximaciones de funciones y sucesiones, el uso de polígonos inscritos y circunscritos, y situaciones contextualizadas en distintas disciplinas.

La propuesta favoreció la transición desde el mundo conceptual-personalizado hacia el mundo formal del conocimiento matemático (Tall, 2004). Además, la tarea permitió movilizar el pensamiento proceptual mediante el trabajo simultáneo con símbolos que representaban procesos (aproximaciones) y objetos (límites) (Gray & Tall, 1994). La visualización dinámica de GeoGebra apoyó procesos de conversión y tratamiento entre representaciones (Duval, 2006), fortaleciendo así la comprensión relacional del concepto (Skemp, 1976).

Propuesta 2: Deducción de la Regla de L'Hôpital

- **Eje temático:** Derivación en una variable
- **Duración:** 2 horas
- **Herramienta principal:** Exploración gráfica y numérica en GeoGebra

A partir de funciones construidas específicamente para generar una forma indeterminada tipo $0/0$ se propuso una tarea que condujo al estudiantado a inferir empíricamente la Regla de L'Hôpital. La actividad promovió el análisis del comportamiento de cocientes de funciones y sus derivadas en torno a un punto crítico, combinando representaciones gráficas, algebraicas y numéricas.

Esta propuesta promovió el razonamiento abductivo e inductivo, al invitar al estudiantado a construir conjeturas a partir de evidencias numéricas y visuales (Mata-Pereira & Ponte, 2017). La tarea también favoreció la justificación informal y el tránsito entre diferentes registros, apuntando a una comprensión flexible del concepto de derivada. La estructura de la clase, dividida en fases de exploración, trabajo autónomo y discusión colectiva, reflejó los principios metodológicos de la Enseñanza Exploratoria (Canavarró, 2011; Oliveira et al., 2013).

Propuesta 3: Deducción del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

- **Eje temático:** Integración en una variable
- **Duración:** 3 horas
- **Herramienta principal:** Modelización de un fenómeno físico (aceleración) y GeoGebra

Esta propuesta se centró en el vínculo entre derivación e integración, a partir de un contexto fenomenológico de cambio de velocidad en una partícula. Se utilizó la visualización del área bajo la curva como construcción progresiva y acumulativa, que dio lugar a la definición operativa de la función integral y su derivada.

La tarea propició el tránsito entre los mundos conceptual y simbólico-formal, según Tall (2004), y movilizó procesos de razonamiento covariacional (Trevisan & Araman, 2021). El diseño apoyó la exploración de significados dinámicos del área bajo la curva y permitió una construcción inductiva de la noción de antiderivada. La articulación entre contexto, representación gráfica y formulación simbólica potenció una comprensión relacional del TFC.

Propuesta 4: Regla de la cadena en funciones multivariantes

- **Eje temático:** Derivación en varias variables
- **Duración:** 3 horas
- **Contexto fenomenológico:** Modelo de utilidades de una empresa ficticia

Mediante el análisis de la utilidad total en función del precio de dos productos (pollo frito y pizza), se diseñó una tarea orientada a la deducción de la Regla de la Cadena mediante el uso del diagrama de árbol. Las personas estudiantes debían identificar las dependencias funcionales entre variables, calcular derivadas parciales y realizar inferencias sobre la tasa de cambio compuesta.

Esta propuesta integró pensamiento proceptual (Gray & Tall, 1994) y razonamiento estructural para analizar relaciones entre variables. El contexto permitió significar los objetos matemáticos desde una perspectiva aplicada, promoviendo el razonamiento avanzado a partir de un modelo contextualizado (Gutiérrez-Fallas & Henriques, 2017). La estructura de la clase respetó las tres fases de la Enseñanza Exploratoria: tarea significativa, trabajo autónomo, discusión colectiva.

Estas propuestas permiten evidenciar cómo un enfoque teórico-práctico, sustentado en la Enseñanza Exploratoria y la movilización de principios de la Didáctica del CDI, puede transformar la enseñanza de conceptos matemáticos desde una lógica instrumental hacia una lógica comprensiva, visual, exploratoria y argumentativa. En conjunto, ofrecen un marco

replicable para el diseño de experiencias de aprendizaje que promuevan el desarrollo del pensamiento matemático avanzado en contextos de educación superior.

Conclusiones

La enseñanza del CDI continúa siendo un terreno fértil para la reflexión didáctica y la innovación pedagógica. Las persistentes dificultades en su aprendizaje, lejos de ser una debilidad, deben entenderse como una invitación a repensar nuestras prácticas docentes y los marcos teóricos que las sustentan. Esta conferencia busca precisamente que ese diálogo continúe, articulando aportes epistemológicos, cognitivos y didácticos con experiencias prácticas desarrolladas en el marco de un proyecto de desarrollo profesional con docentes universitarios.

El modelo de Enseñanza Exploratoria se posiciona como una alternativa metodológica potente, que desafía la lógica tradicional de la enseñanza del Cálculo, al situar al estudiantado como protagonista activo de su aprendizaje. A través de tareas fenomenológicas, el uso de tecnologías digitales, la movilización de representaciones múltiples y el fomento del razonamiento matemático, es posible construir ambientes de aprendizaje que promuevan una comprensión relacional de los conceptos, más allá de su simple manipulación algorítmica.

Desde una perspectiva profesional, el trabajo conjunto entre docentes-investigadores ha mostrado que la transformación de las prácticas no ocurre de forma espontánea, sino que requiere espacios formativos sostenidos, colaborativos y reflexivos. Las propuestas didácticas presentadas son el resultado de un proceso colectivo de diseño, implementación, análisis y mejora, que da cuenta de una didáctica del CDI situada, contextualizada y abierta a la complejidad de las aulas universitarias.

Finalmente, esta experiencia reafirma que es posible enseñar CDI de manera comprensiva, significativa y formativa. Para ello, se requiere una mirada crítica sobre los modelos heredados, apertura a la exploración didáctica y un compromiso ético con el aprendizaje profundo de las personas estudiantes. El CDI, lejos de ser una barrera para los estudiantes, puede ser una puerta hacia el desarrollo de su pensamiento matemático avanzado, si sabemos cómo construir el camino que lleva hasta ella.

Referencias bibliográficas

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 52, 215–241.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 9(1), 143-168.
- Fernández-Plaza, J., Ruiz-Hidalgo, J., & Rico, L. (2013). Análisis conceptual de términos específicos: Concepto de límite finito de una función en un punto. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (RSME)*, 16(1), 131-146.
- Fonseca, J. y Alfaro, C. (2018). El Cálculo diferencial e integral en una variable en la formación inicial de docentes de matemática en Costa Rica. *Revista Educación*, 42(2), 1-22. <https://doi.org/10.15517/revedu.v42i2.25844>
- Fonseca, V., & Henriques, A. C. C. B. (2019). Aprendizagem do teorema do valor intermediário numa abordagem exploratória com o GeoGebra. *Revista Intersaberes*, 14(31), 129-144. <https://doi.org/10.22169/ri.v14i31.1511>

- Gray, E., & Tall, D. (1991). Duality, ambiguity and flexibility in successful mathematical thinking. *Proceedings of the 15th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 72-79). Assis, Itália: PME.
- Gray, E., & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity and flexibility: a proceptual view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(2), 115- 141.
- Gutiérrez-Fallas, L. F., & Henriques, A. (2017). A compreensão de alunos de 12.º ano dos conceitos de limite e continuidade de uma função. *Quadrante*, 26(1), 25-49. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22945>
- Jaffar, S. M., & Dindyal, J. (2011). Language-related misconceptions in the study of limits. In J. Clark, B. Kissane, J. Mousley, T. Spencer, & S. Thornton (Eds.), *Proceedings of the AAMT-MERGA Conference* (pp. 390-397). Adelaide, Australia: Australian Association of Mathematics Teachers.
- Karatas, I., Guven, B., & Cekmez, E. (2011). A cross-age study of students' understanding of limit and continuity concept. *Bolema*, 24(38), 245-264.
- Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics*, 96(2), 169-186. <https://doi.org/10.1007/s10649-017-9773-4>
- Muñoz Ortiz, E. E., Angulo Chaves, P., Robles Padilla, C., & Picado Piedra, A. (2025). Diseño de una tarea fenomenológica para la exploración deductiva de la regla de la cadena en varias variables. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18(1), 277-290. <https://archivo.revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/62394>
- Rivera, F. D. (2011). *Toward a visually-oriented school mathematics curriculum*. New York, NY: Springer.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Tall, D. (2002). *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers.
- Tall, D. (2004). Introducing three worlds of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, 23(3), 29-33.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
- Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema*, 35(69), 158-178. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v35n69a08>
- Trevisan, A. L., Negrini, M. V., Falchi, B., & Araman, E. M. O. (2023). Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. *Educação e Pesquisa*, 49, e251659. <https://doi.org/10.1590/S1678-4634202349251659>



El enigma de la quintica: Historia y trascendencia

Carlos **Sánchez** Fernández

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Cuba

csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

El objetivo de esta conferencia es mostrar cómo el uso de la Historia de la Matemática puede ayudar a comprender mejor la esencia y el significado actual de un tema no siempre bien comprendido: el llamado “enigma de la quintica”. La ecuación general quintica o de quinto grado de x en $\mathbb{R}$, tiene la forma

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0, \text{ donde } a, b, c, d, e, f$$

son coeficientes en $\mathbb{Q}$, y a no puede ser cero. A diferencia de las ecuaciones de grado inferior (primer, segundo, tercer y cuarto), no existe una fórmula general para resolver todas las ecuaciones quinticas mediante radicales, un resultado demostrado primero por el matemático noruego Niels Abel y en caso más general por la teoría del francés Évariste Galois. El problema es que se habla de “imposibilidad de resolución” y, no obstante, se conocen infinitas quinticas que son solubles por radicales. En nuestras clases no siempre queda claro ¿por qué unas ecuaciones de quinto grado son solubles y otras no? Y ¿por qué es imposible encontrar una fórmula general para las que son solubles?

Hacemos un paseo por la historia del esclarecimiento del “enigma”, y concluimos mencionando la trascendencia epistemológica que tuvo y mantiene este asunto. Nos interesa estimular la reflexión sobre el uso de la Historia de la Matemática en nuestra práctica docente.

Palabras clave: Ecuación de quinto grado; Enseñanza del Álgebra; Epistemología; Historia de la Matemática; Teoría de Galois.

Introducción

El asunto que nos ocupa es un tema de la enseñanza del Álgebra, concretamente sobre la solubilidad de las ecuaciones algebraicas de quinto grado y la teoría que lo esclarece es la “Teoría de Galois” surgida en el siglo XIX,. En la Edad Moderna occidental, a partir del siglo XVI, se creó un misterio alrededor de la búsqueda de un algoritmo de solución para cualquier tipo de quintica. Este “enigma” tiene una atractiva historia y tuvo un impacto significativo en la Epistemología de la Matemática que trasciende hasta llegar a nuestra época de revoluciones tecnológicas y científicas. (Ver p.e. [Mei, 2020] o [Tang, 2012]). Resulta interesante notar que en 1963 el talentoso matemático soviético V. Arnold encontró una solución topológica al “enigma de la quintica” y abrió una nueva rama la “Teoría de Galois Topológica”¹

Primero se sucedieron muchos intentos por encontrar una expresión del polinomio de quinto grado más simple, una forma más cómoda, manipulable, que diera idea de qué se debía hacer para resolver por radicales estas ecuaciones. Una de las primeras transformaciones, que todavía hoy se sigue utilizando, es la de un polaco-alemán: Walter von Tschirnhaus y por eso se les llaman *transformaciones de Tschirnhaus* que permiten llevar la ecuación general

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 + ex + f = 0$$

a la forma principal reducida

$$x^5 + px^2 + qx + r = 0 \text{ en } \mathbb{Q}[X]$$

Eso fue a finales del siglo XVII (1683) y así se eliminan los términos de x^3 y x^4 . A finales del siglo XVIII, se realizó una simplificación mayor que lleva la quintica a una forma muy simple, que se llama *forma normal*

$$z^5 - d_1 z + d_0 = 0, \quad d_1 \text{ y } d_0 \in \mathbb{Q}.$$

Veamos lo reducida que queda la quintica, solamente le queda el término de 5^0 grado y el de 1^0 grado, además del término independiente. Se pretende encontrar una solución algebraica, es decir, una fórmula donde solo aparezcan sumas y restas, multiplicaciones y cocientes, potencias y radicales, en expresiones algebraicas con los coeficientes de la quintica. Aparentemente, la forma normal nos facilita resolver el problema, pero ¿cuáles son los valores de d_1 y d_0 ? ¿cómo se obtienen en función racional de los coeficientes? ¿es siempre posible? Y después, ¿es fácil invertir el proceso y encontrar las raíces de la ecuación original? No siempre es fácil responder estas cuestiones, aunque es el tipo reducido de quintica más socorrido².

Pero vayamos por partes: primero, conversaremos un poco sobre la esencia del enigma de la quintica y hablaremos brevemente de quienes y cómo contribuyeron a su

¹ Esta noticia aparece en el “Tribute to Vladimir Arnold” publicado en los *Notices of the American Mathematical Society* **59** (3): 393. March 2012. doi:10.1090/noti810.

² A partir de la introducción de los medios de cómputo se volvió a investigar sobre los algoritmos para resolver ecuaciones de grado mayor que 4. Sobre la quintica existen resultados muy eficientes, un algoritmo completo aparece en [King, 2009]. Recomendamos el artículo de [Spearman y Williams, 1994] que trae una clasificación de las quinticas solubles.

esclarecimiento; segundo, estableceremos las diferencias en las contribuciones de Abel y Galois, las figuras que nosotros consideramos protagonistas principales. Y, tercero, mencionaremos sin detalles, el impacto inmediato y posterior a la introducción de las máquinas computadoras electrónicas

Parte I. La esencia del “enigma de la quintica” y su esclarecimiento.

Hagamos un resumen rápido sobre la cuádrica, la cúbica y la cuártica. La cuádrica se dominaba en casos aislados desde la antigüedad y en el medioevo oriental; tanto en la India, como en el Imperio Islámico se usó el algoritmo con una formulación retórica o sincopada, con pocos símbolos. Parece ser que el flamenco Simón Stevin, en el s. XVI, fue el primero que en Occidente expuso la fórmula para la cuádrica. En el renacimiento italiano Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari y, algo más tarde, Bombelli, cerraron el problema de la cúbica y la cuártica. Es en el *Ars Magna* de Cardano en 1545, donde se publica por primera vez la fórmula para resolver la cúbica y la forma para reducir la cuártica a una cúbica³.

Así el siguiente paso era encontrar una fórmula similar para la quintica. Entonces aparece el “enigma de la quintica”. En esencia, ¿en qué consiste este enigma? A partir de 1545 cuando ya se resuelven las ecuaciones de grados inferiores al quinto, mucha gente, matemáticos y no matemáticos, se interesan por casos particulares de quinticas (astrónomos sobre todo, porque en astronomía aparecen ecuaciones de quinto grado para la solución de distintos problemas), algunas se resolvían y otras no. La cuestión es que pronto se dieron cuenta de que hay infinitas quinticas que son solubles y hay infinitas que no son solubles por radicales y el “enigma” entonces era saber por qué eran de un tipo o de otro y si no existía una fórmula general con radicales para las solubles. Por otra parte, todas las que podían ser reducibles a un producto de dos polinomios de grado menor, eran solubles ya que todos los polinomios de grado menor eran solubles. El problema reside en que no es fácil determinar que un polinomio sea reducible o irreducible -tanto como determinar si un número es primo o es compuesto-. No existen muchos criterios ni algoritmo siempre eficiente. Uno de los más usados es el *criterio de Eisenstein* (del s. XIX) “Sea el polinomio de grado n : $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x^1 + a_0$ con coeficientes enteros. Si existe un número primo p tal que se cumplen las tres condiciones siguientes:

- p divide cada coeficiente a_i ; $i \neq n$
- p no divide a_n ; y
- p^2 no divide a_0 ;

Entonces el polinomio es irreducible”. Cómo se observa es una condición suficiente muy particular, que deja muchos casos indeterminados.

Hasta finales del s. XVIII se pensaba que todo polinomio de grado n , tenía n raíces, se sabía que algunas podían ser no racionales e incluso complejas, no se hablaba del campo de descomposición del polinomio, si las raíces estaban en C , o en R , o en Q . Lo único que interesaba era “resolver” la ecuación, es decir, encontrar la forma de hallar sus raíces. Fue

³ Para ampliar detalles de Historia del Álgebra recomendamos el documentado texto [Katz, V. y Parshall, K. H., 2014], dónde los interesados pueden encontrar jugosos temas de investigación.

Gauss, con su obra, quién cambió el paradigma del álgebra: lo esencial no es encontrar el “algoritmo de cálculo”, sino encontrar un “algoritmo de conceptos” que permita probar la existencia de una descomposición en un campo numérico determinado. Gauss destaca el papel de $\mathbb{C}$, el cuerpo de los números complejos, dónde todo polinomio con coeficientes reales posee todas sus raíces; esta propiedad se expresa diciendo que $\mathbb{C}$ es *algebraicamente cerrado*. Pero el problema más acuciante era saber cuáles ecuaciones con coeficientes racionales tenían todas sus soluciones en el campo de los racionales, ampliado con los irracionales algebraicos, dados por radicales, como se conocía de las ecuaciones cuadráticas, cúbicas y cuárticas. Después de los logros de Gauss se tiene certeza de que siempre se puede descomponer un polinomio en monomios de primer o segundo grado. La cuestión es saber en cada campo numérico cómo es esta descomposición, sean los ceros del polinomio enteros, racionales, reales o complejos. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(x) &= x^5 - 3x^3 + x^2 - 3 = (x^2 - 3)(x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ en } \mathbb{Q}[X] \\ &= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 1)(x^2 - x + 1) \text{ en } \mathbb{R}[X] \text{ y} \\ &= (x + \sqrt{3})(x - \sqrt{3})(x + 1) \left(x - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2} \right) \left(x - \frac{1 - i\sqrt{3}}{2} \right) \mathbb{C}[X] \end{aligned}$$

Basta la primera descomposición para asegurar que es soluble, porque todos los factores son solubles, aunque dos raíces son complejas y 2 son irracionales. Hicimos las tres descomposiciones para señalar que precisamente el problema no reside en la existencia de la factorización, sino en la imposibilidad de hacerla en un campo numérico dado.

El problema está en las quinticas irreducibles, por ejemplo, consideremos $g(x) = x^5 - 5px + p = 0$ con p primo estrictamente mayor que 5

Este es un caso, en la forma normal, que es irreducible, porque se le puede aplicar el criterio de Eisenstein. Es irreducible en $\mathbb{Q}[X]$, pero puede que sea soluble. Probemos que no es soluble en radicales aplicando otro criterio también del s. XIX.

Los polinomios de quinto grado con coeficientes reales, siempre tienen al menos una raíz real, aunque también pueden tener 3 o 5 raíces reales, ya que las complejas, si tienen, vienen en parejas, el número complejo $x+iy$, junto con su conjugado $x-iy$. El criterio de insolubilidad que aplicaremos es una variante del original atribuido al alemán Leopold Kronecker que se aplica a polinomios de grado primo en general. A esta variante la denominaremos *Criterio K*: “Si un polinomio de quinto grado irreducible en $\mathbb{Q}[X]$ tiene exactamente tres raíces reales y dos complejas conjugadas, entonces no es soluble por radicales”.

Por tanto, para saber que nuestro ejemplo no es soluble, basta probar la existencia de exactamente 3 raíces reales, es decir, no tiene solo 1 raíz real, ni tampoco las 5 son reales, sino que dos de las 5 raíces son complejas.

El teorema de Rolle, estudiado en Análisis, nos indica que las raíces reales son *a lo más 3*. En efecto, el teorema de Rolle plantea que, entre dos ceros de la función, continua y

derivable, hay un cero de la derivada. En este caso $g'(x) = 5x^4 - 5p$ tiene solo dos raíces reales $x = \pm\sqrt[4]{p}$, pues las otras dos son complejas conjugadas $x = \pm i\sqrt[4]{p}$.

El teorema de Bolzano se puede usar para determinar que hay *por lo menos tres raíces reales, porque hay al menos tres cambios de signo*:

- $g(\ll 0) \ll 0, g(-1) = -1 + 6p > 29, g(0) = p > 5,$
- $g(1) = 1 - 4p < -20, g(3) = 243 - 14p > 140, g(\gg 0) \gg 0^4$

Por tanto, Rolle y Bolzano juntos nos dicen que hay exactamente 3 raíces reales.

Obsérvese que también se pudiera aplicar el teorema de Sturm⁵ u otro criterio algebraico. Pero por motivos pedagógicos, preferimos combinar los métodos analíticos con los algebraicos, así a la vez que resolvemos el problema, integramos conocimientos.

¿Cómo se resolvió el enigma de la quintica?

Los ocho personajes que se muestran en la Figura 1, entre los años finales del siglo XVII y mediados del s. XIX, se preocuparon en resolver este misterio y transformarlo en un asunto matemático transparente. ¿Son los únicos atrevidos? No, no son los únicos. Estos son los que consideramos que su labor fue significativa en la búsqueda del esclarecimiento de este misterio.



Figura 1: Principales personajes relacionados con la solución del enigma de la quintica entre 1683 y 1846

El primero, arriba de izquierda a derecha, ya hablamos de él, es el polaco Tschirnhaus (en 1683 hizo su publicación). El segundo, Lagrange es más conocido. Algunos lo conocen como francés, pero es italiano, nació en Italia y vivió allí por más de 30 años, después trabajó casi 20 años en Berlín, antes de pasar a la Academia de Ciencias de París. En un trabajo de 1770 Lagrange dio importancia a las funciones racionales simétricas obtenidas con los coeficientes racionales del polinomio. Lagrange fue el primero en asociar la solución de una ecuación con las permutaciones de las raíces, aunque no

⁴ Aclaremos que la notación $\ll 0$ significa número negativo muy lejos del 0, mientras que $\gg 0$, indica que el número es positivo muy lejos de 0.

⁵ El interesado puede consultar el ensayo de D.G. Hook y P.R. McAree, (1990) "Using Sturm Sequences To Bracket Real Roots of Polynomial Equations" aparecido en *Graphic Gems I* (A. Glassner ed.), Academic Press, p. 416-422.

usaba la terminología de la teoría de grupos que se desarrolla en el s. XIX. Observó que conocer las propiedades de las relaciones simétricas de las raíces en función de sus coeficientes y cómo cambiaban al actuar el grupo simétrico de las permutaciones, daba información útil para dilucidar si podía o no transformarse la quintica en una ecuación de grado menor, en una ecuación “resolvente”. Pero siempre encontraba una ecuación de grado seis o superior, que para Lagrange no era “resolvente”. A Lagrange le sigue Bring, un sueco, (hemos seleccionado los personajes significativos de distintas nacionalidades: polaco, italiano, sueco, etc. porque de esta forma destacamos la relación de la evolución de la Matemática con la diversidad cultural y social). Bring precisó un método para llevar la quintica a la *forma normal* $x^5 + ax + b = 0$ usando la idea de Tschirnhaus. A continuación, el médico italiano Ruffini, que según historiadores⁶, es el primero que hace pública su aceptación de la no existencia de solución general por radicales y expone una “demostración” del caso de la quintica. Pero ¿qué pasa con Ruffini? Él tenía poco crédito como matemático en la comunidad científica de entonces, porque su formación era de médico, no tenía prestigio como matemático. La mayoría puso en duda su método, muy pocos le dieron crédito. Realmente después cuando se revisó bien, se encontró que había errores. Uno de los que encontró errores fue Abel, pero antes de Abel, ya otros que lo estudiaron bien, llegaron a que las argumentaciones no siempre eran rigurosas. Partiendo de que existen las raíces, utilizaba el Teorema Fundamental del Álgebra y otros recursos algebraicos, mostrando su cultura matemática, pero con poco rigor. Este artículo de 1799 no se lo llegaron a publicar por la Academia de Ciencias de París aunque volvió a presentarlo en 1810. Cauchy le dio crédito. Cauchy, que ha pasado a la historia por no darles crédito a tantos buenos matemáticos, le dio crédito a Ruffini. Aunque tampoco pudo demostrar que todo lo que hacía Ruffini estaba completamente bien. Ruffini utilizaba resultados de Cauchy sobre grupos de permutaciones de las raíces, y parece que eso incitó al gran ego de Cauchy.

Vamos a la fila inferior de derecha a izquierda. Gauss no necesita presentación. Una de las primeras cosas que hace, cuando tenía solo 18 años, es encontrar cómo hallar los polígonos regulares, construibles solo con regla y compás. Entonces Gauss estudia las raíces de la unidad y los polinomios ciclotómicos⁷ asociados. Todo parece indicar que ya Gauss pensaba que resolver el misterio de la quintica de manera general, como se hizo con la cúbica, no era factible. Pero Gauss se cuidaba mucho de no perder su credibilidad (igual pasó con la geometría no euclidiana, que no se lanzó a presentar sus ideas). En fin, que Gauss no resolvió el enigma, pero con sus ideas alumbró algo el camino.

Llegamos al noruego Abel en 1824, -hace muy poco más de 200 años-, quien comenzó a abrir el camino de la solución del enigma, exponiendo un teorema que

⁶ Para aclarar y ampliar esta síntesis histórica sugerimos, por ejemplo, la lectura de [Bashmakova y Smirnova, 2000} pp. 100-108, dónde se trata, muy sucintamente, la evolución del problema de la solución de ecuaciones por radicales o también Katz y Parshall (2014) muy documentado y más actualizado.

⁷ El polinomio ciclotómico de grado n es el único polinomio irreducible divisor del polinomio $x^n - 1$ que no divide a ninguno de los polinomios $x^k - 1$ para $k < n$. Sus raíces son las raíces primitivas de la unidad y está relacionado con la construcción del polígono regular de n lados. Por ejemplo, si $n = p$ un número primo, entonces $C_p(x) = 1 + x + x^2 + \dots + x^{p-1}$ y $C_{2p}(x) = 1 - x + x^2 - \dots + x^{p-1}$. En particular, $C_5(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ y $C_{10}(x) = x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$. Obsérvese que el polinomio divisor es del mínimo grado de irreducibilidad.

demuestra la imposibilidad de formular un algoritmo general algebraico para resolver toda ecuación de grado mayor o igual a 5. Posteriormente el francés Galois dio la idea más completa para dilucidar cuáles quinticas tienen solución y cuáles no. Abel murió en el 1829 y en ese mismo año Galois entregó a la Academia de París su primer trabajo que fue rechazado por Cauchy. Luego presentó una versión más amplia en 1831 que tampoco se aprobó, -Galois redactó, en total, 3 trabajos ninguno publicado en su corta vida-. La evaluación general completa de toda la problemática, como hoy se presenta por la denominada *Teoría de Galois*, no la hizo Galois, porque sus primeros manuscritos eran de pocas páginas, con una serie de borrones y tachaduras, que los hacían poco entendibles y se perdieron. El asunto es que Galois murió, en 1832, en un duelo, con 21 años; su manuscrito principal lo envió antes del duelo a un amigo, al parecer se extravió y varios años después, en 1846, Joseph Liouville encuentra otro manuscrito corregido por Galois y lo publica en su revista de Matemáticas puras y aplicadas. Otros matemáticos, durante la segunda mitad del s. XIX y primera mitad del s. XX, le dieron la forma más rigurosa con que aparece en los textos de álgebra avanzada, de forma que el original de Galois no se parece casi nada a la presentación actual⁸.

Cerremos esta primera parte aclarando que, aunque en los textos de álgebra se presenta el teorema de insolubilidad de Abel -o de Abel-Ruffini- usando los grupos de Galois, Abel no usó absolutamente nada de Galois y el mismo Galois va a señalar que Abel le sirvió de estímulo, de motivación, aunque sus ideas son diferentes. Pero ambos tienen un tronco en común, que es la obra de Lagrange, Ruffini, Gauss y todos los que antes allanaron el camino que tomaron Abel y Galois.⁹

Parte II: Trascendencia del enigma de la quintica

Vamos a concretar, en síntesis apretada, lo que ocurrió después de las publicaciones de Abel y Galois que abrieron el camino del esclarecimiento del enigma de las ecuaciones algebraicas de grado mayor que cuatro. Se puede resumir en tres grandes líneas de investigación:

- I. Encontrar otras formas, no obligatoriamente algebraicas, que permitan resolver las ecuaciones de grado mayor o igual a 5 no solubles algebraicamente.
- II. Dada una clase específica de polinomios de grado mayor o igual a 5, dilucidar cuáles ecuaciones correspondientes, son solubles y cuáles no.
- III. Determinar un procedimiento, un algoritmo, para localizar con suficiente precisión y, si es posible, con valor exacto, las raíces de las ecuaciones tanto solubles, como no solubles.

Con relación al primer problema I, digamos que consciente Abel de que para $n \geq 5$ no hay una fórmula general algebraica, pensaba que una forma analítica posible se

⁸ Sobre la “Teoría de Galois” uno de los textos más asequibles es el de [Stewart, 2022] en su 5ª ed. revisada y con notas muy esclarecedoras.

⁹ Sobre los logros de Abel, independientes de Galois, y sobre su sufrida vida romántica, recomendamos [Sánchez y Noriega, 2005]. La segunda parte del libro se dedica especialmente al enigma de la quintica.

encontraba usando las funciones elípticas¹⁰. Este fue el tema predilecto de Abel, pues le dedicó 14 artículos a las funciones elípticas y solo 4 a las ecuaciones algebraicas. Y esto sirvió para que otros, como el francés Hermite (1858) y un poco después el italiano Brioschi, encontrarán una *fórmula general analítica* de resolución de la quintica.

Después que varios científicos se afanaran en perfeccionar la teoría de Galois, como Kronecker (1859) en Alemania y Cayley (1861) en Inglaterra, era natural que otros se afanaran procurando la síntesis dialéctica que explicara con mayor precisión la relación entre las ideas de Abel y Galois y las ideas de Hermite y Brioschi. El talento geométrico y analítico del alemán Félix Klein (1888) pudo demostrar que la estructura simétrica del icosaedro regular servía para ligar los grupos solubles de Galois con las funciones elípticas usadas por Hermite. Klein no solo se refirió a la quintica sino que encontró la explicación geométrica del caso de las séptima y la onceava ecuaciones.

La atención a las líneas II y III de investigación fue cultivada también por investigadores de la Matemática numérica, cuyos esfuerzos se vieron frenados por la inexistencia de métodos de cómputo y falta de desarrollo algorítmico. No obstante, en la literatura del siglo XIX se recogen resultados ingeniosos, algunos de los cuales, posteriormente, al aparecer las computadoras electrónicas digitales, fueron puestos a punto y verificados. Destaquemos la obra del estadounidense Bruce King que aparece por primera vez completa en su libro *Beyond quartic equation* (1996), que tuvo una segunda edición [King, 2009]. La historia de la investigación de King es ilustrativa de otras similares y la resumimos aquí: En el año 1990 King, que buscaba un algoritmo para solucionar unas ecuaciones de grado mayor que cuatro aparecidas en sus investigaciones químicas, encontró un artículo del alemán Kieper (1878) con un método práctico para resolver un tipo de quintica. El trabajo de Kieper se había archivado y olvidado por su engorroso procedimiento de cálculo. A King le pareció que con los conocimientos computacionales del momento quizás se podría facilitar su aplicación. Buscó la colaboración de un especialista en Ciencias de la Computación y en labor conjunta después de empaparse en la teoría desarrollada por Galois, Hermite y Klein, con las novedosas herramientas de la Computación encontraron un algoritmo general.

Conclusiones

En esta última sección pretendemos resumir algunas ideas y a la vez tratar una última cuestión: ¿Qué hacer para lograr una mejor comprensión del “*enigma de la quintica*” en nuestra labor educativa?

Para estimular la reflexión en esta dirección, me atrevo a señalar tres acciones que implícitamente he tratado de comunicar:

1. Ante todo, aprender la esencia matemática del “enigma”
2. Enseguida, conocer la historia del esclarecimiento del “enigma”
3. Por último, ubicar el momento del curso de Álgebra más propicio para motivar y exponer el “enigma”

¹⁰ Las funciones elípticas son funciones de variable compleja doblemente periódicas, es decir, que a diferencia de las funciones circulares que se repiten periódicamente solo en el eje real, las elípticas se repiten periódicamente en dos direcciones, por ejemplo, en el eje real y el eje imaginario.

En general, los hechos históricos, relatados anteriormente, muestran que la adopción de un patrón de rigor en la solución de un problema matemático robusto como la solubilidad algebraica de la quintica, fue el resultado de profundas transformaciones en la práctica matemática, las cuales tuvieron que ver obviamente con factores lógicos y epistemológicos, pero también con factores del contexto de la época como los ideales y valores dominantes sobre la Matemática, los modos de zanjar disputas y establecer consensos en la comunidad de practicantes, los criterios para determinar las competencias profesionales, el trabajo en el marco de instituciones, entre otros.

Desde el punto de vista epistemológico, conocer el “enigma” y su evolución histórica, enseña al profesor, que el canon de rigor es un constructo histórico, producto de una práctica matemática compleja, en otras palabras, nos indica la importancia de dar mayor preeminencia al rigor lógico en la argumentación, atender la necesidad de teoremas de existencia, de búsqueda de excepciones a reglas intuitivas no rigurosas, favorece el desarrollo del enfoque de Gauss en el Álgebra, que es la búsqueda de “algoritmos de conceptos”, no solo “algoritmos de cálculo” -buscar la manera de comprender el problema matemático y argumentar por qué es de esa forma y no de otra-. Influye directamente en interesar tanto por el problema de la ecuación en sentido algebraico como por su relación con otras ramas de la Matemática. Todo esto se va haciendo más transparente a medida que conocemos la historia del esclarecimiento del enigma.

Destaquemos, por ser sorprendente, el aporte de Félix Klein, quien hace una síntesis metodológica, utilizando sus vastos conocimientos de geometría. Klein mostró que este problema algebraico, sobre todo el trabajo con las funciones simétricas y los grupos finitos de la Teoría de Galois, junto con la solución analítica dada con el uso de funciones elípticas, se podía entender de mejor manera utilizando los poliedros regulares, el trabajo con la simetría del poliedro y en particular, para la quintica, el icosaedro. Es decir, que la síntesis de álgebra y análisis se hace explotando la esencia geométrica de los poliedros regulares estudiados desde la antigüedad helenística.

Aquí apreciamos, una vez más, por qué consideramos el conocimiento de la Historia de la Matemática tan significativo: porque así destacamos que la Matemática es una sola y no debemos limitarnos a buscar soluciones con métodos de uno u otro tipo, sino que debemos mantener una visión holística, flexible y amplia, en la investigación matemática y, por supuesto, en su enseñanza a futuros científicos, ingenieros o pedagogos.¹¹

Quiero terminar con una frase de Sophus Lie (1842-1899), un noruego que trató de hacer lo que hicieron Abel y Galois, pero para las ecuaciones diferenciales, introduciendo herramientas que hoy se denominan “*Teoría de los grupos y álgebras de Lie*”. Lie decía que el estilo de las Matemáticas del siglo XIX fue trazado por 4 hombres: Gauss y Cauchy (nadie lo pone en duda) y los otros dos, estos dos jóvenes-gigantes que esclarecieron el enigma de la quintica introduciendo una visión innovadora y fresca: Abel y Galois.

¹¹Para ampliación sobre la historia del problema de solución de ecuaciones algebraicas por radicales recomendamos [Bashmakova y Smirnova, 2000] y [Katz y Parshall, 2014], para el uso de la Historia en estos problemas de “imposibilidad” es reciente el trabajo de [McAllister, 2018].

Referencias y bibliografía

- Bashmakova, I. G. y Smirnova, G. S. (2000) *The beginnings and evolution of algebra*. MAA, Washington D. C.
- Katz, V. y Parshall, K. H. (2014) *Taming the Unknown. A History of Algebra*. Princeton University Press. Princeton, N. J.
- King, R. B. (2009) *Beyond the Quartic Equation*. 2da. Ed. Birkhauser. Berlín.
- McAllister, A. M. (2018) Mathematical Impossibilities. En Gellash, A. S. y Jardins, D. (eds.) *The Course of History: Ideas for developing an History of Mathematics course*. M.A.A. Press. Washington DC.
- Mei, X. (2020) A new understanding of the problem that the quintic has no rational solution. *Advances in Pure Mathematics*. 10, 508-539.
- Morris, S., Jones, A. y Pearson, K. (2022) *Abstract Algebra and Famous Impossibilities*. 2da. Ed. Springer Verlag. N. Y.
- Sánchez Fernández, C. y Noriega Sánchez, T. (2005) *Abel, el romántico nórdico*. Ed. Nivola. Madrid.
- Spearman, B. y Williams, K. S. (1994) Characterization of solvable quintics. *American Mathematical Monthly*, 101, 986-992
- Stewart, I. (2022) *Galois Theory*. 5ta. Ed. Chapman & Hall. CRC Mathematics Texts. London.
- Tang, J.E. (2012) Several Quintic Equations Which Can Be Solved by Root's Forms. *Advanced Mathematics Research*, 15, 58-61.



El problema de la explicación en la filosofía de la práctica matemática y su aporte a la formación inicial de profesores

Luis Carlos **Arboleda**
 Facultad de Educación y Pedagogía, Universidad del Valle
 Colombia
luis.carlos.arboleda@gmail.com

Resumen

En una primera parte se ofrecerá una visión general del campo de la Filosofía de la Práctica Matemática, con énfasis en aquellos temas y líneas de investigación en estrecha conexión con la práctica profesional del profesor. En una segunda parte se hará una aproximación a la cuestión de la Explicación y la Comprensión desde las perspectivas histórica y didáctica. Aplicaremos este enfoque explicativo a la práctica matemática de Fréchet, generalizando a los espacios topológicos el Teorema del Valor Extremo del Análisis real. En la tercera parte se plantearán algunas ideas sobre el uso de esta historia filosófica de la práctica matemática en la formación inicial de profesores.

Palabras clave: Filosofía de la Práctica Matemática; Historia de la Matemática; Formación de Profesores; Teorema del Valor Extremo de Weierstrass; Ulisse Dini; Maurice Fréchet.

La explicación matemática en la Filosofía de la Práctica Matemática

En un trabajo dirigido a la comunidad de educadores matemáticos con el fin de defender la tesis de la “fertilización cruzada” existente entre la Filosofía de la Práctica Matemática (FPM) y la Educación Matemática (EM), Hamami (2020) afirma:

La educación matemática y la filosofía de la práctica matemática son dos campos de investigación cuyos dominios se solapan de forma sorprendente. Sin embargo, las interacciones entre ambos campos han sido muy limitadas hasta la fecha, ya que la investigación se realiza mayoritariamente en paralelo, a veces sobre los mismos temas. En consecuencia, el potencial de interacción y de enriquecimiento mutuo entre ambos campos sigue siendo poco explorado y poco aprovechado.

Comienza con una revisión de la literatura de las últimas décadas para mostrar que las nuevas tendencias en FPM, a diferencia de los estudios tradicionales sobre los fundamentos abstractos de la matemática, apuntan a las “explicaciones matemáticas que hagan justicia a las múltiples dimensiones del conocimiento y la comprensión, tal y como se producen en la práctica matemática real”.

Hamami reconoce seis líneas de interés común y mutuo enriquecimiento entre ambos campos, señalando en cada una sus propósitos y autores que hicieron contribuciones esenciales a su desarrollo en el campo FPM y algunas referencias a trabajos ya realizados sobre posibles interconexiones con EM: 1) razonamiento y prueba, 2) diagramas y visualización, 3) comprensión y explicación, 4) notaciones y sistemas simbólicos, 5) valores matemáticos y 6) agencia matemática.

Los usos posibles de la FPM en la enseñanza de las Matemáticas deberían, satisfacer al menos dos criterios: 1) proporcionar recursos conceptuales para la mejor comprensión del aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas, y 2) develar la pertinencia educativa de aspectos del pensamiento y la práctica matemática que han sido poco o nada analizados.

Así mismo, se refiere a algunas líneas de investigación en EM que contribuyen a la agenda actual de FPM (Weber e Inglis, 2020): 1) conocimientos matemáticos para la enseñanza, 2) trayectorias de aprendizaje, 3) aprendizaje de las Matemáticas por comprensión, 4) identidad del estudiante y del profesor de Matemáticas y 5) andamiaje (*scaffolding*) o “proceso mediante el cual un profesor ayuda, guía, entrena y apoya a un estudiante en la realización de una tarea que el estudiante no podría hacer completamente por su cuenta”.

La comprensión y la explicación son dos temas de investigación con enfoques compartidos que, a su juicio, ofrecen los mayores beneficios. Menciona, a este respecto, el problema de las pruebas explicativas: ¿qué hace que algunas pruebas sean capaces de explicar *por qué* un teorema es verdadero, además de establecer *que* lo es? Mancosu, en particular, ha hecho contribuciones esenciales en esta línea de investigación de FPM (Mancosu, 2001, 2005).

En esta serie de trabajos, en particular en Mancosu (2001), se presentan ciertas consideraciones que nos resultan interesantes comentar. Una manera de aproximarse al problema de las pruebas explicativas es tener en cuenta que, habitualmente, la prueba de un teorema convence, pero no necesariamente explica su razón de ser. La prueba euclidiana del teorema de Pitágoras, mediante el método de comparación de áreas, convence. El método de prueba por las relaciones de semejanza de los triángulos determinados por la altura de la hipotenusa explica. La razón última del teorema de Pitágoras es la proporción entre las áreas de estos triángulos y el cuadrado de la razón de semejanza. Pero aun así, no toda prueba explica el porqué, su origen, su motivación, su realización y su alcance.

Quisiera poner atención, escribe Mancosu, a las formas de explicación de las matemáticas en las que la presentación de una teoría proporciona la *explicación natural* de sus resultados. Esto podría referirse a que una simple justificación de la prueba no necesariamente explica el porqué de sus inferencias. En efecto, Bolzano distinguía la relación de deducibilidad de la

relación entre la consecuencia y su fundamento. Estas consideraciones de Mancosu se inscriben en el enfoque de Kitcher de la *explicación unificadora*. Según Kitcher (1975):

El poder explicativo de las teorías científicas se destaca cuando revelan conexiones entre fenómenos que antes se consideraban inconexos. En el ámbito de las matemáticas ocurre lo mismo, y es habitual reivindicar el enfoque “abstracto” de las matemáticas, apelando a las conexiones que se revelan al estudiar disciplinas familiares como instancias de estructuras algebraicas generales.

Mancosu y otros comentaristas del modelo unificacionista han destacado igualmente la siguiente cita de Kitcher (1989):

La ciencia avanza nuestra comprensión de la naturaleza al mostrarnos cómo derivar descripciones de muchos fenómenos, utilizando la misma derivación una y otra vez, y, al demostrarlo, nos enseña cómo reducir el número de tipos de hechos que debemos aceptar como últimos (o absolutos).

El modelo de explicación unificadora de Kitcher retoma el argumento nomológico deductivo de Kempel, según el cual un fenómeno se explica cuando puede deducirse lógicamente a partir de leyes generales y condiciones iniciales. Sea K una proposición que actúa como un principio unificador en un campo determinado. Como veremos más adelante, Kitcher (1975) se centra en el Teorema del Valor Intermedio según la formulación y la demostración de Bolzano (1817). K es el *explanandum*, lo que se quiere explicar. $E(K)$, el acervo explicativo de K , es el *explanans*, el cual denota la sucesión $E_1, E_2, \dots$ de explicaciones parciales de argumentos inferenciales de la prueba de K . En el *explanans* hay al menos un j tal que $E_j(K)$ es una ley o principio general. A diferencia de la explicación justificadora, la explicación unificadora $E(K)$ no se reduce a reconocer el lugar de una inferencia en la prueba. $E(K)$ produce conocimiento nuevo sobre el porqué del orden lógico de cada E_j en el acervo explicativo de K . En este sentido, si un argumento inferencial de la prueba pudo verse antes como accidental o sorprendente, desde el punto de vista del modelo de explicación unificadora aparece como consecuencia de principios fundamentales. Cada explicación $E_j(K)$ es una instancia de un patrón más general. $E_j(K)$ muestra cómo ciertos miembros de K se derivan de otros. $E_j(K)$ es legítima cuando se sitúa en el límite del desarrollo racional de la práctica científica (Kitcher 1989).

En lo que sigue examinaremos cómo aplicar el modelo de explicación unificadora, con algunas adecuaciones, a las generalizaciones de primer y segundo grado de abstracción del *Teorema del Valor Extremo* (TVE), agenciadas por Dini en el análisis de funciones de valor real y por Fréchet en el análisis de funciones generalizadas. Particularmente en el primer caso, se trata de explicar las modalidades de instanciación de argumentos inferenciales de la prueba de TVE en las prácticas de Weierstrass, Schwarz, Bonnet, Serret, Cantor y Dini. Una indagación histórica de las fuentes permitiría verificar si las explicaciones $E', E'', E''' \dots$, de argumentos inferenciales y de principios fundamentales de la prueba de TVE se encuentran instanciadas en los trabajos de Weierstrass sobre el principio de Dirichlet (1861-1870), de Cantor sobre series trigonométricas y en las demostraciones de Bonnet y Serret (1868), entre otros, de distintos teoremas del análisis real.

Todos estos agentes reconocen en sus prácticas el estatuto del TVE como “teorema principal” (Weierstrass) o “gran teorema” (Cantor). Entre todos, Dini, estaba mejor *situado* para conocer estas explicaciones, en el sentido de haber asumido el compromiso de presentar de manera rigurosa, sistemática y unificada —según los ideales de rigor del programa de Weierstrass— los resultados del campo del análisis real en un texto. Este agente comprende que

E', E'', E''' ... son instancias de una E más general, y que cada una de ellas debe ser incorporada de cierta manera en el patrón general y unificado de E .

La anterior caracterización del acto de razonamiento que conduce a Dini a la formulación y prueba del TVE, corresponde al modelo causal de la explicación propuesto por Khalifa (2017, 142), el cual incorpora el estudio de la interacción de agentes a través de ciertos mecanismos al modelo de Kitcher. Pero sería Fréchet quien habría llevado al límite este modo de razonar, al darle la mayor generalidad explicativa al TVE.

Parafraseando a Khalifa (2017, 142), la generalización del TVE a los espacios abstractos de Fréchet, ofreció una explicación unificadora de las distintas versiones antes aceptadas del teorema en contextos teóricos particulares de la teoría de funciones y el análisis. La versión generalizada redujo las explicaciones anteriores a sus características esenciales, las cuales quedaron imbricadas en la más simple. Al mismo tiempo, aumentó nuestra capacidad de comprensión matemática, en cuanto a la constitución de nuevos objetos y teorías matemáticas que emergieron como consecuencia de esta generalización, en particular, la teoría de la compacidad, la topología general y el análisis funcional.

El Teorema del Valor Extremo (TVE) en las funciones de variable real.

Es bien sabido que las bases de la teoría de conjuntos de Cantor se encuentran en sus artículos de 1870 sobre las series trigonométricas. Ver, por ejemplo, (Dugac, 2003). Recordemos que el estudio de la unicidad de la representación de una función en serie trigonométrica fue uno de los problemas de mayor interés entre los matemáticos de mediados del siglo XIX (Bottazzini 2018). Nos interesa sobre todo el primero de estos artículos en donde Cantor (1870) se enfrenta a la necesidad de demostrar el TVE para justificar su utilización como argumento o recurso en la demostración del objeto principal de ese trabajo, el llamado *teorema de la unicidad* (Cantor, 1870, 80): “Sea $F(x)$ una función continua para todo x en $[a, b]$. Si $F(x)$ es representable en serie trigonométrica convergente para todo valor de x , su representación es única.”

La emergencia de enunciados relativos al TVE, en tanto recursos auxiliares del teorema de la unicidad de Cantor y de otras proposiciones del análisis matemático, se erigirá como condición de posibilidad para formular y demostrar la proposición unificadora que finalmente obtendrá el consenso de los matemáticos. Vamos a examinar algunos aspectos de la práctica matemática de Cantor, Bonnet, Serret y Dini que pueden ayudarnos a comprender la afirmación anterior. Nos apoyamos para ello en Dugac (2003) y Bottazzini (2018), que proveen elementos importantes sobre la función argumentativa del TVE en el artículo de Cantor, como también sobre la búsqueda de legitimidad para su trabajo en sus intercambios epistolares, especialmente con H. Schwarz y E. Heine.

Recordemos que Heine incorporó en sus trabajos el enfoque weierstrassiano de formalización rigurosa de los conceptos de límite, continuidad y derivada. Ello le permitió obtener resultados novedosos, por ejemplo, en el estudio de la convergencia de series trigonométricas, donde formalizó y desarrolló la distinción original de Weierstrass entre convergencia puntual y convergencia uniforme. En la historia de la topología conjuntista, su

nombre está asociado al de Borel en una de las proposiciones que explican la constitución del concepto de compacto de Fréchet, el llamado Teorema de Heine-Borel-Lebesgue.

Schwarz, por su parte, fue uno de los alumnos más destacados de Weierstrass. A él se debe la publicación de materiales relacionados con los cursos y conferencias del “padre del análisis matemático” impartidos en la Universidad de Berlín. Cantor sostuvo una interesante correspondencia, fundamentalmente con Schwarz e indirectamente con Heine, para obtener su parecer y la aceptación del resultado de su investigación sobre el teorema de la unicidad de la representación de $F(x)$.

Entre los intercambios que reporta Bottazzini (2018) sobre la cadena de argumentos inferenciales que aseguraban la prueba del teorema, hay uno que llama la atención para los fines de este trabajo. Se trata de la siguiente observación que Cantor agrega como nota de pie de página a la demostración de cierto lema sobre la condición de linealidad de la función $F(x)$, uno de los argumentos clave para asegurar la cadena de inferencias de la prueba principal (Cantor, 1870, 141):

Esta demostración se basa esencialmente en el siguiente teorema frecuentemente utilizado y demostrado en las conferencias del Sr. Weierstrass: Dada una función $F(x)$ continua en el intervalo (a, b) , extremos incluidos, la función *alcanza* el máximo g de los valores que puede asumir, al menos para un valor u de la variable, de modo que $F(u) = g$.

Años antes O. Bonnet y J. A. Serret también habían reconocido la importancia de este principio en el análisis. Efectivamente, ello se constata en el tomo primero del *Cours de calcul différentiel et intégral* de Serret (1868), donde este principio se aplica, implícitamente y sin mencionar a Weierstrass, en la prueba del teorema del valor intermedio. En una nota al final de la prueba, Serret reconoce que su autor fue Bonnet.

Desde cuando Dini asistió a los cursos de Serret en 1868 en el *Collège de France* en París empezó a tomar conciencia de la necesidad de generalizar y demostrar el principio como teorema e integrarlo en una exposición rigurosa del análisis de variable real con el enfoque de Weierstrass, en sus cursos de 1871-1872 en la Universidad de Pisa y luego en sus *Fundamentos de la teoría de funciones de variable real* (Dini, 1878).

A partir de su aparición, el libro de Dini fue considerado por sus contemporáneos, entre ellos Cantor y Dedekind, como el primer tratado moderno de análisis. Esto es como la obra que mejor expresaba el estilo epistemológico y el ideal de rigor en la práctica matemática del análisis a finales del siglo XIX y comienzos del XX. Dini reveló a los ojos de la comunidad matemática un sentido nuevo de la importancia del *Teorema principal* de Weierstrass (*Hausptlehsatz*).

En su contribución a la publicación colectiva en memoria de Weierstrass, Hilbert expresa este consenso en los siguientes términos (citado en Hairer y Wanner, 1995):

Con este teorema, que establece que una función *continua* de una variable real alcanza realmente sus límites superior e inferior, es decir, que necesariamente posee un máximo y un mínimo, Weierstrass creó una herramienta que hoy en día es indispensable para todos los matemáticos que realizan las más refinadas investigaciones analíticas o aritméticas.

Hay algo que se debe destacar en la generalización operada por Dini del teorema de Weierstrass, teniendo en cuenta el modelo unificacionista de la explicación. Esta generalización

no solo tuvo implicaciones en la teoría de funciones y en el análisis en $\mathbb{R}$. También conllevó una cascada de generalizaciones en otros campos teóricos, en los que, como recuerda Hilbert, se convirtió en una herramienta indispensable para sofisticadas investigaciones. En la continuación de la cita anterior, Hilbert da como ejemplo la aplicación del TVE al cálculo de variaciones.

Recordemos que, desde su primera crítica al *Principio de Dirichlet* en 1870, Weierstrass había observado que, si bien Riemann sabía que la integral de Dirichlet estaba acotada por debajo, lo que garantizaba la existencia de un mínimo, daba por sentada la existencia de una función que alcanzaba el mínimo. Weierstrass dio un ejemplo de una función cuya integral tiene un límite inferior máximo que no es un valor mínimo (ver “Principio de Dirichlet” en: <https://academia-lab.com/enciclopedia/principio-de-dirichlet/>).

La formulación rigurosa del principio en términos de la versión extendida del TVE a funciones generalizadas (funcionales) contribuyó al desarrollo de los métodos directos del cálculo de variaciones y a la emergencia de un nuevo campo de las matemáticas: el análisis funcional. En cuanto a lo primero, se puede consultar el capítulo de la teoría de los máximos en el libro de Hadamard (1910) sobre el cálculo de variaciones, correspondiente a las lecciones de Hadamard en el *Collège de France*, recopiladas y redactadas por Fréchet.

Mencionemos de paso que en la redacción del capítulo de estas lecciones correspondiente a la extensión de la teoría clásica de valores extremos de una función de una y varias variables, Fréchet destaca la relevancia que le dio Hadamard en sus cursos al estudio de esta teoría, inspirándose en su tratamiento en los textos de análisis de Tannery, Humbert, Goursat y Jordan, así como en el álgebra de Serret.

La segunda referencia es el célebre artículo de Hadamard (1912) sobre el papel del cálculo de variaciones en el desarrollo del análisis funcional, en el que el maestro destaca la contribución original de su alumno, el joven Fréchet, junto a Volterra, Arzelà, Pincherle, Bourdel y otros. Guerraggio (2015) ha mostrado que la obra de Dini contribuyó a estimular, en particular en la escuela italiana de Volterra y en la francesa de Hadamard, los estudios de diferentes clases de funciones generalizadas mediante la extensión a ellas de propiedades significativas de las funciones reales.

En este contexto histórico de estímulo al desarrollo de prácticas progresivas de generalización y unificación de propiedades importantes del análisis y de la teoría de funciones, se explica la generalización, por primera vez, del TVE a los espacios abstractos por Fréchet (1904). Este es un caso significativo de que siempre hay un dominio de explicación causal que antecede la explicación deductivo-nomológica. La pregunta por el porqué del fenómeno de esta generalización “al límite” del TVE (aquello que Kitcher denomina “verdadera generalidad”) nos conduce a indagar en las transformaciones de las prácticas unificadoras precedentes que produjeron el fenómeno, es decir, en las interacciones entre saberes y técnicas causales (Salmon, 1984, 132).

Tanto en su nota de 1904 como en su tesis de 1906, Fréchet introduce la exposición formal mediante ciertas narrativas causales, con la intención evidente de ofrecer al lector una

explicación que justifique la originalidad y pertinencia de su trabajo. Por ejemplo, en (Fréchet, 1904) escribe:

Sabemos la importancia que tendría, en un gran número de problemas, saber si una cantidad U , que depende de ciertos elementos (puntos, funciones, etc.), alcanza efectivamente un mínimo en el campo considerado. El principio de Dirichlet ofrece una de las justificaciones más llamativas de esta observación...

Lector acucioso de los trabajos de Hadamard, Volterra, Arzelà y Pincherle (Guerraggio, 2015), Fréchet había reconocido que el TVE era aplicado como herramienta en la solución de un “gran número de problemas” que involucraban funciones de curvas, integrales, series, etc., con lo cual se *justificaba* la formulación y demostración del teorema a una clase de funcionales definidas sobre ciertos espacios de naturaleza cualquiera.

Generalización del TVE en la teoría de los espacios abstractos

Antes de explicar los argumentos inferenciales y causales que conducen a Fréchet a extender el teorema a un nivel superior, examinemos el libro de Dini (1878) para reconocer el patrón de generalización restringida al análisis real que emplea. El TVE aparece formalmente en el capítulo 7 del libro dedicado a la derivada de una función, bajo el siguiente enunciado:

Si una función de valor real f es continua en el intervalo cerrado y acotado $[a, b]$, f debe alcanzar un máximo y un mínimo al menos una vez. Es decir, existen números $c, d \in [a, b]$, tales que: $f(c) \geq f(x) \geq f(d)$ para todo $x \in [a, b]$.

Este teorema le sirve a Dini como herramienta para formular y demostrar enseguida el Teorema del Valor Intermedio (TVI) con un enunciado que, como veremos, se distingue de la expresión aritmética original de Bolzano:

Si una función es continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ y derivable en un intervalo abierto (a, b) , entonces existe un punto c dentro de (a, b) en el que la tangente a la curva en ese punto tiene la misma pendiente que la recta secante que une los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.

En otras palabras, la derivada de la función en ese punto c es igual a la tasa de cambio promedio de la función en el intervalo $[a, b]$.

El patrón actual que estructura la cadena inferencial de argumentos para la prueba del Teorema de Weierstrass en el análisis real se encuentra prefigurado en el curso de Dini. Es prácticamente el mismo que utiliza Fréchet en la generalización del TVE. Algunos de los enunciados explicativos $E_i(K)$ de los pasos de este patrón, siendo $K = \text{TVE}$, son los siguientes:

- Se prueba el teorema de las cotas: una función continua f en el intervalo cerrado $[a, b]$ es acotada en ese intervalo.
- Se encuentra una sucesión cuya imagen converge al supremo de f .
- Se muestra que existe una subsucesión que converge a un punto del dominio.
- Se utiliza la continuidad para demostrar que la imagen de la subsucesión converge al supremo.

Las condiciones y propiedades que intervienen en la prueba actual del TVE y que explican su carácter de teorema fundamental en el análisis, son las siguientes:

- 1) El Teorema de Bolzano-Weierstrass (TBW): para todo x de un intervalo cerrado y acotado existe una sucesión con una subsucesión que converge a x .

- 2) La definición de función secuencialmente continua: una función f es continua si para cualquier secuencia $\{x_n\}$ que converge a un punto a , la secuencia $\{f(x_n)\}$ converge a $f(a)$.
- 3) El teorema del supremo de Bolzano y la técnica de bisección que este introdujo, también conocida como propiedad de los intervalos encajonados.

Dini aplica el TBW en la demostración del TVE y atribuye la autoría a Weierstrass. Ciertamente, fue Weierstrass quien elevó esta propiedad a la categoría de teorema fundamental, con carácter independiente, en sus cursos de análisis de los años 1860. Pero no es menos cierto que, trabajando en relativo aislamiento en Bohemia, Bolzano utilizó este teorema como *lema auxiliar* en la demostración del TVI. Su enunciado en *forma aritmética* era el siguiente:

Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ y k es un número tal que $f(a) < k < f(b)$ o $f(b) < k < f(a)$, entonces existe un número c en el intervalo (a, b) tal que $f(c) = k$.

Con respecto a la *técnica de bisección* que Bolzano utiliza al final de su demostración y también en otros teoremas, consiste en construir un conjunto de intervalos encajonados cuyas longitudes tienden a cero (Dhombres, 1978, 217-218). Este proceso iterativo es esencialmente el mismo que Weierstrass emplea en la prueba del TVE y el que Dini restablece formalmente en su propia demostración.

Hemos aludido antes a la *forma aritmética* del enunciado del TVI en la memoria original de Bolzano (1817) y a su interpretación geométrica por parte de Dini (1878). Conviene recordar que previamente Cauchy había formulado el TVI en su *Cours d'Analyse* (1821), pero, en contravía del punto de vista predominantemente algebraico de su tratado, en este caso se limitó simplemente a *visualizar* la demostración mediante un argumento geométrico.

Como recuerda Dhombres (1978), esta práctica se hizo corriente incluso en los tratados más rigurosos de análisis alrededor de 1900. Pero ya desde su memoria de 1817, refiriéndose a la visualización geométrica empleada por Gauss para “demostrar” el Teorema Fundamental del Álgebra, Bolzano había alertado en los siguientes términos sobre la necesidad de no confundir ambos géneros:

No hay absolutamente nada que objetar, ni contra la exactitud ni contra la evidencia de este teorema geométrico. Pero es igualmente evidente que aquí hay una falta intolerable contra el buen método, falta que consiste en querer deducir las verdades de las matemáticas puras (o generales) (es decir, de la aritmética, el álgebra o el análisis) de consideraciones que pertenecen únicamente a una parte aplicada (o especial), a saber, la geometría.

Baste lo anterior para comprender las interrelaciones causales entre el TBW y el patrón demostrativo del TVE en el tratado de Dini. Otro tanto podría hacerse respecto de las propiedades (2) y (3) de este patrón. Hacia finales del siglo, los estudios de estas propiedades apuntaban a un mismo objeto que llamamos las *propiedades de la compacidad sobre la recta real*. A él se llegaba, sea por la vía del TBW (todo conjunto infinito acotado de $\mathbb{R}$ posee un punto de acumulación), sea bajo la forma del TVE (toda función continua sobre un compacto y acotada sobre el compacto, admite un máximo y un mínimo), o bajo la forma del Teorema de Heine-Borel-Lebesgue (se puede extraer un recubrimiento abierto finito de un recubrimiento abierto cualquiera de un compacto) (Dhombres, 1978)(Arboleda, 1984) (Hairer, 1995).

Fue Fréchet quien hizo posible comprender el fondo de esta unificación, al extender el TVE desde su origen inicial en la recta real a los espacios euclidianos y a los abstractos dotados

de la topología de convergencia de sucesiones de puntos. Con esta generalización de orden superior se hizo evidente, en particular, que la propiedad de un conjunto de R o R^n de ser acotado y cerrado es equivalente a la de ser compacto. Fréchet define en su tesis (1906) que un conjunto K de R o R^n es compacto si, para toda sucesión de elementos en K , existe una subsucesión que converge en K . Ahora sabemos que el TVE permite caracterizar los *conjuntos secuencialmente compactos*, también llamados conjuntos *Fréchet compactos*.

Veamos, a grandes rasgos, el procedimiento de generalización extendida del TVE que Fréchet llama *Teorema de Weierstrass* en su primera publicación sobre el tema (Fréchet, 1904; Arboleda, 1984), teniendo en cuenta la apropiación y el uso pedagógico que propone Scoville (2024) de esta fuente histórica primaria.

Suponemos dada una colección C de elementos arbitrarios (números, superficies, etc.), en la que sabemos distinguir entre ellos. Podemos decir que U es una *función uniforme* (u *operador funcional*) de un conjunto E de elementos de C , si a cualquier elemento A de E le corresponde un número bien determinado $U(A)$. Un ejemplo corriente de operador funcional es el siguiente: Sea $C^0[a, b]$ el conjunto de todas las funciones continuas sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Para cada $f \in C$, se define $U(f) := \max_{x \in [a, b]} \{f(x)\}$.

Fréchet pasa enseguida a definir el concepto de límite en un espacio abstracto para estudiar los funcionales continuos. Para obtener el concepto de continuidad de una función de este tipo, supondremos que disponemos de una definición de límite que cumple las siguientes dos condiciones:

- i. Si $A_n = A$, para $n = 1, 2, \dots$, entonces $\{A_n\}$ tiene como límite A .
- ii. Si $\{A_n\}$ tiene A como límite, entonces A_{k_n} tiene A como límite para toda subsucesión de $\{A_{k_n}\}$.

Con base en lo anterior, Fréchet utiliza la idea de límite de una sucesión de elementos para definir el límite de conjuntos:

Así pues, llamaremos *elemento límite* del conjunto E a un elemento A que es el límite de alguna sucesión de elementos distintos de E . Un conjunto E es *cerrado* si no contiene ningún elemento límite o si contiene sus elementos límite.

Luego define la continuidad de un operador funcional:

Ahora podemos decir que un operador funcional U sobre un conjunto cerrado E es *continuo* sobre E si los números $U(A_n)$ tienden siempre a $U(A)$ cuando cualquier sucesión de elementos de E : $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ tiene un límite A , independientemente del elemento límite A de E .

Por último, define el concepto de [*contablemente*] *compacto*:

Llamaremos *compacto* a cualquier conjunto E para el cual siempre existe al menos un elemento común para cada secuencia infinita de conjuntos $E_1, E_2, \dots, E_n, \dots$ contenidos en E , cuando éstos (que tienen al menos un elemento cada uno) son cerrados y cada conjunto está contenido en el anterior”.

Mediante las definiciones anteriores, llega inmediatamente a la generalización:

TEOREMA. Todo operador funcional U que es continuo en un conjunto contablemente compacto y cerrado E ... tiene al menos un límite superior.

Obsérvese que la explicación anterior de la generalización del TVE, que se encuentra en Fréchet (1904), es del tipo nomológico-deductivo. Pero en su tesis (1906), Fréchet agregará a la presentación de 1904 algunos comentarios que, en cierta medida, apuntan a la explicación causal del porqué de su generalización del teorema. Estas ideas se desarrollarán en publicaciones posteriores, concretamente en su obra sobre los espacios abstractos (Fréchet, 1928).

La cuestión ha sido estudiada en numerosos trabajos no necesariamente con las categorías filosóficas empleadas en este documento. En relación con nuestras propias investigaciones, el tratamiento del tema se ha realizado desde la perspectiva de utilizar los estudios histórico-filosóficos del análisis y la topología en la formación de profesores. Estos son algunos de los principales resultados: (Arboleda, 1982) sobre el enfoque metodológico de Fréchet en los comienzos de la topología general; (Taylor, 1982) sobre la contribución de Fréchet a la topología conjuntista y el análisis funcional en sus primeros trabajos; (Arboleda y Recalde, 2003) sobre las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general; (Arboleda, 2002) sobre las ideas filosóficas y epistemológicas de Fréchet en cuanto a la *desaxiomatización* de las Matemáticas; (Arboleda, 2017) sobre la constitución de la topología de las vecindades en la práctica matemática de Fréchet y Hausdorff; y la tesis de maestría en EM de la profesora Márquez-García (2018) sobre el concepto de topología en la tesis de Fréchet desde una perspectiva socioepistemológica.

Conclusiones

En este trabajo se ha tratado de aplicar la siguiente tesis del modelo unificacionista de la explicación, mencionada al inicio, al caso del TVG en análisis real y en los espacios abstractos:

El poder explicativo de las teorías científicas se destaca cuando revelan conexiones entre fenómenos que antes se consideraban inconexos. En el ámbito de las matemáticas ocurre lo mismo y es habitual reivindicar el enfoque “abstracto” de las matemáticas apelando a las conexiones que se revelan al estudiar disciplinas familiares como instancias de estructuras algebraicas generales.

Hemos examinado la argumentación inferencial de la prueba del TVE en el análisis real para comprobar que Dini unifica propiedades y técnicas que antes se agenciaban por separado en prácticas matemáticas con distintos objetivos: el estudio del principio de Dirichlet, la unicidad de la representación de una función por series, la convergencia uniforme, etc.

Por su parte, la generalización de Fréchet expresa las características esenciales del teorema; es decir, destaca su valor epistémico y su operatividad (medios efectivos de cálculo) en un nuevo campo teórico, el análisis funcional. Fréchet planteó la “verdadera generalidad” (Kitcher) del teorema, en el sentido de formular una comprensión profunda de su contenido y de descubrir la riqueza de nuevos puntos de vista y fenómenos ligados a esta profundidad. Así como el método de *aritmétización del análisis* introducido por Weierstrass implicó una superación con respecto a la práctica de “razonamiento genérico” prevaleciente hasta entonces en el análisis, de la misma manera, la práctica de generalidad de Fréchet se abriría a una nueva cultura o estilo epistemológico.

Mostramos que en la generalización de Fréchet emerge un nuevo objeto matemático: el concepto de compacto. Faltaría mostrar que, a partir de allí, Fréchet introduce el estudio de

nuevos objetos, por ejemplo, la clase de las funcionales u operadores compactos. También sienta las bases de un nuevo campo de investigación que se reveló muy prometedor a partir de los años 1920: la teoría de la compacidad en los espacios abstractos, especialmente en los espacios métricos (Arboleda, 1984).

Sin ahondar en detalles, nos parece que la explicación de la compacidad mediante una narrativa histórica con estas características tiene ventajas, aplicada adecuadamente en cursos de análisis para la formación inicial de profesores. Refiriéndose a la potencialidad de la FPM en la EM, Hamami (2020) la asocia con el propósito compartido de fortalecer el conocimiento matemático del profesor en el MKT (*Mathematics Knowledge for Teaching*). Esto es, un conocimiento especializado que va más allá del contenido disciplinar, abarcando el conocimiento matemático y el conocimiento didáctico del contenido. Este tipo de conocimiento rara vez se enseña en la formación matemática tradicional de los futuros licenciados.

Si se trata de explicar a estos estudiantes el porqué del TVG o la definición de compacto, podemos apelar en particular a los conceptos de “dialéctica herramienta-objeto” y “juego de cuadros” desarrollados por R. Douady (1984) en la didáctica de las Matemáticas. Pensamos que una presentación como la que hemos hecho permitiría comprender la forma dialéctica en que el concepto de compacto funciona primero como una herramienta para resolver problemas y luego se transforma en un objeto de estudio en sí mismo. El “juego de cuadros” sería el correlato cognitivo del concepto anterior en la acción didáctica. Este se refiere a la forma en que los estudiantes se desenvuelven en distintos marcos de referencia (contextos, representaciones) al resolver problemas sobre la compacidad.

Referencias y bibliografía

- Arboleda, L.C. (1982): Consideraciones metodológicas sobre el aporte de M. Fréchet à la topologie générale. *Actes du VI Congrès du groupement des mathématiciens d'expression latine*, Gauthier-Villars, Paris.
- Arboleda, L. C. (1984). Sobre los fundamentos de la teoría de los espacios compactos. *Asclepio*, 36, 123–157.
- Arboleda, L.C. et L.C. Recalde (1998): Las concepciones socioepistemológicas de Fréchet en sus investigaciones sobre la teoría de los espacios abstractos y la topología general. En Alsina, C. (et al.)(1998): *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Lectures*. (ICME-8, Sevilla, julio de 1996). Sevilla, SAEM Thales, 1-13.
- Arboleda, L. C. (2002). El problema didáctico y filosófico de la desaxiomatización de las matemáticas. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia*, 3(6-7), 59-84.
- Arboleda, L.C., Recalde, L.C. (2003). Fréchet and the Logic of the Constitution of Abstract Spaces from Concrete Reality. *Synthese*, 134, 245–272.
- Arboleda, L. C. (2017). Introducción de la topología de las vecindades en los trabajos de Fréchet y Hausdorff. *Revista de la Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 41(161), 528-537.
- Bottazzini, U. (2018). All'origine della teoria degli insiemi di Cantor. *Matematica, Cultura e Società. Rivista dell'Unione Matematica Italiana*, 3, 179-191.
- Cantor, G. (1870). Über einen die trigonometrischen Reihen betreffenden Lehrsatz. *Journal re. Angew. Math.* 72, pp. 130-138. En G. Cantor. (1932). *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*. Zermelo, E. (Ed.) Springer, 71-79.
- Dhombres, J. (1978). *Nombre, mesure et continu: épistémologie et histoire*. Publication de l'IREM de Nantes. Cedric/Nathan, Paris.
- Dini, U. (1878). *Fondamenti per la Teorica delle Funzioni di Variabili Reali*. T. Nistri e C. Pisa.
- Douady, R. (1984). *Jeu de cadres et dialectiques outil-objet dans l'enseignement des Mathématiques. Une réalisation dans tout le cursus primaire*. Histoire et perspectives sur les mathématiques. Université Paris VII.
- Dugac, P. (2003). *Histoire de l'analyse moderne: deux siècles de renouveau des mathématiques*. Vuibert. Paris.
- Fréchet, M. (1904). Généralisation d'un théorème de Weierstrass. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 139, 848-850.

- Fréchet, M. (1906): Sur quelques points du calcul fonctionnel. *Rendiconti del Circolo matematico di Palermo*, 13, 1-74.
- Fréchet, M. (1928): *Les Espaces Abstraits et leur théorie considérée comme Introduction à l'Analyse Générale*. Paris, Gauthier-Villars.
- Guerraggio, A., Jaeck, F., and Mazliak, L. (2015). *Lines on the Horizon: Hadamard and Fréchet, readers of Volterra*. Sorbonne University. Pré-Publication. Hal-01214243.
- Hadamard, J. (1910). *Leçons sur le calcul des variations*. Recueillies par M. Fréchet. Hermann, Paris.
- Hamami, Y. y Morris, R. L. (2020). Philosophy of mathematical practice: a primer for mathematics educators. *ZDM Mathematics Education*, 52, 1113-1126.
- Hairer, E. & Wanner, G. (1995). *Analysis by Its History*. Springer, New York.
- Khalifa, K. (2017). *Understanding, Explanation, and Scientific Knowledge*. Cambridge University Press.
- Kitcher, P. (1975). Bolzano's Ideal of Algebraic Analysis. *Studies In History and Philosophy of Science*, 6, 229–269.
- Kitcher, P. (1989). Explanatory Unification and the Causal Structure of the World. En P. Kitcher y W. C. Salmon (Eds.), *Scientific Explanation*. University of Minnesota Press, Minnesota, 410-505.
- Mancosu, P., Jorgensen, K. F. & Pedersen, S. S. (Eds.) (2005). *Visualization, Explanation, and Reasoning Styles in Mathematics*. Springer.
- Márquez-García, Gabriela. (2018). Topología en los inicios de la teoría de conjuntos abstractos de Fréchet. Tesis de maestría en Matemática Educativa. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. México.
https://www.academia.edu/48912300/Una_problematizaci%C3%B3n_del_concepto_de_topolog%C3%ADa_en_los_inicios_de_la_teor%C3%ADa_de_conjuntos_abstractos_de_Fr%C3%A9chet
- Serret, J.-A. (1868). *Cours de calcul différentiel et intégral*. Vol. 1. Gauthier-Villars, Paris.
- Scoville, N. A. (2024). A Compact Introduction to a Generalized Extreme Value Theorem. *MAA Convergence*.
<https://old.maa.org/press/periodicals/convergence/a-compact-introduction-to-a-generalized-extreme-value-theorem-a-mini-primary-source-project-for>.
- Taylor, A. E. (1982): A study of Maurice Fréchet I: His early works on point set theory and the theory of functionals. *Archive for History of Exact Sciences*, 27, 233 – 295.
- Weber, K. & Inglis, M. (2024). Mathematics Education Research on Mathematical Practice. En B. Sriraman (Ed.). *Handbook of the History and Philosophy of Mathematical Practice*. Springer, 2637-2663.



Entre la duda y la certeza, la tecnología digital es el eslabón

Eduardo **Basurto Hidalgo**

Benemérita Escuela Nacional de Maestros y Universidad La Salle México

México

eduardo.basurto@aeefcm.gob.mx,

Resumen

En esta conferencia paralela presentaremos algunos ejemplos de orquestación instrumentada de herramientas digitales que permiten potenciar el desempeño en Matemáticas de los estudiantes, intentando, entre otras cosas, transitar por emociones epistémicas como la duda y la certeza. Por medio de algunos casos llevaremos a los participantes de dudas a una mayor certeza sobre los procesos y resultados involucrados con los objetos matemáticos con los que conviven en clases, además de tener la posibilidad de alterar el modelo de comunicación y con esto mantener pública su producción, facilitando así un clima de debate, contrastación de ideas y procesos; al mismo tiempo es factible mantener privada su persona hasta que ellos así lo deseen, esto, entre otras ventajas ayuda a los estudiantes a arriesgarse sin temor a ser exhibidos, otorgando una ventaja actitudinal a la enseñanza de las Matemáticas vía la implementación de tecnología digital gratuita.

Palabras clave: Duda, certeza, tecnología digital, emociones epistémicas.

Introducción

La experiencia de aprender Matemáticas no es únicamente un ejercicio cognitivo; está profundamente entrelazada con dimensiones afectivas, entre las que destacan las emociones epistémicas como la duda y la certeza. Estas emociones, que emergen en la interacción con el conocimiento y los procesos de validación del saber, juegan un papel crucial en la construcción del pensamiento matemático. Para Muis (2015), las emociones epistémicas son identificadas aquellas que surgen específicamente en contextos donde se busca comprender, justificar o evaluar el conocimiento, y tienen un impacto directo en la motivación, la autorregulación y el rendimiento académico.

En Matemáticas, la duda no debe ser vista como un obstáculo, sino como una oportunidad cognitiva: un estado de apertura que invita a la indagación, al cuestionamiento y al refinamiento de ideas. Por otro lado, la certeza cumple una función fundamental al brindar seguridad en los resultados, lo cual permite avanzar hacia nuevos desarrollos conceptuales. Esta interacción dinámica entre la duda y la certeza puede considerarse como una fuerza impulsora del pensamiento matemático, una especie de motor epistémico (Freitas & Sinclair, 2012).

Desde esta perspectiva, las tecnologías digitales como los programas de geometría dinámica, los sistemas de álgebra computacional, los entornos de programación o las plataformas interactivas se perfilan como mediadores clave en el paso entre la incertidumbre y la convicción.

Estas herramientas no solo permiten múltiples formas de representación y ofrecen retroalimentación inmediata, sino que también crean espacios de exploración donde los estudiantes pueden formular y poner a prueba sus propias conjeturas. Gracias a los entornos digitales, es posible obtener evidencia visual o simbólica que fortalece la comprensión. Tal como indican Hoyles y Noss (2009), las tecnologías digitales no solo modifican la forma en que los alumnos se relacionan con las Matemáticas, sino también influyen en su vínculo emocional y epistémico con el conocimiento.

Por tanto, cerrar la distancia entre la duda y la certeza no significa erradicar la duda, sino aprender a convivir con ella de manera constructiva. Esto requiere diseñar experiencias de aprendizaje que reconozcan esa emoción, la acojan y la transformen. En este sentido, este trabajo examina cómo las herramientas digitales pueden facilitar esa transición, fomentando prácticas matemáticas que integren los aspectos afectivos, cognitivos y tecnológicos en una experiencia educativa más completa y enriquecedora.

Perspectiva teórica

Las emociones epistémicas en el aprendizaje matemático.

Aunque comúnmente se consideran un campo de certezas absolutas, las Matemáticas encierran una dimensión emocional compleja que acompaña la construcción del conocimiento. Las emociones epistémicas —como la duda, la curiosidad, la confusión y la certeza— no solo condicionan la actitud del estudiante frente a las tareas matemáticas, sino que también están profundamente implicadas en los procesos de razonamiento, descubrimiento y validación (Muis, Pekrun, Sinatra, Azevedo, & Trevors, 2015).

La duda epistémica surge cuando el sujeto se enfrenta a situaciones inesperadas, contradicciones o desafíos que ponen en tensión sus conocimientos previos. Esta experiencia, aunque puede generar incomodidad o ansiedad, también actúa como un detonante de reflexión crítica, reorganización conceptual y búsqueda activa de evidencias. Sfard (2008) señala que esta forma de inestabilidad cognitiva es esencial para un aprendizaje profundo en Matemáticas, ya que obliga a revisar creencias y a establecer nuevas conexiones.

En contraste, la certeza epistémica cumple una función estabilizadora. Lejos de representar una verdad definitiva, esta certeza se construye provisionalmente sobre la base de la lógica, la

experiencia o las evidencias disponibles, y permite al estudiante validar procedimientos y avanzar hacia nuevos aprendizajes (Yackel & Cobb, 1996).

Así, el recorrido entre la duda y la certeza es inherente al quehacer matemático. Se duda para abrir caminos de exploración, se alcanza una certeza para consolidar avances, y se vuelve a dudar frente a nuevos desafíos que impulsan el pensamiento hacia horizontes más amplios.

Este ciclo dinámico exige entornos educativos que no penalicen la duda, sino que la valoren como parte constitutiva del pensamiento matemático.

Rigo & Martínez (2017), han propuesto un instrumento para distinguir estados epistémicos de certeza y presunción o duda como se muestran a continuación:

Tabla 1.
Estados epistémicos de certeza y presunción de duda.

Elementos del habla	La persona recurre a enfatizadores del lenguaje que pueden revelar un mayor grado de compromiso con la verdad de lo que dice, por ejemplo, cuando la persona usa el modo indicativo de los verbos (e.g., tengo).
Acción	El sujeto realiza acciones consecuentes con su discurso.
Familiaridad	La persona recurre a esquemas epistémicos basados en la familiaridad (resultado de la repetición, la memorización y las costumbres).
Determinación	La persona manifiesta de manera espontánea y determinada su adhesión a la veracidad de un enunciado matemático indicando algún grado de determinación. Este grado puede ser mayor cuando el sujeto sostiene una creencia, a pesar de tener al colectivo en su contra. Incluso puede llegar a esforzarse por convencer a otros de la verdad de su posición.
Interés	Las participaciones de una persona que interviene con interés en torno a un hecho matemático específico en un foro virtual son: -Sistemáticas. Es decir, el sujeto contesta todas las preguntas dirigidas a él de la manera más detallada posible. -Informativas. Sus afirmaciones, procedimientos y/o resultados son suficientemente informativos. -Claros y precisos.
Consistencia	La persona muestra consistencia en sus distintas intervenciones.

Fuente: Rigo & Martínez (2017)

Dentro de las actividades del minicurso, esperamos poder transitar por algunos de estos estados a fin de vivenciar este paso entre la duda y la certeza que nos hace conscientes de lo relevante que es trabajo de instrumentación didáctica por parte de los docentes.

La tecnología digital como mediadora entre la duda y la certeza.

En el ámbito del aprendizaje matemático, la incorporación de herramientas digitales no solo ha ampliado los recursos pedagógicos disponibles, sino que también ha influido significativamente en las formas en que los estudiantes piensan y sienten respecto al conocimiento matemático. En particular, los entornos digitales interactivos —como los programas de geometría dinámica (por ejemplo, GeoGebra), los sistemas de álgebra computacional, los lenguajes de programación educativa y las plataformas de visualización—

ofrecen modos novedosos de representación, exploración y retroalimentación, que transforman tanto la experiencia cognitiva como la emocional del estudiante.

Uno de los beneficios centrales de estas tecnologías radica en su capacidad para hacer visibles procesos abstractos, favoreciendo así una comprensión más profunda. Al permitir la verificación de hipótesis, la experimentación con diferentes estrategias y el acceso a retroalimentación inmediata, estos entornos convierten la duda en una instancia productiva, más que en un impedimento. Tal como indican Hoyles y Lagrange (2010), las herramientas digitales promueven una participación del estudiante en la construcción del conocimiento matemático, al ofrecer recursos visuales o simbólicos que contribuyen a disminuir la incertidumbre y a modular sus emociones epistémicas.

En este contexto, los estudiantes dejan de depender exclusivamente del juicio externo del docente y comienzan a desarrollar convicción propia mediante la manipulación directa y la observación de objetos matemáticos dinámicos. Esto redefine el sentido de la certeza: ya no se trata de una meta fija, sino de un proceso gradual que se construye a través de la exploración continua, la argumentación y la revisión crítica (Sinclair & Robutti, 2013).

Finalmente, cuando estas tecnologías se integran de manera intencional y reflexiva por parte del docente, adquieren el carácter de dispositivos epistémicos. En este rol, no solo asisten en la resolución de problemas, sino que también participan activamente en la construcción de significados matemáticos.

Desde esta perspectiva, la tecnología no es neutra ni auxiliar, sino parte constitutiva del ambiente de aprendizaje donde se negocian las emociones epistémicas. Como plantea Borba y Villarreal (2005), existe una co-construcción del conocimiento entre sujeto, otros y artefactos, lo que implica reconocer el papel activo de la tecnología en la dinámica emocional del pensamiento matemático.

Artigue (2002) menciona que un instrumento se diferencia del artefacto físico que lo origina por ser “una entidad mixta, parte artefacto y parte proyectos cognitivos los cuales lo hacen un instrumento” (p.253). La conversión del artefacto en instrumento involucra una evolución en los diferentes usos del artefacto. Este proceso es llamado génesis instrumental.

El proceso de génesis instrumental según Artigue (2002) se desarrolla en dos direcciones:

La primera se enfoca hacia el artefacto, asimilando progresivamente sus potencialidades y limitaciones, transformándolas para usos específicos. Esta parte es conocida como: instrumentalización del artefacto.

La segunda se dirige al sujeto, principalmente a la apropiación de planes de acción instrumentada los cuales eventualmente tomarán forma de técnicas instrumentadas que permitan dar respuestas a tareas: instrumentación.

El siguiente esquema retomado de Guin y Trouche (1999) intenta esquematizar el proceso de génesis instrumental.

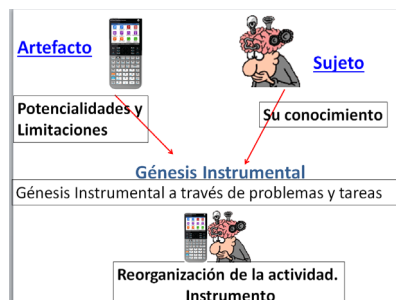


Figura 1. Esquema del proceso de génesis instrumental

Menciona Santos (2007) que “El método inquisitivo se refiere a la importancia de que los estudiantes desarrollen la comprensión del conocimiento matemático a partir de la identificación de dilemas y la formulación de preguntas que se representan y exploran en términos de recursos y estrategias matemáticas.”

Este uso constante de herramientas computacionales permite a los estudiantes construir representaciones dinámicas de los conceptos y problemas matemáticos, lo cual resulta importante para realizar exploraciones, reconocer conjeturas y eventualmente proponer argumentos que las justifiquen o soporten.

La cita anterior refleja la esencia del enfoque actual de muchas currícula de Matemáticas en diversos países, ya que, en todos ellos, este ciclo de visualizar, reconocer, examinar, argumentar, y comunicar resultados son procesos fundamentales del quehacer de la disciplina que los estudiantes deben practicar sistemáticamente. Ahora bien, estos ciclos pueden ser enriquecidos de manera sustancial con la ayuda de herramientas de tecnología digital.

En suma, la tecnología digital puede cerrar la brecha entre duda y certeza, no eliminando la duda, sino transformándola en un recurso generativo, y al mismo tiempo brindando condiciones para alcanzar certezas parciales, revisables y argumentadas, propias del quehacer matemático.

Casos para revisar en la conferencia

Partiremos de un problema que se irá complejizando cada vez más al tiempo que se irán incorporando herramientas de tecnología digital que permitan ir mediando de la duda a la certeza.

Primer momento:

Planteamiento de un problema clásico relacionado con el Teorema de Pitágoras (Figura 2):

**Si el lado del cuadrado de la base es de una unidad de longitud
¿Cuánta área cubren los cuadrados de la figura?**

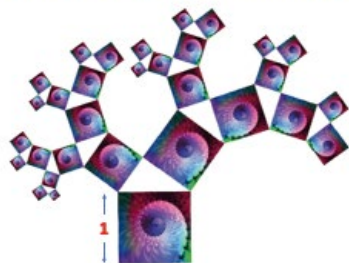


Figura 2. Problema inicial, sin uso de TIC

La discusión sobre el resultado y procesos de arribo a la certeza del resultado se realizará sin uso de tecnología digital.

Segundo Momento:

Se propondrá una imagen nueva poco común del mismo problema, pero llevada a otro terreno (Figura 3):



*Figura 3. Fractal árbol de Pitágoras, de Hartmut Skerbisch.
Jardín de la iniciativa cultural Kunstgarten, Graz, Austria.*

En este momento es donde el convencimiento y la búsqueda de certeza sobre los procesos y resultados harán necesario la emergencia del uso de tecnología digital, ya que surgirán elementos de duda sobre afirmaciones no verdaderas como $a^3+b^3=c^3$?

El entorno será una orquestación tecnológica colectiva por medio de GeoGebra Classroom, en donde avanzaremos por el análisis bidimensional de la situación, a la perspectiva tridimensional de la construcción (figura 4)

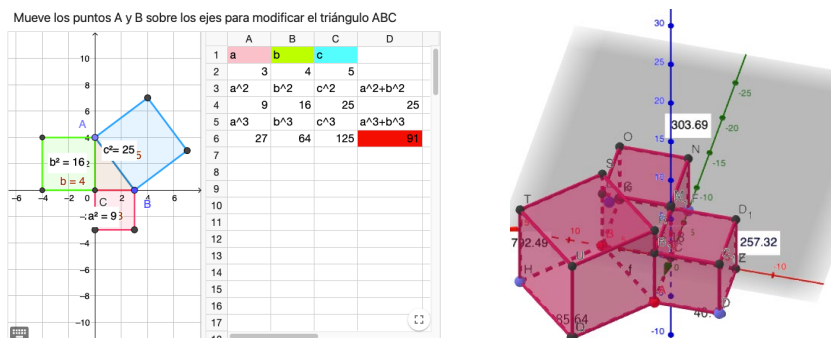


Figura 4. Exploraciones de la situación en GeoGebra Classroom

Tercer Momento:

La idea es llegar, en la medida de lo posible a una formalización con elementos de certeza en lo que se involucre el lenguaje matemático bajo un convencimiento paulatino, trabajado en los momentos anteriores (Figura 5)

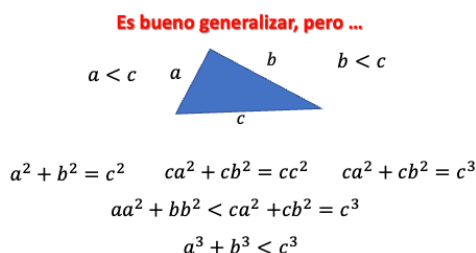


Figura 5. Problema tratado desde una perspectiva algebraica.

Conclusiones

La práctica de la docencia en Matemáticas, lejos de ser un camino exclusivamente lógico-formal, se manifiestan como una práctica profundamente humana, atravesada por emociones epistémicas como la duda y la certeza. Reconocer estas emociones en el aula no implica debilitamiento del rigor matemático, sino reconocer las condiciones afectivas necesarias para sostener procesos de comprensión, argumentación y construcción de conocimiento.

La duda manifestada en los estudiantes y docentes, lejos de ser un síntoma de debilidad cognitiva, constituye un motor epistémico, especialmente en el aprendizaje matemático, donde lo incierto y lo contraintuitivo son frecuentes. La certeza, por su parte, no es una meta final ni una verdad inamovible, sino un estado transitorio de confianza construida, que permite avanzar hacia nuevos desafíos. El tránsito entre ambas emociones no ocurre de forma automática, sino que requiere ambientes de aprendizaje que las reconozcan, validen y contengan.

Las tecnologías digitales emergen como aliadas potentes para mediar este tránsito emocional e intelectual. Al ofrecer representaciones dinámicas, retroalimentación inmediata y espacios de exploración autónoma, las herramientas digitales permiten transformar la duda en oportunidad y sostener procesos de construcción de certeza fundamentada. Sin embargo, esta potencialidad no reside en la tecnología por sí misma, sino en su uso didáctico bien orquestado e intencionado: Es la mediación docente la que da sentido a la experiencia digital.

Para la práctica docente, esto implica diseñar experiencias que no eviten la duda, sino que la incorporen como parte del aprendizaje, y que integren herramientas tecnológicas que favorezcan la visualización, el ensayo, la comparación y la argumentación. También exige formación docente continua que permita desarrollar competencias no solo técnicas, sino también epistémicas y afectivas, para acompañar a los estudiantes en su trayecto entre lo incierto y lo comprensible.

Finalmente, se abren líneas fértiles para la investigación en Educación Matemática: ¿Cómo se manifiestan las emociones epistémicas en distintos niveles escolares y contextos socioculturales? ¿Qué configuraciones didácticas promueven un tránsito productivo entre duda y certeza? ¿Qué papel juegan las tecnologías emergentes como la inteligencia artificial o la realidad aumentada en este proceso? Explorar estas preguntas permitirá seguir ampliando una visión más humana, integral y tecnológicamente situada de la Educación Matemática contemporánea.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (2002). Learning Mathematics in a CAS Environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 7(3), 245 – 274.
- Arzarello, F. (2004). Mathematical landscapes and their inhabitants: perceptions, languages, theories. Plenary Lecture delivered at the ICME 10 Conference. Copenhagen, Denmark. July 4-11.
- Barbara B y Luque, J. (2014). *Great Teachers: How to Raise Student Learning in Latin America and the Caribbean*. World Bank Group.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, visualization and experimentation*. Springer.
- De Freitas, E., & Sinclair, N. (2012). Diagram, gesture, agency: Theorizing embodiment in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 80(1-2), 133–152.
- D'Amore, B. (2001) Une contribution au débat sur les concepts et les objets mathématiques: la position <<naïve>> dans une théorie <<réaliste>> contre le modèle <<anthropologique>> dans une théorie <<pragmatique>>. En A. Gagatsis (Ed), *Learning in Mathematics and Science and Educational Technology* (Vol. 1, pp. 131-162).
- Duval, R. (1998). Signe et objet, I et II. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg, 6, 139-196.
- Godino, J. D; y Batanero, C. (1999). The meaning of mathematical objects as analysis units for didactic of mathematics. Paper presented at the *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research Mathematics Education*.
- Guin, D y Trouche, L. (1999). The complex process of converting tools into a mathematical instruments: The case of calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* 3(3), 195 – 227.
- Hoyle, C., & Lagrange, J.-B. (Eds.). (2010). *Mathematics education and technology: Rethinking the terrain*. Springer.
- Hoyle, C., & Noss, R. (2009). The technological mediation of mathematics and its learning. *Human Development*, 52(2), 129–147.
- Lopez, Elia & Bisquerra, Rafel. (2023). Emociones epistémicas: Una revisión sistemática sobre un concepto con aplicaciones a la educación emocional. *Revista Internacional de Educación Emocional y Bienestar*. 3. 35-60. 10.48102/rieeb.2023.3.2.58.
- Muis, K. R., Pekrun, R., Sinatra, G. M., Azevedo, R., & Trevors, G. (2015). The role of epistemic emotions in learning and achievement. In S. Joseph (Ed.), *Positive psychology in practice: Promoting human flourishing in work, health, education, and everyday life* (2nd ed., pp. 219–236). Wiley.
- Sfard, A. (2008). *Thinking as communicating: Human development, the growth of discourses, and mathematizing*. Cambridge University Press.

- Sinclair, N., & Robutti, O. (2013). Technology and the role of proof: The case of dynamic geometry. In M. Körner & E. Knipping (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 161–186). Springer.
- Rubin, A. (2000). *Technology meets math education: Envisioning a practical future forum on the future of technology in education*. En <http://www.air-dc.org/forum/abRubin.htm>
- Rigo, M & Martínez, B. (2017). Epistemic States of Convincement. A Conceptualization from the Practice of Mathematicians and Neurobiology. *Understanding Emotions in Mathematical Thinking and Learning*, p. 97-131.
- Santos, M. (2007). *Resolución de problemas matemáticos. Fundamentos cognitivos*. México: Trillas.
- Vérillon, R. y Rabardel, G. (1995). Cognition and artifacts: A contribution to the study of thought in relation to instrumented activity. *European Journal of Psychology of Education* 10(1), 77 -101.
- Yackel, E., & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4), 458–477.



Estudio de Clases en la formación de docentes de Matemáticas: Aprendizajes de una experiencia práctica e investigativa

Omar Hernández Rodríguez

Facultad de Educación, Universidad de Puerto Rico

Puerto Rico

omar.hernandez@upr.edu

Resumen

El Estudio de Clases (Lesson Study) es una metodología de desarrollo profesional de maestros de origen asiático que, por sus resultados promisorios, ha comenzado a incorporarse en la formación de maestros. Comparto los aprendizajes obtenidos al participar en un proyecto de investigación centrado en la implantación del Estudio de Clases en la formación de maestros de Matemática a nivel secundario en Puerto Rico. Abordo el contexto institucional, la integración del Estudio de Clases en un curso universitario y su implantación en el centro de práctica. Destacaré aprendizajes en cuanto al uso de la tecnología, la secuencia curricular y los cambios en los roles de los profesores y los supervisores de práctica (docentes cooperadores). En cuanto a los procesos investigativos, describiré la forma en que utilizamos la Teoría Histórico Cultural de la Actividad de Engeström y el Enfoque Documental de la Didáctica de Gueudet, Trouche y colaboradores.

Palabras clave: Estudio de Clases, Lesson Study, Formación de docentes, Métodos de investigación

Introducción

La formación de docentes de Matemáticas es un proceso complejo que requiere integrar conocimientos matemáticos profundos con habilidades pedagógicas específicas para la enseñanza. Existe consenso entre investigadores y especialistas en educación sobre la importancia de la práctica como un componente esencial en la formación docente (Ball et al., 2005; Shulman, 1986). No basta con que los futuros maestros conozcan los conceptos matemáticos; también deben desarrollar la capacidad de enseñar de manera efectiva, adaptando

su enseñanza a las necesidades y contextos particulares de sus estudiantes. Por ello, vincular la teoría con la práctica es un desafío permanente, y es vital que los docentes en formación tengan oportunidades para reflexionar sobre sus propias experiencias, analizar sus decisiones pedagógicas y ajustarlas a partir de evidencias en el aula (García Cabrero et al., 2008).

Diversas investigaciones resaltan que la formación docente debe incorporar experiencias auténticas que permitan a los futuros maestros confrontar situaciones reales y desarrollar su capacidad de análisis y reflexión (Grossman et al., 2009). Estas experiencias incluyen la elaboración de planes de clase, la práctica supervisada en escuelas, el análisis de videos de clases y la reflexión guiada sobre estas actividades (Aghakhani et al., 2023). En este sentido, la práctica supervisada es un espacio privilegiado donde se concreta el vínculo entre la teoría aprendida en los cursos metodológicos y la experiencia directa con estudiantes.

En Puerto Rico, los programas de formación de docentes enfrentan retos particulares que dificultan la efectiva integración de teoría y práctica. Uno de estos retos es la persistencia del “aprendizaje por observación” descrito por Lortie (1975), donde los futuros docentes tienden a replicar las prácticas tradicionales que experimentaron como estudiantes, muchas veces sin cuestionar ni analizar críticamente esas estrategias. Además, aunque las prácticas clínicas supervisadas por maestros cooperadores son esenciales para el desarrollo profesional, frecuentemente están desalineadas con los cursos de metodología ofrecidos en las universidades, lo que genera tensiones para los estudiantes que reciben mensajes contradictorios sobre cómo enseñar. Zeichner y Tabachnick (1981) señalaron que los docentes en formación suelen considerar sus experiencias clínicas como más válidas y relevantes que los conocimientos transmitidos en los cursos de métodos, lo cual puede limitar la integración de conocimientos teóricos más actuales o fundamentados.

Por otra parte, estas prácticas clínicas suelen programarse en etapas tardías del currículo, limitando el tiempo para que los futuros docentes reflexionen sobre sus experiencias y realicen conexiones significativas entre la teoría y la práctica. Esta falta de articulación puede resultar en prácticas docentes poco innovadoras o desconectadas de los avances en pedagogía matemática.

Para atender estas problemáticas y mejorar la formación de docentes de Matemáticas en Puerto Rico, entre los años 2018 y 2022 un equipo de profesores de la Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras (UPRRP), y la Universidad de Illinois en Urbana-Champaign desarrolló un proyecto colaborativo financiado por la Fundación Nacional de las Ciencias (NSF, por sus siglas en inglés). Este proyecto buscó cerrar la brecha entre los cursos de metodología y las prácticas clínicas mediante el desarrollo del conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenido (TPACK) de los futuros docentes de Matemáticas de nivel secundario.

El proyecto, titulado *Developing Technological Pedagogical Content Knowledge of Pre-Service Math Teachers by Enhancement of a Methods Course Using Instrumental Orchestration and Lesson Study Strategies* [Desarrollo del conocimiento tecnológico y pedagógico de los docentes de Matemáticas en formación mediante la mejora del curso de metodología utilizando la orquestación instrumental y el Estudio de Clases] tuvo como objetivo principal fortalecer las competencias de los futuros maestros para integrar tecnología y pedagogía en su enseñanza de las Matemáticas. Se enfocó en promover el uso de tecnologías interactivas que permitieran a los

estudiantes expresar sus ideas matemáticas mediante múltiples formas de representación, facilitando la comunicación, la argumentación y la reflexión en el aula.

Para lograrlo, se empleó la plataforma Desmos Activity Builder (Desmos), una herramienta gratuita y de código abierto que permite a los profesores crear actividades matemáticas interactivas, con funcionalidades similares a las calculadoras graficadoras y a los programas de geometría dinámica, además de ofrecer capacidades para monitorear el progreso estudiantil en tiempo real y facilitar la retroalimentación y la discusión.

La implementación del proyecto contempló tres actividades fundamentales: Primero, se rediseñó el curso *EDPE 4030 - Manipulativos y tecnología en matemáticas secundarias*, un curso obligatorio para los futuros docentes en su tercer año de formación. El rediseño incorporó los principios de la descomposición de la práctica (Grossman et al., 2009), estrategias del Estudio de Clases (Lewis y Hurd, 2011), la orquestación instrumental (Trouche, 2004), la proficiencia matemática (Kilpatrick et al., 2001), y el uso de la tecnología de interconectividad a través de Desmos. Además, se integraron experiencias de campo que permitieron a los estudiantes pudieran poner en práctica sus aprendizajes, enseñar una lección, reflexionar sobre su práctica y volver a impartir la lección a otro grupo de estudiantes. Segundo, se creó un espacio híbrido de colaboración (Zeichner, 2010), donde futuros docentes, maestros cooperadores, investigadores y asistentes de investigación compartieron conocimientos y experiencias, fomentando la construcción colectiva de saberes que enriquecieran la práctica de la Educación Matemática. Tercero, se integró el Estudio de Clases (Lesson Study) como una estrategia central para fomentar el trabajo colaborativo entre maestros cooperadores y futuros docentes. En este enfoque, grupos de docentes con intereses comunes se reúnen para analizar el currículo, los contenidos y las dificultades de aprendizaje de los estudiantes, con el fin de diseñar, enseñar y mejorar una lección denominada lección de investigación. La enseñanza se centra en observar el aprendizaje de los estudiantes más que en evaluar al maestro, promoviendo la reflexión y la mejora continua de la práctica (Selezniov, 2019).

El proyecto inició formalmente en 2019 tras la aprobación de la Fundación Nacional de las Ciencias (NSF, por sus iniciales en inglés)¹ y fue adjudicado a la Dra. Gloriana González de la Universidad de Illinois y a los Dres. Wanda Villafañe Cepeda y Omar Hernández Rodríguez de la Universidad de Puerto Rico. Durante la etapa preparatoria se rediseñó el curso, se elaboraron los instrumentos para la recolección de datos, se organizaron talleres para maestros cooperadores y las asistentes de investigación, y se estableció el espacio híbrido de colaboración. Los talleres abordaron temas como la aproximación a la práctica docente, el Estudio de Clases, la proficiencia matemática, la orquestación instrumental y el uso de Desmos.

La implementación del curso rediseñado se realizó en los semestres de 2020 y 2021, con sesiones de Estudio de Clases donde equipos conformados por maestros cooperadores y futuros docentes diseñaron, desarrollaron y enseñaron lecciones dirigidas a estudiantes de séptimo a noveno grado. Cada maestro cooperador lideraba un equipo que enseñaba la misma lección a varios grupos, permitiendo la revisión y mejora continua. Durante esta etapa, se recopilaron

¹ Las ideas presentadas en este artículo son propias del autor y no reflejan necesariamente los puntos de vista de la NSF o la UPRRP.

grabaciones de video de las clases, talleres y sesiones de Estudio de Clases para su posterior análisis.

El proyecto enfrentó el desafío adicional de la pandemia COVID-19 en 2020, que obligó a pasar a la educación a distancia. Gracias a la infraestructura tecnológica creada, fue posible adaptar la enseñanza y continuar con las actividades planificadas. Al reanudarse la modalidad presencial en 2021, se mantuvieron muchas de las herramientas desarrolladas para la educación remota.

Los resultados del proyecto han sido presentados en congresos y publicados en revistas académicas, abordando diversas preguntas de investigación relacionadas con la documentación en Estudio de Clases, la participación y liderazgo de maestros cooperadores, y el desarrollo profesional de los futuros docentes (González et al., 2023, 2024; Hernández-Rodríguez et al., 2021a, b, 2023).

Aprendizajes

Hacer una lista de aprendizajes es una tarea compleja. En primer lugar, porque cada uno ha sido esencial en su momento; en segundo, porque no siempre se les reconoció plenamente cuando ocurrieron. A pesar de esto, quisiera destacar la relevancia de armonizar las culturas institucionales de las entidades participantes en el proyecto: la UPRRP, la Universidad de Illinois, la Facultad de Educación y la Escuela Laboratorio. Incluso organizaciones externas, como casas editoras de libros de texto y proveedores de tecnología e internet, influyeron en la implementación del proyecto.

En cuanto a la operacionalización, cada clase y cada equipo de Estudio de Clases desarrolló su propia dinámica e identidad. A continuación, presento algunos aprendizajes clave relacionados con el uso de la tecnología, el Estudio de Clases, la Teoría Histórico-Cultural de la Actividad de Engeström y el Enfoque Documental de lo Didáctico de Gueudet, Trouche y colaboradores.

Uso de la tecnología

Al comenzar la segunda fase del proyecto, indagamos las creencias y conocimientos tecnológicos de los futuros docentes matriculados en el curso *EDPE 4030*. Nuestro objetivo era conocer sus experiencias previas con herramientas digitales aplicadas a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, así como su percepción sobre su valor en su formación profesional (Choque-Dextre et al., 2020).

Los participantes eran jóvenes entre 20 y 24 años. Un 45 % provenía de escuelas privadas y un 55 % de escuelas públicas. La mayoría (82 %) había comenzado sus estudios en la Facultad de Educación, mientras que el resto (18 %) provenía de la Facultad de Administración de Empresas. Su tiempo de permanencia en la universidad oscilaba entre tres y seis años.

La recopilación de datos se realizó mediante un cuestionario en línea y entrevistas individuales. Aunque todos los participantes pertenecen a una generación que ha crecido en

plena era digital, los datos mostraron que, en sus experiencias escolares, no habían utilizado tecnología de forma significativa para aprender Matemáticas. En la mayoría de los casos, la herramienta más común en el aula fue la calculadora básica, usada principalmente para operaciones aritméticas. Este hallazgo coincide con las observaciones de Sacristán (2017), quien señala que el uso de tecnología en el aula de Matemáticas, cuando ocurre, suele limitarse a reforzar métodos tradicionales, como verificar respuestas obtenidas con lápiz y papel. En la universidad, los participantes comenzaron a usar calculadoras graficadoras, incluidas versiones digitales disponibles en línea. Sin embargo, el uso de programas de geometría dinámica o herramientas estadísticas fue escaso.

Los futuros docentes también reportaron un uso frecuente de herramientas digitales de propósito general, como procesadores de texto, correo electrónico, software de presentaciones, almacenamiento en la nube y, en menor medida, hojas de cálculo. La mayoría indicó haber aprendido a utilizarlas de manera autodidacta, sin reconocer la intervención institucional en el desarrollo de sus competencias tecnológicas.

En cuanto a sus creencias, los participantes asociaban la tecnología principalmente con un valor motivacional: mejorar la calidad de la enseñanza, fomentar la participación estudiantil, promover el trabajo colaborativo y facilitar la planificación. No obstante, durante las entrevistas no surgieron ejemplos concretos vinculados al marco TPACK. Tal como señalan Kartal y Çinar (2018), estos futuros docentes mostraban escaso conocimiento sobre cómo utilizar la tecnología para profundizar la comprensión matemática, diseñar materiales didácticos innovadores o aplicar estrategias centradas en representaciones múltiples del conocimiento matemático.

Pese a ello, al igual que en los hallazgos de Redmond y Lock (2019), los participantes manifestaron una actitud positiva hacia el aprendizaje de nuevas herramientas tecnológicas y su posible integración en el aula. Sin embargo, su discurso revelaba una visión más técnica que reflexiva del rol docente, concebido como la acumulación progresiva de herramientas y consejos prácticos, sin una valoración explícita del sustento teórico que orientara su uso pedagógico.

Estudio de Clases

Aunque varios autores indican que el Estudio de Clases es de origen japonés (Bieda et al., 2015; Murata, 2011; Stigler y Hiebert, 1999), los investigadores chinos también reclaman su autoría. Por ejemplo, Huang et al. (2017) indican que el Estudio de Clases se ha aplicado en China por más de 100 años. En occidente, Stigler y Hiebert popularizaron el Estudio de Clases en su libro *The teaching gap* de 1999. Los autores compararon los sistemas educativos de Alemania, Japón y Estados Unidos motivados por los resultados del Estudio Internacional de Tendencias en Matemáticas y Ciencias (TIMSS por sus iniciales en inglés). Stigler y Hiebert presentaron al Estudio de Clases como una herramienta poderosa de diseño centrada en el aprendizaje estudiantil y en el desarrollo profesional docente continuo.

Las ideas de Stigler y Hiebert tuvieron repercusión global. En Estados Unidos, Schoenfeld (2006) pensaba que el Estudio de Clases se podía convertir en una tendencia. En Latinoamérica el Estudio de Clases fue popularizado en Chile gracias a un proyecto de colaboración entre la

Sociedad Japonesa de Educación Matemática y la Pontificia Universidad Católica de Valparaíso que en 2007 publicó un libro sobre el Estudio de Clases (Isoda et al., 2007).

El Estudio de Clases implica cinco actividades fundamentales que permiten focalizar la atención en el aprendizaje estudiantil y optimizar las oportunidades educativas: (1) el examen de los materiales curriculares para determinar los objetivos de aprendizaje de los estudiantes (Watanabe et al., 2008), (2) la planificación de la lección de investigación, (3) la enseñanza de la lección de investigación por un miembro del equipo mientras otros realizan observaciones en vivo, (4) la reflexión sobre la lección, (5) la revisión y volver a enseñar la lección a un nuevo grupo de estudiantes (Fernández, 2002; Lewis y Hurd, 2011; Lewis et al., 2006).

La metodología ha adoptado matices propios en cada contexto cultural donde ha sido implementada. Huang et al. (2017) destacan dos diferencias clave entre la versión china y la japonesa. En China, el objetivo se orienta a perfeccionar estrategias específicas de enseñanza, mientras que en Japón se enfatiza el desarrollo del pensamiento matemático a largo plazo. Además, en China, un experto acompaña al equipo durante todo el proceso con protocolos definidos para la reflexión, mientras que en Japón su presencia no es constante.

En nuestro caso, concebimos los equipos para el Estudio de Clases conformados con docentes en formación y el docente cooperador. Nos preocupaba que el rol del docente cooperador desequilibrara la naturaleza colaborativa del Estudio de Clases, sin embargo, con su conocimiento y experiencia como supervisores de práctica lograron desarrollar un ambiente en donde los futuros docentes se percibían como colegas desarrollando un sentido de pertenencia a la profesión (González et al., 2024).

Teoría Histórico Cultural de la Actividad de Engeström

La teoría de la actividad histórico-cultural (*Cultural-Historical Activity Theory*, CHAT, por sus siglas en inglés) es un marco teórico que permite conceptualizar y analizar las relaciones entre la cognición y la actividad. Sus orígenes se remontan a los trabajos de Vygotsky y Leontiev. Más recientemente, Engeström (1987) adaptó la teoría del nivel individual al colectivo, promoviendo un modelo sistémico de la actividad aplicable a entornos colaborativos. A Engeström se le reconoce la representación de la teoría de la actividad mediante un conjunto de triángulos (Figura 1) que simbolizan las nociones básicas de la acción individual (sujeto–objeto–instrumento) junto con aquellas que surgen de la interacción social (comunidad–reglas sociales–división del trabajo). Al hacerlo, plantea un sistema de subsistemas triangulares que busca explicar la producción, distribución, intercambio y consumo de conocimiento (Engeström, 1987).

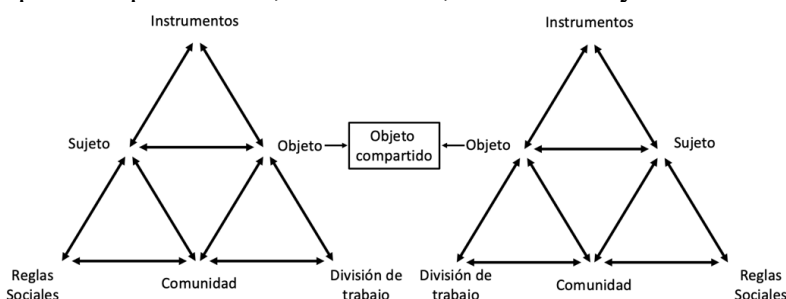


Figura 1. Teoría Histórico Cultural de la Actividad de Engeström.

En la Figura 1 se visualizan dos sistemas de triángulos que representan la actividad de dos comunidades que trabajan para lograr el mismo objeto (objetivo). Cada sistema de triángulos (el de la izquierda o el de la derecha)² representa un equipo de trabajo que interactúa para lograr su propósito y simboliza la actividad colectiva. En la parte superior de cada sistema se representa la actividad individual. La contribución de Engeström consiste en desplazar el foco del análisis de la actividad personal (triángulos superiores) o comunitaria (sistema de triángulos) hacia el análisis de varios sistemas que construyen un objeto común.

Utilizamos CHAT para analizar dos situaciones: la planificación de la lección de investigación (Villafañe-Cepeda et al., 2022) y el rol de los docentes cooperadores como líderes de los equipos de Estudio de Clases (González et al., 2024). Escogimos esta estrategia porque su versatilidad permite describir el contexto y comprender la complejidad de las interacciones entre sujetos, objetos e instrumentos involucrados en una actividad que se transforma con el tiempo.

En el caso de la planificación de la lección, fue posible detallar la conformación de los equipos de trabajo del Estudio de Clases, las reglas que establecieron para desarrollar la lección, los artefactos utilizados —tanto tecnológicos como aquellos requeridos en el curso EDPE 4030— que guiaron el diseño de la lección de investigación (Villafañe-Cepeda et al., 2022). Algunos de los artefactos empleados fueron el programa del curso, el libro de texto en línea y materiales curriculares complementarios (principalmente los estándares de Matemáticas). Otros artefactos fueron creados por los miembros de cada equipo utilizando Desmos y tenían el formato de presentaciones con tareas matemáticas interactivas. Los futuros docentes tenían acceso remoto a las diapositivas y podían realizar modificaciones con base en las recomendaciones de sus colegas o del docente cooperador durante las reuniones de planificación. Esta posibilidad de editar documentos virtualmente facilitó la planificación colaborativa y preparó a los futuros docentes para impartir clases en modalidad virtual.

También utilizamos CHAT para identificar cuatro roles que desempeñaron los docentes cooperadores al liderar los equipos de Estudio de Clases: facilitador, experto, miembro del equipo y brindador de apoyo (González et al., 2024). En su rol de facilitadores, apoyaban al equipo en el logro de los objetivos mediante el establecimiento de normas de colaboración, la discusión de los protocolos establecidos en el curso EDUC 4030, la promoción del intercambio de ideas y la formulación de escenarios hipotéticos sobre la ejecución de la lección de investigación, con el fin de anticipar soluciones. Como expertos, compartían sus conocimientos sobre los estándares y solicitaban a los futuros maestros que incorporaran actividades donde los estudiantes explicaran su razonamiento, representaran ideas matemáticas de diversas formas y exploraran múltiples estrategias para resolver problemas. En calidad de miembros del equipo, los docentes cooperadores mostraban vulnerabilidad, como cuando admitían no saber realizar ciertas tareas en Desmos, o asumían funciones que podían haber delegado, como redactar las actas de las reuniones. Finalmente, en su rol de brindadores de apoyo, identificaban y resaltaban las fortalezas de los futuros docentes y ofrecían recomendaciones para mejorar, transmitiendo entusiasmo y ofreciendo apoyo emocional.

² El sistema de triángulos de la derecha está reflejado con respecto al eje vertical por aspectos estéticos.

El uso de CHAT nos permitió describir la complejidad que implica introducir el Estudio de Clases en un programa de formación de docentes de Matemáticas. Esta complejidad puede superarse mediante una coordinación cuidadosa entre los formadores universitarios y los docentes cooperadores. Esto fue posible gracias a la realización de talleres de preparación con todos los miembros del equipo, así como a actividades que fortalecieron los lazos profesionales entre las facultades de educación y los centros de práctica. Un ejemplo notable fue un Estudio de Clases realizado de manera colaborativa entre investigadores, asistentes de investigación y docentes cooperadores para diseñar una lección sobre inecuaciones lineales en dos variables.

Enfoque documental de lo didáctico

A continuación, describo los aprendizajes obtenidos en una investigación en la que utilizamos el Enfoque Documental de la Didáctica (EDD) de Gueudet y Trouche (2009) para analizar cómo un equipo de Estudio de Clases empleó los recursos disponibles. Este enfoque considera tanto los recursos como los documentos que los docentes utilizan, y cómo estos recursos son transformados y empleados en el proceso de enseñanza-aprendizaje. Según este marco teórico, existe una diferencia entre *recursos* y *documentos*: un recurso es un elemento material o virtual disponible para la enseñanza, mientras que un documento es el resultado de la interacción entre los recursos y su esquema de uso; es decir, el conjunto de regularidades que emergen en la actividad del docente al implementar dichos recursos en distintos contextos. Los recursos se convierten en documentos a partir de los cambios introducidos por el profesorado (Trouche et al., 2020). Este enfoque nos permitió describir cómo los docentes seleccionaron y utilizaron los recursos durante el proceso de planificación.

El análisis del proceso de construcción documental por parte de los docentes considera los componentes material, didáctico y matemático, así como las conexiones entre ellos. El componente material se refiere a los recursos disponibles para la planificación docente, tales como los estándares, el marco curricular, los libros de texto, los libros de consulta, los cuadernos de los estudiantes, los materiales manipulativos, los programas informáticos y los sitios web. El componente didáctico alude a las estrategias pedagógicas y a las justificaciones que las respaldan en relación con los objetivos de aprendizaje de los estudiantes. El componente matemático abarca las ideas matemáticas de la lección, incluidas las nociones, las tareas y los procedimientos (Gueudet y Trouche, 2009).

Para este estudio (Hernández-Rodríguez et al., 2021a), analizamos un equipo de Estudio de Clases conformado por un docente cooperador y cuatro docentes en formación. El equipo sostuvo una reunión inicial en la que el docente cooperador comunicó que el tema a tratar sería *sistemas de ecuaciones lineales*, en el marco de un curso de Álgebra I dirigido principalmente a estudiantes de octavo grado. Posteriormente, el equipo llevó a cabo otras dos reuniones para discutir ideas relacionadas con la lección de investigación. El análisis se centró en la cuarta reunión, en la cual el docente cooperador revisó un borrador de la lección preparado por los docentes en formación. Dada la dificultad para organizar una reunión presencial, esta se realizó de forma virtual y tuvo una duración de 1 hora y 36 minutos. Los docentes en formación elaboraron una presentación de diapositivas en Desmos y, durante la reunión, presentaron la lección al docente cooperador.

La sesión fue grabada en video utilizando Microsoft Teams. Contamos con acceso a las grabaciones de audio y video de las interacciones entre los miembros del equipo. Además, el video mostraba las diapositivas en Desmos y el libro de texto digital (Larson et al., 2012). La grabación reveló cómo los integrantes del equipo editaban activamente las diapositivas y consultaban el libro de texto.

El análisis comenzó con la elaboración de una línea de tiempo para segmentar el video según los cambios en la estructura de la actividad (Herbst et al., 2011). Dividimos la grabación en 26 intervalos con una duración promedio de aproximadamente cuatro minutos cada uno. En una segunda revisión, nos enfocamos en identificar los componentes (material, didáctico o matemático) que sustentaban el proceso de documentación, de acuerdo con el marco de Gueudet y Trouche (2009).

Para registrar nuestras observaciones, diseñamos una tabla dividida en tres secciones que describen los componentes presentes en cada intervalo: En la primera, documentamos el componente material mediante cuatro columnas: descripción breve del recurso (por ejemplo, libro de texto, función de Desmos u otro recurso mencionado), forma de uso, propósito del uso y observaciones del docente cooperador. En la segunda, registramos los componentes didácticos mediante dos columnas: movimientos pedagógicos y descripción de su implementación. En la tercera, se detalló el componente matemático, organizado en tres columnas: tipo de componente (concepto o procedimiento), descripción breve y forma de representación.

Cada investigador observó el video de manera independiente y elaboró listas con los componentes empleados en cada intervalo, así como su uso por parte del docente cooperador y de los docentes en formación. También realizamos anotaciones detalladas sobre cómo se utilizaron los distintos componentes en el diseño de la lección de investigación. Prestamos especial atención a los comentarios y ediciones del docente cooperador, registrando sus intervenciones en una columna separada con el objetivo de explicitar el proceso de documentación durante la planificación.

La siguiente fase del análisis consistió en identificar las conexiones entre los diversos componentes para establecer el esquema de uso. A partir de la tabla generada, analizamos si las discusiones del equipo incluían conexiones explícitas entre los componentes materiales, didácticos y matemáticos. Elaboramos una representación visual con nodos para cada componente específico y enlaces que reflejan las conexiones detectadas. Esta visualización nos permitió examinar el proceso de documentación en función del uso intencionado de los diversos componentes durante la planificación de la lección.

Entre los hallazgos más destacados, observamos que la reunión virtual se desarrolló de forma similar a una presencial. Los miembros del equipo tenían acceso a los mismos materiales y podían visualizar el trabajo de sus compañeros mediante el uso compartido de pantalla. Se evidenció un alto grado de colaboración, ya que todos los integrantes participaron activamente. Además, la plataforma Desmos permitió la edición simultánea de la lección. Se observó cómo los docentes en formación ofrecían apoyo a compañeros con dificultades técnicas o conceptuales.

También encontramos que el docente cooperador estableció un esquema de uso claro para los materiales. Los docentes en formación llevaron al encuentro un documento en Desmos con 14 tareas interactivas. El docente cooperador revisó cada una de ellas y ofreció recomendaciones para la mayoría. Estas sugerencias buscaban enriquecer las tareas mediante la incorporación de funcionalidades adicionales de Desmos. Asimismo, destacó el valor didáctico de ciertas herramientas y pidió a los docentes en formación que añadieran instrucciones orientadas a promover la expresión del pensamiento matemático del estudiante. En general, el docente cooperador siguió un conjunto consistente de acciones: tomó decisiones pedagógicas, las fundamentó con argumentos teóricos y aprovechó las funciones específicas de Desmos para potenciar el diseño de la lección de investigación.

Conclusiones

El proceso de implantación del Estudio de Clases en el contexto de un programa de formación de docentes de Matemáticas nos permitió identificar aprendizajes significativos sobre las condiciones necesarias para generar experiencias colaborativas auténticas, centradas en la planificación, la reflexión y la mejora continua de la enseñanza.

Uno de los principales hallazgos es la necesidad de armonizar las culturas institucionales implicadas en el proyecto. La colaboración entre universidades, escuelas y otros actores externos requiere una visión compartida y una comunicación fluida que permita la construcción conjunta de objetivos y prácticas. Esta articulación institucional fue clave para generar espacios de formación profesional donde los docentes en formación pudieran actuar como miembros activos de una comunidad de práctica.

El análisis del uso de la tecnología reveló una actitud positiva por parte de los futuros docentes hacia la integración de herramientas digitales. Sin embargo, sus concepciones del uso tecnológico se centraban en aspectos motivacionales más que en una comprensión profunda de su potencial didáctico. Esto pone de relieve la importancia de formar a los docentes no solo en el dominio técnico, sino también en el conocimiento pedagógico del contenido mediado por la tecnología (TPACK), para que puedan diseñar experiencias de aprendizaje matemático más ricas y significativas.

La incorporación del Estudio de Clases como estrategia de desarrollo profesional demostró ser una herramienta poderosa para centrar la atención en el aprendizaje del estudiante y promover la colaboración entre docentes en formación y docentes cooperadores. A pesar de las diferencias culturales en su implementación, la experiencia mostró que es posible adaptar el modelo manteniendo su esencia reflexiva y participativa. Fue particularmente valiosa la figura del docente cooperador como líder del equipo, quien supo equilibrar su rol de experto con una participación horizontal que fomentó el sentido de pertenencia y profesionalismo en los docentes en formación.

El uso de la Teoría Histórico-Cultural de la Actividad (CHAT) permitió comprender la complejidad de las interacciones que se producen en estos contextos formativos. Esta teoría ofreció una lente para analizar cómo se configuran los sistemas de actividad y cómo las tensiones o contradicciones internas pueden ser motor de cambio y aprendizaje. Al aplicar CHAT,

pudimos evidenciar que la planificación colaborativa no se limita a un intercambio de ideas, sino que es una actividad situada, influida por normas, herramientas, reglas, y roles que requieren una coordinación cuidadosa.

Por su parte, el Enfoque Documental de lo Didáctico (EDD) facilitó el análisis detallado de cómo los docentes en formación y el docente cooperador seleccionan, transforman y articulan diversos recursos para dar lugar a documentos que guían la enseñanza. Este enfoque hizo visible la construcción de esquemas de uso en los que confluyen componentes materiales, didácticos y matemáticos, así como las conexiones intencionales que los docentes establecen entre ellos. La documentación se reveló como un proceso activo, profundamente influido por las interacciones dentro del equipo y por las decisiones pedagógicas que se toman durante la planificación.

En conjunto, estos aprendizajes apuntan a la necesidad de fortalecer los programas de formación docente no como una acumulación de herramientas didácticas, sino como un proceso situado, reflexivo y teóricamente fundamentado. Los programas deben ofrecer oportunidades para que los futuros docentes vivan experiencias auténticas de colaboración, planificación y análisis de la práctica. La integración de marcos teóricos robustos, así como el uso significativo de la tecnología, permiten enriquecer estas experiencias y promover una comprensión más profunda del rol docente en la enseñanza de las Matemáticas.

Referencias y bibliografía

- Aghakhani, S., Lewitzky, R. A. y Majeed, A. (2023). Developing reflective practice among teachers of mathematics. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 18(4), em0755.
<https://doi.org/10.29333/iejme/13715>
- Ball, D. L., Hill, H. C. y Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, 29(3), 14-46.
- Bieda, K. N., Cavanna, J., Ji, X. (2015, Sept). Mentor-guided lesson study as a tool to support learning in field experiences. *Mathematics Teacher Educator*, 4(1), 20 – 31.
- Choque-Dextre, Y., Moreno-Concepción, J., Hernández-Rodríguez, O., Villafañe-Cepeda, W. y González, G. (2020). Technological knowledge of mathematics pre-service teachers at the beginning of their methodology courses. In A. I. Sacristán, J. C. Cortés-Zavala, & P. M. Ruiz-Arias, (Eds.), *Proceedings of the 42nd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 892-894). Mazatlán, Sinaloa, México: Cinvestav. <https://doi.org/10.51272/pmena.42.2020>
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity - theoretical approach to developmental research*. Helsinki: Orienta-Konsultit.
- Fernandez, C. (2002). Learning from Japanese approaches to professional development: The case of Lesson Study. *Journal of Teacher Education*, 53(5), 393-405.
- García Cabrero, B., Loredó Enríquez, J. y Carranza Peña, G. (2008). Análisis de la práctica educativa de los docentes: pensamiento, interacción y reflexión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, pp. 1-15. <https://www.redalyc.org/pdf/155/15511127006.pdf>.
- González, G., Villafañe-Cepeda, W. y Hernández-Rodríguez, O. (2023). Leveraging prospective teachers' knowledge through Lesson Study. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 26, 79-102.
<https://doi.org/10.1007/s10857-021-09521-4>
- González, G., Hernández-Rodríguez, O. y Villafañe-Cepeda, W. (2024). Mentor teachers' four intertwined roles when leading lesson study with mathematics preservice teachers. In S. Dotger, G. Matney, J. Heckathorn, K. Chandler-Olcott, & M. Fox. (Eds.). *Lesson Study with mathematics and science preservice teacher: Finding the form*. (pp. 34-45). Routledge.
- Grossman, P., Compton, C., Igra, D., Ronfeldt, E. Shahan, E. y Williamson, P. (2009). Teaching practice: A cross-professional perspective. *Teachers College Record*, 111(9), 2055 – 2100.

- Gueudet, G. y Trouche, L. (2009). Towards new documentation systems for mathematics teachers? *Educational Studies in Mathematics*, (71)3, 199-218.
- Herbst, P., Nachlieli, T. and Chazan, D. (2011). Studying the practical rationality of mathematics teaching: what goes into ‘installing’ a theorem in geometry? *Cognition and Instruction*, 29(2), 218-255.
- Hernández-Rodríguez, O., González, G. y Villafañe-Cepeda, W. (2021a). Planning a research lesson online: pre-service teachers' documentation work. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 10(2), 168-186.
- Hernández-Rodríguez, O., González, G. y Villafañe-Cepeda, W. (2021b). Re-visioning support to pre-service teachers using a lesson study model. *Proceedings of the 43rd annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 1142-1144). Philadelphia.
- Hernández Rodríguez, O., Wanda Villafañe-Cepeda, W., Moreno-Concepción, J. y Choque-Dextre, Y. (2023). Desarrollo de la capacidad de observación profesional de los futuros maestros de matemáticas. *PARADIGMA*, 44(3), 354-373. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p354-373.id1319>
- Huang, R., Fang, Y. y Chen, X. (2017). Chinese lesson study: A deliberate practice, a research methodology, and an improvement science. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(4), 270-282.
- Isoda, M., Arcavi, A. y Lorc, A. M. (2007). *El Estudio de Clases japonés en matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso de la Universidad Católica de Valparaíso.
- Kartal, B. y Çinar, C. (2018). Examining pre-service mathematics teachers' beliefs of TPACK during a method course and field experience. *Malaysia Online Journal of Educational Technology*, 6(3), 11–37.
- Kilpatrick, J., Swafford J. y Findell B. (Eds). (2001). *Adding it Up: Helping Children Learn Mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lewis, C. C. y Hurd, J. (2011). *Lesson Study step by step: How teacher learning communities improve instruction (With DVD)*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Lewis, C., Perry, R. y Murata, A. (2006). How should research contribute to instructional improvement? The case of Lesson Study. *Educational Researcher*, 35(3), 3-14.
- Lortie, D. C. (1975). *Schoolteacher: A sociological study*. Chicago: University of Chicago Press.
- Murata, A. (2011). Introduction: Conceptual overview of lesson study. In L. C. Hart, A. Alston y A. Murata (Eds.), *Lesson study research and practice in mathematics education* (pp. 1-12). Springer, Dordrecht.
- Redmond, P. y Lock, J. (2019). Secondary pre-service teachers' perceptions of technological pedagogical content knowledge (TPCK): What do they really think? *Australasian Journal of Educational Technology*, 35(3), 45–54. <https://doi.org/10.14742/ajet.4214>
- Sacristán, A. I. (2017). Digital technologies in mathematics classrooms: barriers, lessons and focus on teachers. In E. Galindo & J. Newton (Ed.), *Proceedings 39th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 90–99). Hoosier Association of Mathematics Teacher Educators.
- Selezniov, S. (2019). Lesson study: Learning through research. *Impact*, 2514-6955(5), 61 –65.
- Schoenfeld, A. (2006). Mathematics teaching and learning. In P. A. Alexander and P. H. Winne (Eds.), *Handbook of Educational Psychology* (pp. 479-510). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- Stigler, J. W. y Hiebert, J. (2009). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. Simon and Schuster.
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(7), 281 – 307.
- Trouche, L., Rocha, K., Gueudet, G. y Pepin, B. (2020). Transition to digital resources as a critical process in teachers' trajectories: the case of Anna's documentation work, *ZDM*, 52, 1243-1257.
- Villafañe-Cepeda, W., Hernández-Rodríguez, O. y González, G. (2022, April 23). Innovative Approaches to Lesson Study with Teachers Across Diverse Contexts: *The activity of planning an online research lesson*. (Round table presentation), AERA's (American Educational Research Association) Annual Convention.
- Watanabe, T., Takahashi, A. y Yoshida, M. (2008). Kyozaikenkyu: A critical step for conducting effective Lesson Study and beyond. *Inquiry into mathematics teacher education [AMTE Monograph]*, 5, 131-142.
- Zeichner, K. (2010). Rethinking the connections between campus courses and field experiences in college-and university-based teacher education. *Journal of Teacher Education*, 61(1-2), 89-99.
- Zeichner, K. M. y Tabachnick, B. R. (1981). Are the effects of university teacher education “washed out” by school experience? *Journal of Teacher Education*, 32(3), 7-11.



La Educación Matemática frente a la Inteligencia Artificial: Retos y posibilidades

Adrián Gómez-Árciga

Facultad de Pedagogía e Innovación Educativa, Universidad Autónoma de Baja California
México

adrian.arciga@uabc.edu.mx

Resumen

La irrupción de la inteligencia artificial generativa (IAG) en la Educación Matemática plantea tanto oportunidades como desafíos. Herramientas como ChatGPT prometen personalizar el aprendizaje, ofrecer retroalimentación inmediata y apoyar la resolución de problemas. No obstante, el papel que juega el docente, como mediador, es necesario para su uso pertinente. Este documento analiza retos y posibilidades cuando se incorpora la IAG como una herramienta para el desarrollo del pensamiento matemático. Se concluye que la clave no está en prohibir o idealizar la IAG, sino en diseñar experiencias o tareas que fomenten la interpretación, la exploración, el análisis, la justificación, la argumentación, que preparen a los estudiantes para el uso consciente de las herramientas digitales de su tiempo.

Palabras clave: Inteligencia Artificial; Educación Matemática; Tecnología Digital; Resolución de Problemas; ChatGPT.

Introducción

La inteligencia artificial generativa, representada por herramientas como ChatGPT, está transformando rápidamente el panorama educativo. Estas tecnologías ya se usan para apoyar la resolución de problemas, la generación de contenido y la creación de experiencias de aprendizaje personalizadas (Law, 2024). Sin embargo, su incorporación en la enseñanza de las Matemáticas implica retos singulares: desde la necesidad de replantear metodologías y paradigmas de

aprendizaje (Bernardi et al., 2024), hasta la consideración de los sesgos y limitaciones que pueden presentar sus resultados (Capone, 2022).

Por ello, es imprescindible que los futuros maestros se apropien de estas herramientas, para reconocer tanto sus potencialidades como sus limitaciones (Bernardi et al., 2025). La cuestión pedagógica clave no reside únicamente en si “se vale usar” estas herramientas, sino en cómo integrarlas para que potencien —y no sustituyan— la experiencia de aprender Matemáticas (Castañeda & Sánchez-Aguilar, 2025). Prompts cuidadosamente diseñados, comparaciones entre soluciones de la IAG y representaciones gráficas en herramientas como GeoGebra, así como la práctica de reformular preguntas ante respuestas erróneas, se perfilan como estrategias para consolidar aprendizajes más profundos y situados (Hong & Lee, 2022; NCTM, 2014).

La alfabetización matemática debe considerar las herramientas tecnológicas que median las prácticas sociales (UNESCO, 2012). En este sentido, la inteligencia artificial (IA), la cual se caracteriza como una herramienta digital que emula razonamientos humanos a través de correlaciones estadísticas que producen resultados probables (no necesariamente verdaderos), marca una de las líneas de investigación en el campo de la Educación Matemática (Bender et al., 2021). ¿Cómo integrar la IAG en la educación básica, media superior y superior para que se use de forma significativa? ¿Cómo interactuar con la IAG de tal manera que se promueva el pensamiento crítico y analítico? ¿Qué habilidades son importantes desarrollar para que el estudiante pueda sostener un diálogo efectivo con las herramientas digitales de su tiempo? Estas y otras interrogantes obligan a replantear el currículo y las prácticas docentes en el aula.

El papel del docente en la era de la IA

La incorporación de la inteligencia artificial en la Educación Matemática ha dejado en claro que ninguna tecnología, por sofisticada que sea, sustituye al docente de Matemáticas en el proceso de enseñanza y aprendizaje. El verdadero impacto de la IA no radica únicamente en sus capacidades técnicas, sino en cómo los educadores la median, la evalúan y la resignifican en sus prácticas pedagógicas (Bernardi et al., 2025).

El papel de quien ejerce la docencia en Matemáticas, entonces, se expande más allá de transmitir conocimientos matemáticos. Se encarga de diseñar experiencias de aprendizaje que integren la IA de manera crítica y creativa. Ello implica desarrollar competencias profesionales que permitan analizar la veracidad matemática de las respuestas generadas por sistemas como ChatGPT, identificar errores o inconsistencias y transformarlos en oportunidades didácticas que fomenten la reflexión y el pensamiento crítico. Estudios recientes evidencian que cuando los docentes en formación trabajan con ChatGPT, perfeccionan habilidades de evaluación y discernimiento, buscando promover el diálogo con la IA y no su respuesta inmediata (Bernardi et al., 2025; Green, 2024).

Algunos marcos conceptuales que han surgido a raíz de los retos y exigencias profesionales que se enfrentan los docentes de Matemáticas son: El AI-TPACK (Artificial Intelligence - Technological Pedagogical Content Knowledge), que permite analizar cómo se intersectan el conocimiento del contenido matemático, el pedagógico y el tecnológico, incluyendo la IA, en la

práctica docente (Sun et al., 2024); y el modelo KTMT (Knowledge for Teaching Mathematics with Technology) propuesto por Rocha (2020), que enfatiza que los futuros docentes deben articular el conocimiento disciplinar con las posibilidades y limitaciones de las tecnologías digitales. En este sentido, la interacción con la IA requiere que los docentes comprendan cómo las herramientas afectan la naturaleza de los conceptos, los métodos de enseñanza y los procesos de aprendizaje.

Un ejemplo ilustrativo proviene de estudios en los que se pidió a docentes en formación diseñar actividades de aula utilizando ChatGPT como apoyo. En un primer momento, muchos participantes se limitaron a emplear la herramienta como fuente de información, pero al enfrentarse a respuestas inexactas, se vieron forzados a replantear sus prompts, evaluar la pertinencia de las soluciones propuestas y generar explicaciones alternativas (Bernardi et al., 2025). Este proceso, aunque desafiante, se convierte en un catalizador para el desarrollo de un conocimiento profesional más robusto, capaz de integrar la tecnología sin afectar el componente pedagógico.

En consecuencia, el papel del docente en la era de la inteligencia artificial consiste en guiar a los estudiantes hacia un uso reflexivo y creativo de estas herramientas. Esto implica enseñarles a formular preguntas más precisas, contrastar resultados con diferentes representaciones y comprender que los errores de la IA son oportunidades para explorar, justificar y construir significados. La tarea docente, por tanto, no se reduce con la IA, sino que se complejiza, demandando preparación continua y un compromiso con la formación integral de los estudiantes.

Del error de la IA a recurso didáctico

En el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, los resultados incorrectos o los errores en los procedimientos pueden utilizarse como un recurso valioso para incentivar la construcción del conocimiento matemático y el pensamiento crítico. En este camino, los errores que presenta la IA cuando resuelve o procesa problemas matemáticos (que dadas sus actualizaciones se van depurando varios de estos) no necesariamente deben considerarse como limitaciones para su uso, más bien, se debe buscar la forma de cómo aprovecharlos para alcanzar los conocimientos y las habilidades deseadas en el estudiante (Slobodsky & Durcheva, 2025).

Cuando el estudiante interactúa con ChatGPT encuentra respuestas que pueden ser incompletas, ambiguas o incluso incorrectas. Por ejemplo, en la Figura 1 puede observarse parte de la respuesta que dio el ChatGPT a una estudiante cuando introdujo el prompt “Cuáles son las formas diferentes de restar”. El cuarto ejemplo que desarrolla la IAG muestra tres pasos coherentes para resolver la resta $345-128$, sin embargo, el resultado no toma en cuenta las 10 unidades que pidió prestadas al 20, dando como respuesta incorrecta la suma de $200+20+7$ en lugar de $200+10+7$, que es la respuesta correcta. En el mismo chat, la IAG muestra un onceavo ejemplo que, según ella, es una forma diferente de restar dos números enteros (Figura 2), pero es el mismo procedimiento que el cuarto ejemplo. Lo que cabe resaltar en este ejemplo es que los resultados parciales que muestra en el segundo y tercer paso son incorrectos, dando un resultado final muy distinto al esperado.

4. Resta utilizando la “Resta de Números Grandes” (Método de Resta de Múltiplos de 10)

Este es un método útil cuando estamos restando grandes cantidades y permite manejar la resta en bloques de decenas, centenas, etc.

Ejemplo:

Restar $345 - 128$:

- Restamos $300 - 100 = 200$ (decenas).
- Restamos $40 - 20 = 20$ (decenas).
- Restamos $5 - 8$ (pedimos prestado): $15 - 8 = 7$ (unidades).

Resultado: $200 + 20 + 7 = 227$.

Figura 1. Cuarto ejemplo de cómo restar números enteros: el resultado es incorrecto.

11. Resta utilizando “Método de Restas Parciales”

Este método es útil cuando los estudiantes se sienten más cómodos resolviendo las operaciones en **pequeñas etapas**, restando de uno en uno (unidades, decenas, etc.).

Ejemplo:

Restar $567 - 398$:

- Primero, restamos $500 - 300 = 200$.
- Luego, restamos $60 - 90$ (pedimos prestado) = 50.
- Finalmente, restamos $7 - 8$ (pedimos prestado) = 4.

Resultado: $200 + 50 + 4 = 256$.

Figura 2. Onceavo ejemplo de cómo restar números enteros: los resultados del segundo y tercer paso son incorrectos.

No obstante, más allá de pensar que este tipo de errores invalida a la herramienta, se sugiere que se aprovechen estas situaciones para que los estudiantes verifiquen procedimientos, comparen resultados con otras herramientas y reformulen sus preguntas o prompts para obtener explicaciones más precisas. Errores de este tipo son parecidos a los que los estudiantes reproducen cuando aplican algoritmos sin comprender la lógica subyacente, y pueden ser aprovechados para reconocer y superar sus propias concepciones erróneas (Green, 2024).

Slobodsky & Durcheva (2025) proponen un marco donde caracterizan tres tipos de *prompts* útiles en la gestión del error:

1. Prompts de resolución de ecuaciones: se pide a la IA resolver una ecuación y se compara con otras herramientas (ej., GeoGebra o Symbolab) para identificar diferencias o errores y hacer un análisis del procedimiento.

2. Prompts que generan respuestas confusas: cuando la IA muestra explicaciones poco claras, imprecisas o contradictorias, se alienta a los estudiantes a dialogar con el sistema, pedir aclaraciones y reflexionar sobre la estructura lógica de los enunciados.
3. Prompts clave: diseñados por docentes, buscan guiar la exploración hacia ideas centrales del curso y estimular la curiosidad de los estudiantes, promoviendo comparaciones entre soluciones de la IA y los contenidos abordados en clase.

Esta propuesta coincide con otras metodologías innovadoras como el *aprendizaje de diálogo invertido*, introducido por Pavlova (2024), el *aprendizaje basado en la duda o el aprendizaje basado en prompt (indicaciones)* (Farrokhnia et al., 2024), las cuales fomentan que los estudiantes analicen de manera crítica ejemplos preparados de errores de la IA. La meta es que no solo reconozcan equivocaciones, sino que aprendan a reformular preguntas y a valorar la importancia de la verificación en el proceso de resolución de problemas.

La gestión del error en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas cobra un valor especial porque permite distinguir entre aplicar un procedimiento y comprenderlo. Mientras que la IA puede producir una solución en segundos, lo verdaderamente formativo es que los estudiantes aprendan a cuestionarla, a explicar por qué es correcta o incorrecta su respuesta y a vincularla con las representaciones múltiples del concepto u objeto matemático en juego (Hong & Lee, 2022; NCTM, 2014). En esta dirección, los errores de la IA dejan de ser simples fallas técnicas para convertirse en detonadores de discusión, colaboración y construcción de sentido.

Posibilidades y escenarios futuros

Más allá de los riesgos y limitaciones, la inteligencia artificial generativa abre un abanico de posibilidades que, si se gestionan de manera adecuada, pueden transformar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Una forma de interactuar con la IA es concebirla como un compañero de aprendizaje que acompaña a los estudiantes en un diálogo constante, disponible en todo momento para aclarar dudas, sugerir caminos de resolución o generar ejemplos adicionales (Gimpel et al., 2023). Esta interacción, no exime al estudiante del esfuerzo intelectual, al contrario, puede potenciar su autonomía y favorecer la práctica constante, siempre y cuando el docente cuide y guíe cada parte del proceso.

Otra forma de su uso está en la personalización del aprendizaje. ChatGPT y herramientas similares pueden generar ejercicios adaptados al nivel y estilo de cada estudiante, ofreciendo explicaciones más detalladas a quienes lo requieran y retos adicionales a quienes muestran mayor dominio. Esta capacidad de diversificación constituye un apoyo relevante para atender a la heterogeneidad de las aulas, lo cual siempre ha sido un desafío en la Educación Matemática (Law, 2024). El docente es una pieza clave durante el proceso, ya que es quien valida los resultados, evita una dependencia del sistema y orienta los acercamientos a las tareas.

En el ámbito de la evaluación, los docentes deben reconocer que no es posible integrar la IA a las aulas mientras se continúen resolviendo tareas tradicionales, pues una gran cantidad de estas serían resueltas de forma automática. En cambio, ellos tienen que comenzar a diseñar tareas

y evaluaciones que fomenten la creatividad, la argumentación, el pensamiento crítico, que son competencias más complejas para ser automatizadas (Carvalho, 2025). En este sentido, se debe resaltar la importancia de que las tareas promuevan actividades de investigación, donde se exploren y encuentren relaciones entre los objetos matemáticos involucrados, es decir, que demanden más que la ejecución de algoritmos (Santos-Trigo, 2024).

El futuro de la Educación Matemática con IA no sustituye otros entornos digitales, sino que complementa las plataformas ya consolidadas en la enseñanza de las Matemáticas. Herramientas como GeoGebra, Wolfram Alpha o Symbolab, combinadas con las capacidades lingüísticas de ChatGPT, permiten explorar representaciones múltiples, verificar resultados y enriquecer la comprensión conceptual (Botana et al., 2024).

Los recientes escenarios apuntan a una alfabetización matemática y digital más amplia, como señala Santos-Trigo (2024):

Los constantes desarrollos y la disponibilidad de las tecnologías digitales abren nuevos caminos para que profesores y estudiantes representen, exploren y aborden tareas matemáticas, y proporcionan diferentes herramientas para ampliar las discusiones matemáticas de estudiantes y profesores más allá del aula

Así, los estudiantes no solo aprenden a realizar cálculos o resolver problemas, sino también a dialogar críticamente con las tecnologías.

En este horizonte, la Educación Matemática frente a la inteligencia artificial se proyecta como un campo en transformación constante, en el que los retos se convierten en oportunidades para repensar qué significa aprender, enseñar y comprender Matemáticas en la era digital.

Reflexiones finales

A lo largo de este documento se ha mostrado que herramientas como ChatGPT pueden contribuir significativamente a personalizar el aprendizaje en las Matemáticas, ofrecer retroalimentación inmediata y estimular la curiosidad de los estudiantes. Sin embargo, también se ha evidenciado que sus limitaciones, como errores en la resolución de problemas o explicaciones ambiguas, obligan a replantear su papel en los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Una reflexión central es la necesidad de revalorizar el papel del docente. Más que competir con la eficiencia de las máquinas, los profesores deben asumir la tarea de guiar, contextualizar y resignificar el uso de la IA en el aula. Su labor consiste en diseñar actividades que aprovechen tanto las potencialidades como los errores de estas herramientas para promover la argumentación, la comparación de representaciones y el desarrollo del pensamiento crítico. En este sentido, la formación inicial y continua de los docentes se vuelve indispensable, ya que el conocimiento profesional debe ampliarse para integrar de manera pertinente las tecnologías emergentes.

También, se ha resaltado que los errores de la IA pueden convertirse en recursos didácticos valiosos. Los fallos de ChatGPT ofrecen oportunidades para que los estudiantes cuestionen, contrasten y reformulen preguntas, fortaleciendo así habilidades de razonamiento matemático y pensamiento crítico. Este enfoque resignifica la relación entre error y aprendizaje, situándola como una forma de exploración, justificación y análisis, y no solo como un obstáculo a superar. Es decir, la IA no sustituye al razonamiento matemático ni a la creatividad humana, sino que abre nuevas posibilidades para explorar problemas, visualizar conceptos y generar discusiones significativas.

El desafío de la Educación Matemática frente a la IA no consiste en decidir si estas herramientas deben usarse o no, sino en definir cómo, cuándo y con qué propósitos deben integrarse (Castañeda & Sánchez-Aguilar, 2025). El horizonte apunta hacia una alfabetización matemática y digital en la que los estudiantes aprendan a dialogar con las tecnologías, desarrollando competencias transferibles que les permitan adaptarse a contextos inciertos y cambiantes.

En conclusión, la inteligencia artificial en la Educación Matemática no debe ser entendida como una amenaza inevitable ni como una panacea educativa. Es, más bien, un campo en disputa, en el que se juegan las formas de aprender y enseñar en el siglo XXI. La tarea que tenemos por delante es convertir la tensión entre retos y posibilidades en una motivación para proponer e innovar, que permita a estudiantes y docentes formarse y desenvolverse de una manera responsable, ética y creativa en la era digital.

Referencias y bibliografía

- Bender, E., Gebru, T., McMillan-Major, A., & Shmitchell, S. (2021). On the dangers of stochastic parrots: Can language models be too big? *Proceedings of the 2021 ACM Conference on Fairness, Accountability, and Transparency (FAccT '21)* (pp. 610–623). Association for Computing Machinery.
<https://doi.org/10.1145/3442188.3445922>
- Bernardi, M. L., Capone, R., Faggiano, E., & Rocha, H. (2025). Generative AI in mathematics education: Pre-service teachers' knowledge and implications for their professional development. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(8), 1513–1530.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2490104>
- Botana, F., Recio, T., & Vélez, M. P. (2024). On using GeoGebra and ChatGPT for geometric discovery. *Computers*, 13(8), 187. <https://doi.org/10.3390/computers13080187>
- Capone, R. (2022). Blended learning and student-centered active learning environment: A case study with STEM undergraduate students. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 22(1), 210–236. <https://doi.org/10.1007/s42330-022-00195-5>
- Carvalho e Silva, J. (2025). Computational thinking versus artificial intelligence in mathematics teaching. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(8), 1426–1437.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2496695>
- Castañeda, A., & Sánchez-Aguilar, M. (2025). ¿Se vale usar ChatGPT si igual entendí el tema? Una conversación urgente sobre IA en el aula. *Revista Enseñanza de las Matemáticas y Experiencias Docentes*, 1(2), 9–14.
<https://doi.org/10.24844/REMEDI/0102.00>
- Farrokhnia, M., Meier, C., Heidari, E., & Jafari, M. (2024). Prompt-based learning: Leveraging generative AI for inquiry and exploration in mathematics education. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 27(4), 633–652.
- Gimpel, H., Hall, K., Decker, S., Eymann, T., Lämmermann, L., Mädche, A., Röglinger, M., Ruiner, C., Schoch, M., Schoop, M., Urbach, F., Rousseau, N., & Vandirk, S. (2023). *Unlocking the power of generative AI*

- models and systems such as GPT-4 and ChatGPT for higher education: A guide for students and lecturers.* University of Hohenheim.
- Green, J. (2024). Critical engagement with ChatGPT in mathematics learning: Risks and opportunities. *International Journal of STEM Education*, 11(3), 215–229. <https://doi.org/10.1186/s40594-024-00453-1>
- Hong, H. Y., & Lee, Y. (2022). Multiple representations in mathematics learning: A review of research. *Educational Studies in Mathematics*, 110(2), 213–236. <https://doi.org/10.1007/s10649-021-10093-4>
- Law, L. (2024). Application of generative artificial intelligence (GenAI) in language teaching and learning: A scoping literature review. *Computers and Education Open*, 6, 100174. <https://doi.org/10.1016/j.caeo.2024.100174>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all.* NCTM.
- Pavlova, M. (2024). Flipped dialog learning: Rethinking critical engagement with AI in mathematics classrooms. *Educational Technology Research and Development*, 72(5), 3117–3138.
- Rocha, H. (2020). Using tasks to develop pre-service teachers' knowledge for teaching mathematics with digital technology. *ZDM*, 52(7), 1381–1396. <https://doi.org/10.1007/s11858-020-01195-1>
- Santos-Trigo, M. (2024). Problem solving in mathematics education: tracing its foundations and current research-practice trends. *ZDM–Mathematics Education*, 56(2), 211–222. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01578-8>
- Slobodsky, P., & Durcheva, M. (2025). Using ChatGPT errors to encourage student exploration and self-learning in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 56(8), 1401–1425. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2025.2505200>
- Sun, F., Tian, P., Sun, D., Fan, Y., & Yang, Y. (2024). Pre-service teachers' inclination to integrate AI into STEM education: Analysis of influencing factors. *British Journal of Educational Technology*, 55(6), 2574–2596. <https://doi.org/10.1111/bjet.13469>
- UNESCO – Education Sector. (2012). *Challenges in basic mathematics education.* UNESCO.



La identidad profesional del profesor de Matemáticas. Algunas herramientas de análisis

José María **Chamoso** Sánchez
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España

jchamoso@usal.es

María Soledad **Salomón** Plata
Facultad de Educación, Universidad de Salamanca
España

msalomomp@usal.es

Resumen

Enseñar de manera efectiva es un proceso complejo y un aspecto importante que lo caracteriza es la propia percepción del docente de su identidad profesional. Entendemos identidad profesional como la interpretación personal del profesor o profesora de qué significa ser docente, es decir, sus creencias, actitudes, normas, valores, actividades, obligaciones e intenciones que envuelven su trabajo profesional. En este trabajo se presentan algunas herramientas para caracterizar la identidad profesional del profesorado de Matemáticas, basadas en la literatura, atendiendo a cuatro categorías: Orientación Profesional, Orientación a la Tarea, Autoeficacia y Compromiso con la Enseñanza. Valorar la propia identidad profesional de cada docente contribuye a un profundo entendimiento personal del trabajo profesional, además de permitir descubrir fortalezas, deficiencias y pautas para mejorarlo. Además, se presentarán algunos resultados de la identidad profesional de profesorado de Matemáticas.

Palabras clave: Identidad profesional; Educación Matemática; Formación docente; Desarrollo profesional; Orientación Profesional; Orientación a la Tarea; Autoeficacia; Compromiso con la Enseñanza; Herramientas de análisis

La identidad profesional del profesorado de Matemáticas

Al igual que la propia enseñanza, aprender a enseñar eficazmente es un proceso largo y complejo que, al menos, incluye aspectos de formación, transformación, reflexión y aprendizaje; pero también es un proceso personal. Los docentes, en las mismas condiciones, responden de forma diferente y toman decisiones diferentes (Timostsuk y Ugaste, 2010).

Un aspecto que puede contribuir a la eficacia del docente y a su desarrollo profesional es la percepción de su identidad profesional (Flores y Day, 2006). La identidad profesional implica un proceso dinámico que abarca la interpretación de la propia experiencia dentro y fuera del aula, junto con las creencias sobre qué significa ser docente y el tipo de docente que se desea llegar a ser. En este trabajo se entiende la identidad profesional como el proceso de conciliar, por un lado, la formación y los conocimientos profesionales, y, por otro, las características personales como biografía, creencias, actitudes, normas y valores en relación con la concepción general de enseñanza (Beijaard et al. 2004). Es decir, se considera la identidad profesional del docente como su interpretación personal de su trabajo profesional (Lamote y Engels, 2010).

La identidad profesional docente ha sido el objetivo de numerosos estudios en educación en diversos sentidos (Darragh, 2016; Hong, 2010; Pillen et al., 2013). Este estudio se centra en las características de la identidad profesional del profesorado de Matemáticas. Avanzar en su conocimiento puede ayudar a la docencia y la investigación de la comunidad educativa internacional de Educación Matemática.

La literatura ha identificado características de la identidad profesional de docentes y futuros docentes de diversas maneras. Por ejemplo, Beijaard et al. (2000), basándose en Shulman (1987), analizaron cómo las identidades profesionales podrían configurarse en función de los conocimientos y las habilidades profesionales en tres sentidos: la materia (experiencia en la materia); la planificación, ejecución y evaluación de los procesos de enseñanza-aprendizaje (experiencia didáctica); y el desarrollo social, emocional y moral del alumnado (experiencia pedagógica). Estudios posteriores utilizaron estas tres áreas como base para el análisis de la identidad profesional (por ejemplo, Lamote y Engels, 2010; Löfström et al., 2010). Canrinus et al. (2012) exploraron la identidad profesional del profesorado de secundaria mediante un conjunto de indicadores -satisfacción laboral, autoeficacia, compromiso ocupacional y cambio en el nivel de motivación-, a partir de los cuales identificaron tres perfiles: insatisfecho y desmotivado; motivado y comprometido afectivamente; y con dudas sobre la competencia. Otros trabajos caracterizaron la identidad profesional del profesorado de Matemáticas en relación con contenidos matemáticos específicos (por ejemplo, Cyrino, 2016). En este trabajo se ha considerado el de Lamote y Engels (2010), que configuró las características de la identidad profesional a partir de cuatro escalas: Orientación Profesional, Orientación a la Tarea, Autoeficacia y Compromiso con la Enseñanza.

Algunas herramientas de análisis para caracterizar la identidad profesional del profesorado de Matemáticas

Algunas herramientas que pueden caracterizar la identidad profesional del profesorado de Matemáticas se presentan a continuación. Se han construido basadas en la literatura y se incluyen

en trabajos previos. Se van a organizar considerando las escalas de Lamote y Engels (2010), mencionadas anteriormente. En concreto, en cada caso:

- a) Orientación Profesional: interpretación del docente de lo que cree que es importante en su trabajo, es decir, lo que un docente debe saber y cómo debe actuar (Lamote y Engels, 2010). La Orientación Profesional está fuertemente influenciada por el conocimiento profesional (Beijaard et al., 2000; Lamote y Engels, 2010). Así, se vincula al conjunto de competencias y destrezas profesionales que los docentes conocen y en las que basan sus decisiones (Chamoso y Cáceres, 2009). Referido al conocimiento profesional para la enseñanza de Matemáticas es aceptado el modelo Conocimiento Matemático para la Enseñanza (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT) de Ball et al. (2008), basado en Shulman (1987), que se organiza en Conocimiento del Contenido de la Materia (Subject Matter Knowledge, SMK) y Conocimiento Pedagógico del Contenido (Pedagogical Content Knowledge, PCK; Tabla 1).

Tabla 1

Componentes de Orientación Profesional, con definiciones y ejemplos

Dominio	Categoría	Ejemplos
Conocimiento del Contenido de la Materia (SMK): Conocimientos sobre Matemáticas que los profesores necesitan para enseñar de forma eficaz	Conocimiento Común del Contenido (CCK): Conocimiento matemático que se utiliza en la enseñanza y es común a otras profesiones u ocupaciones que también utilizan Matemáticas	<i>“[Para ser docente es necesario] tener conocimientos matemáticos”</i>
	Conocimiento Especializado del Contenido (SCK): Conocimiento matemático que permite desarrollar la enseñanza y que incluye, por ejemplo, representar ideas matemáticas, explicar reglas o procedimientos y comprender diversos métodos de resolución de problemas	<i>“[...] el razonamiento o el desarrollo de estrategias matemáticas ayudan mucho a ser buen docente”</i>
	Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK): Conocimiento de, por ejemplo, cómo diferentes contenidos matemáticos se relacionan entre sí, de cómo un determinado contenido puede considerarse con diferentes niveles de dificultad o de cómo establecer conexiones intra o extra-matemáticas	<i>“También es importante tener conocimientos de otras áreas de conocimiento porque permite ser creativo y relacionarlas con las matemáticas [...]”</i>
Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK): Conocimiento de la relación entre el contenido matemático y la forma de enseñarlo, según la percepción	Conocimiento del Contenido y del Curriculum (KCC): Conocimiento de programas y materiales instruccionales para facilitar el aprendizaje matemático	<i>“[...] conocer el currículo permite relacionar las matemáticas escolares con otras áreas del conocimiento en el nivel adecuado [...]”</i>
	Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT): Conocimiento del diseño de instrucción y la relación entre el conocimiento matemático y los objetivos de aprendizaje de los estudiantes que incluye, por ejemplo, estrategias de enseñanza, evaluación del aprendizaje, recursos y tipos de tareas de instrucción	<i>“También me gustaría aprender a elaborar materiales y recursos para facilitar la enseñanza y aprendizaje matemático”</i>

profesional docente	Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS): Conocimiento de cómo los estudiantes piensan, conocen o aprenden contenidos matemáticos concretos, lo que permite adaptar la enseñanza a cada estudiante	<i>“Conocer las partes [de las matemáticas] que causan más problemas a los estudiantes que permite anticiparse y minimizar las dificultades para entenderlas”</i>
---------------------	---	---

Fuente: propia de la investigación

- b) Orientación a la Tarea: percepción del docente de las teorías personales con respecto a su tarea principal, que puede resumirse en las preguntas: ¿Qué quiero lograr con mis alumnos y cómo quiero hacerlo? (Lamote y Engels, 2010). En este trabajo se relaciona con la práctica del aula y se organiza en torno a tres elementos: Contenido Matemático, Promoción de la Participación y Consideración del Aprendizaje del Estudiante (adaptado de Li and Stylianides, 2018; Tabla 2):

Tabla 2
Componentes de Orientación a la Tarea, con definiciones y ejemplos

Dominio	Categoría	Ejemplos
Contenido Matemático (MC): Decisiones instruccionales relacionadas con el contenido matemático en el desarrollo del proceso de aprendizaje	Tareas Desafiantes (CT): Se utilizan tareas en forma de reto para abordar el aprendizaje matemático, por ejemplo, en forma de problemas o proyectos, o relacionando las Matemáticas con la vida real u otras áreas de conocimiento	<i>“[...] desarrollar conocimientos en forma de retos [...]”</i> <i>“[...] desarrollar un aprendizaje basado en problemas”</i> <i>“[...] basar la organización de las clases en el trabajo por proyectos”</i> <i>“[...] hay que aprender trigonometría en la calle para que sea real [...]”</i>
	Recursos (R): Se utiliza algún tipo de recurso para abordar el aprendizaje de contenidos matemáticos	<i>“[...] relacionar siempre los contenidos con algún tipo de juego o aplicación de las TIC”</i>
Promoción de la Participación (PP): Decisiones instruccionales relacionadas con la participación de los estudiantes y el trabajo colaborativo en el desarrollo del proceso de aprendizaje	Participación Autónoma (AP): Se considera la participación de cada estudiante en el proceso de aprendizaje	<i>“[...] para que los estudiantes tengan confianza en expresarse abiertamente y exponer sus problemas o dudas”</i>
	Participación Colaborativa (CP): Se considera la participación colaborativa de los estudiantes en el proceso de aprendizaje	<i>“[...] Creo que es muy importante facilitar el trabajo cooperativo sobre el individual [para el aprendizaje matemático] [...]”</i>
Consideración del Aprendizaje del Estudiante (SL): Decisiones instruccionales relacionadas con cada estudiante y con su reflexión crítica en el desarrollo del proceso de aprendizaje	Pensamiento crítico del estudiante (SCT): La instrucción fomenta la capacidad del estudiante de analizar, interpretar y sintetizar información, de manera reflexiva, razonada y creativa, por ejemplo, a través de preguntas o aprovechando errores	<i>“[...] que plantea preguntas a los estudiantes para que piensen y reflexionen [...]”</i> <i>“[...] convierte los errores de los estudiantes en oportunidades de aprendizaje [...]”</i>
	Enseñanza adaptativa (AT): La instrucción considera las diferencias individuales y adapta el	<i>“[...] con una metodología que tenga en cuenta los intereses de los</i>

proceso de enseñanza a cada estudiante, por ejemplo, teniendo en cuenta el conocimiento previo o mediante una evaluación formativa	<i>estudiantes y sus conocimientos previos</i> “[...] estar siempre atento a que la actividad docente consiga los resultados esperados en términos de aprendizaje”
--	---

Fuente: propia de la investigación

- c) Autoeficacia: percepción del docente de sus capacidades para lograr los resultados deseados de participación y aprendizaje de los alumnos (Lamote y Engels, 2010). En este trabajo se organiza en torno a los siguientes aspectos: Conocimiento Profesional; Práctica de Aula; Estados Fisiológicos, Afectivos y Motivacionales; Cooperación con Colegas y Padres; y Experiencia (más detalle, Salomón y otros, 2024; Tabla 3).

Tabla 3

Componentes de Autoeficacia docente, con definiciones y ejemplos

Autoeficacia con relación a...			
Dominios/	Subdominios	Categorías	Ejemplos
Conocimiento Profesional (CP): Conjunto de competencias profesionales que conocen los docentes y en las que basan sus decisiones	Conocimiento Matemático para la Enseñanza (SMK)	Conocimiento Común del Contenido (CCK)	“Necesito refrescar y profundizar mis conocimientos matemáticos” (-)
		Conocimiento Especializado del Contenido (SCK)	“En la universidad se proporciona una visión amplia del conocimiento matemático y nos enseñan a pensar [...], lo que permite rapidez de pensamiento y poder abordar los problemas de diferentes maneras” (+)
		Conocimiento del Horizonte Matemático (HCK)	“En la universidad he aprendido a aplicar las matemáticas a contextos reales, por ejemplo, en medicina o mecánica” (+)
	Conocimiento pedagógico del contenido (PCK)	Conocimiento del Contenido y del Currículo (KCC)	“Carezco del conocimiento suficiente para usar el material adecuado en cada momento” (-)
		Conocimiento del Contenido y la Enseñanza (KCT)	“Conozco los distintos enfoques que se pueden dar para que los alumnos comprendan” (+)
		Conocimiento del Contenido y los Estudiantes (KCS)	“Conozco dónde los alumnos presentan dificultades y qué debo hacer para que comprendan los contenidos” (+)
Práctica de Aula (PA): Decisiones instruccionales del docente en el aula para conseguir sus metas educativas, a partir de su conocimiento profesional, su criterio y su reflexión		Estrategias de enseñanza (EE)	“Me gusta reconducir las explicaciones haciendo pensar al alumno” (+) “Las explicaciones que pueda dar son demasiado rápidas para el alumno” (-) “Crearé tareas innovadoras que permitan un aprendizaje significativo de los alumnos” (+) “Creo que podría diseñar clases amenas, imprevisibles y divertidas para atraer la atención de los alumnos” (+)
		Participación de los estudiantes (PE)	“Creo que un aprendizaje significativo es más fácil conseguirlo con la participación de toda la clase, no únicamente del profesor” (+)
		Manejo del aula (MA)	“No siento que sepa controlar una clase” (-)

Estados Fisiológicos, Afectivos y Motivacionales (FAM): Reacciones fisiológicas, afectivas y motivaciones del docente relacionadas con su trabajo y su desarrollo profesional	Fisiológicos y afectivos (FA)	<i>“Siento nervios al hablar en público” (-)</i> <i>“Me afecta muchísimo cometer errores o fracasar en algo” (-)</i>
	Motivacionales (M)	<i>“Una de mis potencialidades es el análisis crítico de mi labor docente” (+)</i> <i>“Tengo predisposición para seguir formándome siempre, tanto en aspectos matemáticos como en didácticos” (+)</i>
Cooperación con Colegas y Padres (CCP): Relaciones colaborativas y sociales del docente con la comunidad educativa	Colegas (C)	<i>“Considero importante el trabajo en equipo con compañeros de otras áreas, porque hace que se enriquezca el conocimiento” (+)</i>
	Padres (P)	<i>“No sabría relacionarme con las familias” (-)</i>
Experiencia (E): Vivencias previas personales o profesionales del docente relacionadas con su labor docente	En docencia reglada (DR)	<i>“Considero una debilidad mi falta total de experiencia” (-)</i>
	En docencia no reglada (DNR)	<i>“Considero que haber impartido clases particulares me ha formado de una manera práctica” (+)</i>
	No docente (ND)	<i>“Tengo experiencia externa al ámbito escolar” (+)</i>
En cada ejemplo se especifica si es en sentido positivo (+) o en sentido negativo (-)		

Fuente: propia de la investigación

- d) Compromiso con la Enseñanza: percepción del docente de cómo se siente psicológicamente conectado a la profesión (Lamote y Engels, 2010). En este trabajo se organiza en torno a los siguientes aspectos: Compromiso con la profesión, Compromiso con los estudiantes, Compromiso con la enseñanza en el aula y Compromiso con el contexto educativo (Franson y Frelin, 2016; Shu, 2022; Thien et al., 2014; Yang et al., 2019; Zhang et al., 2019; Tabla 4).

Tabla 4

Componentes de Compromiso con la Enseñanza, con definiciones y ejemplos

Dominio	Subdominio	Ejemplos
Compromiso con la profesión (CP): Vocación y motivación del docente por el ejercicio de su labor, en general, y de la enseñanza de las Matemáticas, en particular	Motivación profesional (MP)	<i>“Destaco mi entusiasmo por la enseñanza”</i> <i>“... mi pasión por las Matemáticas...”</i>
	Desarrollo profesional (DP)	<i>“Para mí es indispensable la predisposición a la formación continua”</i> <i>“Considero que todo profesor debe ser autocrítico con su propia práctica docente”</i> <i>“Creo que tener años de experiencia debe ayudar mucho”</i>
	Motivación ejercida en el alumnado (MA)	<i>“...despertando en mis alumnos interés por aprender”</i> <i>“Me gustaría ser un profesor que pudiese motivar al alumno en su interés por las Matemáticas”</i> <i>“... y ser una profesora que interesase a todos los alumnos”</i>
	Objetivos de aprendizaje para el alumnado (OA)	<i>“Mi objetivo es formar ciudadanos competentes”</i> <i>“Querría ser capaz de transmitir valores al alumnado”</i> <i>“Me gustaría contagiar el afán de superación”</i> <i>“...que [los alumnos] aprendan a razonar por qué se hace eso o para qué ...”</i> <i>“es necesario desarrollar en los alumnos habilidades interdisciplinarias, pues las Matemáticas no se presentan aisladas”</i>
Compromiso con los estudiantes (CS): Implicación profesional y personal del docente para lograr el aprendizaje y el bienestar de sus alumnos		

Compromiso con el aula (CA): Motivación del docente por la consecución de una práctica de aula eficaz y personalizada		<i>“que [los alumnos] vean que las Matemáticas son útiles y sirven para todo”</i>
	Atención al alumnado (AA)	<i>“... tratando a cada alumno de forma individual, adaptándose a sus características...”</i> <i>“...haciéndoles saber que pueden contar conmigo...”</i>
	Motivación hacia la enseñanza en el aula (MEA)	<i>“Debemos acometer las clases con el mayor entusiasmo”</i>
	Consideración de aspectos instruccionales relativos a la enseñanza en el aula (CAI)	<i>“...me permite sacar nuevas ideas para actividades que plantear a los alumnos”</i> <i>“Querría hacer uso de las nuevas tecnologías de forma continuada”</i> <i>“...realizaría comprobaciones constantes durante mis clases sobre su nivel de comprensión sobre lo que estoy explicando...”</i> <i>“...y quiero poner en práctica proyectos”</i> <i>“...debemos tener un control correcto de la clase”</i>
	Implicación con el centro educativo y el entorno (ICE)	<i>“El entorno hay que tenerlo en cuenta en todos los trabajos, tenemos que saber adaptarnos a él”</i>
Compromiso con el contexto educativo (CC): Consideración profesional del contexto educativo en que se produce la enseñanza	Colaboración con compañeros (CCo)	<i>“...trataría tener una buena conexión con el profesorado”</i>
	Colaboración con las familias (CPa)	<i>“También me gustaría ser un profesor que implique a los padres de los alumnos en su aprendizaje”</i>

Fuente: propia de la investigación

Algunos resultados de la experimentación

Estas herramientas para caracterizar la identidad profesional de docentes de Matemáticas, organizadas en las categorías de Orientación Profesional, Orientación a la Tarea, Autoeficacia y Compromiso con la Enseñanza, se han experimentado. En la experimentación participaron 98 (40 hombres, 40,8%, y 58 mujeres, 59,2%; edades comprendidas entre los 22 y los 45 años, media 25,0) futuros docentes de Matemáticas de Secundaria de las universidades públicas españolas de Cádiz, Cantabria, Granada, Salamanca y Valladolid. Los futuros docentes estaban cursando el Máster Universitario en Educación Secundaria (en adelante MDSE; 60 créditos, 1 curso académico), especialidad de Matemáticas, un requisito para ejercer como profesor o profesora en Educación Secundaria Obligatoria en España.

Los datos se obtuvieron en una de las sesiones del bloque específico de Didáctica de las Matemáticas del MDSE (2 horas) en la que cada estudiante reflexionó sobre el tipo de profesor o profesora de Matemáticas que le gustaría ser, teniendo en cuenta los aspectos que caracterizan a un buen docente y la formación necesaria para serlo (Timostsuk y Ugaste, 2010). En la primera parte introductoria de la sesión cada estudiante reflexionó, individualmente y por escrito, sobre su percepción de una clase típica de Matemáticas de su época escolar y el papel desempeñado por el docente en ella. La posterior discusión conjunta entre los alumnos y el profesor permitió caracterizar aspectos esenciales de una enseñanza tradicional de las Matemáticas e identificar aspectos que podrían contribuir a una enseñanza innovadora de las Matemáticas. En la segunda parte de la sesión cada estudiante reflexionó, individualmente y por escrito, sobre los conocimientos y habilidades necesarios para ser un buen profesor o profesora de Matemáticas de

secundaria, relacionándolos con su propia formación, sus conocimientos y habilidades, y la mejor manera de alcanzar el nivel requerido (estas reflexiones fueron los datos para el análisis). Un posterior debate conjunto entre el profesor y los futuros docentes permitió caracterizar aspectos fundamentales de la profesión docente (más detalle, Salomón y otros, 2024). Todos los estudiantes dieron su consentimiento para que sus reflexiones fueran utilizadas para la investigación.

Estas reflexiones se organizaron en unidades de información y se asignaron a las categorías Orientación Profesional, Orientación a la Tarea, Autoeficacia y Compromiso con la Enseñanza, y, posteriormente, en cada caso, a las subcategorías consideradas (en algunos casos se asignaron a más de una de ellas). Solo se contó una unidad de información para cada participante en cada nivel (dominio, subdominio y categoría), por lo que los totales no se acumulan.

Referido a Orientación Profesional, OP, todos los futuros docentes la aludieron de una forma u otra. En concreto, 98(100%) a Conocimiento del Contenido de la Materia, SMK (98, 100%, a CCK; 46, 46.9%, a SCK y 54, 55.1%, a HCK) y 85(87%) a Conocimiento Pedagógico del Contenido, PCK (27, 28%, a KCC; 77, 79%, a KCT y 56, 57%, a KCS). En cuanto al número de categorías a las que los futuros docentes hicieron referencia, solo 24(24.5%) aludieron a las tres del subdominio SMK (CCK-SCK-HCK) y 14(14.3%) a las tres del subdominio PCK (KCC-KCT-KCS).

Con respecto a Orientación a la Tarea, OT, 87(88.8%) futuros docentes la aludieron de una forma u otra. En concreto 48(49%) a Contenido Matemático, MC (28, 28.6%, a CT y 30, 30.6%, a R); 67(68.3%) a Promoción de la Participación, PP (64, 65.3%, a AP y 14, 14.3%, a CP) y 64(65.3%) a Consideración del Aprendizaje del Estudiante, SL (28, 28.6%, a SCT; y 50, 51%, a AT). Solo 28(28.6%) futuros docentes aludieron a los tres dominios (MC-PP-SL).

Acerca de Autoeficacia, A, 81(82.7%) futuros docentes aludieron a Conocimiento Profesional, CP (72, 73.5%, a SMK y 49, 50%, a PCK); 85(86.7%) a Práctica de Aula, PA (55, 56.1%, a EE; 3, 3%, a PE y 73, 74.5%, a MA); 74(75.5%) a Estados Fisiológicos, Afectivos y Motivacionales, FAM (36, 36.7%, a FA y 65, 66.3%, a M); 17(17.3%) a Cooperación con Colegas y Padres, CCP (5, 5.1%, a C y 13, 13.3%, a P); y 39(39.8%) a Experiencia, E (29, 29.6%, a DR; 10, 10.2%, a DNR y 3, 3%, a ND); más detalle, Salomón y otros (2024).

Relativo a Compromiso con la Enseñanza, CE, 92(93.9%) futuros docentes aludieron a Compromiso con la profesión, CP (67, 68.4%, a MP y 82, 83.7%, a DP); 98(100%) a Compromiso con los estudiantes, CS (90, 91.8%, a MA; 74, 75.5%, a OA; y 86, 87.8%, a AA); 93(94.9%) a Compromiso con el aula, CA (76, 77.6%, a MEA y 87, 88.8%, a CAI); y 29(29.6%) a Compromiso con el contexto educativo, CC (20, 20.4%, a ICE; 16, 16.3%, a CCo; y 10, 10.2%, a CPa).

Discusión

Este trabajo intenta avanzar en la comprensión y en la caracterización de la identidad profesional de docentes de Matemáticas. Para ello se han creado herramientas, basadas en la literatura especializada, organizadas en las categorías de Orientación Profesional, Orientación a

la Tarea, Autoeficacia y Compromiso con la Enseñanza, que podrían utilizarse tanto para la docencia, por ejemplo, como una herramienta para la mejora de la práctica docente, como en futuras investigaciones.

A la vez, se muestran los resultados de la caracterización de la identidad profesional de futuros docentes de Matemáticas de secundaria. La formación inicial es un momento importante para que, cada futuro docente, que ha sido alumno, vivido diferentes modelos formativos y tenido experiencias en diversos ámbitos de la vida, cree bases sólidas de su identidad profesional (Pillen et al., 2013).

En concreto, se consideraron las reflexiones de 98 futuros docentes de Matemáticas de secundaria y se organizaron en las diferentes categorías consideradas. Todos aludieron a la Orientación Profesional y no todos a la Orientación a la Tarea, que parece mostrar una fuerte tendencia a considerar aspectos relacionados con el conocimiento, pero no tanto a considerar cómo este conocimiento se traslada a la práctica docente. Si bien es alentador que la mayoría de los docentes reconocieran la importancia de conocer los diferentes aspectos de enseñanza y de cómo estructurar las clases de Matemáticas, se habría agradecido una mayor alusión al tipo de conocimiento necesario para adaptar el contenido matemático al contexto del aula y las circunstancias del alumnado, así como al conocimiento de las directrices educativas y los programas didácticos de Matemáticas para facilitar el proceso de aprendizaje. Por otro lado, la escasez de alusiones de algunos futuros docentes a algunos dominios de Autoeficacia y de Compromiso con la Enseñanza puede significar la carencia de una visión globalizada de lo que conlleva la labor docente. Estos resultados deben ser considerados en los programas de formación en Educación Matemática, tanto por el profesorado de los cursos como por el de los centros de secundaria donde cada futuro docente realiza sus prácticas.

Lamote y Engels (2010) sugirieron que la identidad profesional de cada futuro docente debe construirse desde el inicio de su formación. Por ello, los programas de formación desempeñan un papel fundamental en la construcción de esa identidad aunque es previsible que, en cada caso, se modifique por el desarrollo profesional y la reflexión continua sobre qué significa ser un buen docente y cómo lograrlo (véase, por ejemplo, Hong, 2010). Para ello, este trabajo podría ayudar a identificar carencias y aspectos que podrían mejorarse ya sea, por ejemplo, individualmente, mediante programas formativos o con la colaboración de colegas (Arslan et al., 2022). Todo esto debe entenderse en un contexto en el que el papel del docente es cada vez más importante en una sociedad cada vez más cambiante (Flores et al., 2006).

No se debe olvidar que la identidad profesional es algo personal de cada docente, por lo que es difícil encontrar una forma de categorizar a todos los docentes de la misma manera. En este sentido, los resultados obtenidos de los 98 futuros docentes de Matemáticas de secundaria deberían ser entendidos como información individualizada sobre cada uno de ellos en un momento específico, según su formación recibida y su desarrollo profesional. Es decir, deben considerarse indicadores de aspectos que priorizaron sus preocupaciones y de otros que deben mejorarse (Darragh, 2016). Hay que tener en cuenta que no todos los docentes adquieren la formación docente al mismo ritmo, ya que forma parte de un proceso de desarrollo personal.

Conclusiones

Es ampliamente reconocido que la investigación sobre la formación del profesor debe considerar la identidad profesional, aspecto que está recabando un interés creciente en los últimos años (Hong, 2010; Pillen et al., 2013). Para ello este trabajo incluye herramientas para caracterizar la identidad profesional de profesores de Matemáticas organizadas en las categorías de Orientación Profesional, Orientación a la Tarea, Autoeficacia y Compromiso con la Enseñanza (Lamote y Engels, 2010). Además, se muestran algunos resultados de futuros docentes de Matemáticas de secundaria que permiten ayudar a entender cómo perciben su futura labor docente.

Algunas limitaciones de este estudio son que las herramientas creadas, basadas en la literatura, necesitarían más experimentación. Además, los resultados se basan en las reflexiones de futuros docentes y no siempre es fácil conseguir reflexiones adecuadas. En ese sentido, los resultados de este trabajo quizás se podrían haber complementado con entrevistas en cada caso para profundizar en los datos obtenidos.

Todo este trabajo tiene obvias implicaciones educativas. En concreto, se podrían utilizar las herramientas creadas al inicio y al final de un programa de formación para valorar su efectividad en el desarrollo de esa identidad profesional. También, la sesión desarrollada para recoger los datos que se utilizaron para conseguir los resultados se podría adaptar para implementarla en cursos de formación de diferentes niveles educativos y en diferentes contextos.

Una posibilidad de continuar este trabajo podría ser hacer un seguimiento de los futuros docentes de Matemáticas de secundaria, cuyas reflexiones se consideraron para conseguir los resultados, en sus primeros años en ejercicio o en diversos momentos de su desarrollo profesional, y comparar los resultados obtenidos (Losano et al., 2018). Estos resultados también podrían profundizarse teniendo en cuenta, por ejemplo, el género de los futuros docentes, la formación en Grado previa al desarrollo del máster, el contexto donde se realizó esa formación o la experiencia personal en la enseñanza obligatoria (Flores y Day, 2006). Identificar aspectos claves que pueden tener influencia en la identidad profesional podría ser de interés.

Las herramientas mostradas también se podrían experimentar con docentes de Matemáticas de diferentes niveles educativos, ya sea en formación o en ejercicio, y comparar los resultados. Desarrollar un estudio similar en contextos de formación en otros países podría proporcionar resultados de interés que podrían ser comparados con los de este trabajo. Caracterizar la identidad profesional de futuros profesores de secundaria de otras áreas, basándose en sus respectivos marcos teóricos de conocimiento profesional, y comparar los resultados con los de este estudio también podría ser un objetivo para futuras investigaciones. Todo ello podría ayudar a comprender la identidad profesional de los docentes o futuros docentes de Matemáticas.

Referencias

- Arslan, O., Haser, Ç., & Van Zoest, L.R. (2022). The mathematics teacher identity of two early career mathematics teachers and the influence of their working communities on its development. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 25(4), 429-452. <https://doi.org/10.1007/s10857-021-09498-0>

- Ball, D.L., Thames, M.H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Beijaard, D., Meijer, P.C., & Verloop, N. (2004). Reconsidering research on teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education*, 20(2), 107-128. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2003.07.001>
- Beijaard, D., Verloop, N., & Vermunt, J.D. (2000). Teachers' perceptions of professional identity: an exploratory study from a personal knowledge perspective. *Teaching and Teacher Education*, 16(7), 749-764. [https://doi.org/10.1016/S0742-051X\(00\)00023-8](https://doi.org/10.1016/S0742-051X(00)00023-8)
- Canrinus, E.T., Helms-Lorenz, M., Beijaard, D., Buitink, J., & Hofman, W.H.A. (2012). Self-efficacy, job satisfaction, motivation and commitment: exploring the relationships between indicators of teachers' professional identity. *European Journal of Psychology of Education*, 27, 115-132. <https://doi.org/10.1007/s10212-011-0069-2>
- Chamoso, J.M. y Cáceres, M.J. (2009). Analysis of the reflections of student-teachers of Mathematics when working with learning portfolios in Spanish university classrooms. *Teaching and Teacher Education*, 25(1), 198-206. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2008.09.007>
- Cyrino, M.C. (2016). Mathematics Teachers' Professional Identity Development in Communities of Practice: Reifications of Proportional Reasoning Teaching. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(54), 165-187. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n54a08>
- Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 93, 19-33. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9696-5>
- Flores, M.A., & Day, C. (2006). Contexts which shape and reshape new teachers' identities: a multi-perspective study. *Teaching and Teacher Education*, 22(2), 219-232. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.09.002>
- Fransson, G., & Frelin, A. (2016). Highly committed teachers: What makes them tick? A study of sustained commitment. *Teachers and Teaching*, 22(8), 896-912. <https://doi.org/10.1080/13540602.2016.1201469>
- Hong, J.Y. (2010). Pre-service and beginning teachers' professional identity and its relation to dropping out of the profession. *Teaching and Teacher Education*, 26(8), 1530-1543. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.06.003>
- Lamote, C., & Engels, N. (2010). The development of student teachers' professional identity. *European Journal of Teacher Education*, 33(1), 3-18. <https://doi.org/10.1080/02619760903457735>
- Li, H-C., & Stylianides, A.J. (2018). An examination of the roles of the teacher and students during a problem-based learning intervention: lessons learned from a study in a Taiwanese primary mathematics classroom. *Interactive Learning Environments*, 26(1), 106-117. <https://doi.org/10.1080/10494820.2017.1283333>
- Löfström, E., Poom-Valickis, K., Hannula, M.S., & Mathews, S.R. (2010). Supporting emerging teacher identities: can we identify teacher potential among students? *European Journal of Teacher Education*, 33(2), 167-184. <https://doi.org/10.1080/02619761003631831>
- Losano, L., Fiorentini, D., & Villarreal, M. (2018). The development of a mathematics teacher's professional identity during her first year teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21, 287-315. <https://doi.org/10.1007/s10857-017-9364-4>
- Pillen, M.T., Den Brok, P.J., & Beijaard, D. (2013). Profiles and change in beginning teachers' professional identity tensions. *Teaching and Teacher Education*, 34, 86-97. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2013.04.003>
- Salomón Plata, M.S., Chamoso Sánchez, J.M., Diego Mantecón, J.M., y Rodríguez Sánchez, M.M. (2024). Caracterización de la autoeficacia de futuros profesores de Matemáticas de educación secundaria. *Uniciencia*, 38(1), 1-19. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.12>
- Shu, K. (2022). Teachers' Commitment and Self-Efficacy as Predictors of Work Engagement and Well-Being. *Frontiers in Psychology*, 13, 1-7. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.850204>
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Thien, L.M., Razak, N.A., & Ramayah, T. (2014). Validating Teacher Commitment Scale Using a Malaysian Sample. *SAGE Open*, 4(2). <https://doi.org/10.1177/2158244014536744>
- Timostsuk, I., & Ugaste, A. (2010). Student teachers' professional identity. *Teaching and Teacher Education*, 26(8), 1563-1570. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2010.06.008>
- Yang, G., Badri, M., Al Rashedi, A., & Almazroui, K. (2019). Predicting teacher commitment as a multi-foci construct in a multi-cultural context: the effects of individual, school, and district level factors. *Teachers and Teaching*, 25(3), 301-319. <https://doi.org/10.1080/13540602.2019.1588722>
- Zhang, L., Yu, S., & Liu, H. (2019). Understanding teachers' motivation for and commitment to teaching: profiles of Chinese early career, early childhood teachers. *Teachers and Teaching*, 25(7), 890-914. <https://doi.org/10.1080/13540602.2019.1670155>



Modelización y generación de problemas matemáticos con fotografías, GeoGebra y herramientas de IA

Karina Amalia **Rizzo**

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda y Universidad Siglo 21
Argentina

karinarizzo71@gmail.com

Resumen

Esta conferencia aborda la integración innovadora de fotografías, GeoGebra e inteligencia artificial (IA) en la creación y resolución de problemas matemáticos, a partir de la experiencia internacional del concurso FotoGebra (www.fotogebra.org). Se presentan fundamentos teóricos vinculados a la Educación Matemática, la modelización, la visualización y las tecnologías emergentes, que permiten transformar la enseñanza al fomentar la creatividad, el pensamiento crítico y el aprendizaje contextualizado. Además, se explora cómo la IA puede mejorar enunciados, generar variantes y construir pistas de resolución adaptativas, siempre en sinergia con la modelización en GeoGebra (Hohenwarter y Jones, 2007). El documento incluye ejemplos desarrollados en FotoGebra, reflexiones sobre el rol pedagógico de la IA, y analiza los desafíos éticos y metodológicos asociados a su uso en el aula. Se concluye con proyecciones para la práctica educativa y posibles líneas futuras de investigación enmarcadas en propuestas STEAM.

Palabras clave: Aprendizaje activo; Educación Matemática; Ética educativa; FotoGebra; GeoGebra; Inteligencia Artificial; Modelización matemática; Resolución de problemas.

Introducción

La Educación Matemática contemporánea enfrenta el desafío de articular la enseñanza de conceptos abstractos con el desarrollo de habilidades significativas para un mundo cada vez más digital e interconectado. El avance de las tecnologías digitales, particularmente en el campo de la inteligencia artificial (IA), ha transformado las formas de enseñar, aprender y producir conocimiento. En la Educación Matemática, estas transformaciones abren oportunidades inéditas

para resignificar el vínculo entre los estudiantes, los contenidos y el mundo. En este contexto, la modelización matemática se presenta como una estrategia potente para vincular la Matemática escolar con situaciones reales, promoviendo aprendizajes contextualizados y el desarrollo de competencias como el pensamiento crítico, la creatividad y la resolución de problemas (Blum & Leiss, 2007).

Durante los últimos años, el uso de tecnologías digitales ha facilitado la creación de escenarios dinámicos para la exploración de fenómenos matemáticos. En particular, herramientas como GeoGebra han permitido vincular la visualización gráfica con la resolución de problemas significativos, promoviendo aprendizajes activos (Drijvers, 2015). Más recientemente, la incorporación de IA generativas ha ampliado estas posibilidades, ofreciendo recursos para personalizar aprendizajes, generar contenidos adaptativos y asistir en la creación de situaciones problemáticas (Holmes et al., 2019). Este artículo desarrolla el fundamento teórico de esta propuesta, ejemplifica su implementación mediante casos del concurso internacional FotoGebra y expone una propuesta interdisciplinaria orientada a la innovación didáctica. También se abordan desafíos éticos y pedagógicos asociados al uso de tecnologías emergentes.

Fundamentación teórica

Antes de desarrollar los ejes teóricos, es necesario situar el enfoque general que orienta esta propuesta. Se sustenta en el aprendizaje activo (Freeman et al., 2014), que promueve la participación estudiantil y la resolución de problemas en contextos significativos; en la teoría de la visualización matemática como mediadora del aprendizaje (Kaput, 1998); y en la modelización matemática como proceso central del pensamiento matemático (Blum & Borromeo Ferri, 2009). La integración de tecnologías digitales debe guiarse por principios pedagógicos sólidos (Mishra & Koehler, 2006), entendiendo la IA como un recurso que potencia la generación de problemas y la personalización, siempre bajo orientación docente. Las herramientas digitales transforman la actividad matemática y la construcción de conocimiento, especialmente cuando se introducen herramientas como GeoGebra y la IA en la creación de problemas matemáticos (Monaghan, Trouche y Borwein, 2016; Brito et al., 2024).

Modelización matemática en educación

La modelización matemática permite a los estudiantes explorar, analizar y resolver problemas en contextos reales. Según Blum y Leiss (2007), modelizar implica un proceso complejo que va desde la comprensión de una situación hasta su interpretación matemática, la resolución del modelo y la recontextualización de los resultados. Esta práctica favorece la articulación entre las Matemáticas escolares y el mundo, promoviendo aprendizajes significativos y competencias transversales.

Como sostienen Kaiser y Sriraman (2006) y Stillman et al. (2013), la modelización no solo contribuye al desarrollo de habilidades técnicas, sino también de capacidades epistemológicas, heurísticas y metacognitivas, posicionando a los estudiantes como agentes activos en la construcción del conocimiento matemático. En esta línea, Schoenfeld (2016) enfatiza que aprender Matemáticas implica también aprender a pensar matemáticamente, desarrollando

estrategias de resolución de problemas, procesos metacognitivos y capacidad de dar sentido a los conceptos.

En este marco, la inclusión de contextos visuales, como las fotografías, estimula la creatividad y el pensamiento espacial, facilitando el pasaje entre lo concreto y lo abstracto. El uso de imágenes reales en el aula ha sido reconocido como una estrategia potente para contextualizar problemas y generar conexiones significativas con el entorno (Rizzo y Costa, 2019). Las fotografías motivan la formulación de preguntas, promueven la exploración visual y favorecen procesos de modelización aplicados a situaciones del mundo real.

GeoGebra como herramienta para la modelización

GeoGebra integra geometría, álgebra, cálculo y estadística en un entorno interactivo y visual. Gracias a sus representaciones dinámicas, favorece el vínculo entre lo gráfico y lo algebraico, potenciando la capacidad de análisis. Su impacto en la enseñanza de las Matemáticas ha sido ampliamente documentado: Hohenwarter y Jones (2007) destacan su capacidad para facilitar la comprensión de conceptos a través de la manipulación de representaciones múltiples, mientras que Assadi y Cretu (2023) y Zulnaidi et al. (2020) subrayan su efecto positivo en el rendimiento académico en temas como funciones y cálculo.

Desde la perspectiva de la modelización, GeoGebra permite representar gráficamente situaciones del entorno, ajustar curvas a datos empíricos, explorar propiedades y simular comportamientos matemáticos. Su uso fomenta la comprensión conceptual, el aprendizaje exploratorio, el enfoque basado en competencias y el trabajo colaborativo (Drijvers, 2015; Rizzo y Costa, 2019; Lavizca, et al., 2010). Además, promueve autonomía al permitir a estudiantes tomar decisiones sobre modelos, validarlos y modificarlos (Pochulu, 2018; Rizzo & Volta, 2016). Estas características lo convierten en una herramienta clave para conectar la Matemática escolar con fenómenos reales y para enriquecer experiencias de aprendizaje activo.

Inteligencia artificial y nuevas competencias educativas

La irrupción de herramientas de IA generativa (texto e imagen) han transformado el panorama educativo. Estas tecnologías no solo permiten reformular enunciados o crear variantes visuales, sino que también amplían las posibilidades de personalización del aprendizaje. Como señala Selwyn (2020), la IA no es una simple herramienta, sino una invitación a repensar qué enseñar, cómo hacerlo y qué significa aprender en un mundo cada vez más automatizado.

En el ámbito de la Educación Matemática, la IA ha comenzado a expandirse con usos que incluyen la generación de problemas adaptativos, la personalización de enunciados y la creación de secuencias didácticas ajustadas a distintos niveles de complejidad (Holmes et al., 2019; Caicedo, 2023; Quiroz Rosas, 2023; Panqueban y Huincahue, 2024). Estas herramientas ofrecen recursos para potenciar la creatividad docente y diversificar las propuestas de enseñanza. Desde la experiencia del concurso FotoGebra, se exploraron aplicaciones de IA generativa que permiten enriquecer la formulación de problemas, personalizarlos y crear variantes con diferentes grados de dificultad.

En este escenario emergen competencias urgentes como la alfabetización en IA, la adaptabilidad cognitiva, el autoaprendizaje, el pensamiento crítico y la metacognición. Tal como afirma Luckin (2018), se requiere una redefinición del rol docente, que debe evolucionar de transmisor de contenidos a curador, facilitador y mediador del conocimiento. Estas ideas se articulan con el enfoque TPACK (Mishra & Koehler, 2006), que propone integrar el conocimiento tecnológico, pedagógico y disciplinar para diseñar experiencias de aprendizaje significativas en entornos complejos.

Educación Matemática con enfoque STEAM

La integración de Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas (STEAM) ha cobrado relevancia como estrategia para abordar problemáticas reales desde una perspectiva interdisciplinaria. Según Yakman (2008), este enfoque permite desarrollar habilidades clave como la creatividad, la colaboración, el pensamiento crítico y la resolución de problemas complejos.

En esta línea, Drijvers (2015) señala que la incorporación de tecnologías digitales no solo facilita la comprensión de conceptos fundamentales, sino que también potencia la capacidad de resolución de problemas y el pensamiento crítico, competencias centrales en la educación STEAM. A su vez, Arteaga Valdés et al. (2019) destacan que el uso de GeoGebra incrementa la motivación de los estudiantes y les permite visualizar y experimentar con conceptos matemáticos de forma dinámica e interactiva, favoreciendo así un aprendizaje más significativo y el desarrollo de habilidades para abordar problemas.

La modelización matemática se inscribe de manera natural en el enfoque STEAM, ya que exige establecer conexiones entre fenómenos reales y estructuras matemáticas. En este contexto, la fotografía, al igual que GeoGebra, actúa como un puente entre el arte y la Matemática, facilitando la transición entre conceptos abstractos y situaciones concretas. Esta integración permite explorar regularidades, simetrías, proporciones y curvas, entre otros aspectos.

En este sentido, FotoGebra constituye una experiencia significativa que combina fotografía, tecnología digital y modelización matemática, promoviendo una enseñanza visual, contextualizada y activa que encarna los principios del enfoque STEAM.

El concurso FotoGebra como laboratorio didáctico

El concurso internacional FotoGebra, creado y coordinado por la autora de este artículo, se ha consolidado en más de una década como una experiencia didáctica innovadora que integra fotografía, modelización matemática y GeoGebra para promover creatividad, contextualización y pensamiento crítico en la enseñanza de las Matemáticas. El certamen está dirigido a estudiantes de nivel secundario, futuros docentes y público en general, organizándose en distintas categorías según el perfil del participante.

A diferencia de los enfoques tradicionales, FotoGebra parte de imágenes reales capturadas por los participantes, quienes identifican elementos matemáticos en su entorno y los transforman en problemas significativos. Esta práctica favorece la abstracción, fomenta la creatividad en el

diseño de enunciados y estimula estrategias diversas de resolución. Desde el punto de vista pedagógico, el concurso funciona como un laboratorio didáctico donde convergen la fotografía como arte y registro, GeoGebra como entorno dinámico, y la Matemática como lenguaje para modelar y argumentar.

Recientemente, se incorporaron herramientas de IA, para ampliar posibilidades creativas y didácticas. Modelos de lenguaje como GPT-5 pueden generar enunciados matemáticos a partir de prompts, y herramientas de imágenes como DALL·E permiten crear contextos visuales originales que inspiran nuevos problemas (Brown et al., 2020; Ramesh et al., 2021). Esta integración potencia el proceso de modelización, exigiendo análisis crítico y decisiones pedagógicas más complejas. Así, FotoGebra trasciende el formato de concurso para convertirse en un dispositivo pedagógico que favorece la innovación, la participación y la reflexión sobre la enseñanza de las Matemáticas en clave interdisciplinaria y tecnológicamente situada.

Ejemplos seleccionados de FotoGebra e integración de IA en la generación de problemas

Se analizan propuestas donde los participantes parten de una fotografía original para, por ejemplo, modelizar funciones, estimar áreas, calcular perímetros o plantear situaciones de optimización. Se muestran capturas de GeoGebra, gráficos y resoluciones propuestas, destacando el proceso de abstracción desde la imagen hasta la formulación matemática.

A continuación, se presentan algunos de esos ejemplos concretos que ilustran la utilización de modelos de lenguaje como GPT-4 y tres formas en que estas herramientas pueden aplicarse en el contexto de FotoGebra. Para ello, se toman como referencia dos trabajos presentados en el concurso: “Funciones estéticas” (Figura 1, Categoría 4, 2022, por Enrique Dalila) y “Producción de tapabocas” (Figura 2, Categoría 2, 2021, por Aquino Leyla, Cárdenas Blanca y Rastelli Mariano).



Figura 1. Funciones estéticas. Categoría 4. 2022

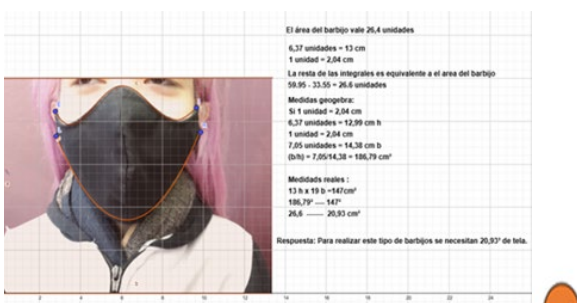


Figura 2. Producción de tapabocas. Categoría 2. 2021

"Funciones estéticas"

Situación problemática: Una manicurista quiere guardar digitalmente las ideas que se le ocurren para diseños de uñas. Quiere comenzar esta iniciativa practicando el uso de la computadora con el diseño que se realizó una cliente el día de hoy. Cree que sería útil usar Geogebra, ya que ella es buena en el manejo de este software. ¿Crees que es posible? ¿Cómo podrías ayudarla?

SITUACIÓN PROBLEMÁTICA

- A UN GRUPO DE EMPRENDEDORES LE SOLICITARON UN TIPO EN ESPECÍFICO DE TAPABOCAS, PARA ELLO LES ENVIARON UNA FOTO DE CÓMO LO QUERÍAN Y LAS MEDIDAS.

EL PROBLEMA QUE SE PRESENTA EN ESTA SITUACIÓN ES SABER CUÁNTA TELA SE NECESITA.

Utilización de prompt para mejorar la redacción de una situación problemática

En Ejemplo 1 (Funciones estéticas) y Ejemplo 2 (Producción de tapabocas), se utilizaron prompts para mejorar la redacción de las situaciones problemáticas. Esta intervención permitió estructurar los enunciados de manera más clara, enfatizar el problema matemático subyacente y fomentar la exploración de estrategias de solución. La mejora en la redacción no solo facilita la comprensión del problema, sino que también guía a los participantes hacia un abordaje más sistemático y reflexivo.

Situación problemática:

Una manicurista desea digitalizar y organizar sus diseños de uñas para futuras referencias. Para iniciar este proceso, ha tomado una fotografía de la mano de una cliente con un diseño muy creativo, en el que se pueden identificar formas que pueden modelarse con funciones matemáticas. Dado que tiene experiencia en el uso de GeoGebra, se pregunta si este software podría ayudarla a representar y analizar digitalmente sus diseños.

Preguntas:

- ¿Es posible utilizar GeoGebra para modelar los patrones del diseño de uñas?
- ¿Qué tipos de funciones matemáticas podrían representar mejor las formas observadas?
- ¿Qué herramientas de GeoGebra podrían facilitar el trazado y análisis de los diseños?
- ¿Cómo podrías ayudarla a llevar a cabo esta tarea de manera eficiente?

Ejemplo 1. Funciones estéticas. Mejorar redacción situación problemática

Situación problemática:

Un grupo de emprendedores ha recibido un pedido especial de tapabocas con un diseño específico. Para ello, les enviaron una fotografía del modelo deseado junto con sus medidas. El desafío que enfrentar es determinar cuánta tela se necesita para fabricar cada tapabocas de manera precisa y eficiente.

Preguntas:

- ¿Cómo pueden modelar matemáticamente la forma del tapabocas a partir de la imagen?
- ¿Qué herramientas podrían utilizar para calcular el área de tela necesaria?
- ¿Cómo podrían optimizar el uso del material para minimizar el desperdicio?

Ejemplo 2. Producción de tapabocas. Mejorar redacción situación problemática

Creación de diversas situaciones problemáticas a partir de la misma fotografía

En Ejemplos 3, 4 y 5 (Producción de tapabocas), se exploró la creación de múltiples situaciones problemáticas a partir de una misma fotografía. Por ejemplo, se plantearon preguntas relacionadas con proporciones, geometría y optimización de materiales. Esto enriquece el aprendizaje, permite trabajar distintos conceptos matemáticos y científicos, fomentando la creatividad y el pensamiento crítico.

1 Ajuste y Comodidad del Tapabocas

Situación problemática:

Un grupo de diseñadores está desarrollando un nuevo modelo de tapabocas ergonómico que se adapta mejor a diferentes tipos de rostros. Para ello, necesitan analizar cómo se ajusta el tapabocas a la cara de una persona, considerando medidas como el ancho, la altura y la curvatura del material.

Preguntas:

- ¿Cómo se podría modelar matemáticamente la forma del tapabocas para optimizar su ajuste?
- ¿Qué tipo de funciones o ecuaciones podrían representar mejor su curvatura?
- ¿Cómo podrían ajustar el diseño para diferentes tamaños de rostro?

Ejemplo 3. Producción de tapabocas. Creación de diversas situaciones problemática

2 Eficiencia del Filtrado y Seguridad

Situación problemática:

En tiempos de pandemia, la efectividad de un tapabocas depende de su ajuste y del material utilizado. Un grupo de investigadores quiere analizar si el diseño de un tapabocas visto en una fotografía es realmente eficiente para filtrar partículas del aire.

Preguntas:

- ¿Qué factores influyen en la eficacia del tapabocas más allá de su forma?
- ¿Cómo se podría analizar la relación entre el tamaño de los poros del material y su capacidad de filtrado?
- ¿Qué mediciones se podrían realizar para evaluar su efectividad en comparación con otros modelos?

Ejemplo 4. Producción de tapabocas. Creación de diversas situaciones problemática

3 Impacto Ambiental del Uso de Tapabocas

Situación problemática:

Cada día se desechan millones de tapabocas desechables, generando un impacto ambiental significativo. Un grupo de estudiantes quiere cuántos análisis tapabocas se utilizan en su comunidad y estimar el impacto en términos de residuos generados.

Preguntas:

- ¿Cómo se podría calcular la cantidad de residuos generados por el uso de tapabocas en un mes?
- ¿Cuánta tela se necesitaría si en lugar de tapabocas desechables se usaran reutilizables?
- ¿Qué alternativas sostenibles podrían implementarse para reducir la contaminación?

Ejemplo 5. Producción de tapabocas. Creación de diversas situaciones problemática

Auxilio de pistas para resolver situaciones problemáticas

En Ejemplos 6, 7 y 8 (Producción de tapabocas), se solicitaron pistas para resolver situaciones problemáticas. Estas pistas, generadas mediante IA, orientaron a los participantes en la identificación de variables, la formulación de hipótesis y la aplicación de conceptos matemáticos. Asimismo, "todas estas situaciones problemáticas pueden abordarse con la ayuda de GeoGebra y la fotografía" (OpenAI, 2025).

1 Ajuste y Comodidad del Tapabocas

🚀 Uso de GeoGebra:

- Se puede importar la fotografía en GeoGebra y superponer una cuadrícula para medir las dimensiones de los tapabocas.
- Se pueden modelar las curvas del tapabocas con funciones cuadráticas, exponenciales o spline para representar su forma.
- Se pueden realizar transformaciones geométricas (escalado, simetría) para adaptar el diseño a diferentes tamaños de rostro.

🚀 Solución:

- Se puede calcular la distancia entre puntos clave (nariz, mejillas, barbilla) para evaluar el ajuste.
- Se pueden definir ecuaciones para optimizar el diseño en función de la ergonomía.

Ejemplo 6. Producción de tapabocas. Ayuda para resolver situaciones problemática.

2 Eficiencia del Filtrado y Seguridad

🚀 Uso de GeoGebra:

- Se puede modelar la malla del tapabocas representando los poros como figuras geométricas (círculos, hexágonos, etc.).
- Se pueden calcular áreas de los poros y comparar con el tamaño de las partículas que deben filtrar.
- Se pueden realizar simulaciones con densidad de puntos para estimar la cantidad de aire filtrado.

🚀 Solución:

- Se puede estimar qué porcentaje del tapabocas es "abierto" (poros) y cuánto es material sólido.
- Se pueden analizar diferentes materiales y comparar su eficiencia en función de su diseño geométrico.

Ejemplo 7. Producción de tapabocas. Ayuda para resolver situaciones problemática

3 Impacto Ambiental del Uso de Tapabocas

🚀 Uso de GeoGebra:

- Se pueden representar datos de consumo de tapabocas en gráficos de barras o funciones de crecimiento.
- Se pueden modelar cálculos de residuos acumulados a lo largo del tiempo con funciones lineales o exponenciales.
- Se puede diseñar un modelo geométrico de tapabocas reutilizable y calcular la cantidad de tela necesaria.

🚀 Solución:

- Se pueden hacer estimaciones de reducción de residuos si se usan tapabocas de tela en lugar de desechables.
- Se puede calcular la cantidad de material necesario para fabricar tapabocas reutilizables de diferentes tamaños.

Ejemplo 8. Producción de tapabocas. Ayuda para resolver situaciones problemática

Estos ejemplos demuestran cómo la integración de modelos de lenguaje como GPT-4 en FotoGebra puede potenciar la creación y resolución de problemas matemáticos. La mejora en la redacción, la diversidad de situaciones problemáticas y el auxilio de pistas no solo enriquecen la experiencia de los participantes, sino que también fomentan el aprendizaje significativo y la conexión entre las Matemáticas y el mundo real. GeoGebra, como herramienta central, complementa este proceso al permitir la visualización y modelización de las situaciones, consolidándose como un recurso indispensable en la Educación Matemática contemporánea.

Objetivos de la conferencia

- Analizar el potencial didáctico de la fotografía y GeoGebra como herramientas de modelización matemática.

- Explorar las posibilidades que ofrece la IA para la generación y enriquecimiento de problemas.
- Reflexionar sobre el rol docente en entornos mediados por tecnologías emergentes.
- Compartir ejemplos y estrategias aplicables en contextos escolares y formativos.

Descripción general

La conferencia está orientada a docentes, formadores, investigadores y estudiantes interesados en la innovación didáctica con fotografía, GeoGebra e IA. Se propone un recorrido reflexivo y demostrativo sobre experiencias concretas, con espacio para el análisis de ejemplos y discusión de los desafíos éticos y pedagógicos que emergen de su implementación.

Integración de IA en la generación de problemas

En esta conferencia se presentan y discuten casos de uso de IA aplicados a la generación de problemas matemáticos. Estas experiencias ilustran cómo la IA puede: **mejorar la redacción de situaciones problemáticas** mediante prompts que clarifican consignas o adaptan el lenguaje a distintos niveles educativos; **generar variantes de enunciados** a partir de una misma fotografía, abordando diversos contenidos matemáticos; **proporcionar andamiajes** o pistas que guíen el proceso de resolución con ayudas graduadas; **diseñar alternativas visuales** mediante diversos generadores, creando escenarios problemáticos personalizables; y **explorar estructuras narrativas** que estimulen la curiosidad, la modelización y el análisis matemático. Se enfatizará que la IA puede enriquecer el banco de problemas y fomentar la creatividad docente, siempre desde una postura crítica y pedagógicamente fundamentada.

Discusión y desafíos

La incorporación simultánea de fotografía, GeoGebra e IA en la enseñanza de las matemáticas plantea oportunidades pedagógicas valiosas, pero también desafíos que deben ser analizados críticamente (Hughes y Scharff, 2020).

Oportunidades didácticas

Este enfoque favorece un *aprendizaje activo y contextualizado*, ya que el uso de imágenes reales aproxima la matemática al mundo cotidiano y refuerza su aplicabilidad; potencia la *creatividad docente y estudiantil* mediante la generación de enunciados a partir de situaciones reales con IA; estimula el *pensamiento crítico* al requerir la validación y reformulación de modelos; promueve la *autonomía y personalización*, al permitir adaptar contenidos a intereses y niveles; y mejora la *motivación*, dado que, cuando los estudiantes perciben autonomía, competencia y conexión con los contenidos, aumenta su compromiso (Ryan & Deci, 2000).

Consideraciones éticas y pedagógicas

Las consideraciones éticas y pedagógicas incluyen la necesidad de reconocer los **sesgos algorítmicos**, ya que las IA pueden reproducir estereotipos o errores si no se usan críticamente (Selwyn, 2020; Bender et al., 2021); garantizar **la privacidad y uso responsable**, formando a los estudiantes en una utilización ética que evite la dependencia acrítica (Gallent et al., 2023); asegurar la **equidad en el acceso**, contemplando las brechas digitales; y promover la **redefinición y formación docente**, ya que el rol del profesor evoluciona hacia curador, facilitador y mediador de experiencias, requiriendo capacitación que vaya más allá del uso instrumental e incorpore reflexión crítica y pedagógica (Luckin, 2018; Vallejo, 2024; Mishra & Koehler, 2006).

Nuevas competencias para un mundo emergente

En un ecosistema educativo en transformación, resulta imprescindible promover competencias como: Adaptabilidad cognitiva; Alfabetización en IA; Autoaprendizaje y pensamiento metacognitivo; Resiliencia educativa; Ciudadanía digital y ética tecnológica.

Estas habilidades trascienden lo disciplinar y preparan a los estudiantes para actuar en un mundo complejo e interconectado. El aula debe ser espacio para desarrollar estas competencias bajo mediación docente. La integración de IA y FotoGebra debe sustentarse en decisiones didácticas intencionales (Gumiero y Pazuch, 2024).

Conclusiones

La integración de fotografías, GeoGebra e inteligencia artificial en la enseñanza de las Matemáticas constituye una oportunidad significativa para repensar las prácticas pedagógicas y enriquecer los procesos de modelización. Este enfoque favorece una Matemática viva, conectada con el entorno, visualmente estimulante y abierta a la creatividad, aunque también plantea desafíos epistemológicos, éticos y didácticos que deben ser abordados críticamente.

El análisis de experiencias como el concurso FotoGebra demuestra que es posible articular arte, tecnología y Matemática en propuestas que desarrollen tanto habilidades técnicas como competencias transversales. En particular, se observa un impacto positivo en el pensamiento crítico, la abstracción, la visualización, la comunicación matemática, la motivación estudiantil y la capacidad de resolución de problemas. Además, esta integración permite: establecer conexiones significativas con situaciones reales, y ofrecer nuevas oportunidades para personalizar la enseñanza.

La incorporación de IA exige un reposicionamiento del rol docente, que pasa de ser transmisor de contenidos a mediador y curador de experiencias de aprendizaje. Como señalan Luckin (2018), Gumiero y Pazuch (2024) y Mishra & Koehler (2006), el valor educativo no reside en la herramienta en sí, sino en la intencionalidad pedagógica con la que se la integra.

De esta reflexión se desprenden varias líneas de acción: fortalecer la formación docente en el uso crítico y creativo de tecnologías emergentes; profundizar la investigación sobre el impacto de estas prácticas en distintos niveles educativos; promover marcos éticos y normativos que

garanticen equidad, privacidad y calidad de aprendizaje; y abrir la Educación Matemática a nuevas competencias (como alfabetización en IA, pensamiento computacional y resiliencia digital) esenciales para actuar en un mundo complejo e interconectado.

En síntesis, se propone una mirada innovadora y fundamentada para transformar la enseñanza de la Matemática, combinando rigor conceptual con apertura creativa y análisis crítico con entusiasmo por aprender. Este enfoque, materializado en el minicurso propuesto, invita a repensar la práctica docente desde una perspectiva interdisciplinaria y tecnológicamente situada.

Referencias y bibliografía

- Arteaga Valdés, Eloy, Medina Mendieta, Juan Felipe, & del Sol Martínez, Jorge Luis. (2019). El Geogebra: una herramienta tecnológica para aprender Matemática en la Secundaria Básica haciendo matemática. *Conrado*, 15(70), 102-108. Epub 02 de diciembre de 2019. Recuperado en 26 de julio de 2025, de http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1990-86442019000500102&lng=es&tlng=es
- Assadi, N. y Cretu, C. (2023) La influencia de la integración del software GeoGebra en el entorno educativo en los aspectos afectivos, conductuales y cognitivos de los futuros docentes de matemáticas. *Creative Education*, 14, 2503-2519. doi: <https://doi.org/10.4236/ce.2023.1412161>
- Bender, E. M., Gebu, T., McMillan-Major, A., & Shmitchell, S. (2021). On the dangers of stochastic parrots: Can language models be too big? *Proceedings of the 2021 ACM Conference on Fairness, Accountability, and Transparency*.
- Brito, C., Santín, B., Guambugete, D., & Cayambe, B. (2024). Aplicación de la inteligencia artificial en la resolución de problemas matemáticos y estadísticos. *Reincisol*, 3(6), 3117–3145. [https://doi.org/10.59282/reincisol.V3\(6\)3117-3145](https://doi.org/10.59282/reincisol.V3(6)3117-3145)
- Brown, T., Mann, B., Ryder, N., et al. (2020). Language models are few-shot learners. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33.
- Blum, W., & Borromeo Ferri, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 45–58.
- Blum, W., & Leiss, D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems? *Proceedings CERME 5*, 1623–1632.
- Caicedo, C. (2023). La enseñanza de las matemáticas en la era de la Inteligencia Artificial. *Aula Urbana*, 1(130). <https://www.idep.edu.co/articulo/mau-130/aula-vanguardia/La-ensenanza-de-las-matematicas-en-la-era-de-la-Inteligencia-Artificial>
- Drijvers, P. (2015). *Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't)*. Springer.
- Freeman, S., et al. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *PNAS*, 111(23), 8410–8415.
- Gallent, C., Zapata, A., & Ortego, J. (2023). El impacto de la inteligencia artificial generativa en educación superior: una mirada desde la ética y la integridad académica. *RELIEVE. Revista Electrónica de Investigación y Evaluación Educativa*, 29(2), 1-21. <https://doi.org/10.30827/relieve.v29i2.29134>
- Gumiero, BS, y Pazuch, V. (2024). Tecnologías digitales y enseñanza de las matemáticas: Un análisis del conocimiento profesional docente. *Investigación Pedagógica*, 9 (2), em0200. <https://doi.org/10.29333/pr/14342>
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). GeoGebra: A software for teaching and learning mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(2), 1-14.
- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial intelligence in education. Center for Curriculum Redesign. Inteligencia Artificial en Educación. Promesas e Implicaciones para la Enseñanza y el Aprendizaje. Centro para el Rediseño Curricular* ISBN: 978-1794293700
- Hughes, C., & Scharff, M. (2020). *Artificial Intelligence in Education: Challenges and Opportunities*. Springer.
- Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A Global Survey of International Perspectives on Modelling in Mathematics Education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.
- Kaput, J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 265–281.
- Lavicza, Z. (2010). Integrating GeoGebra into IMO-level mathematics teaching. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 8(1), 77-90.

- Luckin, R. (2018). The implications of artificial intelligence for education. London, Reino Unido: The Royal Society.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Monaghan, J., Trouche, L. y Borwein, JM (2016). Tools and mathematics: Instruments for learning. Libro electrónico. Springer Cham. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-02396-0>
- OpenAI, 2025. ChatGPT <https://chatgpt.com/>
- Panqueban, D. y Huincahue, J. (2024) Inteligencia artificial en la educación matemática: una revisión sistemática. *Uniciencia* Vol. 38(1), pp. 1-17, January-December, 2024. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.20>
- Pochulu, M (2018) La Modelización Matemática: Marco de referencia y aplicaciones. GIDED - UNVM ISBN: 978-987-42-7317-8
- Quiroz Rosas, V. (2023). Aplicaciones de Inteligencia Artificial Aliadas en la Enseñanza de las Matemáticas. *Ciencia Latina*, 7(4). https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v7i4.7498
- Ramesh, A., Pavlov, M., Goh, G., et al. (2021). Zero-shot text-to-image generation. *Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning*.
- Rizzo, K y Costa, V. (2019). Matemática, GeoGebra y fotografía, combinados para motivar la enseñanza y el aprendizaje. V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales. <http://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/78418>
- Rizzo, K & Volta, L. (2016), Funciones, GeoGebra y situaciones cotidianas. *Actas de la Xii Conferencia Argentina de Educación Matemática*. SOAREM
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68-78.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Journal of Education*, 196(2), 1-38.
- Stillman, G, Kaiser, G., Blum, W. y Brown, J. (2013). *Teaching Mathematical Modelling: Connecting to Research and Practice*. New York: Springer
- Selwyn, N. (2020). Should robots replace teachers? AI and the future of education. Polity Press.
- Vallejo, A. (2024). La transformación del rol docente en la era de la Inteligencia Artificial: hacia un liderazgo pedagógico estratégico. *Trayectorias Universitarias*, 10 (19), e165, 2024. Universidad Nacional de La Plata. Buenos Aires. Argentina. ISSN 2469-0090 <https://doi.org/10.24215/24690090e165>
<https://revistas.unlp.edu.ar/TrayectoriasUniversitarias>.
- Yakman, G. (2008). STEAM education: An overview of creating a model of integrative education. [Conference]. En *Pupils' Attitudes Towards Technology (PATT-15)*. Salt Lake City, USA.
- Zulnaidi, H; Oktavika, E y Hidayat, R (2020) Efecto del uso de GeoGebra en el rendimiento académico de los estudiantes de matemáticas de secundaria. *Educación y Tecnologías de la Información*, 25 (1) (2020), pp. 51-72, 10.1007/s10639-019-09899-y



Reformas curriculares de Matemática: Reflexiones desde las políticas públicas, la Educación Matemática y sus implicaciones en la región del caso El Salvador

Jeser **Candray**

Dirección de Investigación, Universidad Francisco Gavidia

El Salvador

jcandray@ufg.edu.sv

Resumen

Esta conferencia tiene como objetivo problematizar diseño, elaboración y puesta en marcha de las reformas curriculares de la Matemática escolar en El Salvador en los últimos treinta años. Para ello, se trae a discusión, a partir de la metodología de Historia Oral, las versiones históricas de la toma de decisiones antes, durante y después de la elaboración de tres propuestas curriculares de Matemática. La charla destacará alteraciones y permanencias sobre las concepciones sobre qué se entiende por elaborar el currículo y qué se entiende por aprender Matemática en ese período; la (no) participación del docente que enseña Matemática en su definición; la marcada tendencia de desconectar las cuestiones sociales y culturales en los materiales curriculares y la marcada influencia de agencias internacionales en la definición de las políticas curriculares en el país.

Palabras clave: Historia Oral; Educación Matemática; Currículo; Competencias; Alteraciones y Permanencias; Cultura escolar.

Ideas iniciales

Estimados y estimadas. Esta ponencia “Reformas curriculares de Matemática: reflexiones desde las políticas públicas, la Educación Matemática y sus implicaciones en la región del caso El Salvador” tiene como objetivo compartir y ampliar el debate sobre las ideas no concluyentes construidas a partir de un proceso de investigación doctoral titulado “Historias del currículo de Matemática en El Salvador: reflexiones sobre políticas curriculares, Educación Matemática y una

agenda de investigaciones" defendida¹ en agosto de 2024 y que buscó tejer comprensiones sobre historias del currículo de Matemática escolar salvadoreño presentes entre los años 1992 a 2018 y bajo una pregunta orientadora: ¿qué historias estuvieron/están presentes en la producción de las propuestas curriculares de Matemática escolar en El Salvador durante el periodo 1992-2018?

Precisamente, la selección de este período de cerca de treinta años, tomando como punto inicial el año 1992, (cuando se firman los acuerdos de paz que ponen fin más de doce años de conflicto armado), y el año 2018 cuando se publica el más reciente currículo de Matemática, nos permite hacer una lectura panorámica sobre alteraciones y permanencias de las concepciones de políticas educativas, políticas curriculares y de Educación Matemática de sus promotores. Específicamente, luego de una revisión de documentos curriculares fueron identificados tres colecciones de programas de estudios de Matemática diferentes emitidos por el Ministerio de Educación de El Salvador (MINED) en los años 1995, 2008 y 2018. Así, la curiosidad investigativa expresada en los objetivos y pregunta de investigación se redirigió a cada una de estas colecciones.

Aquí, antes de avanzar permítanme dar un contexto sobre las características de las políticas de estado en El Salvador. Siendo un país de las características geográficas conocidas (una extensión de a lo sumo 20,000 km²), todas las macro políticas públicas, incluidas las educativas, dependen exclusivamente del gobierno central y las demás instancias de gobierno (departamental y municipal) no tienen competencias en esta materia (pasa lo mismo en salud, seguridad, economía, etc.).

De esta manera, y específicamente las políticas curriculares, son definidas desde el MINED². Allí se elaboran los Programas de Estudio, libros de texto, orientaciones curriculares, formación docente inicial y continua para todas las escuelas del país. Emitidas estas disposiciones, estas son interpretadas y reinterpretadas en dos instancias inferiores: la escuela, que diseña un Proyecto Curricular de Centro y el docente con su planificación de aula. Ambas tienen el fin de ajustar las directrices curriculares a los contextos de las más de cinco mil escuelas que conforman el sistema educativo, sin embargo, esto último, veremos más adelante, ha sido más restringido con el correr del tiempo.

Así, los esfuerzos de la investigación se concentraron en los Programas de Estudio (PE) que, según la legislación actual, son la expresión más concreta del currículo (El Salvador, 1996) son elaborados para cada grado y asignatura del currículo y definen, entre otras cosas, la carga horaria anual y semanal de las asignaturas; organizan y secuencian los contenidos en unidades didácticas de acuerdo a la corriente curricular del momento (objetivos, indicadores de logro, etc); definen lineamientos metodológicos; lineamientos de evaluación; enfoque de asignatura; objetivos/competencias de asignatura y componentes curriculares más específicos como objetivos/indicadores de logro; competencias y; contenidos.

¹ "Tesis bajo la orientación de la profesora Dra. Heloisa da Silva en el Programa de Posgraduación en Educación Matemática de la Universidad Estadual Paulista con apoyo financiero de la *Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior* - Brasil (CAPES). Dentro del Grupo Historia Oral y Educación Matemática (Ghoem).

² El currículo nacional es establecido por el Ministerio de Educación, se basa en los fines y objetivos de la educación nacional, desarrolla las políticas educativas y culturales del Estado y se expresa en: planes y programas de estudio, metodologías didácticas y recursos de enseñanza-aprendizaje, instrumentos de evaluación y orientación, el accionar general de los educadores y otros agentes educativos y la administración educativa" LES, art. 47 (El Salvador, 1996)

Luego de una lectura de cada uno de estos documentos (12 del currículo de 1995, 10 del currículo de 2008 y 5 del currículo 2018), surgieron distintas preguntas en torno a la pregunta principal e, influenciados por la pedagogía freireana, nos aproximamos a ellos preguntándonos: ¿quién elaboró estos currículos y quién no?, ¿cómo se elaboraron?, ¿quién decidió (y quien no) cambiarlos?, ¿qué apuesta didáctica inciden en ellas y cual no?, ¿qué cambió y qué no cambió?, ¿qué cultura y qué Matemática es considerada y cual no?, ¿para quién y contra quién se elaboraron estos currículos? De esta forma, esta investigación buscó producir narrativas sobre la creación de los documentos curriculares (Programas de Estudio) de Matemática durante tres décadas.

Historia Oral en escena: una propuesta metodológica

Conscientes de que tal objetivo y que estas preguntas no podrían ser respondidas bajo una investigación basada exclusivamente en los documentos oficiales, e influenciados en mi propia práctica investigativa, decidimos realizarla bajo los cuidados metodológicos de la historia oral experimentada en el Grupo Historia Oral y Educación Matemática (Ghoem) del que soy parte. Esta metodología, introducida en la Educación Matemática por profesores y profesoras de Brasil a inicios de este siglo, tiene como objetivos la “constitución de fuentes de estudio por medio de la oralidad” (Garnica, 2020, p. 86, traducción mía) producidas intencionalmente (o no) como fuentes historiográficas que son “cocreadas” (Portelli, 2016, p. 10) a partir de entrevistas hechas por el investigador. Dentro del grupo, creemos que estas fuentes, entendidas como narrativas, tienen la potencialidad de “crear mundos” que, operadas en una investigación, pueden generar comprensiones sobre prácticas dentro de una cultura matemática escolar (Garnica, 2023).

Regresando a la investigación y siguiendo las prácticas³ metodológicas del grupo (figura 1), decidimos entrevistar a dos miembros del equipo autoral para cada uno de los tres PE de Matemática a quienes se les explicaron los alcances de la investigación y las consecuencias de su participación. La entrevista pasaría por un proceso de transcripción y textualización en diálogo con el participante en el que podría adicionar o retirar elementos de su exposición. Este proceso finalizaría con la carta de cesión que permitiría su publicación.

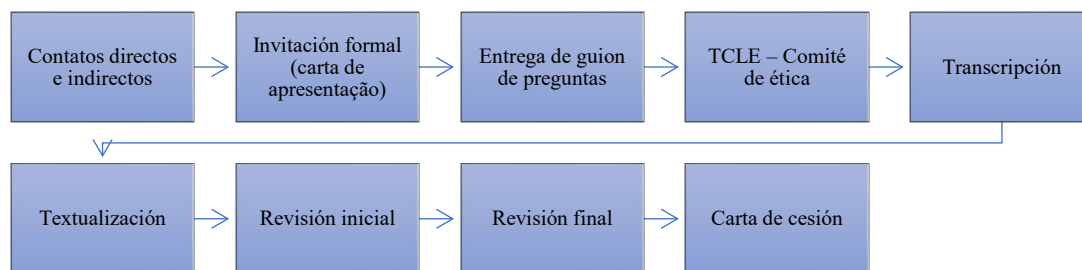


Figura 1: Esquema general de la metodología de la HO en la investigación. Elaboración propia.

³ A lo largo de estos años, el Ghoem ha constituido una *metodología en trayectoria*, es decir, que está en constante reflexión que va desde los preparativos de las entrevistas, las propias entrevistas *in loco*, su tratamiento posterior y su uso en las investigaciones. De manera general, la metodología implica la definición de criterios para la selección de entrevistados, invitación de los participantes, creación de la guía de entrevistas, preparativos durante la entrevista, transcripción y textualización de la entrevista y, firma de carta de cesión de derechos (Garnica, 2016, 2020).

Este proceso de diálogo de la producción de las narrativas es muy valorado en el Grupo y, considero, lo diferencia entre otros puntos, de las entrevistas “tradicionales”. Las entrevistas no son solamente datos que serán utilizados, sino que son memorias (Bosi, 1979) y por lo tanto tienen derecho de tener pleno control de las mismas. No se busca “sorprender” o evidenciar las “contradicciones” de los entrevistados porque, siendo memorias, son sus versiones de la verdad y los hechos que testimoniaron (Fernandes y Garnica, 2021). Esta postura también influye en el uso de las entrevistas: no son complementos de la “verdad” petrificada en los documentos oficiales, son parte de la verdad y movilizadas en esta investigación nos ayudaron a *desmonumentalizarlos* (Le Goff, 1990).

Las entrevistas con cada uno de seis autores⁴ se dieron entre octubre de 2022 y septiembre de 2023. El guion de las entrevistas estaba compuesto, de forma general, de tres categorías: concepciones de política curricular, concepciones de la Educación Matemática y características específicas de la propuesta. Estas categorías se expresaron en siete grandes temáticas (ver figura 2) y que se enfocaban en el proceso antes, durante y posterior a la elaboración de los PE de Matemática.



Figura 2: Fichas temáticas de las entrevistas con equipos autorales

Cada equipo autoral tenía características diferentes. Mientras el equipo autoral del PE de Matemática de 1995 eran docentes que provenían de colegios privados de reconocido prestigio académico contratados bajo la figura de consultor; el equipo autoral de los PE de Matemática de 2008 eran funcionarios del MINED, ya con perfiles más institucionales a los que se fueron incorporando otros miembros para dicho fin. Esta diferencia es propia del contexto en el que surgen los currículos. Los PE de Matemática de 1992 surgen un par de años posterior al fin del conflicto armado y el estado pasaba por una serie de reformas administrativas. Ya en 2008 el

⁴ Currículo 1995: Carlos Mauricio Canjura Linares y José David Morán Mendoza; currículo 2008: José Elías Coello Salamanca y Gustavo Antonio Cerros Urrutia y; currículo 2018: Diana Marcela Herrera Polanco y Francisco Antonio Mejía Ramos.

MINED estaba consolidado como ente rector de las políticas educativas y la mayoría del equipo tenía mucha experiencia recorrida en diferentes cargos dentro del Ministerio. Por otro lado, el equipo autoral que diseñó los PE de Matemática de 2018 es conformó de una alianza entre funcionarios del MINED (algunos incluso participantes del proceso de 2008) y matemáticos recién egresados de la Universidad de El Salvador bajo la supervisión del equipo asesor del JICA.

A partir de las entrevistas y considerando los documentos curriculares, conforme a las prácticas metodológicas del Ghoem, fue posible *desmonumentalizar* los currículos y producir narrativas sobre su elaboraciones que evidencian que su proceso estuvo marcado por historias cargadas de decisiones políticas, silencios y disputas ideológicas con lo que se llama currículo que aleja la visión de un trabajo técnico y objetivo. Este proceso reflexivo lo discutiremos de forma transversal, mirando a las tres propuestas curriculares: primero las reflexiones de políticas públicas y curriculares y enseguida las reflexiones desde la Educación Matemática

Reflexiones sobre las políticas públicas y curriculares

Para organizar de mejor manera este momento, decidí traer algunas de estas reflexiones a partir de preguntas guía. Una de estas es, ¿qué entendían los distintos equipos autorales por reforma el currículo? En los tres momentos (1995, 2008 y 2018), reformar el currículo es comprendido como un proceso técnico de reorganización, estructuración y reestructuración de los *contenidos de enseñanza* en función de lograr una mayor eficacia y congruencia como señala José Morán, autor del currículo de Matemática de 1995: “tratamos de darle más coherencia en los diferentes niveles (...), darle como una linealidad, que no quedara aislado, sino más continuo” (Candray Menjívar, 2024, p. 343). No se trató de un cuestionamiento al modelo educativo, sino más bien de un ajuste funcional al modelo instaurado desde 1968, cuando se dio la primera reforma educativa del país.

Para 1995, la reforma se presenta como una ruptura con prácticas anteriores, en las que los PE eran escuetos “de una página” sin más detalles. Tampoco sería justo no comentar que los PE anteriores al 1995 son previos a la guerra civil, es decir, antes de 1980 cuando el panorama internacional de los currículos no son lo que hoy vemos. Luego, la intención era de dotar al currículo de mayor *densidad* pedagógica. Para el currículo de 2008, sin meternos por el momento en el asunto del cambio de objetivos a competencias, los materiales curriculares se especifican más, y, además, se elaboran otros dispositivos de apoyo o de control (como quiera verse) de la práctica escolar, como es la guía metodológica para el docente y los libros de texto y cuaderno de ejercicios para los estudiantes. Estos últimos dos serían la característica central de la propuesta de 2018 en el que el énfasis en los materiales elaborados por el MINED sería más prescriptivo.

En El Salvador, la elaboración del currículo ha seguido procedimientos similares desde hace décadas. Como se señala en la investigación, las maneras de elaborar el currículo son muy parecidas a las usadas en la reforma educativa de 1968. A pesar de los discursos innovadores, los procedimientos no cambian sustancialmente. De modo general, la metodología de elaboración de los currículos de Matemática seguía el siguiente esquema (ver figura 3).

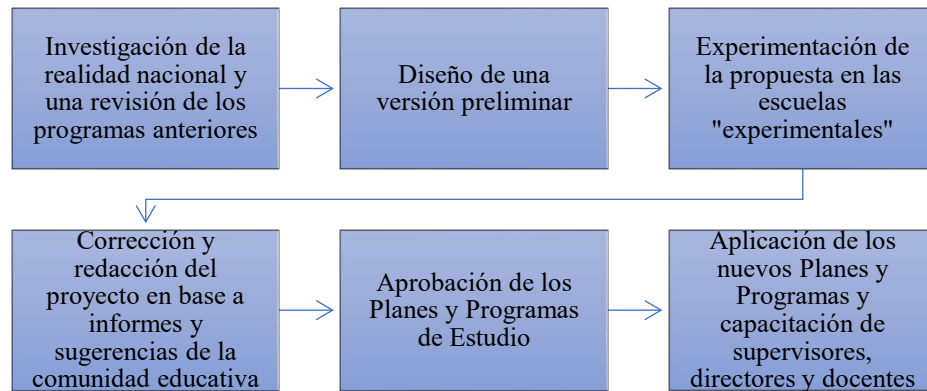


Figura 3: Guía para elaboración de PE del MINED (1968). Fuente: (Candray Menjívar, 2024, p. 428)

No obstante, a pesar de que este esquema inicia con una “investigación de la realidad nacional y revisión de los programas anteriores”, la elaboración curricular ha seguido una lógica predominantemente técnica, con escasa vinculación con la realidad educativa nacional. Aunque el currículo de 1995 incluyó instancias diagnósticas como la Consulta del 95 y la Comisión Nacional de Educación, esta fase no tuvo impacto directo en la elaboración final de los Programas de Estudio. De hecho, uno de los autores menciona que la elaboración de estos documentos diagnósticos iba en paralelo a la elaboración de los PE de Matemática. En 2008, el proceso careció de consulta externa, limitándose a reuniones internas entre especialistas. En 2018, la desconexión fue total: no hubo diagnóstico previo ni debate interno amplio, reduciendo la reforma a una reestructuración técnica de mallas y materiales.

A la luz de Clemente (2013), estos procesos reflejan un modelo de *racionalidad técnica*, en el que el currículo se concibe como producto ordenado, cerrado y aplicable universalmente, sin considerar las particularidades del contexto escolar. La ausencia de una investigación contextualizada inicial evidencia que el currículo no se entiende como proceso reflexivo, sino como un diseño estandarizado. Otra ausencia destacada es el rol docente en estas modificaciones curriculares, así, aunque se habla de participación, esta suele ser simbólica limitándose su participación a refrenda de los documentos finales donde poco se puede modificar. Esto ha dado lugar a procesos altamente centralizados, en los que el MINED asume un rol predominante en la definición y validación de los contenidos.

Profundizando con esta última aseveración, ¿quiénes son los elaboradores del currículo? Más allá de que la conformación de los equipos autorales está definida por los contextos políticos y educativos del momento en que surgen, como se comentó anteriormente, si tomamos en cuenta lo que señala da Silva (2020) el perfil de los autores no es algo menor, ya que estos son los que, con su ideología, formas de concebir y ver el mundo definirán qué y cómo se enseñará. En ese sentido, el MINED tuvo diferentes criterios en los tres currículos del estudio, para 1995 el perfil deseado era contar con expertos externos, en su mayoría profesores matemáticos universitarios vinculados a colegios de élite. Este perfil generó un currículo tecnocrático y abstracto, poco conectado con la realidad de la escuela pública.

Para 2008, se incorporaron funcionarios “de carrera” del MINED, con formación matemática y experiencia docente, lo que permitió una visión más contextualizada. Pese a ello,

también se dio la aparición de los asesores internacionales, especialmente provenientes del JICA, que reforzaron una lógica de rendimiento. Y ya para el 2018, el equipo fue liderado por jóvenes matemáticos de la UES sin experiencia en aula, bajo fuerte tutela del JICA. Esto acentuó una visión técnica y disciplinar de la Matemática, con escasa reflexión pedagógica. Así, el currículo ha oscilado entre enfoques descontextualizados y esfuerzos parciales por incorporar la realidad escolar, manteniendo en todos los casos una fuerte dependencia de agencias externas y una noción de currículo como producto cerrado, más que como proceso reflexivo.

Sobre este punto, hay que destacar la creciente influencia de las agencias internacionales en empujar las reformas curriculares en países latinoamericanos. Es imposible no denunciar y exponer desde un punto de vista decolonial que desde los años noventa, estas entidades han operado bajo esquemas de cooperación que, en la práctica, han implicado la delegación de responsabilidades clave del Ministerio de Educación (MINED) a actores externos, muchas veces mediante ONG nacionales con vínculos a las agencias cooperantes.

En la reforma curricular de 1995, entidades como USAID y la Agencia Española de Cooperación financiaron materiales y asesorías. Aunque los actores nacionales afirman autonomía técnica, Picardo (2016) muestra cómo estas agencias introdujeron el constructivismo como nuevo enfoque pedagógico. En 2008, el Banco Mundial condicionó el financiamiento a la adopción de modelos curriculares por competencias, alineados a estándares globales, como señala Gustavo Cerros, del equipo autoral de 2008 “ahora nos quieren volver a los estándares, presión del Banco Mundial otra vez, o sea, “aquí están 80 millones de dólares, pero hay que ver si se puede migrar para allá”, entonces, igual me imagino que fue en ese entonces, que la decisión fue técnica/política” (Candray Menjívar, 2024, p. 71). Simultáneamente, el JICA inició un papel más técnico que financiero, orientando la elaboración de materiales y validando propuestas educativas.

Esto se evidencia claramente ya en la propuesta curricular de 2018, cuando esta influencia técnica del JICA se acentuó. Aunque sus asesores actuaban desde una lógica de acompañamiento, testimonios revelan que guiaban las decisiones sustantivas del currículo, como se extrae de la entrevista de Mejía “hay un esfuerzo combinado de la cooperación japonesa y de la contraparte salvadoreña. Ellos interactuaban con nosotros directamente en el tipo de cambio que se hacía, (...). Entonces casi todo el proceso fue orientado por ellos” (Candray Menjívar, 2024, p. 185).

Esta participación del JICA en El Salvador no es singular y se enmarca en un contexto en que la agencia tiene participación muy activa en las reformas curriculares de Matemática en los países de Centroamérica y el Caribe, como Guatemala, Honduras, Nicaragua, por ejemplo. Si bien su apoyo ha permitido avances técnicos y logísticos, también ha limitado la autonomía curricular del MINED, subordinando las reformas a agendas internacionales y dejando en segundo plano las necesidades contextuales del sistema educativo salvadoreño.

Ahora bien, ¿qué es lo que realmente cambia en los currículos? El análisis revela que, aunque los documentos se modifican en su estructura, contenidos y enfoques pedagógicos, estos cambios rara vez se traducen en transformaciones significativas en las aulas escolares. El acompañamiento y la concreción de las reformas han tenido pocas herramientas, limitándose a

cursos masivos de docentes donde se comunican los cambios, hasta formas más prescriptivas y desprofesionalizantes como el currículo 2018 donde los docentes asisten a formaciones para verificar el seguimiento, página a página, de la propuesta curricular reflejada en el libro de texto. Esta actitud paternalista frente al docente refuerza la idea de que es incapaz de comprender o manipular el currículo, como se entiende en la idea de Herrera, una de las autoras del currículo de 2018, “siempre hay apertura de que el docente adecúe de acuerdo con su necesidad, pero es que esa parte es delicada. Si yo muevo algo, la base para construir algo que esté allí (...). Eso es lo único que considero delicado para mover cosas” (Candray Menjívar, 2024, p. 254). Estas prácticas laceran la autonomía docente y presentan una visión limitada del currículo.

Para ir cerrando estas reflexiones generales nos podemos preguntar, ¿qué cambia en los currículos? De forma general, y ya que se asume un currículo como norma, como documento, el énfasis no podía ser otro más que el cambio de los contenidos. Contenidos salen y entran, suben o bajan de grado, de nivel y se reorganizan, se presentan nuevas metodologías o teorías curriculares con impactos y seguimiento limitados en las escuelas. Se cambió de una enseñanza “tradicional” a una constructivista; se pasa de objetivos a competencias; se cambian los roles del docente y del estudiante. Sí, en el papel, pero se negligencia que estos procesos requieren un acompañamiento y compromiso docente que solo es capaz de alcanzarse cuando, en palabras de Imbernon (2009) este siente que las reformas efectivamente le dan un crecimiento profesional y que este resolverá los problemas que enfrenta con sus estudiantes.

Sin embargo, asumir estas ideas es imposible si la idea de currículo es la misma. Según la investigación, los autores asumen el currículo como una normativa, y por ello, su elaboración es solo una cuestión técnica, vista de forma apolítica en muchos aspectos.

Reflexiones sobre Educación Matemática

Ahora bien, para ordenar el análisis desde la Educación Matemática de los currículos de Matemática en El Salvador en estos treinta años, tomaré como referencia cuatro ejes centrales: referenciales teóricos y metodologías; bloques de contenidos y selección de temas; organización y presentación de las unidades didácticas y; enseñanza de la Matemática y ciudadanía.

Uno de los puntos que más llamó la atención del análisis transversal de las propuestas es el poco diálogo de los autores de los currículos con las tendencias internacionales en Educación Matemática. Sin embargo, al poner esta situación en su contexto histórico podemos entender esta situación. El Salvador no ha tenido un desarrollo de la educación/didáctica de la Matemática robusta, esto se puede verificar en los eventos y congresos nacionales e internacionales cuya participación nacional es muy limitada. A esto se une que en las universidades no existen programas de postgrados del área, grupos de investigación y por ende producción académica institucionalizada, salvo esfuerzos puntuales y esporádicos. Dicho sea de paso, esto en la última década ha ido cambiando a pasos lentos.

De esta manera, no es de extrañar que los referenciales teóricos de los que cuentan los autores de los currículos sean bastante escuetos: algunas menciones a la didáctica francesa, a la resolución de problemas, aportes de la teoría de Van Hiele y más recientemente el *Structured problem solving* desde la perspectiva japonesa. No obstante, al preguntar específicamente sobre

los referenciales teóricos en Educación Matemática de las propuestas curriculares las respuestas no eran muy claras, por ejemplo, para 2018, Herrera menciona “al menos de mi parte no tengo conocimiento si había algún fundamento teórico que tuviesen en mente, tal vez los japoneses tenían claro de dónde viene, pero nosotros, creo que no. Nunca lo conocimos, al menos por mi parte, no lo recuerdo” (Candray Menjívar, 2024, p. 243). Así, los niveles de concreción de estas ideas en el currículo son limitadas e, incluso los propios autores consideraron complicado poder teorizar y plasmar ideas como “resolución de problemas” en los materiales didácticos elaborados. Las razones de esta situación se dan, a mi juicio, por la poca impermeabilidad de las tendencias de la Educación Matemática, no solamente por los contextos y la formación inicial de los perfiles seleccionados, sino también por la visión misma de sus autores de qué es hacer Matemática escolar.

Esta misma línea de interpretación sirve para comprender las decisiones sobre los bloques de contenidos de Matemática que se irían priorizando. Si tomamos como base los datos de la tabla 1, a continuación, podemos ver la tendencia de los bloques de contenido matemático en función del tiempo reservado en todos los niveles educativos.

Tabla 1

Carga horaria en porcentajes de los bloques de contenido de los PE de Matemática

Nivel	Currículo 1995	Currículo 2008	Currículo 2018
Bloques de contenido			
Aritmética	23.21%	35.3%	42.8%
Geometría	14.29%	6.0%	13.8%
Medidas	0.00%	4.7%	2.7%
Estadística	16.67%	14.6%	6.6%
Álgebra	18.45%	16.4%	12.3%
Relaciones y funciones	7.14%	1.9%	9.0%
Trigonometría	11.31%	3.2%	2.5%
Geometría Analítica	4.17%	3.0%	4.9%
Geometría y Medidas	0.00%	13.4%	3.2%
Medidas y Aritmética	0.00%	1.5%	0.3%
Álgebra y Trigonometría	4.76%	0.0%	0.0%
Estadística y Medidas	0.00%	0.0%	2.0%
Total	100.00%	100.0%	100.0%

Fuente: Elaboración propia.

Si vamos por los datos marcantes, podemos destacar dos elementos: el énfasis cada vez mayor en la aritmética, especialmente en los primeros seis años de la EB donde, para 2018, ocupa el 72% del tiempo escolar de la asignatura y; la reducción de la estadística en el currículo 2018 en comparación de los dos currículos anteriores. Ambos datos pueden entenderse tomando en cuenta las entrevistas de los equipos autorales donde queda en evidencia las preferencias y la visión de la Matemática de su formación en detrimento de otros bloques.

Esto también va alineado a la organización y presentación de los bloques de contenido. Si tomamos como ejemplo los bloques de contenido a los que pertenecen las primeras cinco unidades del currículo de Matemática de educación media podemos ver que cada currículo iba priorizando los contenidos de su interés y/o considerados más indispensables. Mientras el currículo de 1995 tenía una distribución de los bloques casi al 20% en cuatro bloques, los

currículos de 2008 priorizaban en un 65% los contenidos estadísticos, mientras en 2018 los contenidos eran funciones (36%), geometría analítica y álgebra con 24% cada una. Si tomamos como referencia las distribuciones de estos bloques según lo propuesto por la NCTM y el currículo de Matemática costarricenses de 2012 (Ver figura 6) se verifica que la priorización de los contenidos no responde a líneas técnicas, sino a los intereses de sus autores.

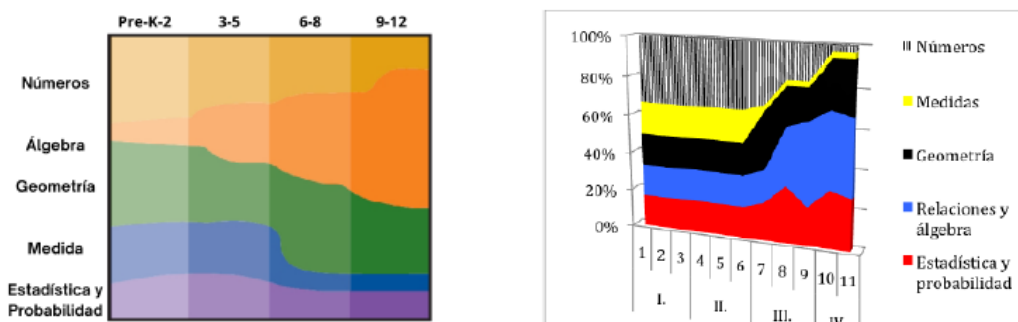


Figura 6: Énfasis de los bloques de contenido de Matemática en la educación inicial, básica y media del NCTM (2000, izquierda) y del currículo de Costa Rica (2012, derecha)

Pese a las intencionalidades de verse como autores neutrales en la elaboración del currículo, en lo que respecta a las nociones de enseñanza de la Matemática y la formación ciudadana las propuestas curriculares no escapan de esa crítica. Así, al consultar a los equipos autorales sobre la posición del currículo sobre elementos de ciudadanía y derechos humanos, estos se refirieron a que la propuesta es apolítica y que no toma una postura sobre problemas sociales, como es el caso de Herrera, del equipo autorial del currículo de 2018:

yo creo Matemática tiene la particularidad que no abarca mucho esos temas, porque no habla cuestiones sociales. Se centra más en desarrollar el pensamiento lógico matemático en los niños. (...), así que algo evidente no hay, pero creo que la Matemática no hace distinción de género, es para niños y para niñas y pues creo que no hay mucho problema con esta área (Candray Menjívar, 2024, p. 239)

Sin embargo, no obstante, como advierte da Silva (2020), el currículo también expresa lo que no se considera problema. Es en esos silencios donde se manifiesta una posición política que invisibiliza desigualdades y refuerza una Matemática conservadora. Siguiendo a Skovsmose (2014), podríamos decir que esta neutralidad favorece una obediencia funcional al mercado, alejando a la Matemática de una formación ciudadana crítica. Romper con esa visión homogeneizante de la Matemática es urgente. No se trata solo de sumar temas sociales al currículo, sino de repensar su sentido, su lenguaje y su compromiso con la justicia social. Porque lo que está en juego no es solo qué Matemática enseñamos, sino para qué sociedad la enseñamos.

Reformas curriculares: Ideas para el debate

Quisiera cerrar esta presentación y antes de dar lugar a las preguntas y comentarios con algunas reflexiones que considero pueden ser debatidas a instancias más regionales. La primera es que los proceso de elaboración del currículo, si bien vienen “profesionalizándose”, presenta peligrosas conductas prescriptivas de la actividad docente encubiertas de apoyo a la gestión educativa. Esto solo puede entenderse bajo la pretensión de las autoridades de Estado de controlar las discusiones en el aula. Esto, pese a que la literatura nos dice tal anhelo es poco

probable de alcanzar, debe movernos a fomentar el espíritu crítico de la formación de las y los docentes que permitan el surgimiento de desobediencias creativas (D'Ambrosio., 2015).

Otra idea que rescato de estas discusiones viene de la necesidad de reflexionar sobre los impactos de programas de intervención curricular que se vienen dando en nuestras latitudes. Conocemos las necesidades de nuestros países, las limitantes históricas y administrativas que nos impone la necesidad de pedir ayuda para impulsar cambios. No obstante, y reconociendo lo valioso que son los aportes de tales agencias internacionales, es necesario poner la mirada sobre practicas coloniales que se vienen dando y como estas quieren hacerse pasar por inocentes y técnicas.

Cierro agradeciendo su atención y quedo abierto a las discusiones generales o específicas de esta experiencia.

Referencias y bibliografía

- Bosi, Ecléa. (1979). *Memória e sociedade: lembrança de velhos*. São Paulo: Tao.
- Candray Menjivar, Jeser Caleb. (2024). *Historias del currículo de Matemática en El Salvador: reflexiones sobre políticas curriculares, Educación Matemática y una agenda de investigaciones*. Tesis de doctorado. Programa de Pósgraduação em Educação Matemática de la Universidad Estadual Paulista, Rio Claro/SP, Brasil.
- Clemente Linuesa, María. (2013). *Elaborar o currículo: prever e representar a ação*. In J. Gimeno Sacristán (Org.), *Saberes e incertezas sobre o currículo* (pp. 226–247). Porto Alegre: Penso. (Obra original publicada como *Saberes e incertidumbres sobre el currículum*).
- D'Ambrosio, Beatriz. (2015). *A subversão responsável na constituição do educador matemático*. In: *Encuentro colombiano de Matemática educativa*, 16., 5 a 7 de outubro de 2015, Bogotá.
- El Salvador. (1996). Decreto legislativo N° 917, Asamblea Legislativa de El Salvador. *Ley General de Educación*, de 12 de diciembre de 1996. Diario oficial, San Salvador, 21 de diciembre de 1996.
- Fernandes, Filipe Santos y Garnica, Antônio Vicente Marafioti. (2021). *Metodologia de pesquisa em educação Matemática: éticas e políticas na inserção de novos sujeitos, cenários e conhecimentos*. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(34), 1–16. <https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/12785>
- Garnica, A. V. M. (2016). *História oral em educação Matemática: um panorama sobre pressupostos e exercícios de pesquisa*. *História Oral*, 18(2), 35–53. <https://revista.historiaoral.org.br/index.php/rho/article/view/559>
- Garnica, Antônio Vicente Marafioti. (2020). *História oral e educação Matemática*. In M. C. Borba, J. L. Araújo, D. A. Fiorentini, A. V. M. Garnica & M. A. V. Bicudo (Orgs.), *Pesquisa qualitativa em educação Matemática* (6. ed., pp. 87–109). Belo Horizonte: Autêntica.
- Garnica, Antonio Vicente Marafioti. (2023). *A história oral é, a narrativa pode, a história oral é porque a narrativa pode, e a história oral pode porque a narrativa é. E ponto*. In da Silva, Heloisa (Org.), *Rompendo fronteiras disciplinares: Narrativas, práticas de pesquisa e intervenção na formação de professores que ensinam Matemática* (pp. 6–21). São Paulo: Livraria da Física.
- Imbernón, Francisco. (2009). *Formação permanente do professorado: novas tendências*. São Paulo: Cortez Editora.
- Kastrup, Virgínia. (2019). *A atenção cartográfica e o gosto pelos problemas*. *Revista Polis e Psique*, 20 anos do PPGPSI/UFRGS, 99–106. <https://seer.ufrgs.br/PolisePsique/article/view/97450/55365>
- Le Goff, Jacques. (1990). *História e memória* (B. Leitão et al., Trad.). Campinas, SP: Editora da UNICAMP.
- Picardo, Oscar. (2016). *Apuntes sobre Teoría y Praxis Curricular*, 1ra Ed. San Salvador, UFG Editores.
- Portelli, Alessandro. (2016). *História oral como arte da escuta*. São Paulo: Letra e Voz.
- Silva, Tomás Tadeu da. (2020). *Documentos de identidade: uma introdução às teorias do currículo* (3. ed.). Belo Horizonte: Autêntica Editora.
- Skovsmose, Ole. (2014). *Um convite à Educação Matemática Crítica*, 1 Ed. Campinas SP: Papirus, 2014.



Sobre a importância de compreender as relações entre as noções de “contagem, comparação e medição” no ensino de Matemática elementar

Yuriko Yamamoto **Baldin**

Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos

Brasil

yuriko@ufscar.br

Resumo

O objetivo desta conferência é discutir a importância da formação profissional dos professores da educação básica que compreendem as relações entre as noções de “contagem, comparação e medição” na fase inicial da Educação Matemática escolar. O tema se fundamenta no “conhecimento pedagógico de conteúdo - PCK”, o conhecimento profissional do professor que ensina conteúdos com métodos adequados e análise do desenvolvimento curricular. Este conhecimento inclui o reconhecimento das origens conceituais dos conteúdos matemáticos do currículo escolar, de modo a sustentar o desenvolvimento da aprendizagem sólida da Matemática básica. A questão investigada foca na alfabetização matemática a partir da linguagem da aritmética, como base do pensamento matemático, cujo desenvolvimento se conecta à língua pátria, através da resolução de problemas textuais, pela leitura, interpretação, exploração e análise de estratégias e resultados. A discussão espera contribuir para as investigações sobre a formação de professores para enfrentar a transição entre os níveis da educação básica.

Palavras-chave: Brasil; Conhecimento profissional de professores; Transição na Educação Matemática Básica; Letramento matemático; Alfabetização numérica; Resolução de problemas.

Introdução

Este texto tem como objetivo desenvolver as colocações apresentadas na conferência paralela do IV CEMACYC de 2025. A formação de professores é um eixo temático de investigação importante na Educação Matemática, tendo em vista os desafios das atualizações curriculares exigidas pelas mudanças rápidas do século XXI, que atingem a educação de crianças e jovens em escala global. Para que as desejadas reformas curriculares sejam implementadas de forma eficiente nas salas de aula, as formações iniciais e continuadas de professores tornam-se temas de investigação de alta relevância. A educação dos professores, especialmente dos anos iniciais, se torna um tema crucial que impacta a cadeia educativa entre os diversos níveis escolares, do elementar até o superior. Nesta perspectiva, a educação da fase inicial da educação escolar se apoia em dois pilares basilares de alfabetização, os da língua pátria e da matemática. Dentro das investigações de Educação Matemática, o tema da transição entre as fases escolares indica rupturas que provocam dificuldades na aprendizagem, em especial entre os anos da educação fundamental que compreendem os iniciais (1º a 4º anos) e os finais (5º a 9º anos) da educação básica, antes do nível de Ensino Médio. A passagem do nível fundamental para o ensino médio e, deste, para o nível de ensino superior também apresenta problemas específicos de aprendizagem da Matemática, merecendo atenção diferenciada; contudo, a transição nesses níveis não está no foco de discussão neste texto.

O objetivo do texto é focar no início da educação básica, quando o desenvolvimento do pensamento matemático precisa de técnicas de comunicação específicas para trazer a compreensão integrada da linguagem pátria junto com o vocabulário específico de matemática escolar. Portanto, consideramos importante a comunicação da Matemática com linguagem apropriada para docentes e estudantes dos anos iniciais do ensino escolar, para que a implementação e a execução dos currículos pretendidos ocorram de maneira produtiva. Para alcançar essa finalidade, torna-se evidente a importância dos professores dos anos iniciais compreenderem o significado essencial das atividades de alfabetização numérica que estão a seu cargo na sala de aula.

O foco na fase inicial da educação escolar se deve à evidência, apoiada em documentos importantes, como Gatti (2009), de que os professores dos anos iniciais possuem formação específica em pedagogia integradora, mas não trazem o suficiente de conhecimento especializado em matemática dos anos finais da educação básica. É certo que o conhecimento de Matemática escolar básico (aritmética, geometria básica, medição e tratamento elementar de dados, resolução de problemas elementares) faz parte da sua formação, mas a insegurança sobre a natureza abstrata da Matemática que permeia a educação até os anos finais provoca problemas notórios de ensino e aprendizagem, com fenômenos de falta de desempenho na transição, especialmente a partir do 4º. ano. No Brasil, a preparação insuficiente de professores que atuam nos anos iniciais no conhecimento de Matemática já é apontada, por exemplo, em (Gatti, 2009, p. 24), o que se reflete no desempenho dos estudantes em distintos momentos de avaliações de pequena ou de larga escala, há décadas.

A importância de uma orientação para os professores sobre os passos essenciais nos anos iniciais que dão sentido ao fluxo curricular dos livros didáticos na sua prática encontra suporte também em “Adding it up: Helping Children Learn Mathematics” (Kilpatrick, Swafford &

Findell, 2001), uma publicação do National Research Council, dos Estados Unidos. Nesta obra, as ideias conceituais básicas de aritmética e suas operações são apresentadas para sustentar o desenvolvimento do pensamento matemático da aprendizagem dos anos iniciais, para além da estrutura curricular escolar. Os autores indicam, já no prefácio da obra, que o currículo escolar inicia com a aritmética e suas operações que permeiam até os anos finais da etapa fundamental da escola, mas a compreensão do desenvolvimento conceitual dos conteúdos e as conexões das ideias matemáticas que se inicia com a aritmética e suas operações é necessária para a educação no sentido mais amplo, além do conteúdo do currículo escolar.

Por isso, nesta conferência escolhemos o tema de “contar, comparar, medir” como uma ferramenta para que os professores adquiram com segurança o conhecimento do conteúdo que precisam ensinar e dos porquês das diversas metodologias disponibilizadas em materiais didáticos. Os professores devem ser capazes de compreender as ações pedagógicas fundamentadas nesses conhecimentos que permitem conectar os conteúdos curriculares entre si e evoluir ao longo dos anos escolares. Isso faz parte do conhecimento especializado do professor que aprende a ensinar e contribui para mitigar as falhas de aprendizagem dos estudantes na transição entre os níveis escolares.

Para reconhecer esses conceitos, os professores devem perceber que se procuram respostas a perguntas como: “O que devo ensinar? O que vem depois e por quê? Como conectar o conhecimento adquirido para dar o passo seguinte? Como saber se os alunos estão aprendendo? Como conciliar os treinamentos em técnicas operatórias com o fluxo de pensamento matemático? Como avaliar que a aprendizagem está ocorrendo ou, ainda, qual é o objeto de avaliação: o conceito, a técnica ou ambos?”

Para responder a essas indagações que são naturais para refletir sobre a prática pedagógica, não basta apenas rever os conceitos matemáticos que estão nos documentos curriculares e livros didáticos. O conhecimento do professor que ensina necessita de uma base mais ampla e complexa. Este conhecimento dos professores é a combinação de “conteúdo, metodologias e conexão curricular”, isto é, o conhecimento pedagógico do conteúdo (matemático, no caso), como preconizado por Shulman (1986, 1987), e presente na Base Nacional Comum Curricular - BNCC (BRASIL, 2018). O conceito cunhado por Shulman é familiarmente difundido como PCK (*pedagogical content knowledge*), que permitiu a construção de um conceito focado em conteúdo matemático, mais detalhado e dentro da Educação Matemática, o Conhecimento Matemático para o Ensino - MKT (Ball, Thames & Phelps, 2008). O reconhecimento da necessidade de incluir esse conhecimento na formação de professores aparece em publicações e documentos curriculares. Um exemplo no Chile para a formação inicial de professores apresenta explicitamente o Conhecimento Pedagógico do Conteúdo - PCK como rationale para conectar o conteúdo e a pedagogia com a abordagem do Shulman (1986) para sustentar o desenvolvimento da publicação “Parâmetros de Matemática para a Formação Inicial de Professores no Chile, um livro de recursos para professores e educadores” (Felmer, 2014). Podemos citar outras publicações focadas em estabelecer dimensões ou parâmetros para qualificar a formação de professores na educação básica, como SEARS-MT para a Região do Leste Asiático (SEAMEO-RECSAM, 2013) ou (Takahashi, 2010), e o documento BNC- Formação no Brasil (BRASIL, 2019) que faz menção ao conteúdo e à prática como dois dos eixos do documento. As referências SEARS-MT e Takahashi (2010) discutem a formação dos professores que atuam na educação

básica no que diz respeito ao conhecimento matemático. Uma publicação sobre as relações entre o currículo escolar de Matemática e o tema de avaliação que precisa estar no conjunto de conhecimentos de um professor de educação básica é (Ruiz, 2018). As obras citadas são referências importantes que mostram a abrangência internacional das discussões sobre a formação do professor de Matemática, porém, deixamos claro que não é o foco deste texto abordar as questões gerais de estrutura e parâmetros da formação do professor de anos iniciais, na linha dessas obras, embora (Felmer, 2014) inclua em seus capítulos exemplos explícitos de como introduzir conceitos básicos e metodologias para trabalho direto nas salas de aula. O presente texto pretende argumentar, sob a perspectiva da Matemática, esclarecer as noções fundamentais do pensamento matemático subjacente à prática do professor ao trabalhar a pedagogia dos primeiros passos da aprendizagem por meio da comunicação matemática, apoiado no conhecimento pedagógico de conteúdo.

O objetivo específico deste texto consiste em apresentar uma análise reflexiva das considerações sobre “contagem, comparação, medição” como pensamentos importantes dos professores dos anos iniciais para compreender o significado do conteúdo curricular.

O texto está estruturado nas seguintes seções: A ideia matemática da contagem e a linguagem de representação conceitual; - A ação de contagem e a representação simbólica da linguagem matemática; - O significado de comparação nas atividades matemáticas e a representação simbólica; - A ação de medição no currículo dos anos iniciais e sua relação com a aritmética; - Considerações finais sobre a resolução de problemas e modelagem em linguagem matemática.

A ideia matemática da contagem e a linguagem de representação conceitual

A alfabetização numérica, que se inicia nos primeiros anos da educação escolar, é uma necessidade do letramento, que acompanha o domínio da escrita em língua pátria e forma a base da comunicação de ideias. São inúmeros os livros sobre teoria de números, filosofia da ciência e da Matemática, álgebra, história da Matemática, etc., que podem fazer parte da biblioteca de um professor em formação inicial ou continuada, mas o livro que o professor mais usará na sua prática é o livro didático, acompanhado de obras paradidáticas, e outros materiais que trabalham metodologias diversas e oferecem farto material manipulativo ou sugestões de atividades lúdicas e de tarefas. Porém, quando se questiona “por que o conteúdo está sendo apresentado assim, com que propósito?”, a explicação não é usualmente encontrada tampouco o suficiente para mostrar a conexão com o conhecimento que virá anos à frente do currículo escolar, e o professor acaba se contentando com os processos repetitivos de procedimentos de ensinar “trabalhando as folhas atividades como tarefas para os alunos”, na ordem apresentada nos livros/materiais didáticos. O professor que procura a resposta nos livros especializados de Matemática não a encontra sem que precise compreender um vocabulário abstrato próprio da linguagem matemática. Há um salto ao traduzir a linguagem abstrata da Matemática para a linguagem viva do cotidiano, de modo a transmitir o conceito matemático sintetizado no livro didático.

Neste sentido, uma literatura que elucide, com palavras simples e diretas, o significado da essência dos conceitos tem valor fundamental. Uma das formas é conhecer a história da evolução da Matemática ao longo dos tempos, acompanhando a própria história do desenvolvimento da

comunidade humana nas suas atividades sociais. Berlinghoff e Gouvea (2004) escreveram uma obra para ser “*um guia fácil e prático para professores e entusiastas*”, resultado de uma pesquisa sobre a História da Matemática e seu uso no Ensino, do National Council in Teaching Mathematics, dos Estados Unidos. A obra organizada por Guimarães e Borba (2009), “Reflexões sobre o ensino de Matemática nos anos iniciais de escolarização”, apresenta uma coletânea significativa de artigos de diversos autores sobre a importância dos conteúdos matemáticos, desde os primeiros passos na contagem até problemas de ensino de operações. A obra (Mandarino & Belfort, 2006) é uma contribuição diretamente destinada à formação continuada dos professores que atuam na fase da alfabetização numérica, sobre o tema de números naturais, conteúdo e forma. Não vamos comentar aqui livros especializados de Matemática que tratam da teoria de números, mesmo aqueles voltados para professores, por estarem além do escopo deste texto.

Nas obras citadas, o ato de “contar” objetos, sejam do mundo real ou representados por figuras e por ideias faladas, é o ponto de partida da aprendizagem matemática para introduzir uma representação simbólica que sintetiza a “quantidade” do conjunto de objetos, manipuláveis ou enumeráveis. No primeiro ano escolar, o ato intuitivo de contar os objetos, com os dedos ou apontando-os para nomeá-los, é natural e os alunos aprendem a escrever os numerais correspondentes. É o início da alfabetização numérica.

A ação de contagem e a representação simbólica da linguagem matemática

A escrita do conceito de um “número” que representa uma “quantidade”, independentemente dos objetos ou outras coisas que podem ser “contadas”, é o início da abstração matemática, ao introduzir uma simbologia e uma nomenclatura que não são o objeto em si, mas têm um significado próprio (observamos que, deliberadamente, não vamos desviar para as teorias de representação semiótica). Por isso, surge o conceito de “equivalência” entre classes de objetos que podem ser “comparados” por meio de uma correspondência um a um (biunívoca) entre seus elementos. Estamos dizendo que a abstração da Matemática nasce neste ato de “contar” por meio da “comparação”, e cada número, escrito por um numeral (no nosso sistema de numeração), representa a propriedade de um dado conjunto de objetos ter elementos correspondentes um a um com outro conjunto, sem deixar nenhuma exceção, e essa propriedade é invariante em relação a todo conjunto com mesma quantidade do conjunto inicial. É uma relação de equivalência matemática. Um número ganha uma identidade no mundo da Matemática que não é o conjunto em si de objetos que acabou de contar, mas, sim, representa uma propriedade do conjunto. Por isso, nas primeiras páginas de atividade de um livro didático do 1º ano os alunos fazem os exercícios de identificar nas ilustrações os objetos em quantidade que pode ser representada por um número, e aprendem a verbalizar o nome dele em língua pátria, e treinam a sua escrita. É o início da alfabetização numérica em paralelo com a alfabetização da linguagem.

O símbolo de igualdade (=) não deve ser usado para comparar os objetos, mas, sendo um símbolo matemático, é reservado na atividade de “contagem” para representar a igualdade entre os numerais que representam as quantidades iguais de dois conjuntos que foram comparados. Neste processo, após identificar o significado do numeral, como símbolo, surge a relação de

“maior que” ($>$) ou “menor que” ($<$), estabelecendo uma relação de ordem no conjunto dos números, chamados naturais ou inteiros.

O significado de comparação nas atividades matemáticas e a representação simbólica

Nos exercícios de comparação de quantidades, é natural trabalhar um número que possa ser decomposto em números menores que ele, por exemplo, 5 como 1 e 4, ou 3 e 2, entendendo por “comparação”, as quantidades de partes do conjunto de 5 objetos que pode ser separado em dois conjuntos, de 1 e 4 objetos, ou de 3 e 2 objetos. Quando se visualiza a situação de manipulação de objetos e se compreende naturalmente a composição de dois números para constituir um número maior, já se introduz o significado da estrutura de adição nos números inteiros, antes de operar. Na operação de adição, trabalham-se naturalmente as ações associadas à operação, como juntar ou acrescentar partes.

Introduzindo o símbolo $+$ para somar dois números, podemos representar, usando o símbolo de igualdade ($=$): $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. É claro que podemos escrever $2 + 3 = 3 + 2$, significando que ambos os lados da expressão representam o mesmo número que é 5. Estamos comparando os resultados das operações em cada lado da expressão e deduzindo que podemos usar o símbolo de igualdade ($=$) entre as duas expressões. Esse raciocínio é um pensamento algébrico da aritmética, sendo desenvolvido desde a fase da alfabetização. Este pensamento prepara o conceito de balanceamento de lados de uma equação em anos subsequentes da educação escolar.

A representação das operações algébricas com os números acompanha a alfabetização em língua pátria. A subtração entre dois números se dá por “comparação” entre os dados, e o resultado é 0 (zero) se os números forem iguais. Logo, a “diferença” entre dois números diferentes é o número que falta ao menor para compor o número maior, isto é, o número que “somado” ao “menor” resulta no maior. Outra situação surge quando dado um número, “retiramos” (subtraímos) um número menor, “sobrando” um número que, ao somar com o retirado, volta a completar o número dado. Representamos simbolicamente $7 - 3 = 4$, significando que $4 + 3 = 7$. Dependendo do contexto da situação, retiramos ou completamos, sempre por meio da “comparação” num contexto aditivo.

Associar a linguagem falada para descrever as ações dinâmicas das situações com os números leva naturalmente à atividade matemática relevante para a aprendizagem que é Resolução de Problemas, quando a modelagem em linguagem simbólica das operações que surgem da interpretação dos enunciados dos problemas ou do exercício de proposição de problemas, enriquece as atividades na sala de aula e a condução significativa dos professores para mediar o desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos.

As operações de multiplicação e divisão, também encaminhadas com os mesmos princípios, tornam a jornada do ensino e da aprendizagem da Matemática básica menos penosa e mais significativa para ser realizada pelos professores. A obra (Mandarino & Belfort, 2005), produzida como um produto da Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica, um projeto do MEC de 2003, é um rico material didático com orientações pedagógicas precisas das atividades de alfabetização numérica nos anos iniciais.

O conceito de agrupamento em unidades de 10 leva ao conceito de representação decimal utilizada de forma padronizada no mundo atual. Muitas estratégias de ensino da representação posicional, que é um caminho para a representação de números cada vez maiores, são trabalhadas também nos anos iniciais, por exemplo, com materiais concretos e manipulativos, uso de tecnologias. Seu princípio consiste em agrupar as unidades de 10 em 10, chamando o grupo formado de 1 dezena. Repetindo a ideia de que um grupo chamado “dezena” pode ser visto como nova unidade de contagem (de dezenas), agrupando as dezenas de 10 em 10, constituímos novo grupo chamado “centena”, e assim sucessivamente. A ordenação de direita para esquerda dos numerais que representam respectivamente as quantidades de “unidade”, “dezena”, “centena”, etc. cria um sistema de representação posicional, com enormes vantagens de cálculo e possibilidades de representações. Por exemplo, 387 significa 3 centenas, 8 dezenas e 7 unidades, logo $387 = 300 + 80 + 7$.

A operação de divisão de um número por outro aparece em situações-problema de divisão exata equitativa, como no caso de operação inversa de uma multiplicação de dois números inteiros. Porém, dados dois números inteiros, nem sempre um é divisor do outro. Também nestes casos, o pensamento matemático é de comparação para responder a questões como “quantas vezes o menor dos números cabe como parte do maior?”, “Se dividir o maior em um número de partes iguais correspondente a um número menor, qual é o número de cada uma dessas partes? Esse número é sempre um inteiro?” A situação de divisão não exata, quando o maior número não é múltiplo do menor, a situação leva ao conceito de um número que não é inteiro, mas que multiplicado por número menor recupera o maior, isto é, uma nova unidade de contagem, chamada fração unitária que poderá ser contada com o mesmo princípio da aritmética, porém num campo expandido. Em outras palavras, dividir um número inteiro a por outro número inteiro b , não nulo, produz um número denotado $\frac{a}{b}$ (a vezes a fração unitária $1/b$) que tem a propriedade de $b \times a/b$ resulta o número original a .

Quando não se atenta a essa coerência, o ensino fica fragmentado em atividades, estratégias metodológicas ocasionais e sem continuidade, e com predomínio de treinamento de técnicas de cálculo ou exercícios formatados sem flexibilidade que caracteriza o mundo real.

Ainda para enfatizar a versatilidade de modelos de representação nesta fase da alfabetização matemática, apontamos a representação dos números num modelo geométrico de semirreta, onde a escolha de um ponto de partida 0 e aleatoriamente de um ponto 1 permite destacar o segmento como uma representação geométrica da “unidade” de contagem ao longo da semirreta. Essa representação é uma manifestação do pensamento matemático de escolha de um sistema referencial, chamada “reta numérica”. Neste modelo de representação, os pontos marcados sobre a semirreta, usando como unidade de contagem o segmento de extremos 0 e 1, reproduzem as propriedades dos números até então estudadas, como *maior*, *menor*, isto é, a ordem dos números. As operações básicas de adição, subtração, multiplicação e divisão também podem ser sistematizadas neste modelo, seguindo a orientação da semirreta, o que possibilita inclusive a introdução conceitual de números fracionários desde o 3º ano, como fazem os livros didáticos dos países da Ásia, enquanto observamos um atraso considerável no Brasil. O modelo de semirreta é uma abstração dos modelos concretos de objetos reais, como fila de alunos, fila de

carteiras na sala, organização das linhas e colunas em tabelas, gráficos de dados tabelados para comparação, etc., possibilitando um amadurecimento do pensamento matemático para suavizar a transição entre os anos iniciais e finais do ensino fundamental.

A ação de medição no currículo dos anos iniciais e sua relação com a aritmética

As atividades de medição são parte importante do currículo dos anos iniciais como elo de ligação entre a Matemática e os problemas aplicados na vida real, em que os objetos nem sempre são unidades discretas de objetos concretos para contagem, como no caso de líquidos, por exemplo. As grandezas iniciais para medição são distância, comprimento, largura, perímetro, área, capacidade, massa, temperatura, abertura (angular), além de ter unidades diversas como xícaras, baldes, fardos e muito mais. Porém, logo surgem outras grandezas como rapidez, tempo, distâncias longas, unidades diversas, incluindo partes fracionárias, ou modelos de padrões para contagem, escalamento de medidas para entender proporcionalidade. Em todos esses problemas a essência da aritmética resolve os problemas de cálculo com números que resultam das medições, quando “medir” significa “comparar” a grandeza em questão do objeto com uma “unidade de medida” própria dessa grandeza, e o resto é fazer a aritmética da contagem dos números que são representados pela medição. Tratar essa diversidade de situação com base no conceito básico de “contagem das unidades do problema medidas com instrumentos adequados” traz a competência necessária no ensino e aprendizagem de Matemática elementar dos problemas e desafios do século XXI com suas tecnologias e interdisciplinaridade.

Considerações finais sobre a resolução de problemas e modelagem em linguagem matemática

Neste pequeno texto, focamos no pensamento fundamental da contagem e do ato de comparar como base na Matemática, para distinguir as classes de equivalência que simplificam e sintetizam os modelos. Essa simplificação nada mais é do que um meio para identificar a essência do que é importante, o que permite expandir para novos campos de conhecimento, sem perder a conexão com o conhecimento adquirido. A “medição” nas atividades dos anos iniciais escolares conecta os conceitos ao mundo das aplicações, mesmo na própria matemática ou em outras ciências, sendo a medição nada mais do que “comparar” usando ferramentas adequadas com modelos de unidades para atribuir números que permitam dar respostas e interpretar os fenômenos nos problemas originais. Neste cenário da Matemática, a linguagem que permite modelar um problema real traduzindo-o em um modelo matemático, usar a linguagem matemática para executar e testar as estratégias de solução, comunicar matematicamente a resposta para interpretar/validar e analisar dentro do problema real, permite completar o ciclo da Metodologia de Resolução de Problemas, em qualquer nível de ensino e aprendizagem.

Professor dos anos iniciais que compreenda e visualize os princípios de “contar, comparar, medir” nos roteiros de ensino e de aprendizagem e reconheça neles o papel fundamental no desenvolvimento do currículo de matemática básica terá potencializado a sua formação.

Referências e bibliografia

- Ball, D.L., Thames, M.H. & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes it Special? *Journal of Teacher Education*, Vol. 59, N. 5, Dec 2008, 389-407.
- Berlinghoff, W.P., Gouvêa, F. Q. (2004). *A Matemática através dos Tempos - Um guia fácil e prático para professores e entusiastas. 2a edição*. Blucher. São Paulo.
- BRASIL (2018) *Base Nacional Comum Curricular-BNCC*, Ministério da Educação, Brasília DF.
- BRASIL (2019) *Base Nacional Comum para Formação de Professores da Educação Básica-BNC-Formação*. Ministério de Educação. Brasília DF.
- Felmer, P. (Org.) (2014). *Primary Mathematics Standards for Pre-Service Teachers in Chile- A Resource Book for Teachers and Educators*. Series on Mathematics Education Vol. 9 World Scientific Publishing Co. Singapore.
- Gatti, B.A. (2009). Análise dos cursos presenciais de Licenciatura em Pedagogia. Em Gatti, B. A., Muniz, M. & Nunes, R. (Org) *Formação de professores para o ensino fundamental: estudo de currículos das licenciaturas em pedagogia, língua portuguesa, matemática e ciências biológicas*. Vol. 29. Fundação Carlos Chagas/ Departamento de Pesquisas Educacionais. São Paulo.
- Guimarães, G., Borba, R. (Org.) (2009). *Reflexões sobre o ensino de matemática nos anos iniciais de escolarização*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática - SBEM. Recife.
- Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001). *Adding it up- Helping Children Learn Mathematics*. National Research Council. National Academy Press. Washington DC
- Mandarino, M.C., Belfort, E. (2005). *Matemática nas Séries Iniciais, Parte I, Números Naturais - Conteúdo e Forma*. Rede Nacional de Formação Continuada de Professores de Educação Básica, Ministério de Educação. Rio de Janeiro.
- Ruiz, A. (2018). *Evaluación y Pruebas Nacionales para un Currículo de Matemáticas que enfatiza Capacidades Superiores*. CIAEM. Mexico.
- SEAMEO-RECSAM (2013). *Southeast Asia Regional Standards for Mathematics Teachers (SEARS-MT)* Regional Centre for Education in Science and Mathematics. Penang, Malaysia.
- Takahashi, A. (2010). Prospective and Practicing Teacher Professional Development with Standards. *APEC Conference on Replicating Exemplary Practices in Mathematics Education*. Koh Samui, Thailand.
- Shulman, L.S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2). 4-14.
- Shulman, L.S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.

Minicursos



Ansiedad y autoeficacia en la Matemática: Explorando el aprendizaje desde la investigación y la neurociencia

Claudia Vargas Díaz

Departamento de Matemática y Ciencia de la Computación, Universidad de Santiago de Chile
Chile

claudia.vargas.d@usach.cl

Resumen

La investigación indica que la Autoeficacia Matemática tiene un impacto tan relevante como el nivel socioeconómico en los resultados académicos, siendo la Autoeficacia Matemática una creencia posible de modificar desde el sistema escolar. Por otro lado, la ansiedad que experimenta el estudiantado cuando se enfrenta a una evaluación o al expresar la solución de una tarea matemática en público, le genera una descarga de cortisol semejante a la que experimentamos cuando enfrentamos un peligro. De hecho, la Neurociencia indica que el estrés, las hormonas del estrés y los neurotransmisores liberados durante y después de un evento estresante son los principales moduladores de los procesos de aprendizaje y memoria en humanos, con implicaciones críticas para los contextos educativos.

En el minicurso comprenderemos algunos elementos interesantes que nos aporta la investigación en Educación Matemática acerca de la Autoeficacia Matemática y sobre la Neurociencia en el aprendizaje de la Matemática.

Palabras clave: Ansiedad Matemática, aprendizaje, Autoeficacia Matemática, Matemática, Neurociencia.

Introducción

Tradicionalmente, no se consideraba el dominio afectivo del alumnado en el aprendizaje de la Matemática. De hecho, la influencia de los aspectos socioemocionales en el rendimiento matemático comenzó a medirse en PISA en 2003 y 2012 (OCDE, 2005, 2013).

Enseñar y aprender Matemática presenta una variedad de desafíos. Una barrera que afecta al alumnado de forma significativa es la creencia de que no son capaces de aprender Matemática o de que no tienen talento natural para ello. Esto es: piensan que no son “personas matemáticas”. Como resultado, el alumnado puede creer que no es capaz de obtener buenas calificaciones y tener éxito en Matemática. Esta percepción se conoce como autoeficacia y es un concepto introducido en los años 80 del siglo XX por el psicólogo canadiense Albert Bandura.

Cuando uno o una estudiante aprende Matemática, recibe estímulos del ambiente escolar o familiar ante los que reaccionan emocionalmente, en forma positiva, negativa o indiferente. Estas reacciones están condicionadas por creencias frente a la Matemática (Gómez-Chacón, 2000) o creencias acerca de sus propias capacidades en Matemáticas denominada Autoeficacia Matemática (Leong, 2023).

La investigación indica que la autoeficacia tiene un impacto tan relevante como el nivel socioeconómico en los resultados académicos, siendo la Autoeficacia Matemática una creencia posible de modificar desde el sistema escolar. Además, cuando los estudiantes se sienten autoeficaces en Matemática, sus resultados académicos son notablemente mejores (OCDE, 2023b).

Vergara (2016) señala que los métodos tradicionales de enseñanza centran sus esfuerzos en ocuparse de la construcción racional del conocimiento. Para el autor, las emociones, las relaciones y el cuerpo parecen ocupar un lugar secundario en el aprendizaje. Reconoce que la Neurociencia contradice esta visión ya que solo se aprende lo que emociona, solo se enseña lo que seduce. En efecto, las emociones y la motivación son importantes para el aprendizaje y el rendimiento en Matemáticas (Schukajlow et al, 2023).

¿Pero qué pasa cuando los escolares sienten ansiedad? La ansiedad que experimenta el estudiantado cuando se enfrenta a una evaluación o a expresar la solución de una tarea matemática en público genera una descarga de cortisol semejante a la que experimentamos cuando enfrentamos un peligro (Vargas, 2023). De hecho, la Neurociencia indica que el estrés, las hormonas del estrés y los neurotransmisores liberados durante y después de un evento estresante son los principales moduladores de los procesos de aprendizaje y memoria en humanos, con implicaciones críticas para los contextos educativos (Dinse et al, 2017).

Imaginemos a una estudiante de secundaria que se enfrenta a un estímulo como mostrar la solución de problema de Matemática frente a sus compañeros. ¿Qué le pasa en ese instante?: Se dilatan sus pupilas, se seca su boca, aumenta su frecuencia cardíaca, se tensan sus músculos y se erizan los vellos en su cuerpo. La adolescente tiene miedo. Tiene sensaciones de amenaza y angustia, se siente estresada, ha aumentado el cortisol en su cuerpo. Están ocurriendo los mecanismos de la memoria del miedo. La amígdala, es donde se genera la memoria del miedo,

que recuerda situaciones anteriores, ni siquiera relacionadas a la Matemática solamente (Vogel, 2016).

Entonces desde la corteza medial prefrontal y orbitofrontal se proyectan neuronas que activan circuitos capaces de inhibir a las neuronas implicadas en la memoria del miedo. Este mecanismo permite disminuir o extinguir las respuestas de temor. Sin embargo, en condiciones de estrés la capacidad de estas sinapsis se ve reducida, por lo que la influencia de la corteza sobre la amígdala es menor y resulta más difícil controlar el miedo (Gazzaniga, 2009).

Desde la Neurociencia se ha visto que el estrés crónico, las hormonas del estrés y los neurotransmisores liberados durante y después de un evento estresante son los principales moduladores de los procesos de aprendizaje y memoria en humanos, con implicaciones críticas para los contextos educativos (Kandel, 2013).

De este modo, como educadores debemos estar atentos. Más aún cuando la Matemática es uno de los principales gatillantes del miedo en la educación.

Los estudios afirman que la ansiedad predice la activación de la red de dolor del cerebro en anticipación a realizar las tareas matemáticas. Saber que hay que hacer ejercicios de Matemática predispone a las personas. Los estudiantes suelen decir: ¡toca Matemáticas! ¡Qué mal! A mayor ansiedad, mayor actividad en detección de amenazas. En estricto rigor, la Matemática no es el gatillo de la ansiedad. Es la anticipación a la situación relacionada con la Matemática, es decir, la ansiedad (Lyons, 2012).

¿Por qué le pasan estas cosas al alumnado? Es porque padecen Ansiedad Matemática. Por otra parte, el miedo ante la Matemática dificulta el aprendizaje, mientras que los sentimientos de éxito y el interés lo favorecen (Vargas, 2023).

Las emociones involucran la realidad de la experiencia diaria de la humanidad, realidad tanto para el profesorado como para el alumnado, que incluye componentes fisiológicas, cognitivas, motivacionales y una larga historia de experiencias, desde la primera infancia. Es así como, la investigación en Neurociencia propone que el juego en la primera infancia tiene efectos sobre la estructura y funcionamiento del cerebro. El juego genera cambios a nivel molecular, celular y conductual. Respecto de esto último, genera cambios en las habilidades socioemocionales y de funcionamiento ejecutivo que promueven el aprendizaje y el comportamiento adaptativo y prosocial (Goldin, 2022).

En una experiencia con niños pequeños ansiosos en su primer día de clases, de entre 3 y 4 años, se dividieron en dos grupos en que unos escucharían un cuento y otros jugarían con juguetes libremente. Luego de 15 minutos todos presentaban un nivel de ansiedad inferior al que tenían al llegar al colegio. Sin embargo, en los que jugaron la ansiedad disminuyó un 65%. En los que escucharon el cuento solo un 25% (Goldin, 2022). Entonces, el juego ayuda a los niños a lidiar con situaciones estresantes. Además, de la investigación en Neurociencia se sabe que el hecho de jugar a los 3 o 4 años, por ejemplo, predice en parte el rendimiento académico en Matemática hasta finales de la escuela primaria (Goldin, 2022).

En la adolescencia, plena etapa de poda neuronal (Kandel, 2013), sobrevienen otros cambios que conllevan múltiple atención por parte del profesorado.

La investigación ha demostrado ampliamente que la autoeficacia es un predictor más significativo del rendimiento académico que otras variables cognitivas (Bandura, 1986), y también predice el éxito futuro (Bandura, 1997; Pajares y Schunck, 2001). Se ha encontrado que las creencias de Autoeficacia Matemática son un mejor predictor del desempeño que la Ansiedad Matemática y las concepciones sobre la utilidad de las Matemáticas (Pajares y Miller, 1994; Fonna & Mursalin, 2018). Además, la autoeficacia influye emocionalmente, disminuyendo el estrés, la ansiedad y la depresión (Klassen y Usher, 2010; Pajares, 1996; Zimmerman, 2000), y se correlaciona positivamente con los resultados académicos y la persistencia en una amplia variedad de temas, diseños experimentales y métodos de evaluación (Multon et al., 1991).

A la luz de un experimento ya realizado y, de acuerdo con la teoría, también se confirmó que la Ansiedad Matemática no es tan buen predictor del rendimiento en Matemáticas como la autoeficacia (Vargas & Matus, 2024). Además, se concluyó que los aspectos emocionales son tan relevantes para el rendimiento en Matemática como el estatus socioeconómico. Se destaca, además, que la relevancia de este hallazgo radica en que los aspectos socioemocionales pueden ser gestionados (mejorados) por el sistema escolar.

Como estudio de seguimiento al mencionado, se plantea la aplicación de un cuestionario de ansiedad a otra muestra en condiciones similares. En efecto, se quiso averiguar si la nueva muestra sufre el mismo nivel de ansiedad que la muestra de PISA. La hipótesis es que los participantes de la muestra de divulgación sufren menos ansiedad que la muestra de PISA.

Algunos resultados de investigación

Según los resultados de PISA 2022, la Ansiedad Matemática afecta a jóvenes de 15 años en diversos países y culturas, observándose lo que refleja un impacto amplio y persistente en el rendimiento académico a nivel global. En Chile, los estudiantes presentan los niveles más altos de Ansiedad Matemática entre los países de la OCDE (Figura 1), igualando solo a Turquía y destacándose negativamente en Sudamérica (OCDE, 2023b, 2023c).

Esta ansiedad impacta significativamente el rendimiento académico, reduciendo los puntajes entre 7 y 9 puntos en las evaluaciones PISA. Además, los factores socioemocionales como la Ansiedad Matemática influyen tanto como el nivel socioeconómico en las evaluaciones internacionales como PISA.

La Ansiedad Matemática, definida como una sensación de tensión o miedo que interfiere con el desempeño matemático, obstaculiza el aprendizaje, mientras que emociones positivas como el interés y el éxito lo potencian (McLeod, 1994). En Chile, este factor afecta negativamente tanto el rendimiento general en Matemática como en subáreas específicas (geometría, datos y probabilidad, entre otras) evaluadas en PISA 2022 (OCDE, 2023a).

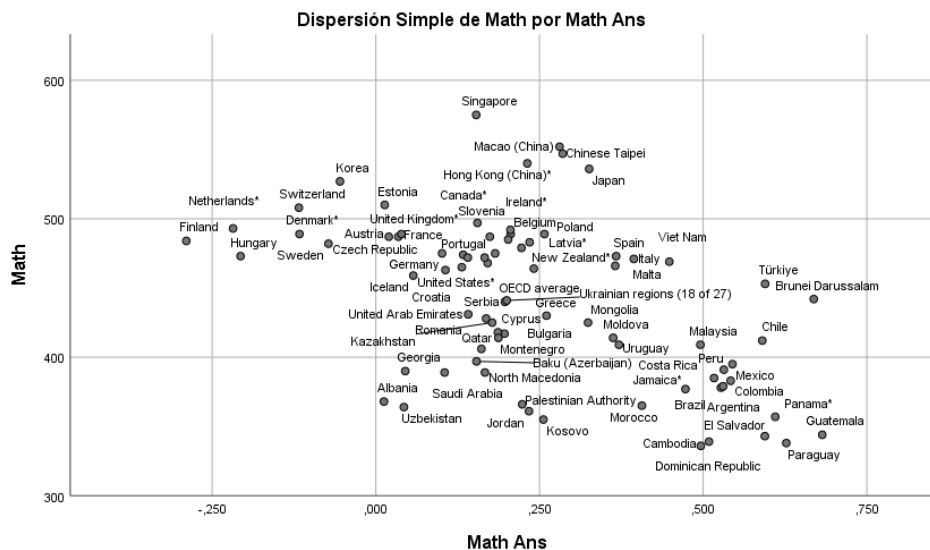


Figura 1. Dispersión simple Ansiedad Matemática.

La Ansiedad Matemática está asociada a un menor desempeño en Matemáticas (Ashcraft & Faust, 1994) y a la adopción de metas menos desafiantes (Barroso et al., 2021). Sin embargo, altos niveles de ansiedad no implican siempre bajo rendimiento académico, ya que factores como una alta motivación o la supresión de los síntomas pueden conducir a buenos resultados. La Ansiedad Matemática aumenta con la escolaridad: afecta al 11% del alumnado en niveles básicos y se duplica o triplica en grados superiores (Devine et al., 2018).

La ansiedad también influye en el rendimiento en Ciencias Naturales y Lectura, aunque en menor medida que en Matemáticas. Desde 2003, las pruebas PISA miden la Ansiedad Matemática, la autopercepción y las actitudes hacia la asignatura, revelando que el 60% del estudiantado declara preocuparse por las clases de Matemática y el 39% se siente tenso al resolver problemas.

Nos preguntamos si ¿la Ansiedad Matemática, medida mediante un cuestionario, sigue siendo consistente entre la muestra de PISA y un grupo de estudiantes de secundaria en una actividad de divulgación matemática? El objetivo de la investigación fue determinar si la ansiedad sigue siendo consistente entre estudiantes expuestos a la prueba PISA y aquellos expuestos a una actividad de divulgación matemática.

Metodología

Los participantes fueron estudiantes de segundo año medio de un Liceo Técnico Profesional (LTP) de la región del Maule. El liceo fue invitado a visitar la Universidad de Santiago de Chile y un grupo autoseleccionado de estudiantes interesados en Matemáticas asistió a una actividad de divulgación del Museo Laboratorio de Didáctica de la Matemática. El museo desarrolla una Red Museo-Escuela integrando la investigación en Ansiedad Matemática.

El instrumento de recolección de datos fue el Cuestionario de Ansiedad Matemática (Cuestionario Contextual de PISA en escala de Likert en grado de acuerdo), el cual se pidió

contestar a los estudiantes participantes previa autorización del Director del LTP, de la profesora a cargo de la visita, de los apoderados y con el asentimiento informado de los menores.

Para el análisis, se compararon los resultados del cuestionario de Ansiedad Matemática entre estudiantes que participaron en PISA 2022 y estudiantes de enseñanza media de 15 años que participaron en la actividad de divulgación matemática.

Resultados

A continuación, se presentan los resultados resumidos en la Tabla 1. Se aprecia que los estudiantes del LTP del Maule presentan mayor acuerdo con relación a la preocupación por tener dificultades en la clase de Matemática y por tener malas notas. También se destaca que se sientan perdidos cuando trabajan con un problema de Matemática.

Tabla 1

Porcentajes de acuerdo con afirmaciones sobre Ansiedad Matemática en las distintas muestras

Preguntas	LTP Maule	PISA	PISA LTP
A menudo me preocupa tener dificultades en las clases de Matemática.	82	74	76
Me pongo muy tenso/a cuando tengo que hacer la tarea de Matemática en mi casa.	54	51	54
Me pongo muy nervioso/a cuando trabajo con problemas matemáticos.	57	55	59
Me siento perdido/a cuando trabajo con un problema matemático.	71	56	60
Me preocupa tener malas notas en Matemática.	92	84	82
Me siento ansioso/a por fallar en Matemática	71	64	62

Fuente: elaboración propia.

Conclusiones

De acuerdo con los hallazgos, las emociones, fundamentales en la experiencia educativa, deben ser consideradas tanto para el profesorado como para el estudiantado puesto que existe una notable influencia de factores emocionales en el aprendizaje de la Matemática, aunque quedan preguntas abiertas: ¿qué impacto tienen las actividades previas a la toma de datos o si el contexto universitario influye en la percepción de Ansiedad Matemática?

Los estudiantes de LTP manifiestan una alta preocupación por tener dificultades en Matemática, tanto a nivel nacional como en la muestra de la región del Maule. Esto exige identificar las causas para tomar medidas a fin de prevenir y disminuir los factores que provocan Ansiedad Matemática en los jóvenes. Hay que considerar que en Chile existen 944 LTP que educan alrededor de 156,355 estudiantes.

Además, la inquietud por obtener malas notas presenta los mayores porcentajes de acuerdo en todas las muestras. Esto refleja la importancia que el estudiantado atribuye a un buen rendimiento en Matemática. No obstante, esto es un signo de Ansiedad Matemática que debería

ser atendido. En otros estudios hemos visto que obtener buenas calificaciones suele generar tensión en jóvenes con rendimiento destacada (Vargas & Matus, 2022).

Los resultados evidencian que el profesorado requiere herramientas para atender aspectos emocionales en clases, favoreciendo una Educación Matemática integral. En el caso de la formación de LTP, tratar la Ansiedad Matemática es clave para mejorar resultados y favorecer la prosecución de estudios en áreas STEM, dado el papel transversal de la Matemática en ellas (Cuder, 2024). Se confirma que la Ansiedad Matemática es un factor crítico en el rendimiento, equiparable al nivel socioeconómico, pero con posibilidad de ser intervenido en el sistema escolar. Hay que recordar que el estrés y las emociones negativas activan circuitos neuronales que interfieren con el aprendizaje, de modo que es urgente que el profesorado de Matemáticas disponga de herramientas para identificar y prevenir la Ansiedad Matemática.

Dado que lo afectivo en el aprendizaje se comienza a entender como relevante para obtener mejores resultados académicos, es importante señalar que ya no se tratará solamente del profesorado dictando contenidos, o de niños manipulando objetos sin una clara intención didáctica detrás, o de un software que muestre más rápidamente la posición de una curva y lo relacione con una ecuación. También hay que comprender la importancia de las emociones del estudiantado en el aula de Matemática, leer estas emociones en los rostros de niñas, niños y jóvenes e intentar atenderlas.

Desde la Neurociencia, incorporar prácticas pedagógicas que reduzcan el estrés y promuevan la autoeficacia, además de intervenciones basadas en juegos y exploración podrían ayudar a disminuir la activación de redes neuronales asociadas al miedo. Estos serían ejemplos de acciones que podrían aumentar la predisposición del alumnado al aprendizaje.

Los resultados de este estudio junto a las mediciones de PISA, y los conocimientos sobre Neurociencia, indican que el tratamiento de la Ansiedad Matemática debe ser preventivo e integral posibilitando que el aprendizaje no solo sea cognitivo, sino también emocionalmente saludable. Por ejemplo, se pueden realizar algunas recomendaciones para la actividad en el aula de Matemática. Acordar junto al alumnado si salir o no a la pizarra, evitar el asociar la Matemática con recompensa o castigo, tratar de asociar la Matemática con descubrimiento y no con listas de ejercicios, proporcionar experiencias ricas en múltiples maneras de llegar a la solución de un problema de Matemática.

La persistencia de Ansiedad Matemática sugiere que se deben dirigir los esfuerzos para lograr disminuir el peso de los factores emocionales en el aprendizaje de la Matemática. Además, en comparación con países de mejor desempeño, se observa que la Ansiedad Matemática no solo afecta los resultados académicos, sino también la motivación y la elección de trayectorias profesionales en STEM.

Las sugerencias apuntan hacia una formación docente que integre herramientas para identificar y manejar la Ansiedad Matemática en el aula, propender a intervenciones escolares tempranas en las que se incorpore el juego con Matemática de modo que reduzcan la asociación entre Matemática y miedo desde la infancia, todo apuntando hacia la salud emocional del estudiantado.

Agradecimientos

Proyecto Dicyt USACH de Asistencia a Eventos. Claudia Matus, Análisis de datos.

Referencias y bibliografía

- ACE. (2024). Informe nacional PISA 2022: Evaluación internacional de estudiantes tras la pandemia.
- Ahmed, W. (2018). Developmental trajectories of math anxiety during adolescence: Associations with STEM career choice. *Journal of Adolescence*, 67, 158–166.
- Ashcraft, M. H. y Faust, M. W. (1994). Mathematics anxiety and mental arithmetic performance: An exploratory investigation. *Cognition and Emotion*, 8(2), 97–125.
- Bandura, A. (1986). Social foundations of thought and action: A social cognitive theory. Prentice Hall.
- Barroso, C., Ganley, C. M., McGraw, A. L., Geer, E. A., Hart, S. A., & Daucourt, M. C. (2021). A meta-analysis of the relation between math anxiety and math achievement. *Psychological Bulletin*, 147(2), 134–168.
- Cuder, A., Pellizzoni, S., Di Marco, M., Blason, C., Doz, E., Giofrè, D. y Passolunghi, M. C. (2024). The impact of math anxiety and self-efficacy in middle school STEM choices: A 3-year longitudinal study. *British Journal of Educational Psychology*, 94(4), 1091–1108.
- Devine, A., Hill, F., Carey, E. y Szűcs, D. (2018). Cognitive and emotional math problems largely dissociate: Prevalence of developmental dyscalculia and mathematics anxiety. *Journal of Educational Psychology*, 110(3), 431–444.
- Dinse, H., Kattenstroth, J., Lenz, M., Tegenthoff, M., Wolf, O. (2017). The stress hormone cortisol perceptual learning in humans. *Psychoneuroendocrinology*, 77, 63–67.
- Eidlin-Levy, H., Avraham, E., Fares, L. y Ben-David, S. (2023). Math anxiety affects career choices during development. *International Journal of STEM Education*, 10, 49.
- Fonna, M. y Mursalin, M. (2018). Role of Self-Efficacy Toward Students' Achievement in Mathematical Multiple Representation Ability (MMRA). *Jurnal Ilmiah Peuradeun*, 6(1), 31–40.
- Gazzaniga, M. S., Ivry, R. B. y Mangun, G. R. (2009). Cognitive Neuroscience: The Biology of the Mind (4th ed.). W. W. Norton & Company.
- Goldin, A. (2022). Neurociencia en la escuela: Guía amigable (sin bla bla) para entender cómo funciona el cerebro durante el aprendizaje. Siglo XXI Editores.
- Kandel, E. R., Schwartz, J. H., Jessell, T. M., Siegelbaum, S. A., Hudspeth, A. J. y Mack, S. (2013). Principles of neural science (5th ed.). McGraw-Hill Education.
- Klassen, R. y Usher, E. (2010). Self-efficacy in educational settings: Resent research and emerging directions. En T. Urdan and S. Karabenick (Eds.), *The decade ahead: Theoretical perspectives on motivation and achievement*, (pp. 1–34), Emerald Group Publishing Limited.
- Leong, Y. H. (2023). Contours of self-efficacy across nested mathematical domains: a case of a Singapore student with a history of low performance in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, 35, 171–192.
- Lyons I. y Beilock, S. (2012). When Math Hurts: Math Anxiety Predicts Pain Network Activation in Anticipation of Doing Math. *PLoS ONE*, 7(10), e48076.
- McLeod, D. B. (1994). Research on affect and mathematics learning in the JRME: 1970 to the present. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(6), 637–647.
- Multon, K., Brown, S. y Lent, R. (1991). Relation of self-efficacy beliefs to academic outcomes: A meta-analytic investigation. *Journal of Counseling Psychology*, 38(1), 30–38.
- OCDE. (2023a). PISA 2022. Assessment and analytical framework. OECD Publishing.
- OCDE. (2023b). PISA 2022 Results (Volume I) The State of Learning and Equity in Education. OECD Publishing.
- OCDE. (2023c). PISA 2022 Results (Volume II) Learning During and From Disruption. OECD Publishing.
- OECD (2005). Technical report.
- OECD (2013). PISA 2012 Assessment and Analytical Framework: Mathematics, Reading, Science, Problem Solving and Financial Literacy, OECD Publishing.
- Pajares, F. y Miller, M. D. (1994). Role of self-efficacy and self-concept beliefs in mathematical problem solving: A path analysis. *Journal of Educational Psychology*, 86(2), 193–203.
- Pajares, F. y Schunk, D. (2001). Self-Beliefs and School Success: Self-Efficacy, Self-Concept, and School Achievement. En R. Riding y S. Rayner (Eds.), *Perception* (pp. 239–266). Ablex Publishing.

- Schukajlow, S. Rakoczy, K y Pekrun, R. (2023). Emotions and motivation in mathematics education: Where we are today and where we need to go. *ZDM – Mathematics Education*, 55, 249–267.
- Street, K. E. S., Malmberg, L. E. y Schukajlow, S. (2024). Students' mathematics self-efficacy: A scoping review. *ZDM Mathematics Education*, 56, 265–280.
- Vargas, C. (2025). Mathematical anxiety of chilean students from a technical-vocational high school. TSG 7, The Essence of Mathematics Education in Affective and Emotional Aspects, EARCOME-9, Seoul, Korea.
- Vargas, C. (2023). Presentación del Diplomado de Neurociencia. Universidad de Santiago de Chile.
- Vargas, C. y Matus, C. (2024). Mathematics Self-efficacy questionnaire results for high school students. TSG 5.1, Students identity, motivation and attitudes towards mathematics and its study, ICME-15, Sydney, Australia.
- Vargas, C. y Matus, C. (2022). Factores de la dimensión afectiva asociados a las reacciones frente evaluaciones en matemática: la experiencia de dos jóvenes estudiantes destacados académicamente. *Revista Innovaciones educativas*, 24(37), 67–78.
- Vergara Ramírez, J. J. (2016). Aprendo porque quiero: El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP). Paso a paso, Ediciones SM.
- Vogel, S. y Schwabe, L. (2016). Learning and memory under stress: implications for the classroom. *npj Science of learning*, 1, 16011.



Aprendiendo estadística a través de proyectos: Una experiencia activa y significativa en el aula

Jorge Daniel Mello Román

Facultad de Ciencias Exactas y Tecnológicas, Universidad Nacional de Concepción

Paraguay

jdmello@facet-unc.edu.py

Resumen

El Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) es una metodología enfocada en los estudiantes que impulsa el aprendizaje activo mediante la investigación y la resolución de problemas reales. A diferencia de los modelos de enseñanza tradicionales, el ABP invita a los estudiantes a aplicar sus conocimientos en contextos prácticos, fomentando la colaboración, la creatividad y el pensamiento crítico. Este minicurso se llevará a cabo con un enfoque de aprendizaje colaborativo, donde facilitador y participantes trabajarán conjuntamente para explorar la implementación del ABP en las aulas de estadística. Se generará un espacio dinámico para compartir experiencias, conocimientos y perspectivas. A lo largo del curso, se analizarán proyectos que involucren a los estudiantes en todo el proceso estadístico: desde el diseño y la recolección de datos, hasta su análisis y presentación. Los participantes también evaluarán estrategias para superar los desafíos que conlleva esta metodología. El objetivo es que los participantes descubran cómo el ABP puede transformar la enseñanza de la estadística, conectando los conceptos con situaciones del mundo real para lograr un aprendizaje significativo y motivador en los estudiantes.

Palabras clave: Aprendizaje Basado en Proyectos; Aprendizaje colaborativo; Metodologías activas de enseñanza; Didáctica de la Estadística.

Introducción

La alfabetización estadística es crucial para interpretar datos en diversos campos, pero los estudiantes a menudo enfrentan desafíos como la ansiedad y las ideas erróneas sobre conceptos fundamentales (Karmanov & Zolotareva, 2022). Las metodologías de aprendizaje activo, en particular el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP), han demostrado ser prometedoras para mejorar el compromiso y la comprensión de los estudiantes en estadística (Kvam, 2000). Este enfoque se alinea con marcos internacionales como GAISE (Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education) elaborado por la American Statistical Association (ASA) para mejorar la enseñanza de la estadística, especialmente en cursos introductorios a nivel secundario y universitario, que enfatizan comenzar con preguntas y datos del mundo real (Perrett, 2024). El minicurso propuesto tiene como objetivo integrar estas estrategias pedagógicas, utilizando como ejemplo práctico un estudio de caso, con el fin de ayudar a los participantes a conectar conceptos estadísticos con aplicaciones del mundo real y diseñar proyectos de clase escalables.

Muchos estudiantes experimentan ansiedad al aprender estadística, lo que puede dificultar su rendimiento y comprensión. Esta ansiedad suele estar vinculada a conceptos erróneos sobre estadísticas como la media y la correlación, los cuales son frecuentes entre estudiantes de diversas disciplinas, incluidas la ingeniería y las ciencias sociales (Peiro-Signes et al., 2021). Asimismo, los estudiantes a menudo tienen dificultades para transferir el conocimiento estadístico a contextos del mundo real, lo cual es esencial para desarrollar la alfabetización estadística. Este desafío se agrava por el hecho de que la estadística a menudo se enseña como conceptos abstractos en lugar de como herramientas para resolver problemas reales (Jones & Goldring, 2017).

El uso de datos del mundo real y preguntas relevantes para los intereses de los estudiantes puede mejorar significativamente el compromiso y la comprensión. Este enfoque transforma la estadística de una materia abstracta a una herramienta práctica para la indagación y la resolución de problemas (Luse & Burkman, 2018). El ABP alienta a los estudiantes a involucrarse activamente con los conceptos estadísticos a través de proyectos que requieren aplicar su conocimiento a problemas reales. Se ha demostrado que este método mejora el compromiso, la comprensión conceptual y el desempeño de los estudiantes en cursos de estadística (D'Andrea & Wooten, 2017).

El informe GAISE para la universidad recomienda que los cursos introductorios de estadística hagan hincapié en la alfabetización estadística y la comprensión conceptual. Sugiere integrar evaluaciones alineadas con los objetivos del curso para mejorar y evaluar el aprendizaje de los estudiantes (Perrett, 2024). El uso de datos reales y preguntas auténticas es una recomendación clave para la enseñanza de la estadística. Este enfoque ayuda a los estudiantes a ver la relevancia de la estadística en la vida cotidiana y fomenta una comprensión más profunda de los conceptos estadísticos (Kraft & Hinrichs, 2022).

Diseño e implementación del minicurso

La propuesta se organiza en cuatro momentos que combinan exposición breve, análisis de caso, trabajo colaborativo y reflexión compartida. El foco está puesto en generar productos

didácticos concretos y adaptables: una guía de clase y un mapa de proyecto que puedan ser implementados en aula.

- i. El minicurso inicia con una conversación guiada donde se problematiza la enseñanza tradicional de la estadística y se introducen las bases del ABP en diálogo con las recomendaciones GAISE (Perrett, 2024). A través de mapas conceptuales, ejemplos y testimonios, se contextualiza la necesidad de repensar la didáctica estadística desde un enfoque activo, centrado en el estudiante y anclado en la realidad.
- ii. Posteriormente, se presenta un estudio de caso desarrollado en la Universidad Nacional de Concepción (Paraguay), donde un equipo docente implementó un proyecto estadístico en estudiantes de nuevo ingreso en Ingeniería Civil. Se analiza el proceso completo: desde la identificación del problema, el diseño del instrumento de recolección, el análisis exploratorio (tablas, gráficos, histogramas, medidas de tendencia central, etc.) hasta la presentación de resultados y su evaluación (Kwan, 2016). Este caso permite discutir desafíos reales, estrategias de adaptación y aprendizajes significativos.
- iii. El núcleo del curso está constituido por un taller de diseño, donde los participantes, organizados en equipos, construyen sus propios proyectos. Se parte de problemas locales (por ejemplo, acceso a servicios, residuos, movilidad, salud comunitaria, etc.), y se transita por todas las etapas del proceso estadístico (Portalés-Mañanós et al., 2012). Cada equipo redacta objetivos, define variables, diseña instrumentos, simula una pequeña base de datos, realiza visualizaciones básicas y elabora una rúbrica de evaluación. La actividad se acompaña con insumos técnicos, modelos y tutoría entre pares.
- iv. El cierre incluye una instancia de socialización en formato de galería didáctica, donde cada grupo presenta su propuesta y recibe retroalimentación. Se entregan recursos complementarios y una lista de verificación para la implementación. El énfasis está puesto en la escalabilidad de los proyectos y en la importancia de comenzar pequeño, pero con sentido.

Discusión

Los resultados de investigaciones recientes respaldan fuertemente la eficacia del ABP en la enseñanza de la estadística. En un estudio cuasi-experimental, Wickramasinghe y Appiah (2024), evidenciaron que los estudiantes universitarios expuestos al ABP mostraron mejoras significativas en evaluaciones posteriores, así como un mayor nivel de satisfacción con la materia. De forma similar, Salvador Rosado et al. (2024) demostraron que los estudiantes que trabajaron con proyectos en cursos de estadística descriptiva desarrollaron mejores habilidades analíticas y lograron desempeños superiores en dimensiones clave como recolección, tabulación y análisis de datos.

Marshall (2019) señala que uno de los principales beneficios del ABP es que permite construir una comprensión profunda y conectada de los conceptos estadísticos, al tiempo que promueve la autonomía del estudiante. En su experiencia con estudiantes de primer año en el Reino Unido, observó un aumento notable en la asistencia, el compromiso y la calidad del pensamiento estadístico, especialmente en aquellos que inicialmente mostraban rechazo hacia la estadística.

La implementación de esta metodología, sin embargo, no está exenta de desafíos. Requiere una planificación cuidadosa, el rediseño de evaluaciones, una postura docente abierta a la facilitación y una gestión adecuada del tiempo. No obstante, sus beneficios superan ampliamente sus dificultades. Como indican Putra et al. (2024), el ABP incrementa la motivación, desarrolla la comunicación matemática y mejora las habilidades de resolución de problemas en estudiantes de secundaria, validando su aplicabilidad en diferentes niveles educativos.

El Aprendizaje Basado en Proyectos representa una oportunidad concreta para revitalizar la enseñanza de la estadística y transformarla en una experiencia activa, significativa y pertinente. Este minicurso busca ser un punto de partida para ese cambio, ofreciendo no solo fundamentos teóricos, sino herramientas prácticas y transferibles. Al trabajar con datos reales, preguntas auténticas y contextos locales, los participantes podrán construir propuestas didácticas que respondan a las necesidades de sus estudiantes y a los desafíos del presente.

Referencias y bibliografía

- D'Andrea, J., & Wooten, R. D. (2017). Improving Performance and Enhancing Introductory Statistics Using Projects. *American Journal of Computational Mathematics*. <https://doi.org/10.4236/AJCM.2017.71002>
- Jones, J. S., & Goldring, J. E. (2017). Telling Stories, Landing Planes and Getting Them Moving--A Holistic Approach to Developing Students' Statistical Literacy. *Statistics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.52041/SERJ.V16I1.219>
- Karmanov, M. V., & Zolotareva, O. A. (2022). Statistical Literacy as a Way to Achieve Social Consensus. *Vestnik NSUEM*, 4, 135–143. <https://doi.org/10.34020/2073-6495-2021-4-135-143>
- Kraft, V., & Hinrichs, C. (2022, December 1). Preparing Students to Solve Real Problems With Statistics. Bridging the Gap: Empowering and Educating Today's Learners in Statistics. Proceedings of the Eleventh International Conference on Teaching Statistics. <https://doi.org/10.52041/iase.icots11.t4a3>
- Kvam, P. H. (2000). The Effect of Active Learning Methods on Student Retention in Engineering Statistics. *The American Statistician*. <https://doi.org/10.1080/00031305.2000.10474526>
- Kwan, C. L. (2016). Findings from the implementation of project-based learning in civil engineering education. <https://doi.org/10.1051/SHSCONF/20162601016>
- Luse, A., & Burkman, J. (2018). Safely Using Real-World Data for Teaching Statistics: A Comparison of Student Performance and Perceived Realism between Dataset Types. <https://doi.org/10.17705/3JMW.A.000037>
- Marshall, E. (2019). Embedding and assessing project based statistics. *MSOR Connections*, 17(2), 75–82. <https://doi.org/10.21100/msor.v17i2.979>
- Peiró-Signes, Á., Trull, O., Segarra-Oña, M., & García-Díaz, J. C. (2021). Anxiety towards Statistics and Its Relationship with Students' Attitudes and Learning Approach. *Behavioral Sciences*, 11(3), 32. <https://doi.org/10.3390/bs11030032>
- Perrett, J. (2024). Revising the Guidelines for Assessment and Instruction of Statistics Education (GAISE) College Report. Scatterplot, 1(1). <https://doi.org/10.1080/29932955.2024.2401637>
- Portalés-Mañanós, A., Esteve-Sendra, C., & Moreno-Cuesta, R. (2012). The Workshop Project: Active Learning Methods in Design And Urban Studies. *Procedia - Social and Behavioral Sciences*. <https://doi.org/10.1016/J.SBSPRO.2012.08.238>
- Putra, T. R., Hartoyo, A., Siregar, N., Jamiah, Y., & Hamdani, H. (2024). The effectiveness of project-based learning model in the Merdeka Curriculum on statistics material in junior high school. *Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, 12(3), 647–661. <https://doi.org/10.30738/union.v12i3.18299>
- Salvador Rosado, C. E., Vargas Vásquez, L. M., Salvador Rosado, J. A., La Torre Bocanegra, R., & Camacho Delgado, F. M. (2024). Active pedagogical strategies: a project-based approach for teaching statistics in higher education. *Sapienza: International Journal of Interdisciplinary Studies*, 5(4), e24076. <https://doi.org/10.51798/sijis.v5i4.677>
- Wickramasinghe, I., & Appiah, E. (2024). Impact of project-based learning in teaching probability and statistics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–18. <https://doi.org/10.1080/0020739x.2024.2438374>



Conocimiento pedagógico del profesor de Matemáticas y su influencia en el desarrollo del pensamiento matemático

Claudia Lisete Oliveira **Groenwald**
Universidade Luterana do Brasil; Universidade Franciscana
Rio Grande do Sul, Brasil
Claudiag1959@gmail.com

Resumen

Este minicurso presenta un extracto de la investigación del grupo GECM – Grupo de Estudio Curricular de Educación Matemática, cuyo objetivo es discutir e investigar una transformación curricular en la Educación Básica y en la formación de profesores en la Educación Superior en relación con la enseñanza de la Matemática. Se discutirán objetos de aprendizaje sobre el tema de Geometría en los años finales de la Educación Básica, desarrollados con el software GeoGebra. Las actividades propuestas se desarrollarán en grupos, con el manejo de los objetos de aprendizaje, y se promoverá la reflexión didáctica en un entorno simulado. El minicurso fomenta el análisis crítico y el diálogo, favoreciendo la comprensión del uso de las tecnologías digitales en la práctica docente por medio de experiencias vivenciales y colaborativas.

Palabras clave: Educación Matemática; Formación del profesorado; Tareas matemáticas; Objetos de aprendizaje; Tecnologías digitales.

Introducción

Reflexionar sobre la formación de los profesores de Matemática implica discutir las características que definen al docente como un profesional interesado y capaz de crear y adaptar métodos pedagógicos a su entorno de trabajo, utilizando los conocimientos matemáticos para comprender el mundo que le rodea y despertando en el alumno el hábito del estudio independiente, la creatividad, la persistencia en la solución de problemas, el interés por conocer su entorno laboral y a sus alumnos, así como el hábito de reflexionar sobre su labor docente, buscando caminos que conduzcan a una educación de calidad.

Se entiende que la formación de profesores de Matemática implica integrar diversos tipos de conocimientos, la teoría de la disciplina que implica conocer los conceptos matemáticos, la didáctica y metodológica de cómo enseñar dichos conceptos y también cómo los estudiantes aprenden estos conceptos, así como las relaciones entre el currículo escolar y la realidad educativa.

Como destaca Shulman (1986, 1987), el conocimiento del docente no se limita a la comprensión de los contenidos disciplinares, sino que también involucra el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK), que se refiere a la forma en que el docente transforma los conceptos matemáticos en propuestas didácticas accesibles y significativas para los estudiantes. Así, discutir la formación docente en Matemáticas implica integrar la dimensión de contenido con estrategias pedagógicas y la comprensión de las dificultades y concepciones de los estudiantes.

En este sentido, es importante que la formación inicial permita a los estudiantes tener la oportunidad de desarrollar las habilidades que les permitan actuar como profesionales capaces de desarrollar el proceso de enseñanza y aprendizaje.

Este minicurso tiene como objetivo discutir la formación inicial como un proceso de discusión, reflexión y desarrollo de competencias/habilidades que son fundamentales para los docentes que enseñan Matemática en todos los niveles educativos. El Público a que se destina el minicurso son docentes en ejercicio y estudiantes de los cursos de Licenciatura en Matemáticas interesados en el uso de tecnologías digitales y en el desarrollo del pensamiento matemático.

Se presentarán los resultados de un estudio de caso, con estudiantes del Grado en Matemáticas y el desarrollo de un Diseño Instruccional (DI) y cómo este posibilita el desarrollo de dichas habilidades, utilizando metodologías que posibilitan la formación del pensamiento matemático (Filatro, 2008). Se discutirán actividades organizadas en tareas matemáticas para estudiantes de los últimos años de la Educación Primaria, utilizando objetos de aprendizaje desarrollados con el *software* GeoGebra en el tema de Geometría.

En Brasil, la Base Nacional Común Curricular – BNCC (Brasil, 2018) indican que los profesionales formados en cursos de Matemática deben tener una visión integral del rol social del educador, apertura a la adquisición y uso de nuevas ideas y tecnologías, visión histórica y crítica de las Matemáticas, capacidad para continuar aprendiendo y trabajar en equipos multidisciplinares, habilidad para comunicarse matemáticamente y comprender las Matemáticas, establecer relaciones con otras áreas del conocimiento, utilizar el conocimiento para comprender el mundo que les rodea, la capacidad de crear y adaptar métodos pedagógicos a su entorno de trabajo, de expresarse de forma clara, precisa y objetiva.

Ejemplos de tareas matemáticas para el desarrollo del pensamiento matemático

Cuando se trata de pensamiento matemático, se entiende que la actividad matemática constituye una forma particular de actividad humana, que involucra tanto procesos de razonamiento como elementos de experiencia (Bianchini y Lima, 2021). En este contexto,

corresponde al profesor interesarse por las razones, procedimientos, explicaciones y formulaciones, escritas y orales, que los estudiantes movilizan al responder a una tarea matemática. Según Bianchini y Lima (2021), la razón por la que los ciudadanos deben estudiar Matemáticas en la Educación Básica es que su aprendizaje favorece el desarrollo de una estructura analítica, es decir, cómo pensar de manera estructurada.

Según Katagiri (2004, p. 49) citado por Bianchini y Lima (2021), ya en los primeros niveles de escolaridad, el enfoque de la enseñanza debe estar en el desarrollo del pensamiento matemático. El autor argumenta que, ante los obstáculos a los que se enfrentan los niños a la hora de resolver tareas matemáticas, no basta con que el profesor aporte directamente los conocimientos y habilidades necesarios para superar dichas dificultades. Por el contrario, su función es crear condiciones que permitan a los estudiantes desarrollar actitudes y estrategias cognitivas propias de las formas de pensar de las Matemáticas, para que se acostumbren a estos procesos y, progresivamente, adquieran autonomía para superar los desafíos (Bianchini y Lima, 2021, p. 41).

En el campo de la Educación Matemática, esta postura está en línea con lo que orienta el BNCC (Brasil, 2018) al reconocer el pensamiento matemático como una competencia fundamental a desarrollar a lo largo de la Educación Básica. Así, más que transmitir contenidos, corresponde al docente favorecer la construcción del razonamiento, la formulación de estrategias y la movilización de diferentes formas de pensamiento, incentivando a los estudiantes a abordar los problemas de manera creativa, crítica y reflexiva. En este sentido, los tipos de tareas matemáticas que los docentes planifican para sus estudiantes resultan de gran importancia, posibilitando desarrollar el pensamiento matemático.

Para Penalva y Llinares (2011), la tarea matemática es la propuesta de acción que el profesor presenta, piensa o expone a sus estudiantes para el aprendizaje de las Matemáticas. La tarea puede adoptar diferentes formas (problemas, ejercicios, investigaciones, etc.), siempre con objetivos específicos, y forma parte de un conjunto más amplio llamado actividad, que también involucra los procesos cognitivos individuales y/o colectivos de los estudiantes. Estas tareas deben concebirse como herramientas de aprendizaje, que permitan a los estudiantes pensar matemáticamente y no solo aplicar "recetas" o procedimientos mecánicos. Así, las buenas tareas reflejan ideas importantes en Matemáticas, permiten la movilización de conocimientos previos y promueven conexiones conceptuales.

Desde una perspectiva más amplia, Ponte (2010) diferencia ejercicios, problemas e investigaciones como tipos de tareas: Ejercicios: aplicar métodos que ya se conocen; Problemas: requieren nuevas estrategias, sin solución inmediata; Investigaciones: son abiertas, lo que permite al estudiante formular preguntas, conjeturas, probar y justificar resultados, acercándose a la auténtica actividad matemática.

Una tarea matemática es una propuesta de acción elaborada por el profesor para promover el aprendizaje de las Matemáticas, que implica la resolución de problemas, la exploración de ideas y la construcción de significados. Va más allá de la simple aplicación de algoritmos, buscando desarrollar habilidades matemáticas a través de diferentes niveles de exigencia

cognitiva, desde la memorización hasta "hacer matemáticas", y puede tomar la forma de ejercicios, problemas o investigaciones.

En este sentido, la planificación de tareas matemáticas requiere que el profesor domine diferentes dimensiones del conocimiento. Según Shulman (1986), el PCK es fundamental para que el docente seleccione representaciones, analogías y estrategias que favorezcan la comprensión conceptual de los estudiantes. Al proponer tareas que implican diferentes niveles de exigencia cognitiva, el profesor moviliza no solo sus conocimientos matemáticos, sino también su capacidad para articular estos conocimientos en situaciones didácticas que estimulan el desarrollo del pensamiento matemático.

No minicurso se presentan objetos de aprendizaje, organizados en una secuencia de tareas, que llevan a los estudiantes a reflexionar sobre el modelo matemático del número de diagonales de un polígono y la suma de los ángulos internos de un polígono.

Objeto de aprendizaje para la generalización del número de diagonales de un polígono

Los objetos de aprendizaje presentados fueron desarrollados en GeoGebra y están disponibles en el repositorio digital del Laboratorio de Matemática del Programa de Posgrado en Enseñanza de las Ciencias y las Matemáticas de la Universidad Luterana de Brasil: <http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio> (Homa e Groenwald, 2021).

Según Homa y Groenwald (2016), las actividades se desarrollaron como objetos de aprendizaje según el concepto de granularidad (ADLNET, 2004) y como objetos específicos de la aplicación, desarrollados en base a un objetivo simple para que cada actividad sea independiente entre sí y pueda ser reutilizada en otras secuencias didácticas.

En la Figura 1, se presenta un ejemplo de un objeto de aprendizaje. Se trata de *Diagonales de polígonos* que permite al alumno definir el polígono por el número de sus lados y observar las diagonales asociadas a cada vértice y a todas las diagonales simultáneamente y, de esta manera, hacer sus hipótesis y deducir el modelo matemático para el número de diagonales de un polígono de n lados (Silva, Homa y Groenwald, 2022). Se presentan las interacciones de los polígonos de cinco y siete lados.

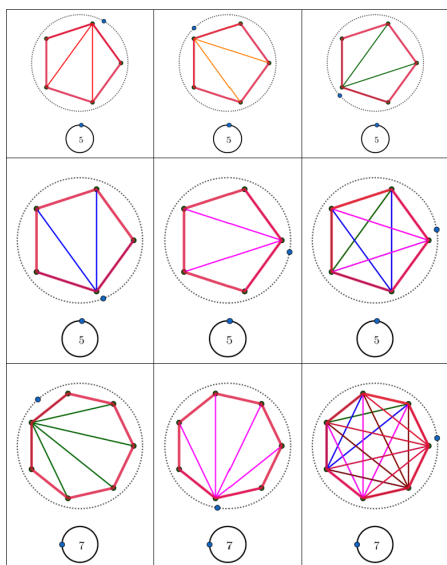


Figura 1. Posibles interacciones del polígono de cinco y siete lados. Fuente: Silva, Homa y Groenwald (2022).

Al observar las interacciones, es posible verificar que cada vértice se conecta con todos los demás vértices, pero las conexiones con los adyacentes no cuentan como diagonales. Por lo tanto, el número de diagonales (d) por vértice (n) viene dado por:

$$d(n) = n(n - 3)$$

Para un polígono de cinco lados totalizaría 10 diagonales, pero en la representación de todas las diagonales solo hay 5 diagonales. Para el desarrollo del pensamiento matemático, se debe trabajar la actividad para que el alumno identifique la razón por la que las diagonales totales son la mitad, en este caso, cada diagonal se cuenta dos veces. Por lo tanto, la hipótesis para n lados es:

$$d(n) = \frac{n(n - 3)}{2}$$

Para el ejemplo, para un polígono de cinco lados, tenemos:

$$d(5) = \frac{5(5 - 3)}{2} = 5$$

Para verificar esta hipótesis, el estudiante selecciona otros polígonos y compara el número total de diagonales calculado con el número contado, partiendo de la hipótesis hasta una generalización. En la representación del polígono de 7 lados se verifica que el número calculado de diagonales sea el mismo que el representado en el

$$d(7) = \frac{7(7 - 3)}{2} = 14$$

Para facilitar el conteo de las diagonales, el objeto de aprendizaje las presenta en diferentes colores. A medida que las diagonales se superponen, el conteo en el sentido de las agujas del reloj (en el polígono de 7 lados) muestra 4 rojas, 4 marrones, 3 rosas, 2 azules y 1 verde, con un total de 14 diagonales.

Ações do minicurso

El minicurso se llevará a cabo en base a discusiones y reflexiones orientadas al desarrollo de los conocimientos pedagógicos del profesor de Matemáticas, así como a la resolución de tareas propuestas con el uso de objetos de aprendizaje.

Se utilizarán como objetos de aprendizaje: el concepto de polígono, la clasificación de polígonos, el cálculo del número de diagonales y la suma de los ángulos internos de un polígono.

Las actividades se realizarán en grupos, favoreciendo la discusión y la colaboración, seguidas de la presentación de las respuestas al grupo grande.

La evaluación se realizará a través de la socialización y análisis de los resultados obtenidos por los participantes.

Consideraciones finales

Las reflexiones desarrolladas a lo largo de este minicurso tiene como objetivo demostrar que el papel del profesor de Matemáticas va más allá de la simple transmisión de contenidos: debe ser un mediador capaz de planificar, proponer y monitorear tareas matemáticas que movilicen diferentes formas de razonamiento, fomentando la construcción del pensamiento matemático por parte de los estudiantes.

Los objetos de aprendizaje analizados revelan que, al explorar conceptos de Geometría y buscar generalizaciones, como en el caso del número de diagonales de un polígono, se invita a los estudiantes a formular hipótesis, validar conjeturas y desarrollar sus propias estrategias, ampliando su autonomía intelectual. Este proceso no solo fortalece la comprensión de contenidos específicos, sino que también contribuye a la formación de actitudes investigativas, críticas y creativas.

Agradecimientos

Al CNPq, por la beca de productividad nivel 2, con el proyecto Actividades de Investigación en Matemática integradas con tecnologías: un proceso colaborativo de educación inicial y continua.

Referencias e bibliografia

- Bianchini, B. L., & Lima, G. L. de. (2021). *O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem*. São Paulo: LF Editorial.
- Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular – Versão final*. MEC.
http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/BNCC_EI_EF_110518_versaofinal_site.pdf.

- Filatro, A. (2008). *Design Instrucional na prática*. São Paulo: Pearson.
- Homa, A. I. R., & Groenwald, C. L. O. (2021). Educação Matemática e Tecnologias – planejamento de tarefas investigativas focando na aprendizagem dos estudantes. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (63), 1–12.
- Homa, A. I. R., & Groenwald, C. L. O. (2016). Área de figuras planas com objetos de aprendizagem no GeoGebra. *Revista Brasileira de Ensino de Ciências e Tecnologias*, 9(1), 123–147.
- Katagiri, S. (2004). *Mathematical thinking and how to teach it*. Tokyo: CRICED, University of Tsukuba.
- Penalva, M. C., & Llinares, S. C. (2011). Tareas matemáticas en la Educación Secundaria. In J. M. Goñi & C. Coll (Orgs.), *Didáctica de las Matemáticas: Formación y desarrollo profesional del profesorado* (Nº 12, Vol. II, pp. 27–51). Madrid: Graó.
- Ponte, J. P. (2010). Explorar e investigar em Matemática: Uma actividade fundamental no ensino e na aprendizagem. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, (21), 13–29.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>.
- Silva Neto, A. M. ; Homa, A. I. R. ; Groenwald, C.L.O.. (2022). As tecnologias digitais como recurso didático no currículo de matemática. In: Marli Teresinha Quartieri; Maria Madalena Dullius. (Org.). *Problematizando Atividades Experimentais e Tecnologias Digitais nos Processos de Ensino e de Aprendizagem de Ciências e Matemática*. Ied.porto alegre: Evangraf, 1-191.



Deducción de la fórmula del área del trapecio en la formación inicial docente

Luis Antonio **Soto** Hernández

Departamento de Ciencias Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán
Honduras

lsoto@upnfm.edu.hn

Resumen

La deducción de las fórmulas para el cálculo del área de figuras planas puede ser interesante para los estudiantes cuando hay comprensión, pero cuando no, ofrecen resistencia. Existen distintas maneras de deducirlas, una es transformar las figuras en otras conocidas a las que se le conoce su fórmula, esto implica un proceso de aprendizaje para los estudiantes y de reflexión para los docentes. En este documento se plantean actividades para ambos actores, pero reflexionando desde el punto de vista de la formación inicial docente. Se trabajará el concepto de área exponiendo al lector a diversas actividades lo que permitirá deducir la fórmula para el cálculo del área del trapecio de diferentes formas. Las deducciones de la fórmula se podrán analizar desde el punto de vista aritmético, algebraico, geométrico y del cálculo integral y diferencial, permitiendo a los futuros docentes el abordaje desde distintos niveles de comprensión.

Palabras clave: Área; Deducción; Formación inicial docente; Fórmula; Trapecio.

Introducción

La formación inicial docente debe estar orientada a la comprensión profunda de los conceptos y procesos matemáticos, promoviendo un aprendizaje significativo en el que los futuros profesores ayuden a los estudiantes a construir dicho conocimiento de manera eficaz en el aula. Según el National Research Council (como se citó en NCTM, 2015): “La tendencia a encontrar sentido en las Matemáticas, a percibir las como útiles y valiosas, a creer que el esfuerzo continuo por aprender Matemáticas es redituable y a concebirse uno mismo como aprendiz y productor de Matemáticas” (p. 8), debe ser un eje central que oriente los procesos de formación y profesionalización docente. En este contexto, es fundamental que el docente no solo encuentre el

valor práctico de las Matemáticas, sino que también despierte en sus estudiantes el interés y el amor por el aprendizaje profundo de esta disciplina.

La enseñanza de la geometría como parte del quehacer en el aula de los futuros docentes implica tener no solo el conocimiento matemático sino también el conocimiento didáctico (Ball, 2009). Hay varios aspectos que el profesor debe manejar al enseñar esta rama del saber, como, conceptualizar los términos geométricos, saber las definiciones, expresar gráficamente las ideas, conocer las fórmulas y su deducción, justificar los procedimientos y algoritmos, interpretar los resultados, resolver problemas, entre otros, unido a que debe conocer y aplicar diferentes metodologías para hacer que los estudiantes construyan su propio conocimiento, profundicen en el mismo y adopten la Matemática como una herramienta de vida. Por su carácter gráfico, la geometría ofrece un panorama más amplio para expresar los conocimientos de manera aritmética y algebraica ayudando así en la interpretación de significados. Las representaciones de los conceptos geométricos permiten explorar y admirar la belleza de las figuras despertando en los estudiantes interés por esta rama de la Matemática.

El estudio de la geometría contribuye a pensar de forma lógica, estableciendo relaciones espaciales que ayudan a resolver problemas. Por la misma naturaleza de la geometría, en una primera instancia, los estudiantes deben utilizar las representaciones de las figuras auxiliándose de su carácter visual aunque no puedan justificar con claridad sus ideas, pero a medida avancen en su estudio deben desarrollar la capacidad de imaginar y manipular mentalmente las figuras, utilizar lenguaje técnico expresando y justificando racionalmente sus ideas, y usar conceptos y propiedades generales y abstractas hasta llegar a razonamientos formales llamados demostraciones en Matemáticas. Los esposos Van Hiele argumentan que el aprendizaje de la geometría se hace pasando por 5 niveles de pensamiento y conocimiento, estos son: 0: Visualización y reconocimiento, 1: Análisis, 2: Ordenación y clasificación, 3: Deducción formal y 4: Rigor, y que solo pasado un nivel se puede avanzar al nivel inmediato superior (Vojkuvkova, 2012). Los dos últimos niveles demandan un grado cognitivo mayor de la Matemática, en el nivel 3 se incluyen las deducciones y demostraciones lógicas y formales justificando las proposiciones planteadas, se establecen relaciones entre las propiedades permitiendo que se puedan realizar distintas formas de deducción o demostración para obtener un mismo resultado, en el nivel 4 la demostración es el medio para verificar la verdad de una afirmación. La deducción de la fórmula del área del trapecio desde diferentes perspectivas se enmarca en estos dos niveles.

Concepto de área

El área se define como la medida de la superficie de una figura plana. En este sentido la figura debe ser cerrada, teniendo su trazo un mismo punto de inicio y final, de manera tal que se pueda identificar el interior, el exterior y el borde que define la figura, al interior de la figura se le puede calcular la medida de su superficie, es decir, su área. En relación con el concepto de área, Reyes et al (2013) mencionan que intuitivamente a cada figura del plano, le corresponde una superficie asociada a la magnitud llamada área. Las unidades para expresar el área son cuadradas, así se designan con metros cuadrados, centímetros cuadrados, pulgadas cuadradas, kilómetros cuadrados, etc.

Al trabajar con estudiantes que por primera vez se exponen al concepto de área, una actividad inicial sería pintar el interior de un cuadrado cuyo lado mide 1 cm de lado, la medida de ese interior pintado corresponde al área del cuadrado que es de *un centímetro cuadrado*, que se escribe como 1 cm^2 (ver Figura 1). Más adelante cuando los estudiantes hayan conceptualizado el área habrá que hacer una generalización que 1 cm^2 puede estar compuesto por dos triángulos (mitades de un cuadrado de la cuadrícula), dos rectángulos (mitades de un cuadrado de la cuadrícula), u otras figuras.

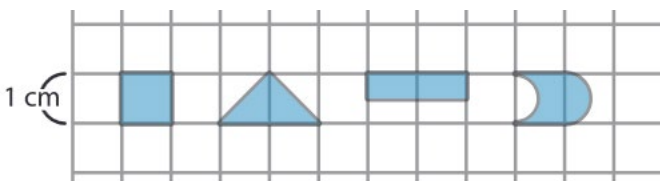


Figura 1. Figuras planas con un área de 1 cm^2 .

Una segunda actividad sería, dada una cuadrícula dibujar muchas figuras distintas que tengan un área de 8 cm^2 cada una (ver Figura 2). En un inicio se espera que los estudiantes dibujen figuras que solo tengan segmentos horizontales y verticales que coincidan con las líneas de la cuadrícula, pero habrá que desafiarlos a dibujar otro tipo de figuras, por ejemplo, una figura cuya área mida siempre 8 cm^2 , utilizando líneas oblicuas y curvas. Se podrá dibujar un cuadrado en la cuadrícula, pero habrá que trazar segmentos inclinados (diagonales de los cuadrados de la cuadrícula). Con la exposición a esta actividad se espera que los estudiantes dejen volar su imaginación y descubran que no solo pueden utilizar segmentos para dibujar las figuras, sino que pueden utilizar curvas, quitar algunas partes de la figura, o trasladar algunas partes de la figura transformando la misma en otra, pero conservando su área (ver Figura 3).

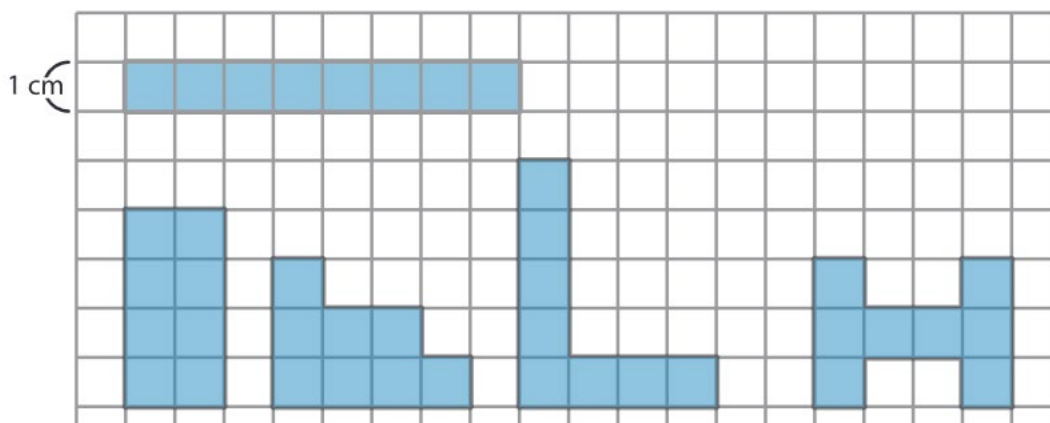


Figura 2. Figuras planas con un área de 8 cm^2 .

Con los segmentos verticales y horizontales podrán dibujar fácilmente cuadrados y rectángulos, usando los segmentos inclinados trazarán triángulos, romboides, trapecios, rombos, polígonos regulares e irregulares y con las curvas dibujarán figuras con partes de círculos y otro tipo de figuras. Cuando los estudiantes conceptualicen el área usando las unidades de cm^2 , habrá que hacer que comprendan con otras unidades como m^2 , km^2 y pulgadas^2 . La percepción del tamaño de estas unidades es importante, así como su uso, por ejemplo, si dibujan las figuras en su cuaderno las unidades reales más apropiadas serán la de cm^2 y pulgadas^2 , si miden la

superficie de las paredes y pisos de las aulas y de las casas pueden usar m^2 y si quieren medir la superficie territorial de un municipio, departamento o un país lo mejor será expresarla en km^2 .

En la Figura 3, puede observarse la importancia que tiene el uso de la cuadrícula en la introducción del concepto de área de figuras planas, ya sea con estudiantes de educación básica o estudiantes de la formación inicial docente. En una primera instancia los estudiantes pueden encontrar el área contando el número de cuadrados de cada figura, pero la idea principal es que luego puedan deducir las fórmulas y que las apliquen para facilitar el cálculo.

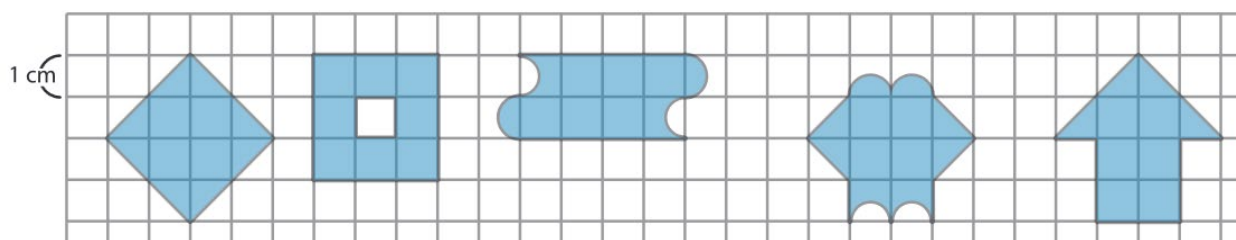


Figura 3. Figuras planas con un área de 8 cm^2 .

Deducción de la fórmula del área del trapecio

Un aspecto importante en el aprendizaje de la Matemática es la construcción de conceptos, en este documento se utiliza el trapecio como ejemplo de las formas en que se puede abordar la deducción de área de las figuras geométricas. Si el docente dibuja en la pizarra un trapecio como el primero en la Figura 4, esta figura no es el concepto sino una representación de un conjunto de figuras (cuadriláteros) que comparten la característica de tener un solo par de lados paralelos. Si la imagen conceptual de un trapecio fuese solo esta, se tendría una idea muy limitada del concepto de trapecio. Para enriquecer la imagen conceptual de cualquier figura es necesario verla y explorarla desde diferentes puntos de vista, con todas sus representaciones (García y López, 2008, p.36). Así, existen diferentes tipos de trapecios: los que tienen iguales los lados no paralelos, los que tienen un par de lados iguales consecutivos, los que tienen tres lados iguales, los que tienen dos ángulos rectos, los que tienen todos sus lados desiguales (ver Figura 4). En este sentido los estudiantes deben exponerse y conocer las diferentes imágenes conceptuales del cuadrilátero que es un trapecio.

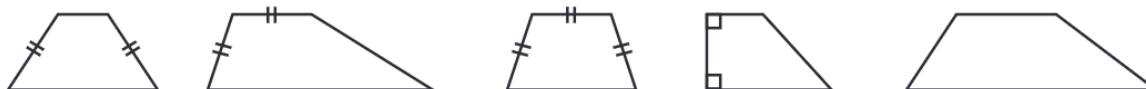


Figura 4. Diferentes tipos de trapecios.

Un trapecio se define como el cuadrilátero que solo tiene un par de lados paralelos, y aunque se vio anteriormente que existen diferentes imágenes conceptuales, la fórmula para calcular su área es la misma, independiente de las características particulares que presente cada uno.

La fórmula para calcular el área de un trapecio es:

$$\text{Área trapecio} = [(base\ mayor + base\ menor) \times altura] \div 2$$

Con los estudiantes de la formación inicial docente que tienen conocimientos de aritmética, álgebra, geometría y cálculo integral y diferencial, se puede trabajar la deducción del área del trapecio de diferentes formas y solicitar la representación gráfica de cada una de ellas, así como que escriban su respectiva justificación. Para no obtener soluciones particulares tendrán que dibujar un trapecio general como el último que aparece en la Figura 4. Algunas de las formas que pueden surgir se presentan a continuación.

Descomponer el trapecio en figuras conocidas

Quizás una de las formas más comunes de deducir la fórmula del área de un trapecio sea trazar algunos segmentos y dividir el trapecio en varias figuras a las cuales se les pueda calcular su área. La estrategia sería calcular el área de cada figura por separado para luego sumarmas y encontrar el área del trapecio. Algunas figuras pueden ser como las que se presentan en la Figura 5.

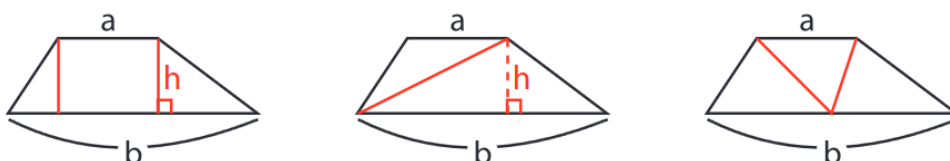


Figura 5. Descomponer el trapecio en figuras conocidas.

$$\begin{aligned}
 \text{Área trapecio} &= \text{Área triángulo 1} + \text{Área rectángulo} + \text{Área triángulo 2} \\
 &= (\text{base} \times \text{altura} \div 2) + (\text{base} \times \text{altura}) + (\text{base} \times \text{altura} \div 2) \\
 &= \frac{xh}{2} + ah + \frac{yh}{2} \\
 &= \frac{xh+2ah+yh}{2} \\
 &= \frac{xh+ah+yh+ah}{2} \\
 &= \frac{h(x+a+y)+ah}{2} \\
 &= \frac{hb+ah}{2} \quad \dots b = (x + a + y) \\
 &= \frac{(a+b)h}{2}
 \end{aligned}$$

La demostración anterior donde se descompone el trapecio en dos triángulos y un rectángulo hace referencia a la Figura 6 y la demostración donde se descompone el trapecio en dos triángulos hace referencia a la Figura 7.

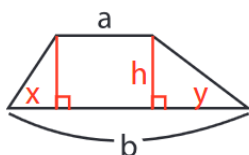


Figura 6. Descomponer el trapecio en dos triángulos y un rectángulo.

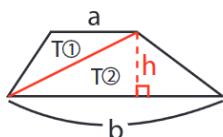


Figura 7. Descomponer el trapecio en dos triángulos.

$$\begin{aligned}
 \text{Área trapecio} &= \text{Área triángulo 1} + \text{Área triángulo 2} \\
 &= (base \times altura \div 2) + (base \times altura \div 2) \\
 &= \frac{a \times h}{2} + \frac{b \times h}{2} \\
 &= \frac{ah + bh}{2} \\
 &= \frac{(a+b)h}{2}
 \end{aligned}$$

Aunque esta estrategia es muy buena, hay que tener cuidado que los estudiantes no dividan el trapecio en tantas figuras, porque al tener muchas figuras se corre el riesgo que los procedimientos se vuelvan muy tediosos, y se trabaje con números donde los cálculos resulten complicados.

Completar un rectángulo tomando como base el trapecio

No importa el tipo de trapecio que se tenga, trazando algunas líneas auxiliares siempre se podrá “inscribir” en un rectángulo (ver Figura 8). En este caso, la estrategia es calcular el área del rectángulo y restarle el área de los dos triángulos externos del trapecio. En el caso que el trapecio tenga dos ángulos rectos, al completar el rectángulo solo hay un triángulo, por lo que al calcular el área del trapecio solo hay que restar el área de ese triángulo del área del rectángulo.



Figura 8. Completar un rectángulo tomando como base el trapecio.

$$\begin{aligned}
 \text{Área trapecio} &= \text{Área rectángulo} - \text{Área triángulo 1} - \text{Área triángulo 2} \\
 &= (base \times altura) - (base \times altura \div 2) - (base \times altura \div 2) \\
 &= bh - \frac{xh}{2} - \frac{yh}{2} \\
 &= \frac{2bh - xh - yh}{2} \\
 &= \frac{bh - xh - yh + bh}{2} \\
 &= \frac{h(b - x - y) + bh}{2} \\
 &= \frac{ha + bh}{2} \quad \dots a = (b - x - y) \\
 &= \frac{(a+b)h}{2}
 \end{aligned}$$

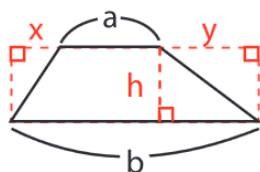


Figura 9. Completar el trapecio en un rectángulo.

La demostración de completar el trapecio en un rectángulo y en la cual se resta el área de los dos triángulos hace referencia a la Figura 9.

La estrategia de completar una figura no es muy usada entre los estudiantes, habrá que usarla en varios problemas para que los estudiantes la adopten como parte de su aprendizaje, de su repertorio de estrategias. Da la impresión de que es más fácil descomponer en varias figuras el trapecio, que ver el trapecio como una figura incompleta.

Descomponer el trapecio usando trazos especiales

Un trapecio se puede dividir en figuras, pero si los segmentos trazados tienen alguna característica especial la solución puede ser más interesante (ver Figura 10). Por ejemplo, si se traza un segmento paralelo a uno de los lados no paralelos del trapecio, este se divide en un romboide y un triángulo, donde ambas figuras tienen la misma altura, la estrategia sería calcular el área de las figuras y sumarla para encontrar el área del trapecio. Asignando variables a los datos correspondientes se puede deducir la fórmula del área del trapecio usando el álgebra. Las otras dos figuras, aunque tienen un trazo especial usando puntos medios, son poco útiles ya que se obtienen trapecios.

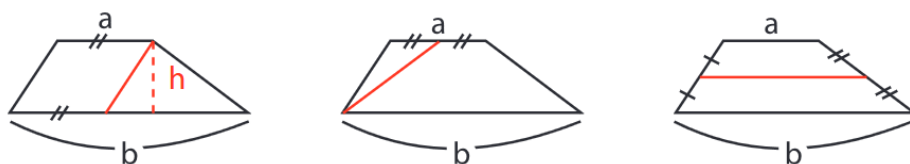


Figura 10. Descomponer el trapecio usando trazos especiales.

Duplicar el área del trapecio

Una forma muy sencilla de deducir la fórmula del área de un trapecio es usar otro trapecio de la misma forma y tamaño, manejarlos como las piezas de un rompecabezas y armar una figura a la cual se le pueda calcular su área. Se pueden formar varias figuras (ver Figura 11) pero para algunas no es fácil calcularles su área, sin embargo, al formar un romboide la deducción de la fórmula es inmediata, la estrategia es duplicar el área de la figura y dividir entre 2.

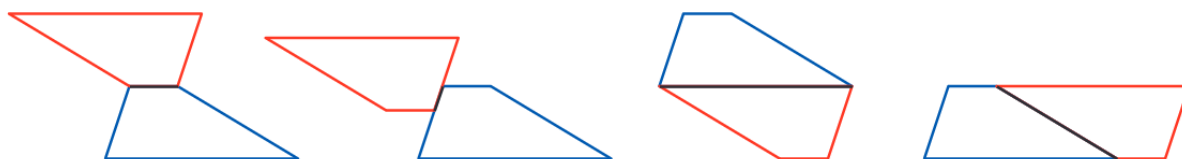


Figura 11. Algunas figuras formadas al usar dos trapecios del mismo tamaño.

La siguiente demostración donde se duplica el área del trapecio formando un romboide hace referencia a la Figura 12.

$$\begin{aligned}\text{Área trapecio} &= \text{Área romboide} \div 2 \\ &= (\text{base} \times \text{altura}) \div 2 \\ &= (a + b) \times h \div 2 \\ &= \frac{(a+b)h}{2}\end{aligned}$$

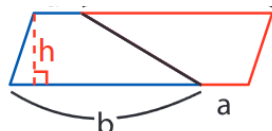


Figura 12. Duplicar el área del trapecio.

Esta estrategia de duplicar el área de la figura y dividir entre 2 no es común que se les ocurra a los estudiantes que por primera vez se enfrentan a este conocimiento, antes habrá que haberlos expuesto a situaciones similares. Por ejemplo, cuando se introduce la fórmula para calcular el área de un triángulo, una forma de enseñarla es, se pide a los estudiantes calcular el área de un rectángulo y luego calcular el área de uno de los triángulos rectángulos que se forma al trazar una de sus diagonales, ahí se ve claramente que el área del triángulo rectángulo es la mitad del área del rectángulo que lo contiene. De la misma manera, el área de un triángulo rectángulo isósceles es la mitad del área del cuadrado que lo contiene. El área de cualquier triángulo isósceles es la mitad del área del cuadrado que lo contiene. Por último, se ve que el área de un triángulo escaleno es la mitad del área del romboide que lo contiene. Así se concluye que, el área de un triángulo es la mitad del área del cuadrado, del rectángulo, del rombo o del romboide que lo contiene. De forma análoga se deduce que el área del cuadrado es el doble del área del triángulo rectángulo isósceles en que lo divide una de sus diagonales, igual pasa con el rectángulo, el rombo y el romboide. Esto es válido para todo tipo de triángulo (rectángulo, acutángulo u obtusángulo; equilátero, isósceles o escaleno). Esta situación puede observarse en la Figura 13.



Figura 13. El área de un triángulo es la mitad del área del rectángulo, cuadrado, rombo o romboide que lo contiene.

Transformar el trapecio en otras figuras

Al trazar algunos segmentos, el trapecio se puede dividir en varias figuras y reorganizando estas se puede formar otra figura o figuras a las cuales se les pueda calcular su área y de esta manera deducir la fórmula para calcular el área del trapecio. Como se observa en la Figura 14, se puede dividir el trapecio en un rectángulo y dos triángulos rectángulos que tienen la misma altura por lo que con estos dos triángulos se puede formar un triángulo, la estrategia es calcular el área del rectángulo y el área del triángulo formado y luego sumarlos. En el otro caso, si se traza un segmento que va de un vértice al punto medio de uno de los lados no paralelos del trapecio, este se divide en dos figuras que reacomodándolas se transforman en un triángulo. Los estudiantes

que tienen formación en Matemáticas deben demostrar que en realidad se forma un triángulo, usando el teorema de congruencia ángulo-lado-ángulo. Esta estrategia es muy interesante ya que para transformar el trapecio en un triángulo se debe trazar un segmento con una característica especial, es decir, que bisece a uno de los lados no paralelos del trapecio. Esta estrategia de transformar el trapecio en otras figuras está en un nivel cognitivo más elevado (complejo) ya que no solo implica dividir el trapecio en varias figuras, sino en tener la capacidad de reorganizar las partes y convertirlas en un todo o en partes de un todo.

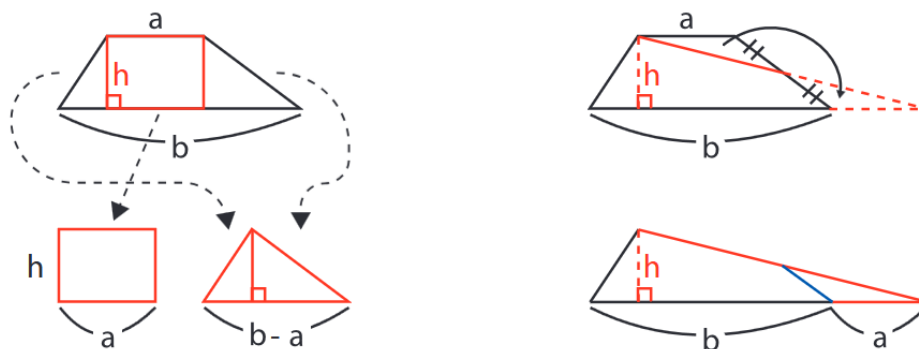


Figura 14. Transformación del trapecio en otras figuras.

$$\text{Área rectángulo} = \text{base} \times \text{altura} = a \times h$$

$$\text{Área triángulo} = (\text{base} \times \text{altura}) \div 2 = (b - a) \times h \div 2$$

$$\text{Área trapecio} = \text{Área rectángulo} + \text{Área triángulo}$$

$$= ah + \frac{(b-a) \times h}{2} = \frac{2ah + (b-a) \times h}{2}$$

$$= \frac{(a+b) \times h}{2}$$

$$\text{Área trapecio} = \text{Área triángulo}$$

$$= (\text{base} \times \text{altura}) \div 2$$

$$= (a + b) \times h \div 2$$

$$= \frac{(a+b) \times h}{2}$$

Trazar líneas auxiliares externas en el trapecio

Una estrategia muy eficaz en la solución de problemas en geometría es el uso de líneas auxiliares externas. Las estrategias estudiadas anteriormente usan los segmentos para dividir las figuras, pero son trazados en el interior de estas. En la Figura 15 se usan líneas auxiliares externas. Prolongando los lados no paralelos del trapecio y con su intersección, se forman dos triángulos que son semejantes. Por el teorema de semejanza ángulo-ángulo (AA), el triángulo XYZ es semejante con el triángulo MYN. Al trazar la altura de esos dos triángulos, se forman dos pares de triángulos que son semejantes: $\Delta PYZ \sim \Delta OYN$ y $\Delta XYP \sim \Delta MYO$. De la semejanza de estos tres pares de triángulos y aplicando el teorema de Thales se obtiene la proporción $\frac{H}{a} = \frac{H+h}{b}$ que es necesaria para deducir la fórmula del área del trapecio. La estrategia para deducir el área del trapecio es, usando los dos primeros triángulos, restar del área del triángulo grande el área del triángulo menor.

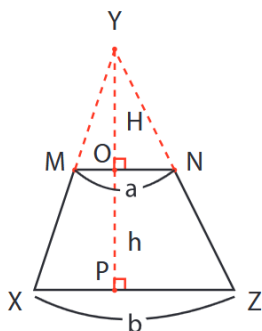


Figura 15. Usando líneas auxiliares externas.

$$\text{Área trapecio} = \text{Área triángulo XYZ} - \text{Área triángulo MYN}$$

$$= [(base \times altura) \div 2] - [(base \times altura) \div 2]$$

$$= \frac{b(H+h)}{2} - \frac{aH}{2}$$

$$= \frac{bH+bh-aH}{2}$$

$$= \frac{aH+ah+bh-aH}{2} \quad \dots \quad bH = aH + ah$$

$$= \frac{ah+bh}{2}$$

$$= \frac{(a+b)h}{2}$$

$$\frac{H}{a} = \frac{H+h}{b}$$

$$bH = a(H + h)$$

$$bH = aH + ah$$

Ubicar el trapecio en el plano cartesiano

Un concepto fundamental en cálculo integral y diferencial es calcular el área bajo la curva de una función usando las integrales definidas. Este concepto se basa en la idea de dividir el área en rectángulos infinitamente pequeños y luego sumar sus áreas. La integral definida entre dos límites a y b de una función $f(x)$ representa el área bajo la curva de $f(x)$ entre esos dos límites. El trapecio puede colocarse en el plano cartesiano (ver Figura 16) y usar las integrales definidas. Lo ideal sería dibujar el trapecio en una posición apropiada en el plano para facilitar el cálculo, así una de las bases que esté sobre el eje X y que uno de sus vértices coincida con el origen $(0, 0)$. Habrá que identificar la función o funciones cuyas áreas bajo la curva se quieran calcular, en este caso hay tres funciones: $f(x) = \frac{h}{a}x$, $g(x) = h$ y $h(x) = \frac{h}{b-c}(x - c)$. Después hay que definir los valores de los límites (inferior y superior) de integración, calcular la integral indefinida, evaluar la integral indefinida en los límites y calcular el área bajo la curva.

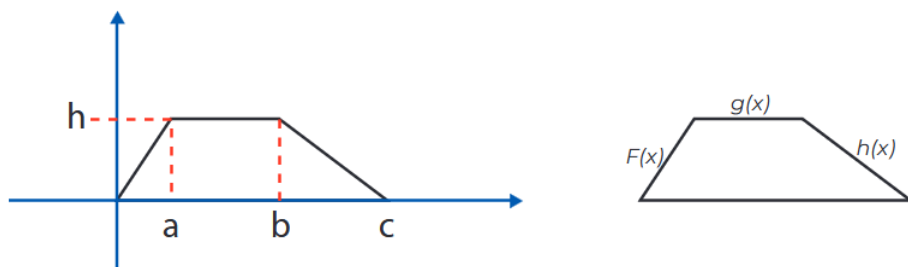


Figura 16. Ubicación del trapecio en el plano cartesiano.

$$\begin{aligned}\text{Área trapecio} &= \int_0^a f(x) + \int_a^b g(x) + \int_b^c h(x) \\&= \int_0^a \frac{h}{a} x \, dx + \int_a^b h \, dx + \int_b^c \frac{h}{b-c} (x-c) \, dx \\&= \frac{h}{2a} x^2 \Big|_0^a + h x \Big|_a^b + \frac{h}{b-c} \left(\frac{x^2}{2} - cx \right) \Big|_b^c \\&= \dots \\&= \frac{1}{2} h (-a + b + c) \\&= \frac{1}{2} h [c + (b - a)] \dots \dots \dots \text{donde } h: \text{ altura, } c: \text{ base mayor, } b - a: \text{ base menor}\end{aligned}$$

Para desarrollar esta estrategia los estudiantes de la formación inicial docente deben tener un amplio conocimiento matemático de los conceptos y procedimientos básicos del cálculo integral y diferencial.

Integrar la comprensión matemática del concepto de área con su enseñanza exige que los futuros docentes no solo dominen las fórmulas y procedimientos, sino que comprendan el proceso de construcción conceptual que los estudiantes deben experimentar. En particular, en relación con la deducción de las fórmulas para calcular el área de las figuras planas - especialmente la del trapecio-, es fundamental que, desde el inicio de su formación, los docentes en formación reconozcan el valor didáctico de actividades como: la descomposición del trapecio en figuras conocidas, su transformación en otras formas, la completación en figuras más simples, o su análisis como mitad de un romboide o parte de un triángulo, entre otras. Estas estrategias, acompañadas de representaciones visuales y simbólicas, favorecen el desarrollo del pensamiento geométrico en sus distintos niveles de comprensión.

Conclusiones

La deducción de las fórmulas para el cálculo del área de figuras planas es uno de los temas que se estudia a lo largo de diferentes grados, el análisis de su secuencia curricular y la planificación, ejecución y evaluación de las clases debe ser una oportunidad de aprendizaje para los futuros docentes, quienes tendrán la responsabilidad de enseñar dicha temática en los distintos grados de la educación básica y media con diferentes niveles de comprensión.

En la deducción de las fórmulas del área de las figuras planas hay que tomar en cuenta que lo importante es la experiencia de los estudiantes en la construcción de estas y el docente es el responsable de exponerlos a este tipo de prácticas que lo ayuden a desarrollar su pensamiento lógico. En las estrategias planteadas anteriormente, se puede apreciar que cada una de ellas ofrece un abanico de oportunidades en el aprendizaje de los estudiantes y el nivel de constructo matemático exigido lo determinará el docente en función de los conocimientos previos de los estudiantes, el rol del docente siempre será que las actividades planteadas contribuyan a resolver problemas desarrollando y profundizando en el conocimiento matemático. Las estrategias utilizadas anteriormente en la deducción de la fórmula del área del trapecio ayuda a los futuros

docentes a ampliar su repertorio de competencias didácticas, viendo la solución de problemas desde distintos puntos de vista, desde las estrategias más fáciles hasta las más difíciles, desde las que permiten una única vía de solución hasta las que ofrecen diversidad de estrategias de pensamiento, desde las que requieren conocimiento matemático básico hasta las que necesitan un conocimiento profundo, desde las más apropiadas para desarrollar con estudiantes de educación básica hasta las que permiten ampliar su horizonte como futuros educadores, desarrollando capacidades que facilitan la construcción de conocimientos geométricos. El recorrido de las estrategias de deducción de la fórmula del área del trapecio, desde las aritméticas pasando por las algebraicas hasta llegar a las geométricas y de cálculo diferencial e integral, enriquecen el acervo didáctico de los futuros docentes experimentando in situ la puesta en práctica de la construcción del conocimiento matemático.

Referencias y bibliografía

- Ball, D.L. (2009). Developing teachers' mathematical knowledge for teaching. *Mathematics Teaching and Learning to Teach*, 1-31.
- García, S. y López, O. (2008). *La enseñanza de la Geometría*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación. México. Recuperable en: <https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2015). *De los principios a la acción: Para garantizar el éxito matemático para todos*. Editando Libros S. A. México.
- Reyes, C., Dissett L. y Gormaz R. (2013). *Geometría. Colección ReFIP: Recursos para la formación de profesores de Educación Básica*. Editorial Ediciones SM Chile. Santiago. Chile.
- Vojkuvkova, I. (2012). The van Hiele model of geometric thinking. *WDS'12 Proceedings of Contributed Papers, Part I*, 72-75, 2012



Desafíos de la Educación Matemática en América del Sur: Ecuador, Bolivia, Paraguay y Perú

Fredy **Rivadeneira-Loor**

Doctorado en Educación, Facultad de Posgrado, Universidad Técnica de Manabí
Ecuador

fredy.rivadeneira@utm.edu.ec

Augusta **Osorio-Gonzales**

Dirección de Tecnologías de Información, Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

arosorio@pucp.edu.pe

Gabriela **Gómez-Pasquali**

Facultad de Educación, Universidad Comunera
Paraguay

gabriela@omapa.org.py

Sonia **Cordero-Cárdenas**

Departamento del Curso Básico, Facultad de Ingeniería, Universidad Mayor de San Andrés
Bolivia

soniacordero3r@gmail.com

Resumen

Los estudios internacionales que miden el rendimiento académico de los estudiantes en países de América Latina revelan la falta de avances significativos en la región durante la última década. En este minicurso presentaremos una revisión de literatura científica y documentos curriculares oficiales que nos permite ofrecer una visión general y actualizada sobre la formación de docentes de Matemáticas en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú, con especial atención a la educación primaria.

Analizaremos el conocimiento profesional docente, el contenido matemático en la educación primaria y los desafíos comunes en la formación de profesores en estos países. A partir de estos ejes, se identifican similitudes en las características de la profesión docente y del contenido curricular, señalando que el reto central en la región sigue siendo mejorar la calidad de la formación inicial y continua del profesorado.

Palabras clave: Formación docente; Educación Matemática; América del Sur; Educación primaria; Políticas educativas.

Introducción

En América Latina, el mayor desafío en el aprendizaje de las Matemáticas se presenta en la educación primaria, y no se han registrado avances entre el Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE) 2013 y el Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE) 2019 (UNESCO, 2020). A pesar de las diferencias culturales y de las políticas educativas aplicadas, diversos autores coinciden en que el problema central es la brecha entre la formación inicial del profesorado y la realidad cotidiana del aula, explicada en gran medida por la debilidad de los planes de formación docente (Vezub & Arroyo, 2022; Felmer Aichele & Reyes Reyes, 2019). Según Baldin y Malaspina (2018), específicamente en la Región Andina y Paraguay, otro gran obstáculo es la escasa presencia de centros de investigación y programas en Educación Matemática, y su débil articulación con las instancias responsables de la política educativa.

Este minicurso propone identificar puntos comunes en las necesidades formativas de los docentes de Matemáticas en ejercicio durante los primeros años de escolarización en Bolivia, Ecuador, Paraguay y Perú, atendiendo a los factores contextuales de cada país, pero apostando por una mirada regional que permita visibilizar oportunidades de trabajo conjunto entre educadores matemáticos y responsables de política educativa. Para ello, en el desarrollo del mismo se incluirá una dinámica interactiva diseñada para romper esquemas y estimular la creatividad de los participantes. A través de una consigna provocadora, se buscará que los asistentes imaginen soluciones innovadoras y sin restricciones para transformar la formación docente. Luego, esas ideas serán analizadas colectivamente para identificar elementos aplicables y proponer estrategias realistas de colaboración entre países.

Como elementos de análisis, se realizó una revisión de literatura científica y documentos curriculares oficiales (Dias, 2021; Mello-Román & Gómez, in press). Las conclusiones se organizan en tres ejes: a) conocimiento profesional de los docentes de Matemáticas, b) contenido matemático en la educación primaria, y c) desafíos comunes en la formación docente. Cabe destacar que los cuatro países analizados forman parte del proyecto CANP 5 Capacity & Networking de la Comisión Internacional de Enseñanza de la Matemática (ICMI).

Para ello, en el desarrollo del minicurso, se incluirá una dinámica interactiva diseñada para romper esquemas y estimular la creatividad de los participantes. A través de una consigna provocadora, se buscará que los asistentes imaginen soluciones innovadoras y sin restricciones para transformar la formación docente. Luego, esas ideas serán analizadas colectivamente para identificar elementos aplicables y proponer estrategias realistas de colaboración entre países.

Conocimiento profesional de los docentes de Matemáticas

El estudio ERCE 2019 señala que varias prácticas docentes se asocian con mejores resultados en Matemáticas, entre ellas: mantener altas expectativas sobre el aprendizaje,

demostrar interés en el bienestar estudiantil, brindar apoyo efectivo al aprendizaje y organizar adecuadamente la enseñanza. El mismo estudio advierte que los bajos niveles de rendimiento se relacionan con frecuentes interrupciones en el aula (UNESCO, 2020), especialmente en zonas rurales donde el ausentismo docente es más elevado. Según Susmel et al. (2014), en muchos países latinoamericanos los problemas de calidad docente comienzan desde la formación inicial: los planes de estudio, el perfil del estudiante que elige la docencia y la distribución de los recursos educativos.

El conocimiento profesional que debe tener un docente de Matemáticas continúa siendo un tema ampliamente estudiado (Alpízar-Vargas & Alfaro-Arce, 2019). Godino et al. (2005) señalaron que los futuros docentes deben manejar conocimientos sobre la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en su nivel educativo, así como un dominio profundo del contenido disciplinar. La articulación de estos saberes permitiría enfrentar de forma efectiva los desafíos didácticos en el aula. Sin embargo, los programas de formación docente en la región han tenido múltiples obstáculos: de orden sistémico, práctico, psicológico, cultural y económico (Bartholomew et al., 2005).

Datos disponibles en el portal de estadísticas de la UNESCO (<http://sdg4-data.uis.unesco.org/>), en el marco del seguimiento del ODS 4 (Educación de Calidad), muestran la proporción de docentes de ambos sexos, que han recibido al menos la formación docente mínima —ya sea inicial o en servicio— en Paraguay, Bolivia y Ecuador, según el nivel educativo. No se hallaron datos para Perú, por lo que no se incluye en la siguiente tabla:

Tabla 1
Proporción de docentes con al menos la formación mínima requerida según nivel educativo (%)

Nivel educativo	Bolivia	Ecuador	Paraguay
Educación Pre-escolar	86,27	91,65	91,94
Educación primaria	88,45	88,81	92,08
Educación secundaria básica	-	78,34	85,91
Educación secundaria media	-	72,64	75,44

Fuente: Portal de estadísticas de la UNESCO (<http://sdg4-data.uis.unesco.org/>).

Esta información se refiere a docentes que poseen la documentación mínima exigida para ejercer la docencia, no a sus competencias profesionales. Tampoco se hallaron datos comparativos específicos para el área de Matemáticas

Contenido matemático en la educación primaria

Para este minicurso se ha accedido a los currículos oficiales y actualizados de Matemáticas en educación primaria (K-12) de Paraguay y Perú, disponibles en los enlaces del Proyecto Base de Datos de la ICMI (Planas, 2022). En Perú, el área de Matemáticas está organizada en: a) Números, relaciones y operaciones; b) Geometría y medición; y c) Estadística. En Paraguay, los dos primeros ciclos de la Educación Escolar Básica siguen una estructura similar: a) Número y sus operaciones; b) Geometría y medición; y c) Datos y estadística.

En Bolivia y Ecuador, se consultaron los portales de los ministerios de educación (<https://www.minedu.gob.bo/> y <https://educacion.gob.ec/>). En Ecuador, las Matemáticas en primaria se estructuran en: a) Álgebra y funciones (conjuntos numéricos y sus operaciones); b) Geometría y medición; y c) Estadística y probabilidad. En Bolivia, el currículo oficial contempla en los primeros niveles: a) Números y operaciones; y b) Espacialidad y geometría, dejando la estadística para etapas posteriores.

Este tipo de organización curricular no es exclusivo de la región. En países como Singapur - reconocido por su rendimiento en pruebas internacionales como PISA 2018 (Schleicher, 2019)- el currículo de Matemáticas también se estructura en: a) Números y Álgebra; b) Medición y Geometría; y c) Estadística (<https://www.moe.gov.sg/>). Lo que distingue a Singapur es su enfoque en el desarrollo profesional docente, la rigurosa selección del profesorado y el alto prestigio social de la carrera (Tonga et al., 2022).

Desafíos comunes en la formación docente

Baldin y Malaspina (2018), junto con referentes de la Educación Matemática en la región andina y Paraguay, han identificado fortalezas, debilidades, amenazas y oportunidades en la formación de docentes de Matemáticas. En este espacio del minicurso discutiremos los desafíos que, desde una mirada comparada, resultan más relevantes.

En primer lugar, existe amplio consenso en que la mejora de la enseñanza de las Matemáticas es posible a través de la formación continua, especialmente mediante cursos de actualización promovidos por los ministerios en alianza con universidades locales. También se reconoce un problema estructural en la selección de los mejores candidatos a la docencia, que no parece deberse a la falta de interés por la profesión.

Asimismo, los bajos desempeños docentes se vinculan a problemas sociales y educativos más amplios: bajos salarios, escaso reconocimiento social y debilidades en el monitoreo de procesos educativos, lo que impide evaluar con precisión tanto lo que ocurre en el aula como el impacto de las políticas implementadas.

Finalmente, uno de los principales problemas señalados es la falta de conocimiento matemático especializado entre los docentes, especialmente en los primeros años de escolaridad. A la vez, se reconoce el potencial de las universidades locales como actores estratégicos en la mejora de la formación, a través de programas de posgrado, formación continua e investigación educativa. No obstante, muchas de estas iniciativas son todavía esfuerzos institucionales aislados sin una articulación real con las políticas gubernamentales.

A modo de cierre, este minicurso busca poner en evidencia que el éxito en el aprendizaje de las Matemáticas está profundamente condicionado por la calidad de la formación docente. En la Región Andina y en Paraguay, los desafíos comunes incluyen: fortalecer la formación inicial y continua, mejorar los procesos de selección docente, garantizar sistemas de monitoreo efectivos y dignificar la profesión docente desde una política educativa integral (Tabieh et al., 2022; Heinz, 2013).

Referencias y bibliografía

- Alpízar-Vargas, M., & Alfaro-Arce, A. L. (2019). La formación universitaria de docentes de educación primaria: el caso de matemáticas. *Uniciencia*, 33(2), 110-154.
- Baldin, Y. Y. y Malaspina, U. (2018). *Mathematics Teacher Education in the Andean Region and Paraguay: A Comparative Analysis of Issues and Challenges* (p. 106). Naturaleza Springer.
- Bartholomew, H., Barton, B., Kensington-Miller, B. y Paterson, J. (2005). Desarrollo docente de matemáticas en áreas socioeconómicas bajas. *15° Estudio de la Comisión Internacional de Instrucción Matemática (ICMI) sobre la educación profesional y el desarrollo de los profesores de matemáticas. Aduas de Lindoia, Brasil*.
- Dias, M. D. O. (2021). Reforms of Mathematics Curriculum Guidelines for Middle Education in Brazil and Paraguay. *Pedagogical Research*, 6(3).
- Felmer Aichele, P. L., & Reyes Reyes, C. (2019). ¿Cuándo un problema de matemática es un buen problema?. *Uno: revista de didáctica de las matemáticas*.
- Godino, J. D., Roa, R., Ruiz, F. y Pareja, J. L. (2005). Conocimiento de contenidos matemáticos y pedagógicos para futuros profesores de primaria: El proyecto "Edumat-Maestros". En *la 15ª Conferencia de Estudio ICMI: La Educación Profesional y el Desarrollo de los Profesores de Matemáticas*.
- Heinz, M. (2013). Tomorrow's teachers—selecting the best: An exploration of the quality rationale behind academic and experiential selection criteria for initial teacher education programmes. *Educational Assessment, Evaluation and Accountability*, 25, 93-114.
- Mello-Román, J. D., & Gómez-Pasquali, G. (in press). *The challenge of improving mathematics teacher training in Paraguay and the Andean Region*. In *Proceedings of the 15th International Congress on Mathematical Education (ICME-15)*, Sydney, Australia.
- Planas, N. (2022). ICMI column. *European Mathematical Society Magazine*, (124), 57-58.
- Schleicher, A. (2019). PISA 2018: Insights and interpretations. *oecd Publishing*.
- Susmel, N., Rivera, A., Laserna, R., Côrtes Neri, M., Hecksher, M., Perticarà, M., ... & Spirito, F. (2014). *Los desafíos de educación preescolar, básica y media en América Latina*. Konrad-Adenauer-Stiftung.
- Tabieh, A. A. S., Alsmadi, M. A., Abu-Loum, K. ., Al-Haj, I. ., & Sadieh, N. . (2022). The role of Pre-service teacher's preparation programs in improving the teaching performance of early career mathematics teachers. *World Journal on Educational Technology: Current Issues*, 14(6), 1779–1794.
- Tonga, F. E., Eryigit, S., Yalçın, F. A., & Erden, F. T. (2022). Professional development of teachers in PISA achiever countries: Finland, Estonia, Japan, Singapore and China. *Professional Development in Education*, 48(1), 88-104.
- Vezub, L. y Cordero Arroyo G. (2022). Formación docente y calidad en América Latina. Análisis de casos en Chile, Ecuador y Perú. *Revista Educación Superior y Sociedad*, 34(1), 259-290.
- UNESCO. (2020). Qué se espera que aprendan los estudiantes de América Latina y el Caribe? Análisis curricular del Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE 2019). *UNESCO Office Santiago and Regional Bureau for Education in Latin America and the Caribbean*.



Formación docente con *BlueBot*: Pensamiento computacional y enfoque de género en contextos simulados

Adriana Breda

Universitat de Barcelona

Catalunya, España

adriana.breda@ub.edu

Gemma Sala-Sebastià

Universitat de Barcelona

Catalunya, España

gsala@ub.edu

Resumen

El minicurso es una propuesta de innovación docente dirigida a la formación de profesores, centrada en el desarrollo del Pensamiento Computacional (PC) con enfoque de género. A través de actividades de resolución de problemas robóticos con el robot *BlueBot*, se promueve la reflexión didáctica en un entorno simulado. Inicialmente, se introducen conceptos clave sobre PC, perspectiva de género y Criterios de Idoneidad Didáctica. Luego, los participantes trabajan en grupos: una parte asume el rol de estudiantes en la sala de simulación mientras la otra observa y toma notas. Cada grupo cuenta con un *BlueBot* y materiales para programarlo. Al finalizar, un integrante por grupo actúa como docente y en una simulación de reunión de claustro de profesorado, juntos evalúan la secuencia implementada mediante los Criterios de Idoneidad Didáctica y el enfoque de género. El minicurso fomenta el análisis crítico y el diálogo, favoreciendo una comprensión profunda del PC con perspectiva de género a través de experiencias vivenciales y colaborativas.

Palabras clave: Criterios de Idoneidad Didáctica; Formación de profesores de Matemáticas; Pensamiento computacional, Perspectiva de género; Reflexión docente.

Introducción

En las últimas décadas se ha observado un avance significativo en el desarrollo de la tecnología, lo que ha llevado a todos los países a reconsiderar sus políticas públicas en diversos ámbitos, especialmente en el ámbito educativo (Wing, 2006). Esta tendencia ha impulsado, por ejemplo, la incorporación del Pensamiento Computacional (PC) en los currículos educativos, como una habilidad fundamental a desarrollar desde los primeros niveles de escolaridad (Grover & Pea, 2013; Jara & Hepp, 2016).

Por un lado, los currículos actuales de diversos países - como España y Chile - han comenzado a incorporar esta preocupación. Por ejemplo, en la etapa de Educación Primaria, en el área de Matemáticas, dentro del eje "Sentido algebraico", se incluye el uso del Pensamiento Computacional como una competencia específica. Asimismo, dentro de la competencia transversal digital, se promueve el uso de la robótica educativa para resolver problemas de forma creativa. Por lo tanto, la innovación docente que se presenta, basada en el desarrollo del Pensamiento Computacional y el fomento del interés por la tecnología entre los futuros docentes, además de atender las demandas del currículum, se concibe, como una estrategia clave para reducir el actual y persistente sesgo de género en las carreras STEM.

Por otro lado, la formación debe proporcionar al profesorado herramientas que favorezcan la adquisición de conocimientos vinculados con la práctica docente, entre ellos la reflexión sobre la práctica. En este sentido, los Criterios de Idoneidad Didáctica (CID) (Font et al., 2010) se proponen como una herramienta útil para organizar y guiar dicha reflexión, con el objetivo de analizar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, en particular, en procesos de instrucción que fomenten el desarrollo del PC incluyendo la perspectiva de género.

En ese sentido, el objetivo de este minicurso es presentar una propuesta de innovación docente dirigida a la formación del profesorado, centrada en el desarrollo del Pensamiento Computacional con enfoque de género. A través de actividades de resolución de problemas con el robot *BlueBot*, en un entorno simulado, se busca fomentar la reflexión didáctica desde una perspectiva crítica e inclusiva.

Idoneidad Didáctica para observar y valorar

La idoneidad didáctica de un proceso de enseñanza y aprendizaje se define como el grado en que dicho proceso (o parte de él) cumple con ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para lograr la adecuación entre los significados personales alcanzados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), considerando las circunstancias y los recursos disponibles (ambiente) (Font et al., 2010). Un proceso de enseñanza y aprendizaje alcanzará un alto grado de idoneidad didáctica si es capaz de articular, de forma coherente y sistemática, los siguientes seis criterios parciales de idoneidad didáctica (CID), referidos a cada una de las seis facetas que intervienen en la enseñanza proceso y aprendizaje. La Tabla 1 presenta los criterios y los componentes de cada CID, con base en las pautas de Breda et al. (2017).

Tabla 1
Criterios y componentes de la idoneidad didáctica

Criterios	Descripción	Componentes
Epistémico	Para valorar si la Matemática que se enseña es una «buena Matemática».	Errores; Ambigüedades; Riqueza de procesos; Representatividad de la complejidad del objeto matemático.
Cognitivo	Para valorar, antes de iniciar el proceso de enseñanza y aprendizaje, si lo que se quiere enseñar está a una distancia razonable de lo que saben los estudiantes.	Conocimientos previos; Adaptación curricular a las diferencias individuales; Aprendizaje; Alta demanda cognitiva.
Interaccional	Para valorar si la interacción ha resuelto dudas y dificultades de los estudiantes.	Interacción docente–discente; Interacción entre discentes; Autonomía; Evaluación formativa.
Mediacional	Para valorar la adecuación de recursos materiales y temporales utilizados en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	Recursos materiales; Número de estudiantes, horario y condiciones del aula; Tiempo.
Afectivo	Para valorar la implicación (interés, motivación) de los estudiantes en el proceso de enseñanza y aprendizaje.	Intereses y necesidades; Actitudes; Emociones.
Ecológico	Para valorar la adecuación del proceso de enseñanza y aprendizaje al proyecto educativo del centro, las directrices curriculares, las condiciones del entorno social y profesional, etc.	Adaptación al currículo; Conexiones intra e interdisciplinarias; Utilidad sociolaboral; Innovación didáctica.

Fuente: Breda et al. (2017).

En ese minicurso, los CID sirven como herramienta de observación de la clase de simulación y, también, cómo herramienta de valoración del proceso de instrucción implementado.

Pensamiento computacional y robots educativos

En primer lugar, hay que comentar que, aunque no existe unanimidad en cuanto a una definición para pensamiento computacional, sí que está claro que pensamiento computacional no es lo mismo que programación. Parafraseando a Moreno-León et al. (2019), el PC sería la capacidad cognitiva de formular y representar problemas para resolverlos haciendo uso de herramientas, conceptos y prácticas de la disciplina informática, como la abstracción, la descomposición o el uso de simulaciones, entre otras; mientras que la programación sería sólo uno de los medios posibles para desarrollarla (usando robots educativos, por ejemplo). Al carecer de una definición de tipo conceptual, hemos adoptado la definición operacional de pensamiento computacional que deriva del marco de Brennan y Resnick (2012) que describe sus características observables en torno a tres dimensiones computacionales: conceptos, prácticas o procedimientos y perspectivas.

En segundo lugar, la actual reforma curricular de la Educación Básica de España, por ejemplo, explicita que una de las competencias específicas que debe desarrollar el estudiante en la asignatura de Matemáticas al final de la Educación Básica es utilizar el PC para el desarrollo

de procesos matemáticos, en particular, para de resolver problemas y modelizar de forma eficiente. Este planteamiento permite interpretar que puede existir una integración entre PC y pensamiento matemático. Para atender a esta demanda, aparece la necesidad de orientar al profesorado, así como al futuro profesorado, en desarrollar el pensamiento matemático a través del pensamiento computacional y cómo reflexionar sobre ello, sea a partir de la resolución de problemas de programación con el uso de robots educativos (Seckel et al., 2022).

Simulación en educación

La simulación es una estrategia educativa, ampliamente aplicada en la formación de profesionales de la salud desde hace décadas, que proporciona a los estudiantes situaciones clínicas realistas y les permite practicar y aprender en un entorno seguro (Arthur et al., 2012). Es una estrategia beneficiosa ya que ofrece un aprendizaje vivencial, y por lo tanto significativo para el estudiante, en una experiencia guiada pero realista. Según Rocha (2000) los estudiantes que frecuentan clases en las que se utilizan métodos de aprendizaje experimental se perciben a sí mismos como profesionales más competentes que los estudiantes de clases en las que no se utilizan estos métodos. Una forma de aprendizaje experimental utilizada en entornos educativos son las simulaciones, que implican a los participantes en un aprendizaje activo donde aprenden unos de otros, no sólo del “experto en el aula” (Dorn, 1989).

Se entiende por simulación lo establecido en el *Healthcare Simulation Dictionary* publicado por la *Society for Simulation Healthcare* (Lioce et al., 2024, p. 58) y es la misma definición que adoptamos en nuestro trabajo: “Técnica que crea una situación o entorno para permitir a las personas experimentar una representación de un hecho real con fines de práctica, aprendizaje, evaluación, ensayo o para obtener comprensión de sistemas o acciones humanas”.

Perspectiva de género

En esta innovación docente se adopta una perspectiva de género basada en los derechos humanos, alineada con el currículum con una voluntad de trabajar por la igualdad, la no discriminación sexista y la prevención de las violencias que se derivan del machismo y la LGBTIfobia. Desde esta perspectiva se entiende la igualdad de género como un derecho humano fundamental de todas las personas a la salud, la educación, la igualdad de información y la no discriminación. Por ello, se proponen estrategias metodológicas que apuestan por el cambio y la transformación, ya que lo que se pretende es fomentar una reflexión crítica que resuene en las personas (Crabtree et al., 2009), en este caso, profesores y futuros profesores, para que puedan influir en su futuro alumnado.

Metodología

En un primer momento (durante los primeros 50 minutos del minicurso), se explican a los participantes las nociones teóricas de PC, perspectiva de género y CID (las dos últimas como herramienta para la observación y reflexión docente). En un segundo momento (los 60 minutos restantes), con el acompañamiento de las orientadoras del minicurso, los participantes se organizan en grupos de trabajo. En cada grupo, la mitad de los integrantes participa en la sala de

simulación para “vivir” las primeras actividades como si fueran niños, mientras que los otros observan la implementación desde el otro lado de la sala y toman notas basadas en la pauta de los Criterios de Idoneidad Didáctica y perspectiva de género. Cada grupo dispone de un robot *BlueBot*¹ y material adicional para programarlo (Figura 1). Después de la implementación, un integrante de cada grupo asume el rol de docente y pasa a formar parte de un grupo que, simulando una reunión del claustro de profesorado, valora la secuencia de actividades implementada —que ha sido observada y también “vivida”— utilizando los criterios de idoneidad didáctica.

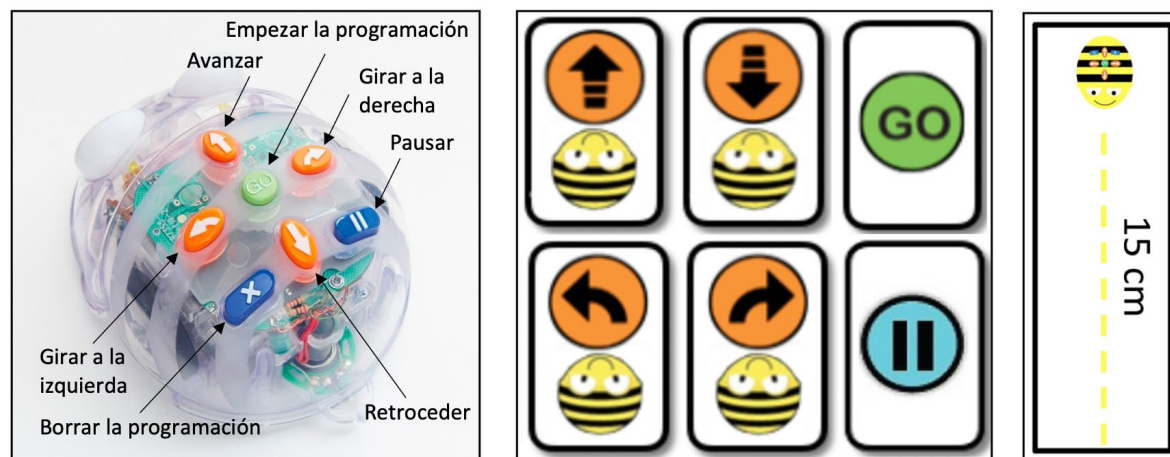


Figura 1: Recursos manipulativos usados en la implementación: Robot *BlueBot*; tarjetas para representar el algoritmo del trayecto del robot; y tarjeta rectangular de 15 cm. Fuente: elaboración propia.

La situación de aprendizaje plantea tareas de resolución de problemas robóticos, en las que se deben programar secuencias para indicar al robot el itinerario que debe seguir desde un punto de salida hasta uno de llegada, cumpliendo ciertas condiciones. La primera tarea consiste en una manipulación libre del robot, con el objetivo de explorar sus características y el funcionamiento de sus teclas. La segunda, los participantes deben elegir un punto de partida y otro de llegada del robot considerando obstáculos en el camino y programarlo para que ejecute la trayectoria. La tercera, los participantes deben hacer que, desde el destino final, el robot regrese al punto inicial (punto de partida). Mientras realizan las tareas, se solicita a los participantes formular hipótesis antes de verificar con el robot si la resolución propuesta es adecuada. Posteriormente, se promueve la reflexión, representación y argumentación de las respuestas en pequeños grupos (ver ejemplo de la dinámica en la Figura 2).

¹ El *BlueBot* es un robot educativo con forma de abeja y carcasa transparente diseñado para introducir a niños y niñas de infantil y primaria (3-8 años) en la programación y el pensamiento computacional; puede controlarse de manera sencilla mediante botones físicos que permiten movimientos de 15 cm y giros de 90°, almacenar hasta 200 comandos en memoria y reforzar la interacción con luces y sonidos, además de conectarse por Bluetooth a tabletas u ordenadores para programarse con una app basada en bloques tipo Scratch que facilita el uso de repeticiones y secuencias más complejas; funciona con batería recargable de hasta 6 horas de autonomía. Es una herramienta versátil que fomenta la curiosidad tecnológica, el razonamiento lógico, la resolución de problemas y la colaboración en el aula de manera progresiva y motivadora.

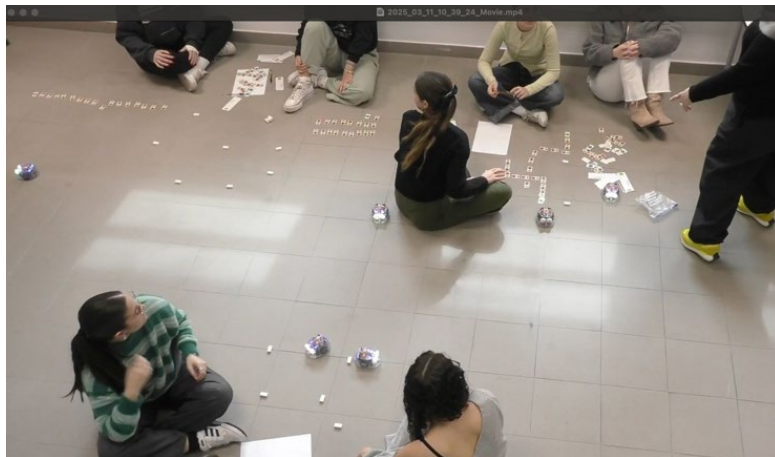


Figura 2: Ejemplo de participantes desempeñando el papel de alumnado en la sala de simulación. Fuente: elaboración propia.

Se incluyen momentos de recapitulación de los conocimientos, conceptos y prácticas computacionales que van surgiendo. Por ejemplo: diferentes secuencias de programación pueden llevar al mismo destino; cuáles son consideradas más óptimas y por qué; qué partes de las secuencias se repiten (lo que permite introducir el concepto de bucles o patrones); qué elementos del recorrido de ida pueden reutilizarse en el trayecto de vuelta, y bajo qué condiciones, considerando que existen diversas alternativas para ese retorno. También se destaca la importancia de reducir la cantidad de órdenes al programar, con el fin de evitar errores y aumentar la eficiencia. En este punto, se evidencian errores frecuentes en la programación, como fallos al establecer la dirección del giro o al determinar cuántas veces debe repetirse una instrucción.

Al acabar las actividades con los *BlueBot*, una persona representante de cada grupo de trabajo cambia de rol, de alumna/o a docente, y se forma un nuevo grupo que actuarán en una simulación de reunión de claustro de profesorado para valorar las actividades “vivas” para desarrollar el PC con el *BlueBot*. Para ello, se solicitará a los participantes que hagan una reflexión de la situación de aprendizaje vivida a partir de los seis CID incluyendo la perspectiva de género.

Finalmente, se hace una reflexión colectiva para valorar los aprendizajes logrados en el transcurso de la dinámica del minicurso.

Conclusiones

En primer lugar, se espera que la actividad de simulación en su conjunto resulte muy motivadora y significativa para el aprendizaje de todos los participantes, tal y como lo demuestran algunas experiencias anteriores realizadas (Sala-Sebastià et al., en prensa). El uso de los Criterios de Idoneidad Didáctica y las nociones de perspectiva de género como pauta para

observar y guiar la valoración y las reflexiones sobre la implementación de la situación de aprendizaje puede ser decisivo para una discusión rica y completa.

Finalmente, se espera que, gracias a la metodología de simulación y a la pauta de los CID utilizada, el diálogo y las reflexiones conjuntas de los participantes sean ricas y se focalicen en el desarrollo del PC con enfoque de género.

Agradecimientos

Proyecto *Criteris i recursos per al desenvolupament del Pensament Computacional amb robots educatius i per a la seva avaluació a l'Educació Infantil i Primària* (2024 ARMIF 00017). Generalitat de Catalunya (AGAUR) y Proyecto *Pensament Computacional i robòtica amb perspectiva de gènere a l'educació Infantil i Primària* (EDU145/23/000006) Generalitat de Catalunya (Departament d'Educació).

Referencias y bibliografía

- Arthur, C., Levett-Jones, T., & Kable, A. (2012). Quality indicators for design and implementation of simulation experiences: a Delphi study. *Nurse Educ. Today*, 33(11), pp. 1357-1361. <https://doi.org/10.1016/j.nedt.2012.07.012>
- Breda, A., Pino-Fan, L.R., & Font, V. (2017). El conocimiento meta didáctico-matemático de los docentes: criterios de reflexión y evaluación de la práctica docente. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13 (6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Brennan, K., & Resnick, M. (2012). New frameworks for studying and assessing the development of computational thinking. *Proceedings of the 2012 Annual Meeting of the American Educational Research Association*. Vancouver: American Educational Research Association, 1, 25.: <https://scratched.gse.harvard.edu/ct/files/AERA2012.pdf>
- Crabtree, R. D., Sapp, D. A., & Licona, A.C. (2009). *Feminist Pedagogy: Looking Back to Move Forward*. Johns Hopkins University Press. <https://digitalcommons.fairfield.edu/communications-books/1/#:~:text=https%3A//digitalcommons.fairfield.edu/communications%2Dbooks/1>
- Dorn, D. (1989). Simulation games: One more tool on the pedagogical shelf. *Teaching Sociology*, 17, 10-18. <https://doi.org/10.2307/1317920>
- Font, V., Planas, N., & Godino, J. D. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. *Infancia y Aprendizaje*, 33(1), 89-105. <https://doi.org/10.1174/021037010790317243>
- Grover, S., & Pea, R. (2013). Computational thinking in K-12: A review of the state of the field. *Educational Researcher*, 42(1), 38-43. <https://doi.org/10.3102/0013189X12463051>
- Jara, I., & Hepp, P. (2016). *Enseñar ciencias de la computación: Creando oportunidades para los jóvenes de América Latina*. Microsoft. <https://www.microsoft.com/es-es/education>
- Lioce L., Lopreiato J., Anderson M., Deutsch, E.S., Downing D., Robertson J.M., Diaz D.A., Spain A.E., & the Terminology and Concepts Working Group. (2024). *Healthcare Simulation Dictionary-Third Edition*. Rockville, MD: Agency for Healthcare Research and Quality. <https://www.ahrq.gov/patient-safety/resources/simulation/terms.html>.
- Moreno-León, J., Robles, G., Román-González, M., & Rodríguez García, J.D. (2019). Not the same: a text network analysis on computational thinking definitions to study its relationship with computer programming. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa (RIITE)*, 7, 26-35. <http://dx.doi.org/10.6018/riite.397151>
- Rocha, C. (2000). Evaluating experiential teaching methods in a policy practice course: The case for service learning to increase political participation. *Journal of Social Work Education*, 36, 53-63. Disponible en: <https://digitalcommons.unomaha.edu/slcehighered/64>

- Sala-Sebastià, G., Breda, A., Cortés, A., García, E., & Font, V. (en prensa). ¿Cómo desarrollar el pensamiento computacional con *BlueBots*? una experiencia de simulación con perspectiva de género. En *II Congreso Internacional de Experiencias Educativas STEAM. Reimaginando el aprendizaje para un mundo en cambio*.
- Seckel, M. J., Vázquez, C., Samuel, M., & Breda, A. (2022). Errors of programming and ownership of the robot concept made by trainee kindergarten teachers during an induction training. *Education and Information Technologies*, 27(3), 2955-2975. <https://doi.org/10.1007/s10639-021-10708-8>
- Serrat, N. (Coord). (2022). Simulació per al desenvolupament de competències transversals. Una experiència d'innovació docent en el Màster de Formació del Professorat de Secundària Obligatoria i Batxillerat, Formació Professional i Ensenyament d'Idiomes. *Projecte d'Innovació Docent RIMDA de la Universitat de Barcelona*.
- Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33–35. <https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>



Funciones y funcionales en la teoría del cálculo

Carlos **Sánchez** Fernández

Facultad de Matemática y Computación, Universidad de La Habana

Cuba

csanchez@matcom.uh.cu

Resumen

En este minicurso pretendemos estimular la reflexión sobre las bondades de una perspectiva historicista en el estudio del tema funciones. Nuestro principal objetivo es mostrar la evolución de las ideas sobre el concepto función como asunto fundamental en la Teoría del Cálculo y argumentar la introducción en la práctica docente de los avances obtenidos en los siglos XIX y XX.

Durante el siglo XIX el concepto función ganó en precisión y amplió su alcance y variedad. Para tratar las ecuaciones diferenciales y otros problemas de cálculo avanzado, en el s. XX fue imprescindible introducir las “funciones de funciones” y en particular, las “funcionales” definidas en espacios de funciones y con valores numéricos. Ha pasado más de un siglo de estos avances y este concepto ha probado su valor. Entonces, ¿podremos introducir estas ideas en nuestras clases? ¿Cuándo, cómo y dónde? Queremos compartir ideas sobre las mejores decisiones.

Palabras clave: Educación Media Superior; Educación Universitaria; Epistemología; Funciones; Historia de la Matemática; Teoría del Cálculo.

Introducción

Con este minicurso nos proponemos dar al interesado una visión sintética panorámica de la evolución del concepto función. Desde la antigüedad las relaciones funcionales se expresaban de diferentes formas muy rústicas. Sin embargo, no es hasta la Revolución Comercial en la Edad Media Tardía, que el estudio del movimiento y la variabilidad se tornó imprescindible para lograr el avance socioeconómico. En el s. XVII aparece la palabra “función” y con la transformación analítica de la geometría, pasó a tener una expresión gráfica más manejable. La temporada alta para las investigaciones en el campo de la mecánica, sin lugar a dudas, motivó la

introducción de *funciones elementales trascendentes*. Desde los albores del s. XIX, estimulados por el ímpetu de la Escuela Politécnica de París, las ideas sobre “*función continua*” y “*función analítica*” alcanzan una claridad adecuada para enfrentar los nuevos problemas de representación por medio de funciones trigonométricas. En las universidades germanas de la segunda mitad del siglo XIX se gestaron los primeros “*monstruos funcionales*”: curvas continuas sin tangente, funciones integrables con infinitas discontinuidades y curvas que llenan un área. No fueron pocos los que vieron en estos nuevos *monstruos* una amenaza a la visión ortodoxa, pero afortunadamente surgieron otros audaces que se dedicaron a explotar estas extravagancias y convertir lo monstruoso en algo bello como los fractales y en algo útil como la descripción del movimiento browniano. Ya en la primera mitad del s. XX, la búsqueda de una explicación plausible para la modelación física del mundo atómico alcanzada por la mecánica cuántica llevó a la necesidad de introducir las “*funciones generalizadas*” o “*distribuciones*”, ilustradas con la simple y asombrosa “Delta de Dirac”. El espectro funcional se ha ampliado considerablemente, tanto para el matemático teórico que busca la argumentación y justificación de los nuevos modelos, como para el investigador aplicado que precisa de una herramienta confiable de amplio dominio¹.

Pero, ¿qué se hace en la enseñanza media superior? ¿cómo se introducen las nuevas ideas para la formación de nuevos profesionales? ¿Se mencionan los nuevos contenidos y los procedimientos que necesita tanto el futuro profesional de la Matemática, como el ingeniero y el científico no matemático? Nuestro fin principal es proporcionar la información imprescindible sobre las motivaciones y las circunstancias en que los significados del concepto “función” evolucionaron y alcanzaron la forma aceptable actualmente. Cada educador, responsable e interesado, decidirá que usar en su práctica docente.

Génesis del concepto “función”

Los documentos analizados por los historiadores indican que el término “función” apareció por vez primera en el trabajo de Gottfried von Leibniz *Consideraciones sobre la diferencia que hay entre el análisis ordinario y el nuevo cálculo de los trascendentes*:

... Llamo función a toda porción de una recta que parte de un punto de la curva, y termina en algún otro lugar. Tales son la abscisa y ordenada del punto, las porciones de la tangente y la normal que terminan en uno de los ejes, ...

Observemos que Leibniz da al término función un significado diferente al actual, muy geométrico. La noción de *función* será inmediatamente adoptada por los hermanos Bernoulli, lo cual satisfizo mucho a Leibniz. De forma bastante rápida la noción de función se transformó, perdiendo su carácter geométrico tan directo y pasó a ser lo que hoy denominamos *expresión analítica*.

Así en 1718 Johann Bernoulli (1667-1748) escribe: “*Se llama función de una magnitud variable a una cantidad, que se compone de cualquier forma de esta magnitud variable y de constantes*”.

¹ Una visión panorámica de este proceso histórico puede observarse, por ejemplo, en los libros [Jahnke, 2003], [Pier, 2001] y el nuestro [Sánchez Fernández, 2023]. Los dos volúmenes recientes de Análisis I y II, escritos por uno de los matemáticos vivos más prestigioso Terence Tao [Tao, 2016] permiten conocer el estado del arte.

Bernoulli no aclara qué entiende por cantidad, pero del contexto en que la utiliza puede deducirse que se trata de lo que más tarde Euler denominó “expresión analítica”.

Durante el siglo XVIII, el análisis se desarrolló íntimamente vinculado a los problemas de la mecánica, para los cuales el concepto de *variable* resulta muy natural. De este modo el análisis fue ante todo el cálculo con las variables y sus relaciones. Sin embargo, este concepto no resulta totalmente adecuado cuando lo que se quiere es estructurar una teoría abstracta, puramente matemática; en este caso el concepto de *función* resulta mucho más adecuado.

El paso decisivo para considerar a las funciones, no solo como herramientas de resolución de problemas, sino como un ente matemático por sí mismo digno de estudio, lo dio el suizo Leonhard Euler (1707-1783) en la primera parte del libro *Introductio in analysin infinitorum* (1748)². En esta elegante y original obra, Euler sienta la pauta para el nacimiento de una nueva rama de la Matemática, que más tarde será la *Teoría del Cálculo*, o de la forma más usual, el *Análisis Matemático*, basado en el concepto de función y el uso de los procesos infinitos, tales como la sumación de series, para la representación de las funciones. En particular, aquí aparece un tratamiento sistemático de las propiedades de las *funciones trascendentes elementales* por medio de sus desarrollos en series de potencias.

En esta obra, Euler se adhiere esencialmente a la definición de función dada por Johann Bernoulli, pero introduce el término más adecuado de *expresión analítica*: “Una función de una cantidad variable es una expresión analítica compuesta en cualquier forma de esta cantidad variable y de números o cantidades constantes”.

A diferencia de Bernoulli, Euler aclara cuáles son las operaciones admisibles para la formación de las expresiones analíticas: las operaciones algebraicas usuales y varios procedimientos trascendentes que enumera y que incluyen el paso al límite³. A continuación, realiza varias clasificaciones de las funciones: en algebraicas y trascendentes, las primeras formadas solo por operaciones algebraicas y en las segundas incluye aquellas en que la variable se ve afectada por alguna operación trascendente, es decir que *trasciende* las operaciones algebraicas. También las divide en explícitas e implícitas, uniformes y multiformes, etc. Dentro de las funciones trascendentes incluye tanto las funciones trigonométricas y aquellas definidas por exponenciales y logaritmos. Encuentra las propiedades y relaciones básicas entre estas funciones, en particular, sus desarrollos en serie de potencias. En resumen, las presenta con tanta claridad que se convierten simplemente en *funciones elementales*, aunque *trascendentes*.

En el prefacio a esta obra Euler señala: “en el primer libro me he extendido sobre todo en las funciones de variables, porque ellas son el objeto del Análisis infinitesimal”.

De esta forma sitúa a las funciones en el centro del Análisis. Para poner de manifiesto más claramente su distanciamiento de la base geométrica originaria de esta rama de la Matemática no incluirá ninguna figura en todo el primer tomo de esta obra, como tampoco más tarde lo hará en sus enjundiosos tratados *Intitutiones Calculi Differentialis* e *Intitutiones Calculi Integralis*. El

² En las referencias al final colocamos la nueva edición en español [Euler, 2001]

³ Valga la aclaración de que en toda la obra de Euler publicada, nunca aparece una definición del concepto “límite”.

estudio de las curvas lo agrupa en el segundo tomo de la *Introductio* y en este aplica las ideas desarrolladas en la primera parte de esta misma obra.

Es necesario aclarar que el concepto *continuidad* en Euler referencia una propiedad totalmente diferente a la que con tal denominación concebimos actualmente. Para Euler y sus contemporáneos todas las funciones imaginables son continuas (en nuestro sentido), salvo en algunos puntos aislados donde la variable dependiente podía hacerse infinitamente grande. Incluso eran concebidas, además, como derivables a trozos. Esta situación es totalmente natural y perfectamente explicable conocida la forma en que emergió el concepto de función: a partir del modelo de aquellas relaciones funcionales con las que se tenía que tratar en la mecánica.

Ampliación de la noción de “representación analítica

Entre los problemas célebres del siglo XVIII, que estimularon la búsqueda de una comprensión más amplia de la idea de función, está sin duda el problema de la cuerda vibrante.

Al parecer fue uno de los brillantes partidarios de Newton, el inglés Brook Taylor (1685-1731), en su obra más conocida *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715) quién planteó el problema: *Determinar el movimiento de una cuerda flexible fija en sus dos extremos*⁴.

Para Taylor este problema tenía el atractivo de su asociación con su afición predilecta, la música. Taylor obtiene en el lenguaje propio de las fluxiones, que el movimiento de un punto arbitrario de la cuerda es como el de un péndulo simple. Asimismo, estableció que la forma de la curva que toma la cuerda en un instante dado es sinusoidal y determinó el período de oscilación de la cuerda. Sin embargo, no consideró el problema de hallar la ecuación diferencial del movimiento.

En 1727, doce años después de la publicación de Taylor, Johann Bernoulli en dos cartas enviadas a San Petersburgo, llama la atención de su hijo Daniel sobre los resultados de Taylor, le comunica sus propios avances y lo desafía para que se ocupe del problema de la cuerda vibrante.

Enseguida que Daniel Bernoulli (1700-1782) recibió las cartas de su padre se empeñó en encontrar una solución plausible. A partir de las ideas de Taylor y apoyándose en las investigaciones de su padre, infirió que cualquier movimiento general se puede obtener como combinación de todas las oscilaciones fundamentales.

Daniel había llegado a la convicción de que la superposición de soluciones sinusoidales daba la solución más general del problema, lo que implicaba la posibilidad de expresar una función arbitraria como suma de senos.

Los trabajos que en la primera mitad del siglo XVIII se dedicaron al asunto, como los de Brook Taylor (1715), Johann Bernoulli (1728) y Daniel Bernoulli (1738), consideraban por separado los desplazamientos de la cuerda musical como función del tiempo t y como función de

⁴ En la exposición de este problema hemos sintetizado las ideas expuestas en nuestro libro [Sánchez y Valdés. 2004, pp. 53-60] dónde el interesado puede encontrar un análisis más amplio y detallado.

la distancia x de un punto de la cuerda a uno de sus extremos, lo que los llevaba a considerar sólo ecuaciones diferenciales ordinarias y a soluciones de tipo sinusoidal $y = \text{sen } \pi x/l \cdot \text{sen } c \pi t/l$. Un modelo más cercano a la realidad exigía la consideración simultánea de las dos variables (t, x) . En esta dirección avanzaron las investigaciones posteriores.

El tema de la cuerda musical, va a adquirir una nueva y polémica connotación con la incorporación de Jean le Rond D'Alembert (1717-1783) quien pronto fue considerado entre los más prestigiosos geómetras de Francia en el *siglo de las luces*. El trabajo de D'Alembert *Investigaciones sobre la curvatura que forma una cuerda extendida puesta a vibrar* (1749) desata la polémica. Aquí, el ya célebre sabio encontró la ecuación en derivadas parciales que rige el movimiento ondulatorio de la cuerda y expone su solución de una manera sumamente ingeniosa. Obviemos el agudo razonamiento de D'Alembert y planteemos la solución encontrada por él y que tiene la forma siguiente:

$$y(t, x) = \frac{1}{2} \phi(at + x) - \frac{1}{2} \phi(at - x),$$

donde ϕ es una *función arbitraria*, pero que ha de ser periódica, representa a una onda viajera considerada tanto en su pasado como en su futuro y, además, en el instante inicial, $y(0, x)$ debe coincidir en el intervalo $0 \leq x \leq l$ con la función $f(x)$ que describe la forma inicial de la cuerda.

No obstante, D'Alembert no estaba seguro que esta *expresión analítica* contuviera todas las formas posibles de una cuerda en movimiento. Pocos meses después de leer los artículos de D'Alembert, Euler escribió por su parte el artículo *Sobre la oscilación de cuerdas*. Aunque en el método de solución siguió a D'Alembert, Euler tenía por ese tiempo una idea completamente distinta en cuanto a qué funciones se podían admitir como curvas iniciales. Fueron, al parecer, argumentos de naturaleza física en relación con el problema de la cuerda musical los que le impulsaron a anteponer su nuevo concepto de función. Euler acepta cualquier posición inicial de la cuerda, definida por una fórmula $f(x)$ en $-l \leq x \leq l$.

Así pues, el principal punto de desacuerdo de Euler con D'Alembert es que el primero admitía toda clase de curvas iniciales y, por tanto, soluciones no suaves, mientras que D'Alembert aceptaba solamente soluciones y curvas iniciales suaves.

Cuando Daniel Bernoulli leyó los primeros artículos de D'Alembert y de Euler sobre la cuerda vibrante, se apresuró a enviar a las Academias de San Petersburgo y de Berlín varios trabajos enfatizando su prioridad y las características más generales de sus resultados. En uno de estos artículos, publicado en 1753, Daniel Bernoulli subraya un aparente conflicto entre las consideraciones de Taylor, con sus soluciones sinusoidales, y la infinita variedad de soluciones, distintas de las sinusoidales, que aparecen en los trabajos de D'Alembert y Euler. Daniel trata de reconciliar las dos consideraciones mediante una visión sintética de la naturaleza musical de las vibraciones.

Después de permitirse sarcasmos sobre el carácter abstracto de los trabajos de D'Alembert y Euler, reitera que pueden existir simultáneamente muchos modos de oscilación en la cuerda vibrante (ésta responde entonces a la superposición de todos los armónicos). Insiste en que todas las posibles curvas iniciales se pueden representar en la forma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l}$$

porque existen suficientes constantes a_n como para que la serie se ajuste a cualquier curva.

En consecuencia, afirma, que todos los correspondientes movimientos vendrán dados por la serie infinita:

$$y(t, x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{l} \cos \frac{n\pi ct}{l}$$

Así pues, cualquier movimiento, correspondiente a una curva inicial, no es más que una suma de armónicos periódicos sinusoidales, y la combinación tiene la frecuencia del armónico fundamental. Sin embargo, Bernoulli no dio argumentos matemáticos para apoyar sus afirmaciones; se apoyó solamente en argumentos físicos.

En su réplica, Euler afirma que la cuestión principal radica en preguntarse si todas las curvas del conjunto de la cuerda en movimiento están contenidas o no en esta expresión analítica. Euler opina que la respuesta es negativa y que la determinación de los coeficientes “es sin duda muy difícil, por no decir imposible”.

Podemos observar como en esta polémica se enfrentan diferentes concepciones relacionadas con la idea de “*función analítica*”. En primer lugar, una función debe ser una expresión analítica, entendida en su sentido más amplio; en segundo, toda curva debe ser posible expresarla mediante una función y finalmente, una expresión analítica representa a una única función para todos los valores posibles de la variable.

La posición de Bernoulli tiende a conciliar estas tres ideas cuando afirma que una función arbitraria puede ser representada mediante una serie trigonométrica, es decir una *expresión analítica*, aunque de una forma no adoptada en trabajos matemáticos anteriores. Según Euler, Daniel no ha logrado la conciliación, sino al contrario ha abierto nuevas incertidumbres.

Euler y D’Alembert dieron sus soluciones de la ecuación de ondas en forma cerrada, utilizando un par de funciones arbitrarias, mientras que Daniel había encontrado una solución en términos de una suma infinita de funciones trigonométricas. Y como esta última solución parecía implicar claramente el carácter periódico de la función, mientras que las funciones arbitrarias de D’Alembert y Euler no eran periódicas necesariamente, parecía que la solución de Bernoulli era menos general. Lo que no podía comprenderse entonces era que una superposición de “funciones tan buenas” como las trigonométricas pudieran representar una *función arbitraria*. Los medios técnicos del Análisis Matemático en esta época eran insuficientes para abordar con rigor conceptos básicos como el de función.

En resumen, el debate sobre la ecuación de la cuerda sometida a una vibración en un mismo plano, es importante desde el punto de vista matemático, porque la discusión llevó al cuestionamiento de las nociones establecidas de función y de representación de funciones arbitrarias por medio de series infinitas de funciones trigonométricas. Pero una explicación satisfactoria a esta polémica solo aparecerá en el siglo XIX, en los trabajos de Fourier, Cauchy, Dirichlet, Riemann y otros; cuando las concepciones de *representación*, *función continua* y *función arbitraria* se amplíen y, a la vez, se precisen.

Corrección de la idea de continuidad funcional

El estándar de rigor lógico, formado en el análisis matemático en la segunda mitad del siglo XVIII se quedó muy atrás de lo conquistado en las aplicaciones. En las postrimerías del siglo el problema de la reconsideración crítica del sistema de definiciones y procedimientos lógicos en las demostraciones adquirió novedad singular. Efectivamente, las investigaciones sobre la fundamentación del análisis matemático ocuparon en la Matemática del siglo XIX un lugar significativo.

Es innegable que un paso decisivo es el que da Joseph Fourier (1768-1830) en 1807 cuando presenta a la Academia de París, por primera vez, su *Memoria sobre la propagación del calor*.

A comienzos del siglo, muchos físicos e ingenieros se interesaban por la problemática de la propagación del calor en cuerpos sólidos, dada su importancia como una forma de energía que podía usarse para ayudar a la producción fabril. La memoria de Fourier fue recibida con interés, pero, debido a su falta de rigor matemático, no fue publicada. Fourier presentó una nueva variante a fines de 1811, que ganó un Premio de la Academia de París, pero no se publicó hasta 1822. Tras el conocimiento de esta obra, los sabios de la época consideraron a Fourier como precursor de la teoría de las series trigonométricas y además como original introductor de nuevos métodos en el tratamiento de los problemas de la física matemática.

En relación con el cálculo de los coeficientes, Fourier realiza la observación importante de que para permitir el cálculo de los coeficientes en el desarrollo de una función $f(x)$ es suficiente que, para cada valor de n , la región bajo la curva $y = f(x)\sin nx$ tenga un área, que pueda ser interpretada como el valor de la integral. De modo que Fourier no exige que la función sea continua y por consiguiente que la expresión tenga una integral que pueda ser calculada con su primitiva. Más aún, Fourier notó que, aunque la función sea continua en $[-\pi/2, \pi/2]$, la función extendida, a la cual converge la serie en la recta real completa, es necesariamente discontinua en los puntos x que sean múltiplos impares de $\pi/2$.

Así que las series de Fourier atrajeron la atención al estudio de las funciones discontinuas, otorgándoles los mismos derechos que a las continuas, como herramientas en la solución de problemas físicos. Fourier observa que su análisis puede ser aplicado al problema de la cuerda vibrante y justifica el punto de vista de Daniel Bernoulli. Un resultado esencial es el desarrollo en serie trigonométrica de una función dada en un intervalo por diferentes fórmulas (una función discontinua según la terminología del siglo XVIII). Fourier probó que una curva constituida por una combinación de arcos de curvas diferentes puede considerarse en una sola expresión analítica: su serie trigonométrica asociada.

Estas nuevas concepciones provocaron un alud de interrogantes: ¿qué debe entenderse por función continua?, ¿cómo definir la integral de una función y cuáles han de ser las funciones integrables?, ¿cuáles funciones pueden ser expresadas mediante series trigonométricas?, etc.

En realidad, Fourier solo trató funciones con un número finito de discontinuidades en un intervalo finito, pero su obra revolucionó la convicción tradicional de que las funciones algebraicas y las trascendentes elementales eran el prototipo de “funciones arbitrarias”.

El personaje menos valorado y, no obstante, con ideas muy claras sobre el concepto función y su continuidad fue el sacerdote checo Bernardo Bolzano (1781-1848). Para Bolzano decir que una función $f(x)$ varía de acuerdo a una ley de continuidad para todos los valores de x que están dentro o fuera de ciertos límites, no es otra cosa que esto: si x es cualquiera de tales valores, la diferencia $f(x+\omega)-f(x)$ puede ser hecha menor que cualquier cantidad dada, si uno hace ω tan pequeño como se desee.

A principios del s. XIX la mayoría consideraba evidente que una función era continua porque tomaba todos los valores entre dos valores dados. Para Bolzano esta evidencia había de ser probada. El llamado *Teorema de los valores intermedios* Bolzano lo demostró rigurosamente. Y, además, se interesó por probar que también las funciones discontinuas podían gozar de la propiedad de los valores intermedios. En este sentido construyó una función que toma todos los valores entre -1 y 1 en el intervalo $[-1,1]$, y sin embargo, es discontinua en todo punto de dicho intervalo.

Lamentablemente la obra de Bolzano no fue difundida y menos aún reconocida por sus contemporáneos, incluso su monografía más importante: *Estudio sobre las funciones*, fue encontrada en 1920 y publicada solo en 1930, 100 años después de ser escrita.

A Bolzano, en su esfuerzo por precisar el concepto función continua, le sigue Augustin Cauchy (1789-1857). En su obra más completa escrita para el curso de *Análisis Algebraico* de la Escuela Politécnica de París, con el uso de las ideas básicas sobre límite, Cauchy plantea una definición de función continua muy semejante a la que hoy se encuentra en los textos.

No obstante, la aclaración completa de la diferencia entre la continuidad euleriana y la de Bolzano-Cauchy, aparece en 1844 cuando Cauchy da el ejemplo de la función

$$y = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases},$$

que con esta forma de expresión resulta *discontinua* en el sentido de Euler, pero que también

puede ser dada por una sola expresión analítica $y = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^2 dt}{t^2 + x^2} = |x|$, y entonces sería *continua*

en el mismo sentido Euleriano. Así muestra Cauchy que la definición dada por Euler resulta insostenible lógicamente.

Cauchy definió la integral de una función continua (que extendió a funciones que tienen un número finito de discontinuidades) basándose en el recién definido concepto límite y sin apelar a un algoritmo de cálculo de difícil o imposible ejecución. De esta manera, amplió las posibilidades en la representación de funciones, tanto mediante una expresión en forma de integral, como a través de las series trigonométricas cuyos coeficientes podrían ser obtenidos por una integral definida.

Las nuevas ideas y las potentes herramientas surgidas en la primera mitad del siglo XIX aumentaron el arsenal de funciones disponibles, pero también ampliaron considerablemente el contenido de esta noción, brindando así la posibilidad de estudiar profundamente las funciones y clasificarlas de acuerdo a sus propiedades. Por otra parte, la teoría del cálculo había penetrado profundamente en la física, donde la variedad de tipos de movimientos estudiados (principalmente los procesos ondulatorios, electromagnéticos y termodinámicos) se había acrecentado considerablemente. Las funciones analíticas, no eran suficientes, era necesario considerar procesos no analíticos y, en ocasiones, incluso discontinuos.

La feliz aparición de los “monstruos”

La introducción en la enseñanza universitaria de los logros más recientes de las Ciencias Matemáticas, primero en los Institutos Superiores Politécnicos, promovidos en Francia al calor de la Revolución Burguesa y, algo después, en el tipo de Universidad neo-humanista concebido en el pujante reino de Prusia, provocó un inusitado interés por la fundamentación de la Matemática. Se realizaron esfuerzos por definir cada vez con mayor precisión los conceptos, por determinar con toda exactitud el campo de validez de los resultados, por no aceptar nociones y afirmaciones apoyadas solamente en la intuición geométrica o mecánica. En la demanda de solidez, belleza y elegancia, los más entusiastas promotores de estas nuevas ideas, van a engendrar ejemplos de funciones muy sofisticadas, que serán posteriormente apodadas *monstruos*.

Durante los años 1822-1825 Lejeune Dirichlet (1805-1859) visita París donde conoce a Fourier y su trabajo sobre el desarrollo de las funciones en series trigonométricas. Pero a Dirichlet no le satisface plenamente el rigor con que se analiza la convergencia de este tipo de series y se decide a suplir esta insuficiencia. De esta manera, surge el trabajo de Dirichlet, publicado en 1829, *Sobre la convergencia de series trigonométricas*. En este artículo, Dirichlet trabaja con funciones que satisfacen dos condiciones: son continuas en el intervalo $[-\pi, \pi]$, salvo posiblemente en un número finito de puntos y poseen a lo sumo un número finito de máximos y mínimos en dicho intervalo. Sin embargo, el único objetivo que tiene la hipótesis de continuidad sobre la función es garantizar la integrabilidad, en el sentido definido por Cauchy, de las funciones $f(x)\cos mx$ y $f(x)\sin mx$ que aparecen en las expresiones de los coeficientes de Fourier. Por esta razón, Dirichlet estaba convencido de que su resultado era válido para funciones más generales, sólo era necesario tener una definición de integral que fuera adecuada para funciones discontinuas. Incluso dejó constancia de su confianza en que la integral podía ser definida para funciones f con un conjunto infinito de puntos de discontinuidad que fuera *pequeño*. Con el objetivo de mostrar que no todas las funciones imaginables satisfacen esta condición presenta su famoso ejemplo de una función que toma un valor constante c en los puntos racionales de un intervalo y otro valor distinto d en los irracionales, señalando que esta función *no podría sustituirse* en la integral.

El doctorando de Gauss y alumno de Dirichlet, Bernhard Riemann (1826-1866), será quien desarrolle las ideas de su maestro y dé un paso decisivo en la clarificación del concepto función. En 1854, Riemann escribió la memoria *Sobre la posibilidad de representar una función por serie trigonométrica*. En la primera parte realiza un recuento histórico de la vieja polémica acerca de

la representación por serie trigonométrica de una función arbitraria. En la segunda parte de esta memoria Riemann precisa su objetivo que es someter "... la representación de una función por serie trigonométrica a un examen que abarca los casos que no han sido tratados hasta ahora".

Y para iniciar la aclaración "Ha sido necesario hacer preceder este estudio de una corta Nota sobre la noción de integral definida, y sobre el dominio en el que esta noción es aplicable".

Con la integral de Riemann, la Matemática entró en el mundo de las funciones discontinuas y en este encontró muchos hechos inusitados y asombrosos. La entrada a este mundo fascinante se mantuvo cerrada hasta tanto la memoria de Riemann no se publicó *post mortem* en 1867 en alemán y su traducción al francés en 1873.

Motivado por el trabajo de Riemann el francés Gastón Darboux (1842-1917) publica su *Memoire sur la théorie des fonctions discontinues*, todo un trabajo de más de 60 páginas dedicado a las funciones discontinuas, funciones a las cuales 30 años antes ningún matemático prestaba la menor atención. La memoria de Darboux desata un interés inusitado por las "funciones defectuosas"

La significación histórica del descubrimiento de que la continuidad en un intervalo no implica la diferenciabilidad en casi todos los puntos y de que las funciones pueden tener todo tipo de comportamiento anormal fue grandiosa. Los ejemplos de Riemann, Darboux y otros, fueron retomados, reanalizados, se generalizaron y se idearon otros. La nueva luz arrojada sobre las funciones discontinuas o continuas sin derivadas provocó que los matemáticos se dieran cuenta de que el estudio riguroso de las funciones no se limita a aquellas que se usan en el cálculo y las ramas tradicionales del análisis, donde el requerimiento de la diferenciabilidad restringe generalmente la clase de funciones tratadas.

Las funciones y las curvas con comportamiento extraordinario, poco a poco se fueron haciendo más ordinarias. Impactaban al intelecto modelado según cánones clásicos y estimulaban la generación de nuevas concepciones alrededor de los objetos asociados.

Pero no siempre existió unanimidad dentro de la comunidad matemática en la aceptación de estos nuevos entes. Sobre todo en Francia varias personalidades relevantes expresaron sus reservas a finales del siglo XIX. Citemos solo al catedrático de teoría del cálculo en la Sorbonne, el honorable Charles Hermite (1822-1901). Hermite en una carta fechada el 20 de mayo de 1893 expresa: *Me aparto con miedo y horror de esta lamentable plaga de funciones que no tienen derivadas.*

Abstracción teórico conjuntista del concepto función

Con el surgimiento de la teoría de conjuntos en la década de los 70 en el siglo XIX se abrió la posibilidad de expresar la relación funcional entre dos conjuntos abstractos no necesariamente numéricos.

El mismo George Cantor (1845-1918), creador de la teoría de conjuntos, no se vio precisado a dar una definición abstracta de función en sus primeras investigaciones de la década

del 70, ya que trabajaba en general con subconjuntos numéricos del espacio euclidiano y no es hasta su monografía de 1895-1897 sobre los conjuntos transfinitos cuando necesitó de una definición abstracta de función.

La definición de Cantor, junto a otras similares, fueron criticadas por los rigoristas lógicos porque en ellas aparecían dos nociones indefinidas *conjunto* o sistema y *aplicación* o representación.

En 1911 Giuseppe Peano en una nota *Sobre la definición de función* aparecida en las actas de la Academia Nacional de Ciencias italiana trata de eliminar esta dificultad con una nueva definición donde la única noción primitiva indefinida es la de conjunto.

Para llegar a la definición abstracta de función Peano define primero el *producto cartesiano* de conjuntos

$$X \times Y = \{(x, y) : x \in X, y \in Y\}$$

después el de *relación* como un subconjunto determinado del producto cartesiano $R \subset X \times Y$ y entonces el de *función* como una relación especial: si dos pares ordenados (x, y) y (x, z) con el mismo primer elemento están en la relación funcional f entonces necesariamente $y = z$.

Esta definición abstracta se repite en varios textos y en particular en los *Elementos de Matemática* que publica el grupo Bourbaki en 1939 y desde entonces ha sido legitimada:

Sean X y Y dos conjuntos, diferentes o no. Una relación entre una variable x de E y una variable y de F se dice relación funcional de E hacia F , si, cualquiera sea $x \in E$, existe un elemento y de F , y uno solo, que esté en la relación considerada con x .

Se da el nombre de función a la operación que asocia así a todo elemento de $x \in E$ el elemento $y \in F$ que se encuentra en la relación dada con x ; se dice que y es el valor de la función para el elemento x , y que la función esta determinada por la relación funcional considerada.

Generalizaciones del concepto función en el Análisis

Una de las primeras generalizaciones de la idea de función numérica es la *función de conjunto* que aparece principalmente en la teoría de medida de conjuntos de puntos, en la encrucijada de los siglos XIX y XX, por ejemplo, Peano en 1887 introduce la diferenciación de una función que toma valores numéricos, pero está definida en una familia de conjuntos. La obra de Peano es extendida por otros especialistas en teoría de funciones, aunque es precisamente Henri Lebesgue (1875-1941) en 1910 quién promueve un estudio sistemático de este tipo de funciones en su monografía *Sobre la integración de funciones discontinuas* aparecida en el *Anuario de la Escuela Normal Superior*.

Por otra parte, el análisis clásico no solo se transformó en teoría de funciones, sino que también dio lugar a otra rama que surgió en el siglo XX como necesidad, sobre todo, de la modelación matemática de los fenómenos explicados por la emergente *Mecánica Cuántica*. Después de la introducción de los espacios de dimensión arbitraria (no solo de tres dimensiones como modelo del espacio físico, sino también con n grados de libertad como en muchos problemas de la mecánica racional y hasta con infinitas componentes como en los espacios de la mecánica cuántica) aparecieron las *funcionales* definidas sobre estos espacios, aunque con valores numéricos.

Quizás una de las generalizaciones que más ha beneficiado el intercambio con las ramas de la física moderna es la *teoría de las distribuciones*. En cierta forma las *funciones generalizadas*, como también se les llama a estos entes matemáticos, respondieron a la necesidad de aceptar soluciones de ecuaciones diferenciales que no fueran "suaves", como las que en el siglo XVIII Euler consideraba, sin preocuparse en absoluto por el rigor lógico y ocupado en encontrar una modelación matemática plausible para el problema de la cuerda vibrante. Tales ideas, como suele suceder, estuvieron latentes en muchos físicos que las aplicaban por necesidad sin tener un fundamento matemático para hacerlo, como es el caso de Paul Dirac (1902-1984), el físico inglés que es considerado uno de los fundadores de la mecánica cuántica.

Fue el ruso Serguei Sobolev (1908-1989) en la década de los años 30, con sus estudios sobre las ecuaciones de onda (como la que dio origen a la polémica de la cuerda vibrante), quién sistematizó el estudio de las *funciones generalizadas* y abrió las oportunidades prácticas a la teoría. Sin embargo, la obra que resultó significativa en el mundo occidental fue la de Laurent Schwartz (1915-2002) quién precisó los conceptos y con su *estilo bourbakista* le dio la estructura y el sabor abstracto que la colocó dentro de la disciplina general del Análisis Funcional⁵.

Es interesante notar que ambos matemáticos, Sobolev y Schwartz, llegaron a las funciones generalizadas por vías totalmente diferentes, aunque, uno y otro, son herederos del estilo de pensamiento desarrollado a comienzos del s. XX.

Sobolev hizo su primera ponencia pública en el Segundo Congreso de los matemáticos soviéticos el 29 de junio de 1934 con la conferencia "*Soluciones generalizadas de la ecuación de ondas*". Citemos un fragmento ilustrativo de esta conferencia:

La clase de las funciones que se pueden considerar como soluciones de la ecuación de ondas desde el punto de vista clásico está formada de funciones dos veces diferenciables. Pero en diversas aplicaciones prácticas parece cómodo considerar unas funciones que tienen singularidades de un tipo bien definido. Se introduce un espacio de funciones integrables en el sentido de Lebesgue, en el cual se pueden definir las soluciones generalizadas de la ecuación de las ondas como límite de soluciones dos veces diferenciables. Con la ayuda de un criterio simple de integrabilidad, se da una condición necesaria y suficiente para que una función sea una solución generalizada, y se establece la relación entre las soluciones ordinarias y las soluciones generalizadas.

Por su parte, en 1946, Schwartz publicó su artículo sobre *La generalización de la noción de función* donde expone sin demostraciones el nuevo lenguaje de las distribuciones. Fue en su tratado en dos tomos, de 1950, sobre la *Teoría de las distribuciones* donde Schwartz introduce todos los elementos necesarios para estructurar esta teoría con las definiciones, teoremas y demostraciones completas que explican la generalidad de las distribuciones. En la amplia clase de las *distribuciones* quedan incluidas las medidas como funciones de conjunto, muchos de los funcionales lineales entre espacios de dimensión infinita y por supuesto, también las funciones *auténticas* del análisis clásico.⁶

⁵ Recomendamos la lectura de los artículos [Kantor, 2005] y [Youschkevitch, 2005] aparecidos en el *Boletín de los Matemáticos* franceses, dónde se aclara la discutida paternidad de las funciones generalizadas.

⁶ Una exposición bastante amplia de la historia del concepto función desde la antigüedad hasta nuestros días, puede encontrarse p.e. en [Sánchez y Valdés. 2007]

Conclusiones con una exhortación

Hemos visto cómo en el siglo XX se entrelazan dos vertientes en la consagración del concepto función. Una de las vías parte de la idea euleriana de función como expresión analítica y la otra vía, a través de la generalización y formalización del concepto función, desemboca en la *teoría de las distribuciones*. No debe sorprender a quien conoce la historia de la Matemática que estos conceptos en su expresión más amplia y abstracta alcanzaran una gran aplicación en la física moderna y otros campos de la ciencia.

Con nuestro paseo por la Historia y la Epistemología de la Teoría del Cálculo, en los tres siglos de la Edad Moderna Tardía: XVIII, XIX y XX, pretendimos estimular la reflexión sobre la manera en que los conceptos asociados fueron forjados y los obstáculos fueron vencidos en su perfeccionamiento. Consideramos que ahora, a través de un trabajo didáctico adaptativo, pudiera hacerse compatible con un curriculum moderno y, en última instancia, facilitar su cabal comprensión. Por supuesto, no es lo mismo adaptarlo para un curso de Educación Media Superior, que para la enseñanza universitaria y dentro de esta, para la formación de profesionales de la Matemática o de la Física o de las Ciencias Técnicas o de la Computación.

Además, por supuesto, se deben tomar en cuenta las directivas vigentes en cada país. Pero nos parece útil que en el nivel medio se enfatice sobre el concepto función en sus primeros estadios y se muestre su evolución en su interrelación con otras materias, siempre presentando la resolución de los problemas típicos de cada época, hasta el s. XIX, inclusive. Saltando los detalles, pero sin perder el rumbo y la coherencia del discurso.⁷

En una carrera de Matemática o Física los avances del s. XX, incluyendo las representaciones analíticas y las funciones generalizadas, pueden, en nuestra opinión, servir para una mejor comprensión no solo de la Teoría del Cálculo sino de muchas de las aplicaciones actuales.

Para las Ciencias de la Computación, no solo la representación analítica, también un mayor énfasis en los aspectos lógicos, teórico conjuntistas, podrán ayudar a convencer al alumno de las bondades del pensamiento matemático. Sin olvidar que los algoritmos de aproximación juegan un papel singular en la asimilación de los conceptos de la Teoría del Cálculo.

Estas son algunas simples sugerencias, cada docente, según los objetivos concretos de su práctica profesional, debe seleccionar el asunto conveniente y adaptarlo.

Referencias y bibliografía

- Bressoud, D. M., Ghedanisi, I., Martinez-Luaces, V., Torner, G. (2016) Teaching and Learning of Calculus. ICMI 13. Topical Surveys. Springer Nature. Switzerland.
Euler, L. (2001) Introducción al análisis de los infinitos. Edición con notas de Antonio Durán. Sociedad Andaluza de Educación Matemática. THALES. Sevilla.
Jahnke, H. N. (Ed) (2003) A History of Analysis. American Math. Soc. New York.

⁷ El resumen del ICME 13 de las discusiones sobre la Temática del Cálculo editado por [Bressoud, Ghedanisi, Martinez-Luaces y Torner, 2016] y el artículo [Michelsen, 2006] pueden ayudar a la toma de decisiones. Una visión más reciente se encuentra en el artículo [McLarty, 2023]

- Kantor, J-M. (2005) *Mathématiques d'Est en Ouest. Théorie et pratique: l'exemple des distributions*. Bulletin des Mathématiciens, pp. 33-43.
- McLarty, C. (2023) *Current and Classical Notions of Function*. In Chemla, K. et al. *The Richness of the History of Mathematics*. Springer Verlag. N. Y.
- Michelsen, C. (2006) *Functions: a modelling tool in mathematics and science*. ZDM. Vol. 38 (3) 269-280
- Pier, J. P. (2001) *Mathematical Analysis during the 20th. century*. Oxford Univ. Press.
- Sánchez Fernández, C. (2023) *Prácticas Matemáticas en la Edad Moderna*. Editorial Universitaria “Félix Varela” La Habana.
- Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C. (2007). *Un Paseo por la Historia de las Funciones*. Editorial Nivola. Madrid.
- Sánchez Fernández, C. y Valdés Castro, C. (2004). *De los Bernoulli a los Bourbaki. Una historia del arte y la ciencia del cálculo*. Editorial Nivola. Madrid.
- Tao, T. (2016) *Analysis I y II*. New Delhi. Hindustan Books Agency
- Youschkevitch, A. P. (2005) *Quelques remarques sur l'histoire de la théorie des solutions généralisées d'équations aux dérivées partielles et des fonctions généralisées*. (Traducción de J-M. Kantor del artículo aparecido en 1991 en la revista rusa *Istoriko-matematicheskoe issledovanie*) Bulletin des Mathématiciens, pp. 44-50



La historia de las prácticas de enseñanza como recurso para movilizar la agencia crítica en maestros de Matemáticas

Gilberto **Obando-Zapata**

Facultad de Educación, Universidad de Antioquia

Colombia

gilberto.obando@udea.edu.co

Resumen

Una de las críticas más fuertes al sistema educativo actual es la falta de capacidad para transformar las prácticas educativas de tal forma que puedan responder a las nuevas exigencias de la sociedad actual. Así, en línea con los fundamentos del Laboratorio del Cambio, y a partir de una perspectiva de la Teoría de Actividad, analizamos la constitución de las prácticas de enseñanza de las Matemáticas como un proceso histórico-cultural. Con esto buscamos la transformación de las prácticas de enseñanza de las Matemáticas, tanto personales como institucionales, a través de generar disposición de agencia en los profesores al analizar la historia de las prácticas de las Matemáticas en Colombia desde el nacimiento de la república (1820). Esta propuesta formativa permitió a los profesores reflexionar sobre el propósito de sus prácticas, comparar pasado - presente, identificar contradicciones en sus sistemas de práctica y asumir un posicionamiento crítico y transformador

Palabras clave: Historia de la Educación Matemática; Teoría de la Actividad; Formación de Profesores; Enseñanza de las Matemáticas.

Introducción

En un mundo globalizado como el actual, en el que vivimos transformaciones aceleradas, incertidumbre sobre el desarrollo futuro y desafíos de diversa índole (ambientales, tecnológicos, sociales y políticos), la escuela enfrenta una crisis sin precedentes que exige cambios inmediatos en tanto se le critica su capacidad para responder a las demandas actuales de la sociedad (Amadio et al, 2014). Diversos autores (Tedesco et al., 2013; Yates y Grumet, 2011) señalan que la educación debe formar ciudadanos activos, críticos y capaces de desenvolverse en sociedades altamente digitalizadas. Sin embargo, el currículo escolar y las prácticas docentes suelen

conservar estructuras tradicionales, muchas de ellas heredadas de siglos anteriores, que dificultan la conexión con la vida y los intereses de los estudiantes.

En el caso de la Educación Matemática, Chevallard (2013) critica que el currículo se mantenga centrado en contenidos académicos alejados de situaciones reales, limitando la participación crítica de los estudiantes. Esto plantea la necesidad de que los maestros cuestionen no solo cómo enseñar, sino qué enseñar. Sin embargo, transformar el currículo es un proceso complejo que implica consensos amplios y enfrenta resistencias institucionales y culturales (Beltrán, 1994).

En un intento por responder al anterior cuestionamiento, adelantamos un estudio en el que el análisis histórico de las prácticas de enseñanza se constituyó en detonante para movilizar la agencia del profesor, entendida ésta como la capacidad de actuar de forma intencional con el fin de transformar la práctica. Se recurre a la Historia de la Educación Matemática (HEM) como recurso para problematizar el presente, desnaturalizar las prácticas pedagógicas normalizadas, y proyectar cambios significativos en las prácticas de enseñanza institucionales.

Para lograr lo anterior nos apoyamos en el marco amplio de la Teoría Histórico Cultural de la Actividad (CHAT, por sus siglas en inglés), para entender la actividad matemática en los contextos escolares, y en una aproximación epistemológica basada en la Filosofía de las Prácticas Matemáticas, con el fin de problematizar las prácticas de enseñanza normalizadas en las instituciones educativas. A continuación, se discuten en detalle los elementos teóricos y metodológicos del trabajo realizado. El artículo cierra mostrando algunos resultados y algunos desafíos futuros.

Actividad matemática, historia de la Educación Matemática, historia de las Matemáticas

En los últimos años, con el desarrollo de la Educación Matemática se ha consolidado un campo denominado Historia de la Educación Matemática (Oliveira, 2017, 2020; Valente, 2007, 2010, 2013) o historia y pedagogía de las Matemáticas, el cual comparte enfoques teóricos y metodológicos con la Historia de las Matemáticas (HM), pero que, a diferencia de la segunda, problematiza no solo los procesos de constitución y difusión del conocimiento matemático, sino también, la constitución y diseminación de un saber matemático que debe ser enseñado (Schubring, 1987, 2006). No es de interés en este momento entrar en el debate de las similitudes o las diferencias entre la HEM y la HM, o si una incluye a la otra, o la antecede, o si una constituye los marcos teóricos y la otra el contexto de aplicación de la teoría. Basta solo decir, con la filosofía de las prácticas matemáticas, que teoría y práctica no pueden separarse, sino que son los dos polos de un mismo concepto: Toda teoría es una forma de hacer en, y de pensar, el mundo; y toda práctica tiene un soporte teórico sobre la que se funda. En todo caso, no importa si hablamos a partir de la Historia de las Matemáticas, o de la Historia de la Educación Matemática (en adelante, HM- HEM), las investigaciones en el campo muestran su potencial para fortalecer los procesos de enseñanza en la educación (desde la educación primaria hasta la universitaria), en particular, en la formación de maestros, tanto a nivel inicial, como en ejercicio.

Este potencial, entre otras cosas, radica en la capacidad de la HM-HEM para desafiar y deconstruir la visión tradicional, a menudo implícita en la enseñanza, de que las Matemáticas son

un cuerpo de conocimiento estático, abstracto, infalible y completamente separado de la experiencia humana. Así entonces La Historia de las Matemáticas y la Historia de la Educación Matemática nos proponen una visión del conocimiento matemático como un sistema dinámico, culturalmente formado, y el aprendizaje, como un encuentro crítico con ese conocimiento. Interactuar con el pasado nos permite forjar una "posición crítica" que transforma tanto la comprensión de las Matemáticas como su propia identidad cultural e histórica.

Actividad matemática

Ante la pregunta qué son las Matemáticas (o qué es la Matemática) seguramente se pueden dar multitud de respuestas dependiendo de la postura filosófica desde la cual se analice. Nuestra aproximación a esta pregunta viene desde punto de vista centrado en la Filosofía de las Práctica Matemática, y una Teoría Histórico Cultural de la Actividad (CHAT). La primera permite dar un sentido a las Matemáticas como aquello que hacen las personas, cuando hacen Matemáticas (Stedall, 2017). Esto implica entender que las Matemáticas son más que un cuerpo rígido de conocimientos, en tanto que implica la actividad de los sujetos, es decir se trata de una práctica pensada y aprendida por agentes humanos (Ferreiros, 2016, 2023), y que, por ende, además del conocimiento (objetos y conceptos), implica los instrumentos, los procedimientos y las cosmovisiones (Obando 2015). Por su parte, la CHAT permite entender que sujetos y cultura se constituyen mutuamente en una dialéctica movilizadora a partir de nuestra actividad en el marco de sistemas de prácticas específicas (Obando 2014, 2015). Así entonces, el hombre transforma el mundo a través de su actividad, pero a su vez, ese mundo transformado cambia al hombre que lo habita. De esta manera los instrumentos que median la actividad del hombre también median el desarrollo del sujeto mismo. Los instrumentos de la actividad humana no son solo extensiones del hombre en el curso de su actividad, sino que también median en la constitución de su subjetividad.

Lo anterior permite proponer una manera de entender la actividad matemática de los sujetos como sistemas de prácticas situadas histórica y culturalmente (cosmovisiones de épocas y lugares), mediadas instrumentalmente (instrumentos físicos y simbólicos con los que se configuran los procedimientos), soportadas por ciertas formas de discursividad características (cuerpos teóricos, no necesariamente formalizados) y orientadas a un fin (tratamiento de la cantidad y la forma). De esta manera se comprende el desarrollo de las Matemáticas a partir de la vida de las personas y su labor en una época y lugar, condicionada por el devenir histórico que constituyeron el presente, pero que, a su vez, determinan un futuro posible (Stedall, 2017). No es posible entender el desarrollo de las Matemáticas acudiendo solo a las condiciones internas propias de la disciplina. Se debe incluir en el análisis las condiciones histórico-culturales en las que se despliega la actividad de los sujetos que hacen las Matemáticas.

People's development, use, displays, teaching, etc. of mathematics arise in particular times and places in various concrete contexts, scientific as well as non-scientific, and their dissemination of mathematical ideas, methods, and knowledge depend on among others a common language and a shared culture. (Kjeldsen, 2019)

Filosofía de las prácticas matemáticas

Me posicionaré desde una postura dialógica sobre la subjetividad, es decir, nos hacemos sujetos porque participamos de la vida social, porque reconocemos a otros yo, porque a partir de

nuestra participación en prácticas socioculturales específicas, la cultura dispone nuestra acción en cierta dirección (condiciona nuestro devenir como sujetos en el mundo), pero a su vez, a través de la manera como cada uno vive, “experiencia” su participación con otros en tales prácticas – construcción cognitiva, emocional y volitiva, se posiciona frente a los condicionamientos culturales – subjetividad. Somos sujetos, en tanto reconocemos a otros sujetos, y en tanto constituimos nuestra subjetividad en la acción conjunta con los otros. En este marco, las Matemáticas, la actividad matemática, no es solo de privilegiados, de héroes, de civilizaciones superiores (Stedall, 2017). Como toda ciencia o disciplina, tenemos que entenderla como una construcción histórico-cultural, es decir, no como productos fuera de nuestro alcance, sino como construcciones culturales en épocas y lugares específicas, que tomaron ciertos rumbos por las condiciones (¿necesidades?) sociales y culturales del momento (los problemas, las políticas, las cosmovisiones, etc.), por el conjunto de instrumentos que la cultura entrega a los sujetos (una teoría es un instrumento cultural), y claro por las decisiones que los/as practicantes del momento (no solo de quienes hacen Matemáticas; también, y sobre todo, ¿gobernantes?). Claro, ciertas épocas, ciertos lugares, cuentan con alguien que logra lo que otros no: transformar las prácticas sociales.

Es así como promovemos una imagen de la Matemática como una actividad humana, resultado de la creatividad, el ingenio, el esfuerzo colectivo y la respuesta a problemas y necesidades concretas surgidas en diversos contextos socioculturales a lo largo del tiempo. También mostramos que el desarrollo de las Matemáticas no es un proceso lineal, sujeto únicamente a las condiciones lógicas internas de la disciplina, sino que este se ha dado a través de avances, pero también de estancamientos, retrocesos, errores fructíferos y rupturas epistemológicas. Conceptos que hoy parecen evidentes, como el cero, los números negativos o el cálculo infinitesimal, tuvieron un desarrollo histórico complejo y a menudo controvertido. Algo similar se puede afirmar que nociones como la verdad matemática, la evidencia o el rigor de la demostración no son absolutas, sino históricamente relativas y sujetas a evolución (Chaves, 2008).

Sentidos para la HM o la HEM en la formación de maestros

En la literatura especializada se ha documentado ampliamente los aportes que la HM-HEM puede hacer a la formación de los docentes de Matemáticas (Klark et al., 2018; De Godoi et al., 2020; Fernandes et al., 2019; Furinghetti, 2019; Karp & Furinghetti, 2016; Jankvist & Kjeldsen, 2019; Jankvist, Clark & Mosvold, 2015; Jankvist et al., 2019). Entre estos aportes se pueden destacar.

- *Profundizar en el conocimiento matemático y epistemológico del docente.* La HM-HEM permite a los docentes comprender el desarrollo de los conceptos, apreciar la disciplina como un proceso humano y creativo, y aumentar la motivación tanto propia como de los estudiantes (Panaoura, 2024; Tahirov & Aghazade, 2024; Lee & Chang, 2024). Les permite entender por qué surgió un concepto, qué problemas buscaba resolver, cómo cambió su significado y representación a lo largo del tiempo, y cuáles fueron las dificultades inherentes a su desarrollo y aceptación (Hernández, Ríos y Hernández, 2004). Así, la HM-HEM es una herramienta para la reflexión epistemológica (Chaves, 2008), y desarrollar metaconciencia sobre la naturaleza del saber que enseña (Guacaneme, 2011), facilitando la conexión entre la Matemática y su contexto cultural, y promoviendo una

visión más humana y dinámica de la disciplina (Mendes, 2020; Costa et al., 2021; Pereira et al., 2020).

- *Desarrollo de competencias pedagógicas y didácticas.* El trabajo con la HM-HEM fomenta en los futuros docentes la reflexión sobre la propia práctica (Jiménez, et al., 2015). Igualmente, el conocimiento histórico permite a los docentes explicar el “porqué” y el “cómo” de los conceptos matemáticos, facilitando la identificación de dificultades de aprendizaje y la adopción de enfoques didácticos más efectivos (Panaoura, 2024; Tahirov & Aghazade, 2024; Lee & Chang, 2024). También contribuye a la valoración de su propia profesión al comprender su desarrollo histórico y sus desafíos (Guacaneme, 2011), y reflexionar sobre valores, ética y el papel social de la Matemática, además de fomentar la formación moral y ciudadana en el aula (Pavlova et al., 2021).
- *Discutir creencias y errores conceptuales:* El uso de fuentes históricas permite diagnosticar y abordar concepciones erróneas persistentes en los profesores, mejorando su conocimiento disciplinar (Papadopoulos, 2024; Girit-Yildiz & Ulusoy, 2023). También pueden reducir barreras filosóficas y metodológicas, y ofrecer estrategias para abordar dificultades en la enseñanza y el aprendizaje (Bütüner, 2020; Pereira et al., 2020).
- *Reflexión sobre la práctica docente:* El análisis histórico de problemas matemáticos y de materiales didácticos permite a los profesores cuestionar y desnaturalizar sus prácticas cotidianas, facilitando la comprensión de los cambios y continuidades en la enseñanza a lo largo del tiempo (De Souza et al., 2019; Mendes, 2020). También permite a los maestros analizar las representaciones de las aulas a lo largo de la historia y reflexionar críticamente sobre las permanencias y transformaciones en su propio entorno escolar.

La integración de la HEM impacta de manera integral al maestro. En primer lugar, le permite replantear su didáctica al resignificar los contenidos que enseña facilitando una comprensión conceptual centrada en el significado y la evolución de las ideas. En segundo lugar, contribuye a construir una identidad profesional más crítica y empática, en la que el docente se reconoce como un sujeto histórico, consciente del carácter histórico y cultural de las Matemáticas y más sensible a las dificultades de sus estudiantes. Finalmente, le otorga una comprensión de la naturaleza de las Matemáticas como construcción histórica, formando en el maestro una perspectiva crítica para analizar tanto los aspectos conceptuales como las culturas escolares en las que se desenvuelve a través de una práctica educativa reflexiva, liberadora y conectada con la esencia humana del saber matemático.

Historicidad de las prácticas de enseñanza y movilización de la agencia

La Teoría de la Actividad Histórico-Cultural (CHAT), con orígenes en los trabajos de Vygotsky (1993) y desarrollado por Leontiev (1978) y Engeström (1987, 2001) es un marco teórico que se centra en comprender la acción humana como un fenómeno colectivo, mediado por instrumentos y situado en contextos culturales e históricos (poner referencias). La CHAT considera el desarrollo humano como un proceso dialéctico en el que los sujetos transforman el mundo y, a su vez, son transformados por él (Vygotsky, 1993; Engeström, 1987, Stetsenko, 2013, 2019). Los contextos de aplicación de esta teoría van más allá de la psicología llegando a ser un instrumento analítico adaptable y aplicable en diversas disciplinas, incluyendo el desarrollo urbano, la aplicación de la ley y, de manera prominente, la investigación educativa (Bata et al., 2022; Clifford, 2022; Nussbaumer, 2012; Foot, 2014; Postholm, 2024).

Un concepto central de la CHAT es el de *sistema de actividad*, un modelo que visualiza la interacción entre un sujeto (el individuo o grupo), un objeto (el motivo de la actividad), y los instrumentos mediadores (herramientas y signos). Este núcleo se enriquece con elementos contextuales como la comunidad, las reglas y la división del trabajo, que en conjunto regulan la actividad. Estos elementos están en una relación dinámica y dialéctica; un cambio en un elemento afecta a todo el sistema. El sistema de actividad no es una entidad estática, sino que está en constante cambio y desarrollo debido a las acciones humanas y al juego de contradicciones internas (Postholm, 2015).

De acuerdo con lo anterior, las prácticas de enseñanza se consideran manifestaciones concretas de actividades históricas y culturales, organizadas en sistemas de actividad que articulan saberes, labores y sujetos. Estos sistemas se reproducen y transforman con el tiempo, influyendo en la constitución de la subjetividad docente.

Contradicciones como Motor del Cambio

En la CHAT, las contradicciones no son vistas como errores o problemas que deber ser "solucionados", sino como tensiones estructurales inherentes a los sistemas de actividad que actúan como la principal fuente de cambio y desarrollo (Foot, 2014; Engeström & Sannino, 2010, Engeström & Sannino, 2021). No son simplemente conflictos interpersonales, sino que están arraigadas en la estructura histórica de la actividad (Mellroth et al., 2021). Identificar y trabajar sobre estas contradicciones puede conducir a transformaciones significativas y al aprendizaje expansivo.

Se distinguen cuatro niveles de contradicciones (Postholm, 2015; Foot, 2014):

1. *Contradicción Primaria*: Tensión inherente dentro de un solo nodo del sistema de actividad (p. ej., la dualidad de los estudiantes como objetos de instrucción y como individuos con voluntad propia en un aula) (Beatty & Feldman, 2016).
2. *Contradicción Secundaria*: Tensión que surge entre dos elementos del sistema de actividad (p. ej., entre una nueva herramienta tecnológica y las reglas curriculares existentes).
3. *Contradicción Terciaria*: Tensión entre la forma establecida de una actividad y una nueva forma o idea que se introduce (p. ej., un docente experimentado se enfrenta a un nuevo modelo pedagógico).
4. *Contradicción Cuaternaria*: Tensión que surge entre el sistema de actividad central y otros sistemas de actividad vecinos (p. ej., entre una escuela y las políticas del distrito escolar, o entre la universidad y la escuela en una asociación de formación docente).

El Ciclo de Aprendizaje Expansivo y movilización de agencia

Para conceptualizar cómo los sistemas de actividad resuelven sus contradicciones y generan movimiento hacia nuevas formas de práctica, Engeström (2001, 2007) desarrolló el modelo del Ciclo de Aprendizaje Expansivo. Este modelo describe un proceso colectivo de creación de conocimiento donde los participantes "aprenden algo que aún no está allí" (Engeström & Sannino, 2010, p. 2). El ciclo es una secuencia idealizada de acciones epistémicas que conduce a una transformación cualitativa de la actividad. El ciclo consta de siete acciones, las cuales no deben entenderse como un proceso lineal, sino iterativo (Augustsson, 2021; Foot, 2014; Engeström, 2001):

1. *Cuestionamiento*: Criticar la práctica existente.
2. *Análisis*: Analizar la constitución histórica de las prácticas y contrastarlas en su estado actual para encontrar las causas de las contradicciones.
3. *Modelado*: Diseñar un nuevo modelo o "idea germinal" para una nueva forma de actividad que pueda resolver las contradicciones.
4. *Examen del modelo*: Poner a prueba el nuevo modelo, explorando su funcionamiento, potencial y limitaciones.
5. *Implementación del modelo*: Aplicar el nuevo modelo en la práctica, enriqueciéndolo y extendiéndolo.
6. *Reflexión*: Evaluar y reflexionar sobre el proceso de implementación.
7. *Consolidación*: Estabilizar y generalizar la nueva forma de práctica.

Esta estructura es la base metodológica para las intervenciones formativas que se desarrollan en lo que Engeström ha denominado los Laboratorios de Cambio (CL). Un CL busca facilitar el aprendizaje expansivo en las organizaciones (Engeström et al., 2010, 2021; Virkkunen, 2013; Postholm, 2015) al desencadenar un proceso en el que los investigadores y los profesionales trabajan juntos en una serie de sesiones para analizar la práctica actual e identificar problemas en las prácticas institucionalizadas; rastrear las raíces históricas de estos problemas e identificar las contradicciones sistémicas subyacentes (primeras tres etapas del ciclo del aprendizaje expansivo); co-diseñar y experimentar con un nuevo modelo de actividad; e implementar y consolidar la nueva práctica (últimas cuatro etapas del modelo). El CL se ha utilizado con éxito en la formación docente para abordar problemas complejos de colaboración interinstitucional. (Tobin, 2023; Postholm, 2024). En estos contextos, el CL funciona como un "tercer espacio" donde los participantes de diferentes sistemas de actividad pueden cruzar fronteras, negociar sus múltiples voces y construir conjuntamente un nuevo objeto para su actividad colaborativa.

El ciclo del Aprendizaje Expansivo movilizado en el proceso del CL está estrechamente relacionado con el concepto de agencia transformadora (Stetsenko, 2013, 2019; Haapasaari et al., 2016, Engeström y Sannino, 2020). Así, se concibe la agencia como un proceso en el que una persona reflexiona sobre su lugar como sujeto en relación con el sistema en el que se encuentra. Esta reflexión implica un equilibrio entre las disposiciones del sistema y el posicionamiento de sí mismo en virtud de las contradicciones con otros elementos del sistema (Obando, 2015). Como resultado, el sujeto adopta una posición que está en constante cambio. Este proceso reflexivo, permite criticar su yo actual y toma como punto de partida su propia inconformidad respecto a su situación presente y hace posible un trayecto de transformación (Stetsenko, 2019). Sin embargo, cuando la agencia se enfoca en la reproducción de ciertas prácticas, o en algunos casos, el perfeccionamiento del individuo en su trabajo en pro de una eficacia que estaría impulsando la preservación del statu quo, esta toma la forma de resistencia al cambio y no como agencia transformadora (Stetsenko, 2013; 2019; Engeström, Sannino & Virkkunen, 2014).

La agencia transformadora reconoce al sujeto como participante pleno en la producción material de sus vidas con otros y no solo como espectadores de un mundo que ya existe (Stetsenko, 2013), le da un lugar claro como agente de su propia subjetividad y del mundo co-constituido. El sujeto no solo reacciona a los estímulos recibidos del mundo, sino que interactúa activamente en él y con él (Coral-Villota & Obando-Zapata, 2023). Así, el ser humano es co-

creador activo del mundo, poseedor de una agencia inalienable que constituye la base de la vida humana, que siempre está en desarrollo a través de la interacción con otros y la apropiación de instrumentos culturales contruidos colectivamente para el saber-ser-hacer del agente (Stetsenko, 2019).

Consideraciones metodológicas

El estudio se desarrolló con 40 docentes de básica primaria de 12 instituciones educativas de Medellín, quienes participaron en dos diplomados en 2022 y 2023. La intervención se basó en las dos primeras etapas del ciclo de aprendizaje expansivo del Laboratorio del Cambio: (1) cuestionamiento y (2) análisis histórico. Se utilizaron como insumos manuales escolares de los siglos XIX y XX, incluyendo la 'Cartilla lacónica de las cuatro reglas de aritmética práctica' (Torres, 1797; Marín-Ríos y Obando-Zapata, 2022), el 'Manual de enseñanza mutua' (Triana, 1845), la cartilla Problemas de Aritmética para los Niños por (Carrasquilla, 1859), y el programa curricular de Matemáticas del MEN (1984).

Se realizaron talleres iniciales para explorar la historicidad de las prácticas docentes, comparar permanencias y cambios, y plantear visiones a futuro. La información se reunió mediante bitácoras, producciones colectivas y entrevistas a ocho docentes con una participación activa en el proceso. El análisis se realizó siguiendo el enfoque temático latente (Braun y Clarke, 2006), identificando temas relacionados con el cuestionamiento, la identificación de contradicciones y la disposición hacia la agencia transformadora.

Resultados y análisis

Los resultados muestran que iniciar con el análisis histórico permitió a los maestros reconocer prácticas normalizadas como la clase magistral, la organización del aula en filas o el uso del tablero, y rastrear su origen en contextos sociales y políticos específicos. Esto generó emociones como asombro, al descubrir continuidades de más de 200 años, y perturbación, al cuestionar la pertinencia de dichas prácticas en la actualidad.

La comparación entre pasado y presente reveló contradicciones entre los fines educativos originales y las necesidades actuales. Por ejemplo, prácticas diseñadas para contextos con alta tasa de analfabetismo y escasez de recursos se mantienen en entornos tecnológicamente avanzados, donde las demandas formativas son distintas. Los docentes también identificaron tensiones entre la autonomía metodológica promovida por la legislación y la resistencia interna a modificar sus rutinas.

En cuanto a la agencia transformadora, algunos docentes propusieron ajustes metodológicos como integrar tecnologías digitales y fomentar el trabajo colaborativo; otros plantearon cambios más profundos, como rediseñar el currículo para articular áreas y centrarse en competencias. Se observaron casos de compromiso individual explícito con la transformación, reconociendo la responsabilidad personal en el cambio.

Conclusiones

El estudio confirma que el análisis histórico de las prácticas de enseñanza es un recurso potente para promover la agencia docente. Recuperar el sentido original de las prácticas permite

comprender su lógica, identificar permanencias y cambios, y reconocer contradicciones que motivan la transformación. La HEM, empleada como herramienta formativa, facilita que los maestros cuestionen rutinas, proyecten alternativas y se posicionen como agentes de cambio en sus instituciones.

Se recomienda profundizar en experiencias que integren el análisis histórico con la co-construcción de propuestas pedagógicas, de modo que la reflexión se traduzca en cambios sostenibles en la práctica y en el currículo.

Agradecimiento

Al Sistema General de Regalías por la financiación del Proyecto Diseño de estrategias para la gestión de conocimiento territorial en la contextualización y flexibilización curricular de Educación Básica Primaria y Secundaria en Instituciones Educativas Públicas de las subregiones de Magdalena Medio, Bajo Cauca, Nordeste y Urabá del Departamento de Antioquia, correspondiente al código BPIN 2021000100311.

Referencias

- Amadio, M., Opertti, R. y Tedesco J. C. (2014). Un currículo para el siglo XXI: Desafíos, tensiones y cuestiones abiertas. *Investigación y Prospectives en Educación*. UNESCO, París.
- Augustsson, D. (2021). Expansive learning in a change laboratory intervention for teachers. *Journal of Educational Change*, 22(4), 475-499.
- Bata, P., Alistair, N., & David, A. (2022). Activity theory as a tool for understanding complexities in extended organizations. *Science Journal of Business and Management*. 10(1), 47-54.
<https://doi.org/10.11648/j.sjbm.20221001.17>
- Beatty, I. D., & Feldman, A. (2016). Viewing teacher transformation through the lens of cultural-historical activity theory (CHAT). *Cultural Studies of Science Education*, 11, 751-777.
- Beltrán, F. (1994). Las determinaciones y el cambio del currículo. En J. F. Angulo y N blanco. (Coords.), *Teoría y desarrollo del currículo* (pp. 369-383). Málaga: Aljibe.
- Braun, V., & Clarke, V. (2006). Using thematic analysis in psychology. *Qualitative Research in Psychology*, 3(2), 77-101. <https://doi.org/10.1191/1478088706qp063oa>
- Bütüner, S. (2020). An evaluation of activities based on the use of the history of mathematics as a tool. *Journal of Pedagogical Research*. 4(2), 139-164. <https://doi.org/10.33902/jpr.2020062216>
- Carrasquilla, R. (1859). *Problemas de aritmética para los niños*. Bogotá: Imprenta de J. Uldarico Leiva.
- Chaves, E., (2008). El seminario “Historia de la Matemática” y su papel en la formación de docentes. *Uniciencia*, 22(1-2), 11-18.
- Chevallard, Y. (2013). Enseñar matemáticas en la sociedad de mañana: alegato a favor de un contraparádigma emergente. *Journal of Research in Mathematics Education*, 2(2), 161-182.
<https://doi.org/10.4471/redimat.2013.26>.
- Clark, K. M., Kjeldsen, T. H., Schorcht, S., & Tzanakis, C. (Eds.). (2018). *Mathematics, Education and History: Towards a Harmonious Partnership*. ICME-13 Monographs. doi:10.1007/978-3-319-73924-3
- Clifford, S. (2022). The use and value of cultural historical activity theory in institutional educational technology policy. *Studies in Technology Enhanced Learning*, 3(1). <https://doi.org/10.21428/8c225f6e.06989392>
- Coral-Villota, L. y Obando-Zapata, G. (2023). Prácticas de Enseñanza en Maestros de la Educación Básica Primaria en Colombia: Cambios y permanencias. *Cuadernos pedagógicos*. 25(36).
- Costa, C., Menezes, L., Ribeiro, A., Pinto, H., Martins, A., Clain, T., Gomes, H., & Aires, A. (2021). Perspectives of Future Teachers of Early years from two Portuguese Institutions on The History of mathematics. *ICERI2021 Proceedings*. <https://doi.org/10.21125/iceri.2021.1879>
- De Godoi, A., Da Costa, J. & Stein, J. (2020). História da educação matemática como uma perspectiva de insubordinação criativa na formação de professores. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 10(1), 29-43.

- De Souza, A., Bertini, L., & De Rezende, A. (2019). Problems and the history of mathematics education: A proposal for the continued teacher training. *Acta Scientiae*.
<https://doi.org/10.17648/ACTA.SCIENTIAE.V21ISSEID5241>
- Engeström, Y. & Sannino, A. (2021). From mediated actions to heterogenous coalitions: four generations of activity-theoretical studies of work and learning. *Mind, Culture, and Activity*, 28(1), 4-23.
<https://doi.org/10.1080/10749039.2020.1806328>
- Engeström, Y. (1987). *Learning by expanding: An activity-theoretical approach to developmental research*. Orienta-Konsultit Oy.
- Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity-theoretical reconceptualization. *Journal of Education and Work*, 14(1), 133-156.
- Engeström, Y. (2007). Putting Vygotsky to work. The Change Laboratory as an Application of Double Stimulation. En H. Daniels, M. Cole & J. Wertsch. (Eds.), *The Cambridge companion to Vygotsky* (pp. 363-382). Cambridge University Press.
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2010). Studies of expansive learning: foundations, findings and future challenges. *Educational Research Review*, 5(1), 1-24.
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2020). From mediated actions to heterogenous coalitions: four generations of activity-theoretical studies of work and learning. *Mind, Culture, and Activity*, 28, 4 - 23.
<https://doi.org/10.1080/10749039.2020.1806328>
- Engeström, Y., & Sannino, A. (2021). From mediated actions to heterogenous coalitions: four generations of activity-theoretical studies of work and learning. *Mind, Culture, and Activity*.
- Engeström, Y., Sannino, A., & Virkkunen, J. (2014). On the methodological demands of formative interventions. *Mind, Culture, and Activity*, 21(2), 118-128. <https://doi.org/10.1080/10749039.2014.891868>
- Fernandes, A., de Fatima, L. & Silva, A. (2019). Problemas e a história da educação matemática: uma possibilidade para a formação continuada de professores. *Acta Scientiae*, 21, 137-148.
<https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21issEid5241>
- Ferreirós, J. (2016). *Mathematical Knowledge and the Interplay of Practices*. Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Ferreirós, J. (2023). What are mathematical practices? the web-of-practices approach. B. Sriraman (ed.) *Handbook of the history and philosophy of mathematical practice*, https://doi.org/10.1007/978-3-030-19071-2_47-1
- Foot, K. A. (2014). Cultural-historical activity theory: exploring a theory to inform practice and research. *Journal of Human Behavior in the Social Environment*, 24(3), 329-347.
- Furinghetti, F. (2019). Rethinking history and epistemology in mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 51, 967 - 994.
<https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1565454>
- Girit-Yildiz, D., & Ulusoy, F. (2023). Investigating how prospective mathematics teachers prepare history integrated lesson plans with assessing historical elements in mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 307-331. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10375-w>
- Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. En XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife, Brasil.
- Haapasaari, A., Engeström, Y., & Kerosuo, H. (2016). The emergence of learners' transformative agency in a Change Laboratory intervention. *Journal of education and work*, 29(2), 232-262.
<https://doi.org/10.1080/13639080.2014.900168>
- Hernández, V.; Ríos, M^a C. y Hernández, R. M^a. (2004). Historia y educación matemática. *Formación del Profesorado e investigación en Educación Matemática*. (6), 189-216.
- Jankvist, U. T., & Kjeldsen, T. H. (2010). New avenues for History in Mathematics Education: Mathematical competencies and anchoring. *Science & Education*, 20, 831-862. doi:10.1007/s11191-010-9315-2
- Jankvist, U., Clark, K., & Mosvold, R. (2019). Developing mathematical knowledge for teaching teachers: potentials of history of mathematics in teacher educator training. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 23, 311 - 332. <https://doi.org/10.1007/s10857-018-09424-x>
- Jankvist, U., Mosvold, R., Fauskanger, J., & Jakobsen, A. (2015). Analysing the use of history of mathematics through MKT. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 46, 495 - 507. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.990528>
- Jiménez, A., Limas, L. y Alarcón, J. (2015). Prácticas Pedagógicas matemáticas de profesores de una institución educativa de enseñanza básica y media. *Praxis y Saberes*. 7 (13), 127-152.
- Karp, A. y Furinghetti, F. (2016) *History of Mathematics Teaching and Learning*, ICME-13 Topical Surveys, DOI 10.1007/978-3-319-31616-1_1

- Kjeldsen, T. H. (2019). A multiple perspective approach to history of mathematics: mathematical programming and Rashevsky's early development of mathematical biology in the twentieth century. In G. Schubring (ed.), *Interfaces between Mathematical Practices and Mathematical Education*, International Studies in the History of Mathematics and its Teaching, https://doi.org/10.1007/978-3-030-01617-3_6
- Lee, S., & Chang, H. (2024). An analysis of practical studies on the use of the history of mathematics in mathematics classes: a systematic review. The Korean Society of Educational Studies in Mathematics - School Mathematics. <https://doi.org/10.57090/sm.2024.12.26.4.519>
- Leontiev, A. N. (1978). *Activity, consciousness, and personality*. New Jersey: Prentice-Hall.
- Marín-Ríos, A. y Obando-Zapata, G. (05 a 09 de diciembre del 2022). Una mirada a la historia de las prácticas matemáticas escolares en Colombia a través de la cartilla lacónica de las cuatro reglas de la aritmética práctica (Agustín Joseph de Torres, 1797) [Comunicación] 1621-1634. *IX CIBEM Congreso Iberoamericano de Educação matemática*. Sao Pablo, Brasil. <https://drive.google.com/file/d/14bezDGvVDU2cCQMDPbl8V1CZLx65l83C/view>
- Mellroth, E., Bergwall, A., & Nilsson, P. (2021). Task design for differentiated instruction in mixed-ability mathematics classrooms: manifestations of contradictions in a professional learning community. *Mathematics Teacher Education and Development*, 23(3), 78-96.
- MEN (1984). *Programas curriculares de matemáticas*. Bogotá.
- Mendes, I. (2020). History for the teaching of mathematics: transformation and mobilization of mathematical knowledge for school. *Pedagogical Research*. 5(3). <https://doi.org/10.29333/pr/8284>
- Nussbaumer, D. (2012). An overview of cultural historical activity theory (CHAT) use in classroom research 2000 to 2009. *Educational Review*, 64(1), 37-55.
- Obando, G. (2015). *Sistema de prácticas matemáticas en relación con las razones, las proporciones y la proporcionalidad en los grados 3° y 4° de una institución educativa de la Educación Básica*. (Doctor), Universidad del Valle, Cali, Co. <http://bibliotecadigital.univalle.edu.co/bitstream/10893/9472/1/CB-0519794.pdf>
- Obando, G., Arboleda-A, L. C., and Vasco, C. E. (2014). Filosofía, matemáticas y educación: una perspectiva histórico-cultural en educación matemática. *Revista Científica*, 20(3), 72–90. <https://doi.org/10.14483/23448350.7690>
- Oliveira, M. C. (2017). História da educação matemática como disciplina na formação de professores que ensinam matemática. *Cadernos de História da Educação*, 16(3), 653-665.
- Oliveira, M. C. (2020). História da educação matemática, saberes objetivados e a constituição de uma disciplina. *Historia y memoria de la educación: HMe*. 11, 25-49. <https://doi.org/10.5944/hme.11.2020.24074>
- Panaoura, R. (2024). Prospective teachers' self-regulation: the history of mathematics as a tool for perseverance. *Education Sciences*, 14(12), 1.335. <https://doi.org/10.3390/educsci14121335>
- Papadopoulos, I. (2024). Use of mathematical problems rooted in primary historical sources to reveal preservice teachers' mathematical content knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior*. 76. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101177>
- Pavlova, O., Zaripova, Z., Zagitova, L., & Zakirova, V. (2021). Methods of using cases from the life of outstanding mathematicians in the training of future teacher. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*. 17(10). <https://doi.org/10.29333/ejmste/11178>
- Pereira, A., Alves, V., De Sousa Batista, A., & Oliveira, F. (2020). Teaching knowledge in academic studies related to the history of mathematics in the last five years. Research, *Society and Development*, 9. 104932429. <https://doi.org/10.33448/RSD-V9I3.2429>
- Postholm, M. B. (2015). Methodologies in cultural–historical activity theory: The example of school-based development. *Educational Research*, 57(1), 43-58.
- Postholm, M. B. (2024). Teacher educators in universities and schools: experiences and learning using the change laboratory as a meeting place. *Professional Development in Education*, 11(1).
- Schubring, G. (1987). On the methodology of analysing historical textbooks: Lacroix as textbook author. *For the learning of mathematics*, 7(3), 41-51. <http://www.jstor.org/stable/40247906>
- Schubring, G. (2006). Researching into the history of teaching and learning mathematics: The state of the art. *Paedagogica Historica*, 42(4-5), 665-677. <https://doi.org/10.1080/00309230600806955>
- Stedall, J. (2017). *Breve historia de las matemáticas*. Dulcinea Otero-Piñero (Trad). Madrid: Alianza Editorial.
- Stetsenko, A. (2013). The challenge of individuality in cultural-historical activity theory: “Collectividal” dialectics from a transformative activist stance. *Outlines. Critical Practice Studies*, 14(2), 07-28. <https://doi.org/10.7146/ocps.v14i2.9791>

- Stetsenko, A. (2019). Cultural-historical activity theory meets developmental systems perspective: Transformative activist stance and nature culture. En A. Edwards, L. Bottcher, & M. Flead. (Eds.), *Cultural-historical approaches to studying learning and development: Societal, institutional and personal perspectives* (pp. 249-262). Springer.
- Tahirov, B., & Aghazade, S. (2024). Methods of using historical and scientific materials in mathematics education. *Vectors of Social Sciences*, 8, 54-64. <https://doi.org/10.51895/vss8/tahirov/aghazade>
- Tedesco, J. C., Opertti, R. y Amadio, M. (2013). *Porqué importa hoy el debate curricular*. UNESCO, Suiza. [IBE Working Papers on Curriculum Issues N° 10]
- Tobin, K. (2023). Using Change Laboratory Methodology in Initial Teacher Education. *Australian Journal of Teacher Education*, 48(7).
- Torres, A. D. (1797). *Cartilla lacónica de las cuatro reglas de aritmética práctica, dedicada por la Escuela de San Carlos a la Audiencia y Chancillería Real de este Nuevo Reino de Granada*. Imprenta patriótica, Santa Fe.
- Triana, J. M. (1845). *Manual de enseñanza mutua para las escuelas de primeras letras*. JA Cualla.
- Valente, W. R. (2007). História da educação matemática: interrogações metodológicas. *REVEMAT: Revista Eletrônica de matemática*, 2(1), 28-49.
- Valente, W. R. (2010). História da educação matemática: considerações sobre suas potencialidades na formação do professor de matemática. *Bolema*, 23(35), 123-136.
- Valente, W. R. (2013). Oito temas sobre a história da educação matemática. *REMATEC*, 8(12), 22-50.
- Virkkunen, J. (2013). *The change laboratory: A tool for collaborative development of work and education*. Springer Science & Business Media.
- Vygotsky, L. (1993). *Pensamiento y lenguaje* (J. M. Bravo, Trad.) Obras escogidas II (Vol. 2, pp. 348). Madrid: Visor.
- Yates, L., & Grumet, M. (Eds.). (2011). Curriculum in today's world: Configuring knowledge, identities, work and politics. En M. Grumet & L. Yates (Eds), *Orld Yearbook of Education 2011: Curriculum in Today's World: Configuring Knowledge, Identities, Work and Politics* (pp 3-14). Routledge.

Sesiones temáticas



¿Cómo renovar la formación inicial de profesores de Matemáticas en el escenario que vivimos?

Salvador **Llinares**
 Universidad de Alicante
 España
slinares@ua.es

Resumen

Esta sesión temática invitada tiene como objetivo discutir cuestiones generadas a partir de las comunicaciones aceptadas en el evento en relación con el tópico 01: Formación inicial de profesores. En primer lugar, se describen las temáticas planteadas en las ponencias abiertas en esta temática en el evento que permiten generar cuestiones de interés. Metodológicamente, después de la presentación de las temáticas sobre formación inicial de docente presentes en el evento, se generará una discusión inicial en pequeños grupos para continuar con una discusión abierta entre los interesados. El propósito es identificar semejanzas y diferencias entre las acciones descritas que puedan favorecer los contactos para el desarrollo de investigaciones y trabajos en relación con la formación inicial de docentes de Matemáticas o para el desarrollo de redes de formadores e investigadores centradas en cuestiones relativas a la formación inicial de docentes de Matemáticas.

Palabras clave: Competencia docente; Conocimiento especializado para la enseñanza de las Matemáticas; Formación inicial de docentes de Matemáticas; Prácticas profesionales específicas; Programas de formación inicial docente

Observaciones

Sesión Temática: ¿Cómo renovar la formación inicial de profesores de Matemáticas en el escenario que vivimos? Coordinada por Salvador Llinares, Universidad de Alicante, España.
 Jueves 6 de noviembre 14:30 a 16:30 (tiempo 1h y 50')

Presentación inicial de la sesión temática

Esta sesión temática invitada tiene como objetivo discutir cuestiones generadas a partir de las comunicaciones aceptadas en el evento en relación al tópico 01: Formación inicial de profesores. La estructura adoptada es:

- Descripción de las temáticas planteadas en las ponencias abiertas en el evento
- Cuestiones que pueden emerger a partir de las temáticas

Se pretende generar discusiones en pequeños grupos para continuar con una discusión abierta entre los interesados a partir de las cuestiones generadas desde la descripción inicial de las temáticas planteadas en las ponencias abiertas así como cuestiones adicionales que puedan ser planteadas. El propósito es identificar semejanzas, diferencias y posibles ausencias entre las acciones descritas que puedan favorecer los contactos entre formadores e investigadores de diferentes instituciones para el desarrollo de investigaciones y trabajos en relación a la formación inicial de docentes de Matemáticas o para el desarrollo de redes de formadores e investigadores centrados en estas temáticas

Descripción de tópicos en las ponencias abiertas en el tema 01 Formación inicial de profesores

En el tema 01- Formación inicial de profesores, en el momento de realizar este informe, se han aceptado 29 ponencias abiertas desde 11 países (Tabla 1).

Tabla 1

Ponencias abiertas en el tópico 1: Formación inicial de profesores. Países

BR: Brasil; COL: Colombia; CR: Costa Rica; CH: Chile; EC: Ecuador; ES: España; MX: México; NI: Nicaragua; PA: Panamá; PR: Puerto Rico; UR: Uruguay.

País	BR	COL	CR	CH	EC	ES	MX	NI	PA	PR	UR	CR/BR	CR/ES
Nº	6	2	5	2	1	2	4	1	1	1	1	1	2

Los niveles para los que se forman los docentes se han agrupado en cuatro grupos (Tabla 2) considerando lo que se indica en el texto de las ponencias y considerando una correspondencia entre las edades de los estudiantes. Además, existen dos ponencias de revisión de estudios que adoptan una perspectiva general en relación al nivel de los programas de formación. Teniendo en cuenta que no existe una correspondencia clara entre los diferentes niveles educativos de los diferentes países, esta agrupación debe ser considerada como una aproximación.

- * Secundaria: (docentes para estudiantes mayores de 11 años): Secundaria-Medio superior;
- * Primaria (docentes para estudiantes entre 6 y 11 años): educación Primaria, Incluyendo años “iniciales de ensino” fundamental, escuela elemental, Licenciatura de intervención, Educación básica primaria
- * Preescolar (docentes para estudiantes menores de 6 años)

Tabla 2

Ponencias abiertas en el tópico 1: Formación inicial de profesores. Niveles educativos de los programas contexto de los estudios

NIVEL	Secundaria	Primaria	Preescolar	Sin indicar/ Revisión
Número	19	7	2	1

Los focos de interés en los que se han centrado las ponencias están agrupados en cinco grandes categorías (Tabla 3). Estas categorías muestran las cuestiones sobre las que los formadores de docentes e investigadores han centrado su preocupación en las ponencias abiertas presentadas en este evento en relación a la formación inicial de docentes.

Las ponencias en la categoría *Conocimiento específico para la enseñanza de las Matemáticas* (n=11) están centradas en aportar información sobre diferentes aspectos del conocimiento especializado de Matemáticas y sobre el conocimiento para la enseñanza de las Matemáticas de los futuros docente (conceptos y tópicos matemáticos específicos y procedimientos). Los tópicos sobre los que se han centrado han sido: conocimiento matemático en general, funciones cuadráticas, función seno, números enteros, variable aleatoria, fracciones, ecuaciones cuadráticas, razonamiento geométrico.

Las ponencias agrupadas en la categoría de *Aprendizaje de prácticas profesionales específicas / competencias docentes* (N=8) se centran en cuestiones relativas al aprendizaje de prácticas tales como planificar/diseñar lecciones, analizar tareas, diseño e implementación de proyectos STEAM, aprender a gestionar la comunicación matemática en el aula (argumentación en la demostración), sobre la práctica reflexiva (por ejemplo, a través de aproximaciones como “*Lesson Study*”) que implica muchas veces, el diseño, implementación y reflexión posterior de propuestas didácticas/lecciones. En algunas de estas ponencias el foco está en la manera en la que los futuros docentes aprenden a usar “instrumentos conceptuales” para argumentar sobre las prácticas específicas a ser aprendidas. Estos instrumentos conceptuales son parte del conocimiento teórico desde la didáctica de la Matemática que los formadores consideran que debe ser transformado en conocimiento profesional del docente a través de las tareas de aprendizaje profesional propuestas en el programa de formación. Las ponencias presentadas se centran en el aprendizaje de prácticas profesionales específicas (“*core practice*”) con el objetivo de generar información sobre el aprendizaje de estas prácticas y por consiguiente del desarrollo de competencias docentes desde la formación inicial. Esta información permite a los formadores pensar en formas de ayudar a los futuros docentes a aprender a enseñar Matemáticas de manera efectiva y que aprendan a fomentar una fuerte comprensión de los conceptos y procedimientos matemáticos en los estudiantes.

Las ponencias agrupadas en la categoría *Dominio afectivo/Sostenibilidad* se centran diferentes temas (n=4) implicados en aportar información sobre cómo integrar en la formación de docentes el desarrollo sostenible (y cómo los futuros docentes pueden considerar esta perspectiva en sus lecciones de Matemáticas). Además, aportar información sobre las creencias y percepciones de los futuros docentes que pueden influir en el aprendizaje del conocimiento especializado para enseñar Matemáticas y del aprendizaje de las prácticas profesionales

específicas. Por ejemplo, en caracterizar perspectivas y autopercepción de los futuros docentes sobre las Matemáticas y la enseñanza, sobre la inclusividad en la clase de Matemáticas, sobre las creencias y disposiciones de los futuros docentes, y sobre la relación entre la creatividad y el aprendizaje de las Matemáticas. Algunas de estas ponencias aportan conocimiento sobre características e influencias de los diferentes aspectos que determinan el aprendizaje de los futuros docentes de diferentes perspectivas de lo que se puede ser una educación para el desarrollo sostenible.

En la categoría *Influencia de los programas*, las ponencias presentadas (n=3) aportan información sobre diferentes factores vinculadas a las características de los programas formativos que parecen influir en el aprendizaje de los futuros docentes. Por ejemplo, de qué manera la aplicación de una determinada propuesta en el programa formativo puede influir en el desarrollo de prácticas inclusivas en los cursos de formación, y cómo una propuesta educativa del programa que permita la diversidad puede influir en la modificación de las percepciones de los futuros docentes.

Finalmente, existen ponencias centradas en *Revisión de las investigaciones* (n=2) sobre la formación geométrica de los futuros docentes y sobre los modelos teóricos que los investigadores usan para describir y explicar el aprendizaje de los futuros docentes del conocimiento de Matemáticas necesario para enseñar y de las prácticas profesionales específicas.

Tabla 3

Ponencias abiertas en el tópico 1: Formación inicial de profesores. Focos de interés

FOCOS	Conocimiento específico para enseñar Matemáticas	Aprendizaje de prácticas profesionales específicas /Competencias Docentes	Dominio afectivo /Sostenibilidad	Influencia del programa	Revisión
Número	11	8	4	3	2

Cuestiones

El conjunto de las ponencias presentadas en este evento en el tema Formación inicial de los docentes de Matemáticas muestra la creciente preocupación de los formadores de profesores y de los investigadores en el aprendizaje de prácticas profesionales específicas y del conocimiento que las apoya. Esta característica, reflejada en las ponencias presentadas evidencia una cierta transición hacia referencias que ayudan a pensar en la formación docente inicial reflejando propuestas-basadas en la práctica (como, por ejemplo, con énfasis en el diseño de tareas de aprendizaje profesional que usan registros de la práctica e instrumentos conceptuales para apoyar los procesos de razonamiento de los futuros docentes. Esta característica encaja con reflexiones internacionales (Fernández et al, 2025) que intentan aportar nuevo conocimiento sobre cómo los docentes desarrollan competencias docentes específicas, conocimiento especializado y cómo influyen los diferentes contextos y perspectivas adoptadas en los programas.

Otras cuestiones y puntos de reflexión que pueden ayudar a complementar lo generado desde las ponencias abiertas presentadas en el evento pueden ser,

- el papel de los programas de formación inicial en la implementación de los currículos escolares en el escenario actual,
- Competencias y perfil de los estudiantes que siguen carreras de enseñanza de las Matemáticas
- Competencias necesarias de los docentes que trabajan en la formación inicial de profesores de Matemáticas (el foco sobre las características de los formadores de docentes y educadores)
- El papel de las TIC y la Inteligencia Artificial en los programas de formación inicial
- ¿Hacia dónde debe ir la investigación para fortalecer la formación inicial?

Referencias y bibliografía

Fernández, C.; Llinares, S.; Choy, B.H. (2025). *Innovations in Initial Mathematics Teacher Education. New Development and Insights*. Springer Nature



Oportunidades y desafíos de la Inteligencia Artificial para la Estadística y la Probabilidad en los currículos escolares de Matemáticas

Edwin **Chaves**-Esquvel
Universidad Nacional y Universidad de Costa Rica
Costa Rica.
echavese@gmail.com

Resumen

En el XVI CIAEM, realizado en Lima, Perú, en el 2023 se efectuaron por primera vez sesiones temáticas dentro de las actividades académicas que realiza periódicamente el Comité Interamericano de Educación Matemática. Dentro de ellas se incluyó la sesión denominada “*Balance y perspectivas de la Estadística y la Probabilidad en la Educación Matemática para nuestro tiempo*”, uno de los temas de mayor interés que surgió de la discusión fue el uso de las tecnologías digitales para la enseñanza de estas áreas, sobre todo lo referente a los retos y amenazas que implica para el proceso educativo el auge que la inteligencia artificial (IA) está teniendo en los diferentes ámbitos del conocimiento científico; sin embargo, por limitaciones de tiempo el tema no pudo tratarse con la rigurosidad deseada. Por ello, se consideró oportuno para el IX CEMACYC generar una sesión temática que abordara específicamente este punto. Se pretendió que los participantes brindaran opiniones sobre la interrogante: ¿Cuál va a ser el impacto de la IA en la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad dentro de la Educación Matemática? Específicamente se pretendía identificar oportunidades y desafíos de la implementación de esta herramienta, que, quiérase o no, es ya una realidad y continuará incrementando su influencia en la sociedad. Los resultados reflejan la opinión de los participantes quienes valoran la IA como una importante herramienta para la enseñanza de la disciplina; pero reconocen el desafío que enfrentan como docentes para utilizarla de forma balanceada y oportuna.

Palabras clave: Educación estadística; IA en la educación estadística y probabilística; enseñanza y aprendizaje de la Estadística la Probabilidad; formación de profesores; tecnología digitales en la educación estadística; Estadística Cívica mediante IA.

Educación Estadística y Probabilística en la región: XVI CIAEM

En la sesión temática denominada "*Balance y perspectivas de la Estadística y la Probabilidad en la Educación Matemática para nuestro tiempo*" llevada a cabo durante la Décimo Sexta Conferencia Interamericana de Educación Matemática (XVI CIAEM) realizada en Lima, se pretendió recabar la posición de los participantes sobre el estado actual de la enseñanza y el aprendizaje de Estadística y la Probabilidad en el contexto de la Educación Matemática en la región. Muchos temas fueron mencionados y discutidos, entre otros: deficiencias en formación docente, currículos de Matemáticas que dan poco énfasis a estas disciplinas o no enfatizan en su naturaleza pragmática hacia la resolución de problemas y un uso inadecuado o inexistente de las tecnologías digitales en la enseñanza de las áreas. No es necesario profundizar al respecto, debido a que para quienes tengan interés en hacerlo pueden consultar (Estrella y Chaves, 2023) o también el Blog de REDUMATE (<https://blog.ciaem-redumate.org/category/estadistica-y-probabilidad/>) en la sección de Estadística y Probabilidad que incluye una serie de artículos relacionados con los resultados de la experiencia.

En la Sesión Temática de Lima el concepto de "*Estadística Cívica*" fue un eje de discusión. Dicho concepto se puede visualizar como una ampliación de otros principios que por años han venido siendo tema de discusión dentro del campo de la Educación Estadística y Probabilística en la región; como son el de "Cultura Estadística" y "Alfabetización Estadística" (Contreras & Molina, 2019; Engel, 2019). Estos conceptos se han incorporado en algunos currículos educativos en la región, tal es el caso de Costa Rica (MEP, 2012). La cultura o alfabetización estadística han intentado dar significado al uso de la Estadística y la Probabilidad para resolver problemas del contexto estudiantil y comunal (MEP, 2012). En este sentido la Estadística Cívica busca llevar a cabo esta alfabetización a aquellos contextos donde la Estadística y la Probabilidad son usadas como herramientas para abordar escenarios de interés social, político o ambiental (Ruz et al., 2020). Se promueve una enseñanza y aprendizaje de estas áreas para promover un estudiantado integrado activamente en el entendimiento crítico de la información mediante datos, formas de representación o resumen de ellos, que les permita tener argumentos de reflexión y análisis, que les pueda llevar a comprometerse y tomar decisiones basadas en evidencia concreta (Ruz et al., 2020).

En busca de lograr que la Estadística Cívica sea realidad en los currículos matemáticos de la región, entre otros elementos que han sido mencionados en diferentes eventos académicos y citados también en el XVI CIAEM, las tecnologías digitales cobran especial interés, debido a que son una oportunidad para generar estrategias didácticas congruentes con la Estadística Cívica. En este sentido, resultó especialmente preocupante que varios participantes en la sesión de Lima percibían la inteligencias artificial (IA) como una amenaza para el proceso educativo y proponían que debía restringirse su uso, o la contraparte que las consideraba provechosas; pero reconocía que era muy poco o nada lo que se estaba haciendo en la región para aprovechar su potencial, no solamente para la Estadística y la Probabilidad sino para la enseñanza y aprendizaje

de las Matemáticas integralmente (Estrella y Chaves, 2023). De allí la importancia de llevar a cabo una nueva sesión temática que aborde este tema.

Uso de la Inteligencia Artificial en la Enseñanza de la Estadística y la Probabilidad

La Inteligencia Artificial se ha convertido en una de las herramientas más disruptivas e innovadoras en el ámbito educativo (González, 2023; Carmona, Rodríguez e Ishmael, 2023). Su potencial radica en la capacidad de procesar grandes volúmenes de datos, adaptarse al ritmo de aprendizaje del estudiante y proporcionar retroalimentación inmediata. En general dentro del campo educativo, la IA permite personalizar contenidos, identificar tempranamente dificultades y ofrecer recursos de apoyo según las necesidades de cada alumno, lo que favorece un aprendizaje más inclusivo y eficiente (Chen et al., 2022; González-González, 2004).

En un contexto donde la alfabetización digital y el manejo de información son capacidades fundamentales, la IA amplía las posibilidades de los procesos educativos al facilitar la simulación de escenarios complejos, la sistematización de tareas repetitivas y el acceso a materiales educativos actualizados en forma continua. Esto optimiza el tiempo del docente y amplía la capacidad de atención individualizada incluso en grupos numerosos (Parra y Díaz, 2025).

En el caso particular de la Estadística y la Probabilidad la IA ofrece grandes ventajas pedagógicas. Estas disciplinas requieren de un fuerte componente de análisis, modelado y experimentación, aspectos en los que la IA puede aportar mediante simuladores, entornos interactivos y análisis de datos en tiempo real (Tian, 2024). Algunas herramientas basadas en IA pueden generar visualizaciones dinámicas, realizar predicciones probabilísticas y adaptar ejercicios según el progreso del estudiante, mejorando la comprensión de conceptos abstractos (Valdivieso, Burbano, y Burbano, 2023).

La IA puede favorecer el desarrollo de la Estadística Cívica en estudiantes de la región, debido a que facilita el acceso a datos abiertos y puede promover el análisis crítico de información pública y generar entornos interactivos para la comprensión de fenómenos sociales en general. A través de plataformas basadas en IA, los estudiantes pueden trabajar con bases de datos reales vinculados con temas como pobreza, salud o medio ambiente, lo cual fomenta una formación ciudadana basada en evidencia y fortalece su participación democrática (Rosales, 2024; Carmona, Rodríguez & Ishmael, 2023). De acuerdo con Rosales (2024), integrar el uso de la IA en la enseñanza y aprendizaje de la Estadística y la Probabilidad ofrece a los educadores la posibilidad de generar aprendizaje por medio de estrategias fundamentadas en datos que potencian una enseñanza personalizada y eficaz; lo cual no solo beneficia a los estudiantes en forma individual, sino que también que contribuye al avance general de novedosas prácticas educativas. Por otro lado, algunas investigaciones concluyen que el uso de herramientas inteligentes ayuda a superar limitaciones de recursos educativos, ofreciendo materiales personalizados que potencian la alfabetización estadística en contextos donde tradicionalmente el acceso a tecnología y datos ha sido desigual (Parra y Díaz, 2025; Valdivieso, Burbano y Burbano, 2023). En resumen, adoptar estas metodologías basadas en datos es esencial para la evolución continua de la enseñanza y el aprendizaje de las disciplinas en la era digital.

Sin embargo, a pesar de todas las bondades de la IA y de que en América Latina se han realizado algunos esfuerzos aislados para la incorporación de tecnologías digitales en los sistemas educativos para la implementación de esta herramienta, en la enseñanza de las Matemáticas aún enfrenta grandes desafíos. Diversos informes señalan que existen amplias brechas en infraestructura, conectividad y formación docente, lo cual limita el aprovechamiento pleno de estas tecnologías en el aula (Carmona, Rodríguez & Ishmael, 2023; UNESCO, 2022). A pesar de experiencias piloto con plataformas adaptativas o recursos basados en IA, la región está muy lejos de poder generalizarlas, por lo que persisten desigualdades de toda índole que ponen en duda la sostenibilidad de su implementación (Parra y Díaz, 2025). Para que los sistemas educativos latinoamericanos estén realmente preparados, se hace necesario avanzar en políticas de capacitación docente, inversión en infraestructura tecnológica y marcos éticos que garanticen un uso seguro y equitativo de la IA (Valdivieso, Burbano, y Burbano, 2023).

A continuación se presentan las opiniones de los participantes en la sesión temática, muchas de las cuales son consistentes con lo argumentado previamente.

Resultados de la Sesión Temática en el IV CEMACYC: Santo Domingo, 2025

Se contó con la participación de alrededor de 40 docentes e investigadores en Educación Matemática de la región. Para favorecer opiniones congruentes con los intereses del estudio se consideraron tres objetivos o ejes temáticos, incorporando paralelamente algunas preguntas potenciadoras para cada uno de ellos. A continuación se detallan las opiniones para cada uno de estos objetivos.

1) Identificar la percepción de los participantes sobre las oportunidades que ofrece la IA para fortalecer la comprensión estadística y probabilística

Con este objetivo se pretendió identificar la percepción de los participantes sobre su visión para identificar las oportunidades de la IA para apoyar su trabajo como docentes en el área de Estadística y Probabilidad. Al igual que para los otros objetivos, las respuestas se categorizaron encontrando puntos de coincidencia. Las opiniones, en este caso particular, los aspectos más relevantes fueron:

- **La IA permite adaptar actividades y problemas estadísticos.** Varios docentes la consideran una potente herramienta para generar actividades en contextos específicos congruentes con la edad y el entorno en que residen los estudiantes. Permite que los estudiantes puedan valorar la disciplina en su aplicabilidad para resolver problemas cercanos a su realidad, lo que potencia la motivación y el sentido de aplicación de la Estadística en contextos locales o personales.
- **La IA como apoyo para la visualización y el análisis de datos.** Algunos participantes identificaron la utilidad de la IA como facilitador del acceso y tratamiento de datos reales o simulados. Puede utilizarse para generar y analizar datos mediante la misma herramienta de IA empleada o para facilitar el uso de herramientas más sofisticadas, entre las que se citaron softwares específicos como R o Geogebra, cuyo uso se hace más amigable

mediante la retroalimentación por medio de la IA. Esto fortalece la capacidad docente para trabajar con datos auténticos y promueve la alfabetización digital aplicada a la Estadística.

- **La IA como mediadora para la comprensión conceptual y crítica de los resultados estadísticos.** Algunos de los participantes señalan que, si se utiliza adecuadamente la IA no solamente se puede emplear como generadora de contenido para la acción de aula, sino también para posibilitar la reflexión y el análisis crítico de los resultados de los problemas.
- **La IA como impulsora de la alfabetización estadística y cívica.** De varias de las participaciones pueden extraerse opiniones tendientes a crear conciencia en docentes y estudiantes sobre la necesidad de orientar el uso ético de la IA en el aprendizaje de la Estadística. Específicamente se enfoca la importancia de valorar éticamente lo que se le está pidiendo a la herramienta y analizar críticamente aquello que la IA ofrece. Donde el juicio docente de prevalecer para el uso de los datos de manera consciente, responsable y significativa.

2) Reconocer riesgos asociados al uso indiscriminado de la IA en la enseñanza de la Estadística y las Probabilidades

Uno de los principales riesgos que enfrenta la sociedad frente al uso de los recursos tecnológicos es su utilización indiscriminada. Un claro ejemplo de esto, se observa con el empleo de los teléfonos móviles, los cuales han modificado drásticamente el comportamiento humano. Múltiples estudios como el de Lepp, Barkley y Karpinski (2015), indican que el uso excesivo de este dispositivo puede traer consecuencias significativas para la salud mental, las relaciones interpersonales y el desarrollo cognitivo. En congruencia con la experiencia de los teléfonos móviles, los docentes señalan algunos riesgos que un uso indiscriminado de la IA podría ocasionar:

- **Riesgo de la dependencia cognitiva y la pérdida del pensamiento crítico.** Se destaca la opinión de algunos educadores que advierten que un uso excesivo de la IA puede conducir a una disminución de la autonomía intelectual y del razonamiento propio de estudiantes y docentes. Específicamente, uno de los presentes que indicó tener conocimiento en neurocognición señaló que *“hay un riesgo de que las conexiones neuronales y las habilidades cognitivas asociadas se debiliten o no se desarrollen completamente si no se ejercitan mediante el esfuerzo mental”*. Al respecto, otros coincidieron en esta opinión, aunque no en forma tan técnica; pero sí mostrando preocupación con una pérdida de autonomía y creatividad. Se menciona el riesgo de potenciar una sociedad pasiva sin autoevaluación ni autorreflexión.
- **Riesgo de perder el papel de educador especializado y del propósito fundamental de la enseñanza.** Se reconoce que algunos educadores podrían utilizar la IA de manera mecánica, sustituyendo así su propio criterio o conocimiento profesional por las respuestas automáticas de IA. Se indicó que para un uso inteligente de la IA el educador debe tener muy claro su plan de trabajo académico de modo que esté en capacidad de solicitar a la IA aquello que viene a auxiliarlo en su planificación e implementación, además de tener un sentido crítico para analizar las propuestas ofrecidas por la herramienta. En caso contrario,

se puede desvirtuar el proceso de enseñanza de la disciplina y la implementación de los currículos escolares.

- **Riesgos éticos y de seguridad digital.** Algunos docentes destacan los peligros asociados a la privacidad de datos, la desinformación y el uso irresponsable de plataformas. Varios participantes mencionaron el riesgo de emplear la IA para generar datos falsos sobre hechos concretos que puedan confundir no solamente en lo académico sino también en la vida social de estudiantes y docentes. Esto es relevante en momentos en que la sociedad enfrenta una crisis de “noticias falsas” en redes sociales y otros medios de comunicación. Al respecto, se indicó la urgencia de capacitar sobre una educación digital responsable y ética; la IA tiene el potencial de aparentar validez en información estadística que podría ser falsa, lo cual puede ser utilizado en la acción académica ayudando al estudiante a que analice la información estadística que ha sido comunicada y valide los hallazgos con sentido crítico.
- **Riesgo de incrementar el facilismo en los estudiantes.** Algunos docentes notan que los estudiantes no perciben los riesgos que conlleva un uso abusivo de las tecnologías digitales, específicamente de la IA. No se sienten motivados por advertencias de la importancia del pensamiento crítico: *“los jóvenes priorizan la eficiencia y la inmediatez”*. Esto plantea el reto de generar actividades académicas que superen estos riesgos.

3) Analizar ¿cómo la IA puede contribuir a una Estadística Cívica (interpretar, comunicar y actuar)?

Después de analizar las oportunidades y los riesgos que conlleva el uso de la IA para la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, conviene ahora retomar el propósito de la Sesión Temática del CIAEM de Lima 2023, que consistía en potenciar la Estadística Cívica dentro del proceso educativo. En el análisis de los dos objetivos previos fueron mencionados varios tópicos relevantes relacionados con el tema; pero se quiso trabajar más específicamente el tema. Al respecto se obtuvieron las siguientes opiniones:

- **Promover la conciencia analítica previa al uso de la IA.** Varios de los docentes insisten en que antes de recurrir a la Inteligencia Artificial, el estudiante debe haber recibido formación para razonar, formular hipótesis y contrastar sus ideas con análisis de datos y problemas que involucren incertidumbre para la toma de decisiones. De esta manera, la IA se puede visualizar como una herramienta de apoyo o instrumento metacognitivo para validar o verificar los hallazgos.
- **La IA como mediadora del aprendizaje y la participación cívica.** Los participantes reconocen que la IA puede ser una herramienta poderosa para democratizar el acceso a la información estadística, facilitar la interpretación de datos públicos y fomentar el pensamiento crítico sobre temas sociales. En particular se mencionó que por medio de la IA se podría tener acceso a bases de datos que normalmente son de compleja utilización dentro de la acción educativa; entre otros: censos, encuestas, datos sobre problemas ambientales y sociales. El uso de esta información permite potenciar una conciencia cívica por medio de las actividades académicas.

- **De la estadística técnica a la estadística con conciencia cívica.** El concepto de Estadística Cívica emerge en las opiniones sobre la capacidad de usar datos para comprender y actuar sobre problemas reales de la comunidad: salud, educación, ambiente, entre otros. Como complemento al punto anterior, estas opiniones versaron sobre un rango más específico: la comunidad. Mientras que el anterior hizo referencia a situaciones más generales del país o incluso internacionalmente.
- **Desarrollar la vigilancia crítica y ética ante la manipulación de información.** Del mismo modo que se mencionó arriba, algunos docentes manifestaron que un buen uso de la IA puede facilitar que la verificación o validación de posible información o datos estadísticos falsos que son utilizados para diferentes fines. Esta posición la resumió muy bien uno de los participantes: *“no basta con interpretar datos, hay que desconfiar, contrastar y verificar su origen”*.
- **Fortalecer el rol del docente como mediador crítico y formador de ciudadanía digital.** En general, pareció existir coincidencia en las opiniones de que la IA exige un docente más consciente, preparado y empoderado. Además de la funciones tradicionales del educador estadístico, el uso de la herramienta obliga a crear capacidades para simular datos, experimentar y discutir resultados; pero a la vez filtrar información y contextualizarla.

Conclusión

A manera de resumen de las participaciones, se puede indicar que las percepciones docentes revelan que la IA representa una oportunidad pedagógica potente para fortalecer la comprensión estadística y probabilística siempre que se mantenga la mediación humana. Los participantes no la conciben como sustituto, sino como herramienta de apoyo contextual, cognitivo y ético.

Sin embargo, reconocen los riesgos de la IA no para promover el rechazo tecnológico, sino desde la defensa del pensamiento humano. Los temores más reiterativos se relacionan con la posible dependencia cognitiva, con la pérdida del rol docente o con los problemas éticos. Sin embargo, en general las opiniones fueron propositivas al indicar que las soluciones no se orientan en prohibir el uso de la IA sino en educar para un uso crítico y ético. En este sentido, se concibe la IA como una herramienta inevitable, pero indican en que su uso educativo debe preservar la autonomía intelectual, la mediación pedagógica y la integridad humana.

También se concibe la IA como un valioso instrumento para desarrollar un Estadística Cívica, aunque con riesgo ético y cultural. Los docentes reconocen el potencial de la herramienta para fortalecer la lectura crítica de datos públicos, agilizar procesos de análisis y enriquecer la participación ciudadana, siempre que su uso esté guiado por criterios éticos, pedagógicos y de validación contextual. En general el reto está en promover una pedagogía de conciencia crítica, donde la IA no puede reemplazar al docente; sino que se convierta en un instrumento que lo obliga a repensar su quehacer académico.

En función de las opiniones recabadas en la sesión temática, se concluye que para un uso eficiente de la IA en la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, los docentes consideran pertinente no prohibir la herramienta sino enseñar a usarla. No obstante, se reconoce que para ello es necesario desarrollar procesos de capacitación y formación continua que involucren los diferentes aspectos que se han tratado acá.

Para finalizar, como coordinador de la sesión temática es importante expresar algunas conclusiones particulares, que se resumen de las opiniones, pero también de un criterio personal sobre el tema. Cito cuatro elementos que me parecen fundamentales de tomar en cuenta:

1. La incorporación pedagógica de la IA en la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad no depende principalmente de la herramienta, sino del nivel de formación epistemológica, didáctica y ética del profesorado.
2. La IA interpela directamente a los currículos de Matemáticas, al exigir un desplazamiento desde enfoques procedimentales hacia propuestas centradas en el análisis, la interpretación, la argumentación y la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.
3. El uso de la IA obliga a repensar las prácticas de evaluación en Estadística y Probabilidad, privilegiando procesos de razonamiento, análisis crítico y justificación de decisiones, por encima de la mera obtención de resultados.
4. La alfabetización estadística con la presencia de la IA es inseparable de una formación ética y ciudadana, en la que el análisis crítico de datos, la verificación de fuentes y la responsabilidad en el uso de la información se convierten en aprendizajes centrales.

En esencia más que una amenaza o una solución automática a los problemas que enfrenta la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad, la IA se puede constituir en un catalizador; pero esto obliga a los sistemas educativos a redefinir sus propósitos, métodos y responsabilidades sociales en los currículos escolares. Lo cual no solamente es válido para estas disciplinas sino para toda la acción educativa.

Referencias y bibliografía

- Carmona, M., Rodríguez, R. & Ishmael, C. (2023). Artificial intelligence and the future of teaching and learning. U.S. Department of Education. <https://www.ed.gov/sites/ed/files/documents/ai-report/ai-report.pdf>
- Chen, X., Zou, D., Xie, H., Cheng, G. & Liu, C. (2022). Two decades of artificial intelligence in education. *Educational Technology & Society*, 25(1), 28-47.
- Contreras, J. M. & Molina-Portillo, E. (2019). Elementos clave de la cultura estadística en el análisis de la información basada en datos. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. del M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-12). Granada: Universidad de Granada.
- Engel, J. (2019). Cultura estadística y sociedad: ¿Qué es la estadística cívica? En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. del M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-18). Granada: Universidad de Granada.
- Estrella, S. & Chaves, E. (2023). Balance y perspectivas de la Estadística y la Probabilidad en la Educación Matemática para nuestro tiempo. En *CIAEM Memorias 16: Memorias del XVI CIAEM*, (Sesiones temáticas); Lima, Perú. <https://ciaem-iacme.org/memorias-16/>

- González, C. (2023). El impacto de la inteligencia artificial en la educación: transformación de la forma de enseñar y de aprender. *Revista Currículum*, 36; julio 2023, pp. 51-60; ISSN: e-2530-8386
<https://doi.org/10.25145/j.qurricul.2023.36.03>
- González-González, C.S. (2004). Sistemas inteligentes en la educación: una revisión de las líneas de investigación y aplicaciones actuales. *RELIEVE*: v. 10, n.o 1, pp. 3-22.
http://www.uv.es/RELIEVE/v10n1/RELIEVEv10n1_1.htm
- Lepp, A., Barkley, J. E., & Karpinski, A. C. (2015). The relationship between cell phone use, academic performance, anxiety, and satisfaction with life in college students. *Computers in Human Behavior*, 31, 343-350. doi.org
- Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP) (2012). *Programas de Estudio Matemáticas. Educación General Básica y Ciclo Diversificado*. Costa Rica: autor.
- Parra, J. & Díaz, D. (2025). Uso de tecnología para la enseñanza de la probabilidad en la formación docente. *Revista Espacios*, 46(2), 20. <https://www.revistaespacios.com/a25v46n02/a25v46n02p20.pdf>
- Rosales A. (2024). The Impact of Statistics and Probability on Educational Artificial Intelligence. *Adv Appl Stat Probab.* 2024; 1(1): 001-004. Available from: <https://dx.doi.org/10.17352/aasp.000001>
- Ruz, F; Martínez, F; Garzón, J & Contreras J. (2020). Estadística Cívica en la Sociedad de la Información. En *Investigación Educativa e Inclusión: Retos actuales en la sociedad del siglo XXI* (pp. 805-816). Editorial Dykinson. http://www.ub.edu/obipd/wp-content/uploads/2020/09/LA_FORMACION_DE_PROFESORES_INCLUSIVOS_EL.pdf
- Tian, X. (2024). Teaching reform of probability theory and mathematical statistics. *Frontiers in Education Research*. V. 4. Francis Academic Press: UK. <https://francispress.com/uploads/papers/SVPmyAcEN6HE3ZZAwOmscTbvEld000AyOUBwWZWj.pdf>
- UNESCO. (2022). Reimaginar juntos nuestros futuros: Un nuevo contrato social para la educación. *UNESCO*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000379707>
- Valdivieso, M., Burbano, A. & Burbano, V. (2023). Estudio exploratorio sobre inteligencia artificial en la enseñanza de probabilidad. *Revista Ciencia en Desarrollo*. V. 16, N. 1E. Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia https://revistas.uptc.edu.co/index.php/ciencia_en_desarrollo/article/view/19807



Perspectivas de la preparación de docentes en el contexto actual

Soledad Estrella

Instituto de Matemática, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Chile

soledad.estrella@pucv.cl

Resumen

La formación de profesores de Matemáticas enfrenta desafíos múltiples, entre ellos, las posibles debilidades formativas arrastradas desde la formación inicial, las dificultades de implementar currículos renovados, y el avance hacia una acción formativa que articule el desarrollo del pensamiento matemático y nuevas prácticas pedagógicas en los tiempos actuales. Esta sesión abrió el diálogo entre los asistentes a la sesión temática en torno a los resultados del bajo desempeño en Matemática de PISA 2022 de América Latina y el Caribe, con el fin que ellos exploraran y argumentaran sobre las oportunidades y desafíos sobre el desarrollo profesional docente y de los profesores en servicio desde el conocimiento y experiencias del propio país.

Palabras clave: Formación docente; desarrollo profesional docente; profesores en servicio; Lesson Study.

Experiencias en voces de los educadores matemáticos asistentes a sesión temática en el marco de los resultados en Matemática de PISA 2022 de América Latina y el Caribe

Los asistentes de los cinco países —Brasil, Colombia, Chile, España y República Dominicana—, expresaron sus ideas y experiencias sobre el panorama de desafíos y fortalezas en la formación matemática de los docentes de sus países. En total, en PISA 2022 participaron 81 países y economías, siendo 14 países participaron de América Latina y el Caribe: Argentina, Brasil, Chile, Colombia, Costa Rica, República Dominicana, El Salvador, Guatemala, Jamaica, México, Panamá, Paraguay, Perú y Uruguay.

El material gráfico de PISA 2022 presentado daba cuenta que, para la región, tres de cada cuatro estudiantes obtuvieron bajo desempeño en Matemática, esto es, los estudiantes no alcanzan las competencias básicas en Matemática (definido por PISA como el nivel 2). La Figura

1 muestra los resultados de PISA 2022 (OCDE, 2023) de algunos países considerando años de escolaridad, considerando 20 puntos por cada año de escolaridad, iniciando en el promedio de 472 puntos de la OCDE.

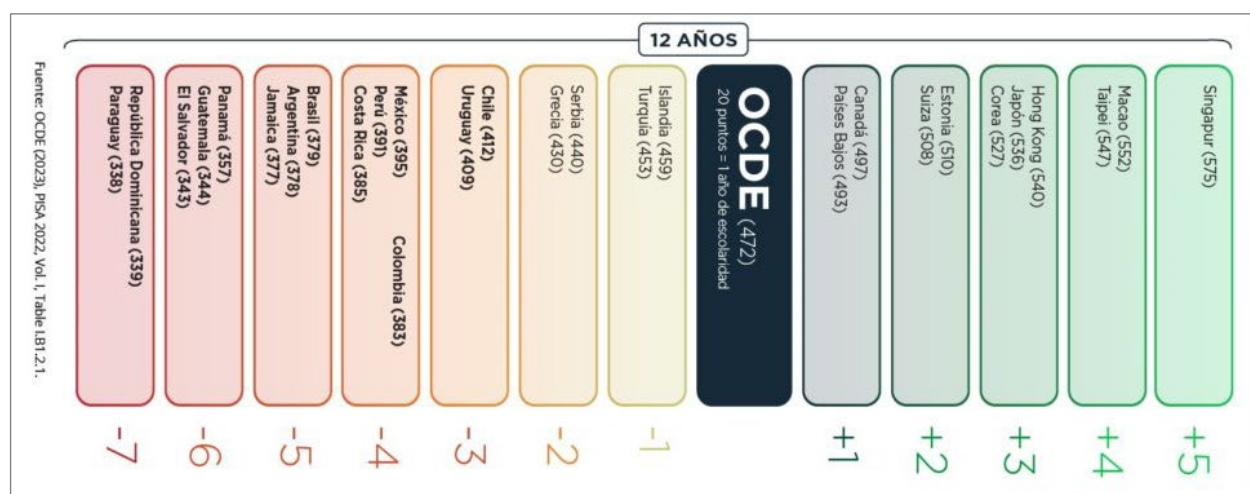


Figura 1. Resultados de PISA 2022 de algunos países considerando años de escolaridad.

Además, los asistentes pudieron analizar críticamente la variación de los puntajes promedios de las dos últimas pruebas PISA respecto a tres disciplinas bases (ver Figura 2), con el fin de enfocar la discusión en cuánto mejoró la región, y en cuáles serían las tendencias de desaceleramiento en la mejora en los desempeños en Matemática.

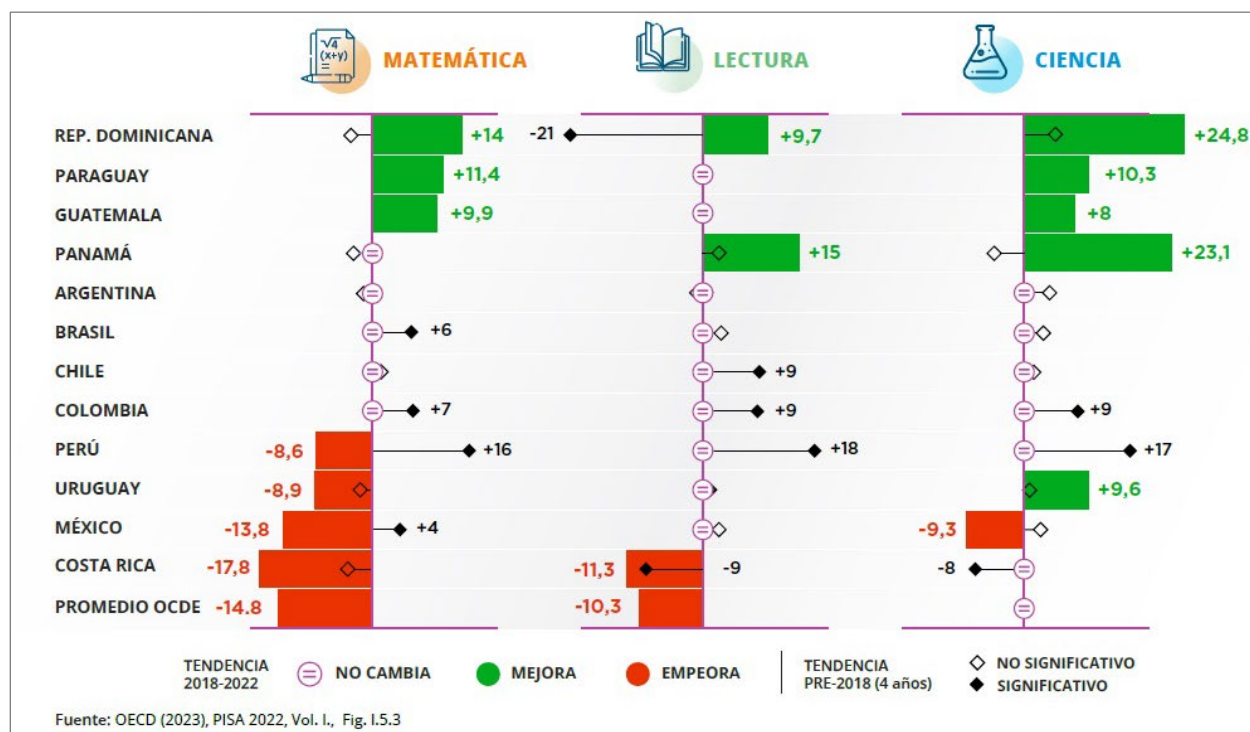


Figura 2. Variación del puntaje promedio PISA 2018-2022 en Matemática, Lectura y Ciencias, según tendencias previas

La formación docente difiere en los distintos países. Por ejemplo, el asistente de España señala que los profesores pueden ser habilitados, pudiendo haber arquitectos, ingenieros y otras carreras, quienes han estudiado un año de pedagogía.

Finalmente, y acorde a las comunicaciones presentadas en IV CEMACYC respecto a Lesson Study o estrategias similares que promueven el desarrollo del conocimiento profesional situado, incluyendo la capacidad de “mirar profesionalmente”, noticing, las situaciones de aula y aprender a partir de ellas de manera colaborativa.

Considerando los resultados en Matemática de los estudiantes de la República Dominicana quienes fueron los que más mejoraron su desempeño en la región con +14 puntos. Esto estaría sugiriendo que las políticas o intervenciones recientes podrían estar comenzando a tener impacto, lo cual es un argumento de esperanza para la mejora continua. La apreciación de la experiencia del asistente dominicano, señala que han tenido apoyo en la formación docente y han logrado ir cambiando desde una enseñanza contenidista y ejercitadora, a una enseñanza enfocada en aprendizajes con comprensión conceptual, lo cual podría redundar en un cambio en la educación matemática de la formación docente que permitiría construir competencias profesionales auténticas, conectando el conocimiento disciplinar y el conocimiento didáctico disciplinar en forma integrada.

Metodología de desarrollo profesional docente

Con el fin de otorgar una metodología que progresivamente se aplica en Chile, tanto en la formación inicial docente como en la formación continua, se presentaron en forma resumida tres modelos de Lesson Study chilenos, incluyendo uno con formadores de profesores y el trabajo interdisciplinar, teniendo el potencial transformador de programas de formación en el territorio. También se destaca la necesidad de acoger dimensiones socioemocionales del profesorado como parte constitutiva de su desarrollo profesional (Bossio et al.).

Estas experiencias se articulan con discusiones internacionales sobre el rol de las comunidades profesionales de aprendizaje, la investigación situada, y la integración de la práctica como objeto de formación. Modelos como el Estudio de Clases, consolidados en Japón y adaptados en diversas regiones del mundo, dan cuenta de su fortaleza como estrategia de mejora profesional sostenida, con una dinámica de teoría-práctica-teoría que enriquece a las comunidades de investigadores y docentes, y a profesores que investigan su práctica.

Algunas contribuciones chilenas sobre Lesson Study

Los actuales estándares de formación docente de Chile (CPEIP, 2021), reconoce que hoy sabemos que aquel o aquella docente que se hace experto/a a partir del ejercicio de su profesión, lo hace debido a la práctica, asociada a la reflexión y el análisis de esta; eso es lo que genera la experticia de enseñar. Asimismo, se reconoce que la atracción de buenos/as candidatos/as a la docencia y la formación inicial que realizan las universidades a través de los distintos programas de pedagogía, son claves para que el país disponga de profesionales preparados/as para el ejercicio de la profesión, pero también sabemos que frente a los grandes desafíos que debe enfrentar la docencia se requieren esfuerzos conjuntos.

La formación docente tendría como objetivo el desarrollo de la agencia docente, esto es, desarrollar la capacidad humana de influir en el desarrollo de los eventos a través de las propias acciones.

Esta agencia se ejerce a través de las funciones de (i) la intencionalidad —las personas formulan intenciones que incluyen planes de acción y estrategias para llevarlas a cabo—; (ii) la previsión —las personas definen metas y anticipan resultados para guiar y motivar sus esfuerzos—; (iii) la autorregulación y reflexión —las personas analizan su propio funcionamiento, su eficacia personal, la solidez de sus pensamientos y acciones, y realizan ajustes correctivos si es necesario—(Bandura, 2000).

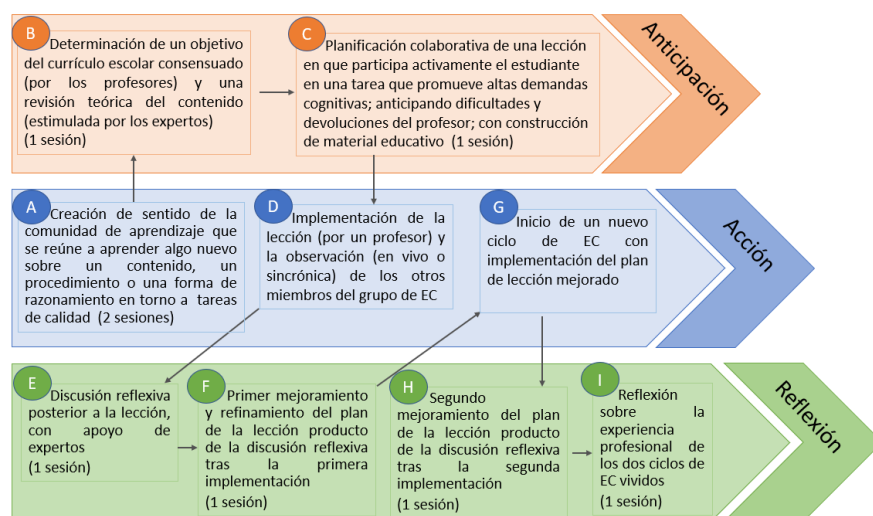


Figura 3. Agencia desde la triplete anticipación-acción-reflexión promovida por el estudio de Clases

Diversos estudios recientes han profundizado en el potencial del Estudio de Clases como estrategia formativa en distintos niveles y contextos. El modelo presentado en Figura 4 integra progresivamente los aspectos de anticipación, acción y reflexión del docente (ver Figura 3).

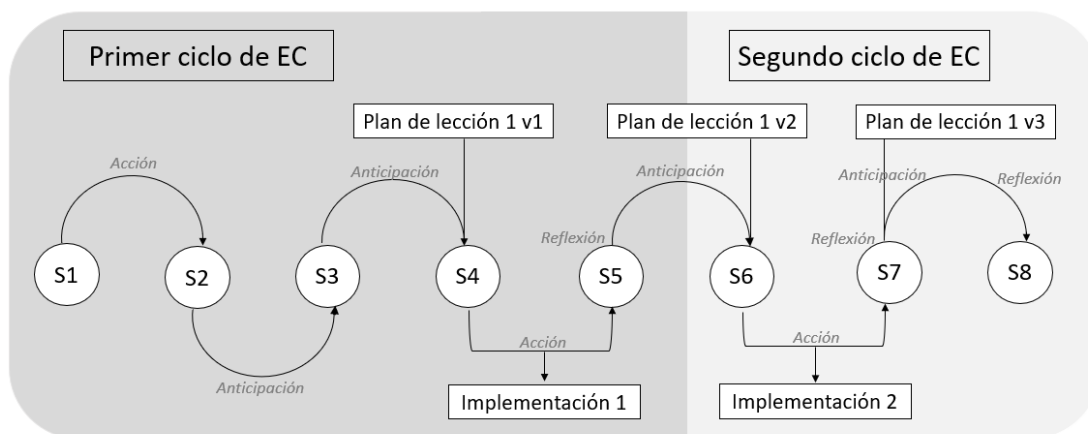


Figura 4. La triplete anticipación-acción-reflexión en el modelo chileno de Estudio de Clases

Desde la formación inicial, se ha evidenciado que este modelo (Figura 6 y 7) permite desarrollar competencias pedagógicas y matemáticas en futuros docentes (Olfos & Estrella, 2025; Ramírez & Estrella, 2024), promoviendo también instancias de reflexión sobre las propias creencias y prácticas (Reyes-Bravo et al., 2024).

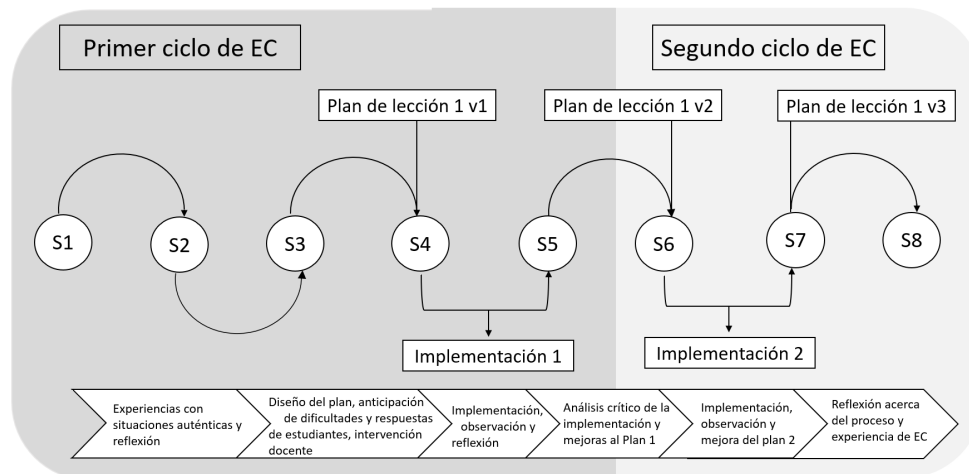


Figura 5. Modelo chileno de Estudio de Clases de ocho sesiones y dos implementaciones en formación continua

En el ámbito de la formación continua (ver Figura 5), investigaciones han mostrado cómo el Estudio de Clases favorece una "doble mirada" del formador, que articula el análisis de la práctica docente con el fortalecimiento de su propio conocimiento profesional (Reyes-Bravo et al., 2024).

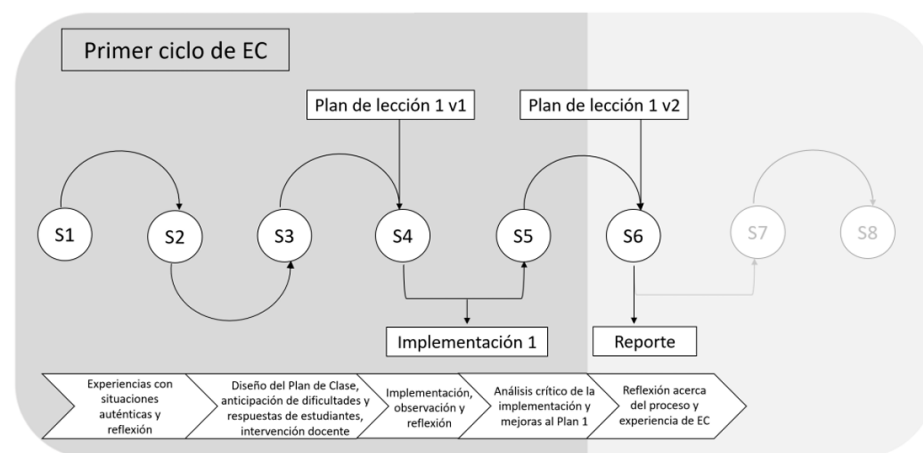


Figura 6. Modelo chileno de Estudio de Clases de seis sesiones y una implementación en formación inicial de profesores de secundaria

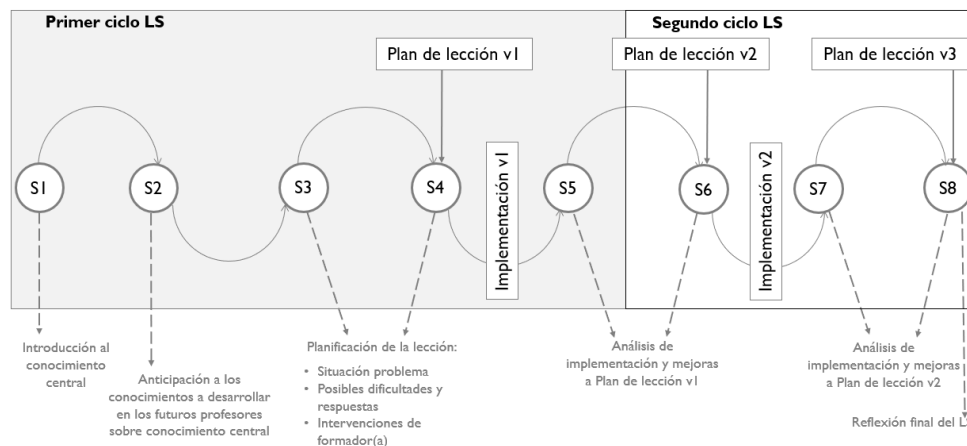


Figura 7. Modelo de Lesson Study con formadores de futuros profesores de primaria

A nivel de colaboración internacional, la experiencia de Estudio de Clases transfronterizo entre Chile y Brasil ha permitido explorar cómo el análisis conjunto de tareas puede contribuir a una educación para la sustentabilidad (Estrella et al., 2025) y a la vez contribuir a la formación docente interdisciplinar. Estas iniciativas se alinean con un modelo chileno que adapta el Lesson Study a las realidades locales, tanto con profesoras en servicio como con formadoras de docentes (Estrella & Olfos, 2023). Además, estudios sobre el desarrollo de sentido numérico o del desarrollo de pensamiento estadístico y pensamiento computacional mediante Estudio de Clases evidencian su impacto en la comprensión profunda de conceptos clave en estudiantes de la primera infancia y en los docentes que participan en grupos de Lesson Study (Estrella, 2025; Reyes-Bravo & Estrella, 2025).

En su conjunto, estas investigaciones destacan el Estudio de Clases como una estrategia potente, adaptable y generadora de conocimiento profesional situado, que puede lograr aprendizajes matemáticos de niñas, niños y jóvenes.

Consideraciones finales

Los trabajos reunidos en esta sesión muestran varias vías y consensos emergentes para mejorar la formación docente en servicio, como una formación situada, colectiva, orientada por la práctica y sensible al contexto. Una formación docente actual que requiere también una articulación entre saberes disciplinares, didáctico disciplinares, pedagógicos y socioemocionales que permita a los docentes reconstruir sus conocimientos y prácticas de forma reflexiva, colaborativa y crítica a lo largo del tiempo.

En este contexto, el *Lesson Study* (Estudio de Clases) aparece como una estrategia poderosa para enfrentar estas debilidades en la formación docente. Su enfoque situado y colectivo permite que los profesores analicen, diseñen, implementen y mejoren lecciones reales en contextos escolares, abordando de manera directa las brechas entre el conocimiento profesional tanto matemático como didáctico matemático. Al trabajar con colegas y expertos en la planificación de una lección, los docentes pueden enfrentar sus propias concepciones y prácticas, mientras se desarrollan profesionalmente con solidez desde la evidencia del aula real.

Complementariamente, el *mentoraje especializado* —que articula el acompañamiento entre pares con la asesoría de expertos— contribuye a sostener procesos de mejora más individualizados, especialmente en los primeros años de ejercicio docente o en reformas curriculares. Estos enfoques, cuando se integran en políticas institucionales, pueden preparar mejor a los docentes para implementar con éxito los currículos escolares, entendiendo sus propósitos, secuencias y énfasis conceptuales.

La investigación en la formación docente requiere avanzar hacia comprender cómo estos distintos enfoques —*Lesson Study*, mentoraje, tecnologías digitales u otras— pueden articularse en modelos híbridos de desarrollo profesional sostenible. Esto implica considerar las condiciones institucionales que permiten su implementación, los aprendizajes que generan en distintos perfiles sociales y culturales de los docentes, y su impacto en las oportunidades de aprendizaje matemático para los estudiantes. Con el fin de avanzar en el desarrollo profesional del docente que enseña matemáticas, esta Sesión Temática coordina el diálogo entre educadores matemáticos y experiencias de países iberoamericanos asistentes al IV CEMACYC, sobre la práctica docente y la colaboración, abordando aspectos del desarrollo profesional docente en la era de la IA.

Referencias y bibliografía

- Centro de Perfeccionamiento, Experimentación e Investigaciones Pedagógicas [CPEIP]. (2021). Estándares De La Profesión Docente Carreras De Pedagogía En Matemática Educación Media. <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17598/Matematica-Media.pdf?sequence=1&isAllowed=y>
- Estrella, S. (2025). What does preparing our boys and girls to interact with artificial agents mean? Perspectives from Early Statistical Education in Today's Classroom. In Cornejo, C., Felmer, P., Gómez, D. M., Dartnell, P., Araya, P., Peri, A., & Randolph, V. (Eds.), *Proceedings of the 48th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: General Contributions* (pp. 55-69). <https://www.igpme.org/>
- Estrella, S., Baldin, Y., Isoda, M., Morales, S., & Olfos, R. (2025). Estudio de Clases transfronterizo en educación primaria entre Brasil y Chile: análisis de tareas desde un marco de competencias en sustentabilidad. *Educação Matemática em Revista*, (en prensa).
- Estrella, S., & Olfos, R. (2023). Lecciones compartidas: un modelo chileno de Lesson Study aplicado con profesores de primaria y con formadoras de profesores. *Revista Paradigma*, Edición Temática Estudio de Clases: Contribuciones de la educación japonesa en diferentes países, Vol. XLIV, 110 – 130.
- OCDE (2023). PISA 2022 Results (Vol. I): The State of Learning and Equity in Education. PISA, OECD Publishing, Paris, <https://doi.org/10.1787/53f23881-en>
- Olfos, R., & Estrella, S. (2025). Lesson Study mathematics workshop-course: perceptions of pre-service primary school teachers. En Ceneida Fernández, Salvador Llinares, and Ban Heng Choy (Eds.), *Innovations in Initial Mathematics Teacher Education: New Developments and Insights*. SPRINGER.
- Ramírez, B., & Estrella, S. (2024). Perceptions of Lesson Study Effectiveness in Initial Teacher Training. *Revista Zetetiké*, 32, e0240010-e0240010.
- Reyes-Bravo, M., & Estrella, S. (2025). Percepciones de formadoras de profesores en Estudio de Clases sobre sentido numérico. *REXE, Revista de Estudios y Experiencias en Educación*, 24(54), 68-87. <https://doi.org/10.21703/rexe.v24i54.2763>
- Reyes-Bravo, M., Pascual, I., Contreras, L., & Estrella, S. (2024). Doble mirada del formador de profesorado de matemáticas: oportunidad para identificar su conocimiento. *PNA, Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 18(5), 467-493. <https://doi.org/10.30a827/pna.v18i5.29431>

Índice alfabético de autores

Adrián Gómez Árciga, 143
Adriana Breda, 86, 232
Augusta Osorio Gonzales, 227
Carlos Sánchez, 100, 240
Claudia Groenwald, 66, 208
Claudia Vargas, 195
Eduardo Basurto, 66, 122
Eduardo Iván Mancera, 66
Edwin Chaves-Esquivel, 272
Fredy Rivadeneira-Loor, 227
Gabriela Gómez Pasquali, 227
Gemma Sala-Sebastià, 232
Gilbert Valverde, 80
Gilberto Obando, 254
Jaime Carvalho e Silva, 30, 80
Jeser Candray, 174
Jorge Mello Román, 204
José Chamoso, 151
Karen Mancera, 66
Karina Rizzo, 162
Luis Antonio Soto Hernández, 215
Luis Carlos Arboleda, 110
Luis Fabián Gutiérrez, 92
Marcelo Bairral, 53
Michèle Artigue, 18
Omar Hernández Rodríguez, 131
Paola Valero, 2, 80
Patrick Scott, 66
Ricardo Poveda, 80
Salvador Llinares, 45, 66, 267
Soledad Estrella, 281
Sonia Cordero, 227
Yuriko Baldin, 185

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

