EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

Volumen 11. *Memorias* IV CEMACYC
República Dominicana, 2025

Patrick Scott, Yuri Morales y Angel Ruiz
Editores

REDUMATE

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025
[Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ćngel Ruiz. Colaboradora: Sarah Gonz§lez

Volumen 11: Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

ISBN Obra Completa: 978-9945-30-168-7 ISBN Volumen: 978-9945-30-207-3

Para citar la obra completa
Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc

Ejemplo para citar un volumen
Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC*. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1

Ejemplo para citar un artículo
Artigue, M. (2025). La enseñanza de las Matemáticas frente a los retos del mundo actual. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC (*pp. 18-29). Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1

Contenidos

Presentación

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 es el título de las *Memorias* del *IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (IV CEMACYC) que se llevó a cabo en Santo Domingo, República Dominicana, del 2 al 7 de noviembre de 2025.

Este congreso fue organizado por la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (REDUMATE) y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM). Este cuarto congreso tuvo un gran éxito con más de 300 ponencias con ponentes de 29 países que decidieron venir a esta región. Esto duplica la cantidad de ponencias que se suelen presentar en los CEMACYC. Es ahora un congreso consolidado, con mucho prestigio. La comunidad internacional decidió integrarse a este evento. El impacto regional es impresionante.

El congreso tuvo casi 800 participantes. Más de 400 docentes de la República Dominicana se beneficiaron directamente de conferencias, talleres, comunicaciones, carteles, sesiones informativas, reuniones de grupo, exposiciones de libros.

Varias instituciones dominicanas, con lucidez, apoyaron a sus maestros (incluso de lugares alejados del país) y aprovecharon esta valiosa oportunidad. Esto constituye un impacto formidable para la educación local.

En 2013 REDUMATE y la PUCMM organizaron el I CEMACYC. Muchos docentes aún recuerdan con orgullo el primer congreso y agradecen haber estado también en este. Hay una relación estratégica entre REDUMATE y PUCMM. República Dominicana es un foco clave para apoyar los esfuerzos regionales.

Esos días de noviembre completaron un proceso de tres años de preparación internacional y local, con autores, revisores, coordinadores de temas, equipos de plataforma (casi 200 personas), que ha apoyado cuidadosamente el fortalecimiento de capacidades en esta región.

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de los CEMACYC es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, los CEMACYC piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden leerse y descargarse en nuestras plataformas varios meses antes del congreso).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Científico Internacional* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, y a los casi 200 *Revisores científicos*.

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencia con base en *Open Journal Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

Agradecemos el valioso patrocinio de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). Debe recordarse que REDUMATE nació en Costa Rica, en el año 2012, dentro del *Capacity and Networking Project* (CANP) de ICMI. Con ya cuatro congresos exitosos y múltiples acciones educativas en la región, de impacto internacional, esta Red CANP es un ejemplo y un modelo.

En el IV CEMACYC fueron esenciales los apoyos del *Comité Interamericano de Educación Matemática* y del *Proyecto Reforma Matemática* en Costa Rica en la organización científica y en la logística tecnológica del congreso.

El *Comité Organizador Local* en la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente humano muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de este congreso, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.

Foto de grupo del IV CEMACYC

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 tiene 11 volúmenes con base en los temas del congreso:

1. Trabajos invitados del IV CEMACYC
2. Formación inicial de profesores
3. Formación continua y desarrollo profesional
4. Dimensiones culturales, políticas, económicas, y ambientales, de las Matemáticas y de la Educación Matemática
5. Currículo y evaluación
6. Historia y filosofía de las Matemáticas y de la Educación Matemática
7. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática
8. Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática
9. Investigación en Educación Matemática.
10. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar y Primaria
11. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, mesa redonda, minicursos, homenaje a Eduardo Mancera) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, pósteres en papel y digitales), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes. *REDUMATE* desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en el IV CEMACYC.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos), con el apoyo de Yuri Morales (Costa Rica). Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el respaldo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las página web oficial de REDUMATE: https://redumate.org/.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la Educación Matemática en América Central y El Caribe.

Saludos afectuosos

Ángel Ruiz
Presidente
Consejo Internacional
Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe
16 diciembre 2025

Actividades didácticas para la introducción de sucesiones y convergencia: Experiencia de aula en curso introductorio de Análisis Matemático

Kenneth **Esquivel** Murillo
Sede Regional del Sur, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
kenneth.esquivelmurillo@ucr.ac.cr

Resumen

La transición de la educación secundaria a la universidad en Costa Rica constituye un proceso desafiante para el estudiantado, especialmente en el ámbito del análisis matemático. En este contexto, la Universidad de Costa Rica ofrece la carrera de Educación Matemática en su sede central y en la Sede Regional del Sur, donde el curso MA0009 Números Reales se enfoca en los conceptos clave relacionados con sucesiones numéricas y convergencia. El presente escrito incluye una serie de actividades didácticas enfocadas en la comprensión de estos objetos matemáticos, con el objetivo de llevar a cabo una transición adecuada hacia este campo del conocimiento. Además, se incluyen resultados preliminares obtenidos al implementar estas dinámicas en el aula en la Sede del Sur.

Palabras clave: Análisis matemático; Convergencia; Costa Rica; Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza participativa; Enseñanza presencial; GeoGebra; Planeamiento educativo; Sucesiones numéricas.

Introducción

La carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica (UCR) se imparte desde 2017 en la Sede Rodrigo Facio, con una malla curricular actualizada a las necesidades del contexto costarricense. En 2021, se comenzó a ofrecer en la Sede Regional del Sur, en Golfito, Puntarenas, tras un estudio de factibilidad. Esta región enfrenta desafíos como deficiencias en infraestructura y una población laboralmente activa con bajo nivel educativo, lo que dificulta la transición a la educación universitaria, especialmente en Matemáticas. Además, existe una desigualdad significativa en la calidad educativa comparada con el promedio nacional (Díaz, 2023).

Ahora bien, en el primer año de la carrera de Educación Matemática se tienen los siguientes cursos del área matemática, los cuales se describen brevemente:

- *MA0002 Álgebra Elemental:* se centra en el estudio de operaciones básicas con números reales y sus propiedades, resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas de ecuaciones lineales.
- *MA0003 Fundamentos de la Matemática:* introduce el razonamiento lógico, la teoría de conjuntos y la inducción matemática.
- *MA0018 Tecnología en el Aula de la Matemática I:* presenta el uso de herramientas tecnológicas en la enseñanza de las Matemáticas.
- *MA0005 Introducción a las Funciones:* aborda el estudio de funciones matemáticas, incluyendo su definición, representación gráfica y aplicaciones en diversos contextos.
- *MA0006 Conjuntos Numéricos:* se construyen y analizan los diferentes conjuntos numéricos (naturales, enteros y racionales) y sus propiedades.

En el primer ciclo del segundo año, se cursa MA0009 Números Reales (entre otros cursos), centrado en las propiedades algebraicas y analíticas de los números reales, así como en la convergencia de sucesiones y las series geométricas, que formalizan las expansiones de números reales. Este curso continúa el enfoque en la Matemática formal y el desarrollo de habilidades de argumentación e introduce el análisis matemático para cursos posteriores como MA0012 Funciones Derivables.

A partir de lo anterior, en el presente escrito se describe una serie de actividades didácticas que tiene como objetivo facilitar el aprendizaje de conceptos como sucesión, convergencia y subsucesión, así como algunos teoremas aplicados al cálculo de límites de sucesiones. Además, se exponen los resultados preliminares derivados de la aplicación inicial de las dinámicas durante el segundo ciclo de 2024, así como de su posterior implementación en el primer ciclo de 2025.

Marco teórico

El paso de la educación secundaria a la universidad implica un cambio significativo en la manera en que las personas estudiantes abordan las Matemáticas, especialmente con la introducción del análisis matemático. En la educación secundaria, el enfoque predominante es algorítmico y procedimental, centrado en la resolución de tareas matemáticas mediante técnicas específicas. Sin embargo, en la universidad, se adopta un enfoque más formal y abstracto, donde el rigor lógico y las demostraciones cobran un papel fundamental (Tall, 1992). Este cambio se ve reflejado en la realidad costarricense, donde se sostiene que:

> (…) las cifras son elocuentes y muestran una realidad que los jóvenes arrastran desde la primaria y la secundaria. A criterio de los especialistas de la UCR, la deficiente formación en Matemática, que representa un gran abismo entre el colegio y la universidad, se ha venido profundizando en los últimos años, inclusive desde antes de la crisis sanitaria. (Picado, 2022)

El análisis matemático es una de las primeras áreas en las que el alumnado se enfrenta a conceptos fundamentales como límites, convergencia y continuidad, los cuales exigen un nivel de abstracción que no se desarrolla en la educación secundaria (estos conceptos no forman parte de los Programas de Estudio de Matemáticas del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica). Esta transición no solo implica la adquisición de nuevos conocimientos, sino también un cambio en la forma en que el estudiante aborda las Matemáticas, quien debe dejar atrás una visión operacional de la disciplina para adoptar una perspectiva más estructural y deductiva. Es decir, pasando de un enfoque basado en procedimientos y cálculos a uno fundamentado en razonamientos lógicos y demostraciones abstractas (Ascencio, R. y Eccius-Wellmann, 2019). Aunado a ello, en el curso MA0009, estos conceptos se presentan por primera vez, con el objetivo de prepararlos para el curso MA0012 Funciones Derivables, en el cual se estudian de manera más profunda, aplicados a funciones en lugar de sucesiones.

En concordancia con lo anterior, la transición al análisis matemático no solo requiere habilidades cognitivas, sino también la capacidad de trabajar con diferentes representaciones matemáticas, como expresiones algebraicas, gráficas y numéricas. El desarrollo de estas habilidades es fundamental para el éxito en los cursos iniciales de Matemáticas, y su ausencia puede ser una barrera para la comprensión profunda del análisis matemático (Martínez, 2008). Para facilitar esta transición, diversas investigaciones sugieren el uso de estrategias didácticas que incluyan actividades colaborativas. Por ejemplo, Yarlequé (2012) afirma que:

> (…) el aprendizaje cooperativo y progresivo de los conocimientos matemáticos contribuirá al desarrollo cognitivo de los estudiantes y a su formación, lo que potenciará capacidades y destrezas básicas como la observación, representación, interpretación de datos, análisis, síntesis, valoración, aplicación, actuación razonable. entre otras. (p. 1)

En ese sentido, el uso de analogías en este tipo de actividades puede ser de gran utilidad en cursos iniciales de carreras relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, pues permite que el concepto abstracto que se está estudiando se base en uno más familiar para el alumnado. Es decir, utilizar este recurso ofrece varias ventajas, especialmente cuando se trata del objeto sucesión numérica:

> Dado que el concepto de función es un tema presente tanto en la Matemática escolar como en la formación inicial de profesores, los resultados de esta investigación y de estudios sobre el conocimiento matemático y didáctico del profesor sobre la función, así como del uso de la analogía en su enseñanza, son potencialmente útiles para los formadores de profesores en el diseño de tareas en los cursos de formación inicial de profesores. (Espinoza-Vásquez *et al*., 2018)

Además, la introducción de software matemático puede ayudar a las personas estudiantes a visualizar conceptos abstractos y experimentar con ellos de manera interactiva. Herramientas como GeoGebra ofrecen la posibilidad de ver cómo varían los resultados a medida que se modifican parámetros en tiempo real, facilitando la comprensión de ideas complejas. Asimismo, al reducir la carga de cálculos extensos, el alumnado puede centrarse más en los aspectos conceptuales, como el comportamiento de una sucesión o la interpretación de resultados. Esto no solo hace que los conceptos sean más accesibles, sino que también favorece un aprendizaje más activo y enfocado en la comprensión. Sobre este software, Auccahuallpa, *et al*. (2022) destacan que:

> Los beneficios que promueve el uso de GeoGebra son la comprensión creativa y dinámica de conceptos, el desarrollo del pensamiento crítico-analítico, del razonamiento lógico-matemático y del razonamiento numérico; la realización de demostraciones dinámicas; la verificación de conjeturas; el desarrollo de aprendizajes significativos; el despertar del interés y la motivación en Matemática; el desarrollo de habilidades en el trabajo colaborativo y el de actitudes positivas hacia la Matemática. (p. 272-273)

Actividades didácticas

A continuación, se presentan las propuestas diseñadas para introducir y profundizar en los conceptos de sucesión y convergencia a través de actividades colaborativas y el uso de software matemático. La utilización de GeoGebra permite representar gráficamente sucesiones y visualizar de manera interactiva su comportamiento. Además, se emplea esta herramienta para ilustrar el teorema de intercalación, facilitando la comprensión de su aplicación en el análisis de límites. A través de estas actividades, las personas estudiantes también pueden experimentar con la noción de subsucesiones, favoreciendo una comprensión más intuitiva y visual de estos conceptos fundamentales en el análisis matemático.

1. Introducción al concepto de sucesión y convergencia: empresa de transformación numérica

A continuación, se presentan dos definiciones que se toman como base para la dinámica. Es importante mencionar que estas definiciones no forman parte de la actividad, sin embargo se colocan para la persona lectora con el fin de proporcionar el contexto necesario y facilitar una comprensión de los conceptos clave que se utilizarán durante el desarrollo de la propuesta.

Definición 1. Sucesión numérica. Una sucesión numérica es una función $a: A \rightarrow \mathbb{R}$ con $A \subseteq \mathbb{N}$. Para $n \in \mathbb{N}$ se denota $a_n = a(n)$ y se le llama el n-ésimo término de la sucesión. La sucesión se denota por (a_n) o también $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definición 2. Convergencia de una sucesión numérica. La sucesión (a_n) converge a $l \in \mathbb{R}$ si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N(\varepsilon) = N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|a_n - l| < \varepsilon$ para cada $n \geq N_\varepsilon$. En lenguaje matemático: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} \ / \ |a_n - l| < \varepsilon;\ \forall n \geq N_\varepsilon$. En tal caso, se dice que (a_n) es convergente y su límite es l o que (a_n) converge a l. Se escribe: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = l$. También se usa la notación $a_n \rightarrow l$. Si no existe tal l, la sucesión (a_n) es divergente.

Para dar inicio a la actividad, se menciona que las personas estudiantes forman parte de una empresa muy importante en el ámbito de las Matemáticas que se denomina ETN: Empresa de Transformación Numérica, la cual se encarga de seguir un procedimiento bastante riguroso y estructurado para transformar números naturales en otros números reales. A partir de lo anterior, en la empresa se tienen diferentes departamentos (cada uno debe contar con calculadora), los cuales se presentan a continuación:

- *Departamento A:* se encarga de escoger la materia prima (números naturales en orden, comenzando con el 1).
- *Departamento B:* se encarga de determinar el inverso multiplicativo del número recibido.
- *Departamento C:* se encarga de sumarle uno al número recibido.
- *Departamento D:* se encarga de elevar el número recibido al número inicial.

- *Departamento E:* se encarga de verificar el funcionamiento de los demás departamentos y concluir si la transformación numérica es correcta. Además, debe dar al departamento F el número recibido con dos decimales sin redondear.
- *Departamento F:* se encarga de llevar el inventario de la empresa y describir el proceso seguido para cada número.

Una vez que se mencionan los departamentos y definen las personas que los integran, entonces se procede a acomodar el aula. El departamento E debe estar cerca de la pizarra, pues el inventario se coloca ahí. Posteriormente, se ingresa el número 1 a la empresa, de modo que al pasar por los diferentes departamentos se obtiene el número 2. Luego se repite este procedimiento para los números 2, 3, 4 y 5, obteniendo 2.25, 2.37, 2.44 y 2.48 respectivamente. Seguidamente, se informa a la empresa que se recibió un nuevo cargamento de números que deben ser transformados, los cuales son: 50, 100, 200 y 300. Se obtendrá entonces 2.69, 2.70, 2.71 y 2.71 respectivamente. Finalmente, se realizan las siguientes preguntas al alumnado, esperando las respuestas que se colocan:

Preguntas	Respuestas esperadas
¿Es posible describir el funcionamiento de la empresa por medio de una expresión matemática?	Sí: $(n^{-1}+1)^n$
Si la empresa sigue operando con números mayores, ¿qué números se obtendrán?	2.71
Este número obtenido (2.71), ¿a cuál número real se aproxima?	Al número irracional e

2. Uso de GeoGebra

a. Representación gráfica de sucesiones

Para esta actividad es necesario que el alumnado cuente con computadora y el programa GeoGebra. El objetivo es construir un applet que permita representar gráficamente sucesiones numéricas. En el siguiente enlace, se presentan las instrucciones necesarias para que cada estudiante pueda generar su propio applet: https://6f33fa7f78ea46e2aaca-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/kenneth_esquivelmurillo_ucr_ac_cr/EWYBBxRxEzNLhr760wFnGpMBiqhIpZ6s2m3we7BZTNq-wA?e=x42L8K.

Finalmente, se invita a las personas estudiantes a explorar el applet con diferentes sucesiones y a presentar algunas de ellas a sus pares, destacando algunas características como acotamiento, monotonía y convergencia. En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo del applet: https://www.geogebra.org/m/zrqcvdct.

b. Teorema de intercalación (del emparedado)

A continuación, se presenta el teorema de intercalación, popularmente conocido como el teorema del emparedado.

Teorema de intercalación. Sean (a_n) y (b_n) dos sucesiones convergentes a l tales que $a_n \leq s_n \leq b_n$ a partir de n_0, entonces $\lim_{n\to\infty}(s_n) = l$.

A partir del recurso generado en la actividad anterior, se solicita al estudiantado que genere un applet para visualizar el comportamiento de las sucesiones implicadas en la resolución del siguiente ejercicio, en el que se ve involucrado el teorema de intercalación:

Determine hacia qué valor converge la sucesión numérica $a_n = \frac{cos(n)}{n}$.

Finalmente, se discute con el estudiantado la resolución del ejercicio y se aprecia gráficamente el comportamiento de las sucesiones. En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo del applet: https://www.geogebra.org/m/qmvamkcb.

c. Subsucesiones

A continuación, se presenta la definición de este concepto y un ejercicio matemático, con el fin de apreciar la utilidad del applet que se generará.

Definición 3. Subsucesión numérica. Dada una sucesión $a = (a_n)$ y una función $\varphi: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, se dice que $b = a \circ \varphi$ es subsucesión de a. En otras palabras, la sucesión (b_n) es subsucesión de (a_n) si existe tal φ de manera que $b_k = a_{\varphi(k)}$, para cada $k \in \mathbb{N}$. En tal caso se denota $b = \left(a_{\varphi(k)}\right)$ o $b = \left(a_{n_k}\right)$, donde $n_k = \varphi(k)$.

A partir del recurso generado en la actividad anterior, se solicita al estudiantado que genere un applet para visualizar el comportamiento de la sucesión y subsucesión implicadas en la resolución del siguiente ejercicio:

Considere la sucesión $a_n = \frac{3\cdot sen\left(\frac{n^4+n^3-n^2-n}{3n+3}\right)+3n\cdot sen\left(\frac{n^3-n}{3}\right)}{n^4+n^3-n^2-n}$. Determine b_n y la función φ que comprueba que a_n es una subsucesión de b_n. Además, calcule $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3\cdot sen\left(\frac{n^4+n^3-n^2-n}{3n+3}\right)+3n\cdot sen\left(\frac{n^3-n}{3}\right)}{n^4+n^3-n^2-n}\right)$.

Finalmente, se discute con el estudiantado la resolución del ejercicio y se aprecia gráficamente el comportamiento de las sucesiones. En el siguiente enlace se encuentra un ejemplo del applet: https://www.geogebra.org/m/h5cvvca5.

Discusión

La actividad colaborativa permitió que las personas estudiantes se involucraran activamente en la dinámica, participando con interés y verificando el trabajo de sus compañeros. La analogía utilizada, en la que cada grupo representaba un departamento dentro de una empresa, promovió un sentido de responsabilidad en cada equipo, fortaleciendo la comprensión del rol que desempeñaban dentro del proceso. Al plantear las preguntas finales, las respuestas obtenidas fueron las esperadas, confirmando que la sucesión analizada se acercaba progresivamente al número e. Este concepto se estudia de manera formal en el curso MA0009, lo que permitió establecer una conexión con contenidos futuros y generar una base intuitiva en el alumnado.

El uso de GeoGebra resultó ser una herramienta clave en la actividad, ya que facilitó la representación gráfica de las sucesiones sin necesidad de realizar cálculos extensos. Esto optimizó el tiempo de trabajo y permitió centrar la atención en la comprensión conceptual del objeto matemático. El interés del estudiantado se evidenció en las preguntas formuladas durante la sesión, así como en los applets generados y en la aplicación de la herramienta en otras actividades del curso. En cuanto a los recursos empleados para abordar el teorema de intercalación y el concepto de subsucesiones, se observó que fueron útiles para comprender la teoría y su interpretación gráfica. No obstante, su aplicación en la resolución de ejercicios resultó limitada, ya que la representación visual solo complementa el análisis algebraico, pero no sustituye la necesidad de desarrollar el procedimiento matemático de forma rigurosa.

Conclusiones

La transición de la secundaria a la universidad en Matemáticas es un desafío, ya que implica pasar de un enfoque que suele ser algorítmico a uno más formal y abstracto, especialmente en análisis matemático, exigiendo nuevas habilidades y comprensión profunda de conceptos como sucesión y convergencia (Tall, 1992). Con base en lo anterior, diferentes investigaciones evidencian que el rezago en la formación matemática de la educación secundaria en Costa Rica dificulta esta transición (Picado, 2022). La falta de familiaridad con los procesos formales de demostración y con el razonamiento abstracto hace que el alumnado encuentre dificultades al enfrentarse a cursos universitarios como MA0009 en los que se tiene el primer acercamiento al análisis matemático. Por ello, se vuelve fundamental diseñar estrategias didácticas que faciliten la apropiación de estos conceptos de manera progresiva y significativa.

Para fortalecer el aprendizaje de conceptos matemáticos en el análisis, es fundamental emplear metodologías diversificadas que vayan más allá de la exposición teórica y la resolución de ejercicios descontextualizados. En lugar de depender exclusivamente de clases magistrales, se recomienda diseñar actividades que fomenten la participación activa del estudiantado, permitiéndole involucrarse en el quehacer matemático y construir su propio conocimiento. Las actividades colaborativas y contextualizadas resultan especialmente valiosas, ya que facilitan la apropiación de las Matemáticas mediante la exploración, el razonamiento y la resolución de problemas en contextos significativos (Yarlequé, 2012).

Asimismo, el uso de tecnología desempeña un papel esencial en la visualización y comprensión de conceptos fundamentales del análisis, como sucesión, convergencia y subsucesión, además de contribuir a la interpretación intuitiva de teoremas matemáticos. En este sentido, se recomienda desarrollar estrategias didácticas que integren herramientas digitales como GeoGebra, permitiendo que las personas estudiantes exploren de manera dinámica las propiedades de los objetos matemáticos y generen representaciones visuales que fortalezcan su comprensión. Para profundizar en la asimilación de teoremas complejos, es conveniente promover experiencias en las que el estudiantado no solo utilice recursos tecnológicos predefinidos, sino que también tenga la oportunidad de construir sus propias representaciones interactivas. A través de la creación de modelos y simulaciones en GeoGebra, el alumnado puede identificar patrones, formular conjeturas y validar propiedades matemáticas, desarrollando así un aprendizaje más autónomo (Auccahuallpa, *et al*., 2022).

La combinación de estrategias colaborativas, el uso de software matemático y la implementación de analogías puede constituir un enfoque integral y efectivo para abordar la enseñanza de las sucesiones y su convergencia en cursos introductorios de Matemáticas. Estos recursos no solo facilitan la comprensión conceptual, sino que también podrían promover creencias positivas hacia las Matemáticas y el desarrollo del pensamiento matemático riguroso, preparando al estudiantado para afrontar con éxito cursos más avanzados en el área del análisis matemático.

Referencias y bibliografía

Ascencio, R. & Eccius-Wellmann, C. (2019). Desarrollo del sentido estructural en alumnos universitarios mediante el uso de la Teoría de la Variación en el manejo de expresiones algebraicas racionales. *Educación matemática, 31*(2), 161-194. https://doi.org/10.24844/em3102.07

Auccahuallpa, R., Troya, R. & Rodríguez, D. (2022). Beneficios del uso de GeoGebra en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Universidad, aprendizajes y retos de los objetivos del desarrollo sostenible*, 267-273. http://repositorio.unae.edu.ec/bitstream/56000/2587/1/267%20Beneficios%20del%20uso%20de%20Geogebra.pdf

Díaz, E. (2023). La experiencia en la formación de educadores matemáticos en la Región Brunca de Costa Rica. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 17(1), 91-108. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/55707/59168

Espinoza-Vásquez, G., Zakaryan, D. & Carrillo, J. (2018). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas en el uso de la analogía en la enseñanza del concepto de función. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa, 21*(3), 301-324. https://doi.org/10.12802/relime.18.2133

Martínez, M. (2008). *Diferentes representaciones en matemática: una entrevista*. VI Festival Internacional de Matemática 29 al 31 de mayo, 2008, Colegio Bilingüe San Agustín, Palmares, Costa Rica. https://d9.cientec.or.cr/archivo/matematica/2010/ponenciasVI-VII/Margot-2.pdf

Picado, P. (2022, 19 de abril). *La formación y enseñanza de la matemática requieren una urgente transformación*. Universidad de Costa Rica. https://www.ucr.ac.cr/noticias/2022/4/19/la-formacion-y-ensenanza-de-la-matematica-requieren-una-urgente-transformacion.html

Tall, D. (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). Macmillan.

Yarlequé, C. (2012). Trabajo colaborativo en el área de Matemáticas. En blanco y negro, *Revista sobre Docencia Universitaria*, *3*(1), 26-35. https://revistas.pucp.edu.pe/index.php/enblancoynegro/article/download/2889/2815/0

Articulação entre teoria e prática na aplicação da geometria em uma horta escolar

Luciana Yoshie **Tsuchiya**
Instituto Federal do Paraná - Campus Paranavaí
Brasil
luciana.tsuchiya@ifpr.edu.br
Andréia Araújo de Farias **Aquino**
Instituto Federal do Paraná - Campus Paranavaí
Brasil
andreia.aquino@ifpr.edu.br
Rosemeire Carvalho da **Silva**
Instituto Federal do Paraná - Campus Paranavaí
Brasil
rosemeire.silva@ifpr.edu.br

Resumo

Este trabalho apresenta o desenvolvimento de atividades relacionadas com a construção de canteiros em formatos hexagonais, circulares e retangulares em um projeto envolvendo uma horta em uma instituição pública de ensino no Brasil. O objetivo das atividades foi explorar propriedades geométricas e teoremas relacionados às figuras envolvidas, proporcionando uma articulação entre a teoria e a prática dentro de um contexto e o trabalho colaborativo. As atividades foram conduzidas por professoras de Matemática em parceria com a professora de horticultura para alunos do curso Técnico em Agroindústria Integrado ao Ensino Médio e alunos voluntários dos demais cursos. A metodologia das atividades de construção para cada formato consistiu em 4 etapas: apresentação do problema/proposta da construção dos canteiros para os alunos e planejamento em sala de aula, execução prática da estratégia definida em sala e verificação com ajustes na área da horta. Os principais resultados incluem o fortalecimento do aprendizado prático, a integração interdisciplinar e o engajamento dos alunos no desenvolvimento do projeto, evidenciando a importância do trabalho colaborativo e a aplicação dos conteúdos matemáticos na prática.

Palavras-chave: Horticultura; Contextualização; Propriedades Geométricas.

Introdução

A geometria é uma das áreas mais antigas e fascinantes da Matemática, com raízes na necessidade humana de compreender e organizar o espaço. Suas aplicações vão desde a arquitetura e a engenharia até a biologia e a arte, evidenciando sua transversalidade. Contudo, no contexto educacional brasileiro, o ensino da geometria enfrenta desafios históricos, sendo frequentemente reduzido a abordagens algorítmicas e descontextualizadas. Esse cenário contribui para uma visão fragmentada da geometria, dificultando sua compreensão como ferramenta essencial para a resolução de problemas do cotidiano.

Essa desconexão da geometria com o cotidiano evidencia a necessidade de metodologias que aproximem os conceitos geométricos da realidade dos alunos, tornando o aprendizado mais significativo. Com essa perspectiva foram realizadas atividades interdisciplinares em um projeto de construção de uma horta em uma instituição pública de ensino no Brasil, integrando a Matemática à construção de canteiros. Nas atividades foram planejados e construídos canteiros hexagonais, circulares e retangulares, com o objetivo de explorar propriedades geométricas e teoremas relacionados às figuras envolvidas.

Além da contextualização proporcionada pela atividade, destaca-se a articulação entre teoria e prática, que enriqueceu o aprendizado, favorecendo a consolidação do conhecimento por meio da experiência direta, além de fomentar o trabalho colaborativo e a percepção espacial.

Neste trabalho descreveremos as atividades realizadas, analisando as abordagens adotadas para cada formato de canteiro. Destacaremos os aspectos positivos da iniciativa e discutiremos os desafios encontrados, buscando apontar caminhos para aprimorar essa abordagem e potencializar seu impacto no ensino da geometria.

Fundamentação teórica

O ensino da geometria no Brasil enfrenta desafios históricos, marcados por dificuldades na formação docente, abordagens excessivamente teóricas e uma falta de conexão com o cotidiano dos alunos. Esses fatores contribuem para a desmotivação e para lacunas no aprendizado. Nesse contexto, segundo Lorenzato (1995), aprender geometria vai além da mera memorização de fórmulas, trata-se de compreender as propriedades e relações entre figuras e aplicá-las em contextos práticos. Sobre isso, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC), documento normativo que define os aprendizados essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo da educação básica no Brasil, destaca que a geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas. A Geometria deve envolver o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento (Brasil, 2018, p. 271).

A fragmentação do ensino da geometria, que se limita a abordagens algorítmicas e desconectadas da realidade dos alunos, impede uma aprendizagem mais significativa. A fragmentação do conhecimento na educação tradicional é criticada por Edgar Morin, que aponta como a escola ensina a isolar os objetos de seu meio, a separar disciplinas e a dissociar problemas, em vez de reconhecer suas correlações e integrá-los. Segundo Morin (2003), "obriga-se a reduzir o complexo ao simples, isto é, a separar o que está ligado; a decompor e não a recompor; e a eliminar tudo que causa desordem ou contradições em nosso entendimento" (p. 15).

Nesse sentido, a horta no ambiente escolar pode ser um espaço rico para o aprendizado, pois permite a contextualização da Matemática, em especial a geometria, e de outras áreas do saber, como biologia, química, geografia (Rezende *et al*, 2014) e áreas técnicas, além de possibilitar a abordagem de temas transversais como meio ambiente e alimentação saudável (Silva e Fonseca, 2011). Mais do que isso, a horta proporciona o desenvolvimento de atividades práticas que articulam teoria e prática, incentivam o trabalho cooperativo e favorecendo uma aprendizagem significativa.

Promover essa articulação entre teoria e prática é um desafio no contexto educacional. Como destacam André e Mediano (2001, p. 167), "o ensino precisa estar calcado na experiência concreta dos alunos, exigindo também uma atuação fundamental do professor, que vai transformar a massa de conhecimentos existentes numa matéria preparada, ordenada e simplificada para ser assimilada pelo aluno. Aí é que se encontra o cerne do trabalho pedagógico: no confronto da prática social do aluno com o conhecimento organizado trazido pelo professor, o que propicia o desenvolvimento de novas formas de atuação sobre a realidade." Nesse sentido, a horta escolar se configura como um espaço privilegiado para essa articulação, possibilitando aprendizagens que vão além da sala de aula e promovem uma educação mais conectada com o cotidiano e as necessidades dos estudantes.

Metodologia de aplicação das atividades

As atividades de construção dos canteiros foram realizadas por duas professoras de Matemática, em colaboração com a professora responsável pela disciplina de Horticultura, integrante da grade curricular do curso Técnico em Agroindústria Integrado ao Ensino Médio. O trabalho foi dividido em três conjuntos de atividades, uma para cada tipo de canteiro (hexagonal, circular e retangular), realizados em momentos distintos. A maioria dos participantes foi composta por alunos do curso Técnico em Agroindústria Integrado ao Ensino Médio, mas também participaram, de forma voluntária, estudantes dos cursos Técnicos em Informática e Mecatrônica Integrados ao Ensino Médio e alguns do Ensino Superior.

As atividades foram conduzidas em três etapas principais: apresentação do problema/proposta e planejamento em sala de aula, execução da estratégia e verificação com ajustes na área da horta. Os problemas foram apresentados conforme descrevemos a seguir.

Canteiros Hexagonais: Construir canteiros para uma horta mandala (Lessa *et al*, 2021) no formato hexagonal. O projeto deveria incluir três caminhos que deveriam atravessar os canteiros para acesso à área central.

Canteiros Circulares: Construir canteiros para uma horta mandala com canteiros circulares organizados em dois conjuntos concêntricos. Assim como no formato hexagonal, três caminhos atravessariam os canteiros para acesso ao centro da horta.

Canteiros Retangulares: Construção de canteiros retangulares com aproximadamente 4 metros de comprimento e largura suficiente para permitir acesso confortável ao centro. As dimensões deveriam considerar que posteriormente os canteiros seriam cercados com blocos de concreto de dimensões 39 cm x 14 cm, que não poderiam ser cortados, e o posicionamento dos canteiros deveria prevenir erosão e perda de nutrientes pela água.

Para cada proposta os alunos seriam incentivados a discutir as vantagens e desvantagens de cada formato, analisando aspectos matemáticos, operacionais, biológicos e ambientais. A discussão incluiu também a análise das propriedades geométricas relevantes e a definição da estratégia de construção. As professoras mediaram as discussões, provocando reflexões por meio de perguntas e relembrando propriedades e teoremas úteis para a tarefa. Na sequência os alunos teriam que pensar estratégias para demarcar os canteiros levando em consideração que teriam a sua disposição estacas de madeira, martelo, fio de barbante ou de nylon, trena e esquadro.

Estratégias e desenvolvimento

A seguir descreveremos resumidamente a execução das estratégias definidas para as práticas.

Canteiros hexagonais

Após analisarem as características e propriedades do hexágono regular, os alunos propuseram criar uma circunferência centrada no centro da horta Mandala e, para isso, utilizaram um compasso feito com estacas e barbantes. Na circunferência, marcaram os vértices sequencialmente de forma adjacente, mantendo sempre uma distância igual à medida do raio da circunferência entre vértices adjacentes. Embora a estratégia estivesse correta, na prática o primeiro e o quinto vértice ficaram a uma distância muito maior que a medida do raio. Os alunos identificaram que variações no nível do terreno, a tendência do barbante em esticar e erros nas medições poderiam ser as causas para que a estratégia não tivesse dado certo. Diante disso, elaboraram uma nova estratégia para minimizar esses problemas, que considerou a determinação dos vértices por meio do diâmetro da circunferência.

Dessa forma, a partir do primeiro vértice sobre a circunferência, os alunos tomaram como segundo vértice o ponto diametralmente oposto. Em seguida, determinaram o terceiro vértice adjacente ao primeiro e o quarto diametralmente oposto a este. Repetiram o processo para encontrar os dois vértices restantes. A estratégia foi bem sucedida na prática.

Na Figura 1, está registado o momento da apresentação da proposta e do planejamento realizado em sala de aula. Já na Figura 2, podemos observar os canteiros hexagonais construídos.

Figura 1. Planejamento dos canteiros hexagonais.

Figura 2. Canteiros hexagonais da horta mandala.

Canteiros Circulares

Em sala de aula, os alunos iniciaram a atividade elaborando um esquema dos canteiros utilizando régua e compasso (Figura 1). Quanto aos caminhos que deveriam atravessar os canteiros, conforme solicitado pelas professoras, os alunos rapidamente concluíram que eles precisariam formar ângulos de 120° entre si. Assim, deduziram que seria necessário dividir a circunferência externa em três partes iguais. Entretanto, enfrentaram dificuldades para sistematizar essa divisão. As professoras intervieram e questionaram se seria possível desenhar um triângulo equilátero dentro da circunferência. Após reflexões e discussões, os alunos entenderam que isso era viável e resolveria o problema deles. As professoras, então, os desafiaram a pensar em como construir esse triângulo utilizando régua e compasso. A estratégia mais simples sugerida foi traçar o diâmetro da circunferência, posicionar o compasso em uma das extremidades do diâmetro e, com abertura igual ao raio, girá-lo obtendo uma circunferência cujos pontos de interseção com a primeira juntamente com a outra extremidade do diâmetro, formariam os vértices de um triângulo equilátero. A estratégia foi bem-sucedida na prática e foi executada sem grandes dificuldades (Figura 2).

Figura 3. Atividade em sala.

Figura 4. Atividade prática na área da horta.

Canteiros retangulares

A estratégia que propuseram para demarcar os canteiros na terra foi simples. Inicialmente, traçariam um dos lados maiores do retângulo. A partir de uma extremidade desse lado, passariam uma linha com a medida no lado menor, formando um ângulo de 90° com auxílio do esquadro. O mesmo procedimento seria repetido na outra extremidade, marcando o outro lado menor. Por fim, o quarto lado seria determinado conectando as extremidades opostas dos dois lados menores. Na Figura 5 temos um registro da execução dessa estratégia. Embora demarcar os canteiros retangulares parecesse uma tarefa fácil, as professoras alertaram os alunos de que a execução era totalmente manual, com materiais rudimentares e em terreno com desníveis. Salientaram a importância de verificar se a demarcação realizada no terreno estava de acordo com o planejado, pois qualquer deformação comprometeria a colocação precisa dos blocos de concreto. Nesse momento foram relembradas as propriedades do retângulo e o Teorema de Pitágoras. E a partir daí, surgiram ideias, como usar o teorema para checar se os cantos possuíam 90° ou comparar as diagonais do quadrilátero demarcado. Se elas possuíssem a mesma medida e se interceptassem no ponto médio, o quadrilátero seria um retângulo.

De fato, estas estratégias ajudaram a verificar na prática que alguns canteiros apresentaram inconsistências e foi preciso fazer adequações. Um dos alunos sugeriu então que após demarcar o primeiro lado, fossem utilizadas duas linhas do comprimento da diagonal. Essas linhas seriam presas nas extremidades do primeiro lado demarcado e cruzadas em seu ponto médio. As extremidades opostas das linhas determinariam os outros vértices do retângulo.

Figura 5. Execução da estratégia para construção dos canteiros retangulares

Análise e comparação das abordagens

A atividade em sala de aula relacionada aos canteiros hexagonais foi realizada com os alunos divididos em grupos de até cinco integrantes; para os canteiros circulares, a divisão foi em duplas; e, para os canteiros retangulares, não houve divisão em grupos. Observamos que grupos menores favorecem uma maior participação. Embora os alunos tenham sido organizados em grupos, a definição da estratégia para a construção dos canteiros foi feita em conjunto com toda a turma. Na atividade prática, os alunos foram divididos em dois grupos que trabalharam em momentos distintos, o que facilitou a organização pelas professoras. A atividade prática mais desafiadora para as professoras foi a construção dos canteiros retangulares, na qual subgrupos simultâneos ficaram responsáveis por demarcar diferentes canteiros, o que dificultou a atenção individualizada.

Os formatos circulares e hexagonais dos canteiros da horta mandala, menos convencionais, despertaram maior interesse dos alunos. Já os canteiros retangulares, inicialmente menos atrativos, apresentaram o desafio de posicioná-los no terreno para evitar erosão, lixiviação e perda de nutrientes.

A proposta dos canteiros circulares possibilitou atividades de construção com régua e compasso, nas quais os alunos, em duplas, elaboraram todo o esquema utilizando esses materiais.

Na execução prática, criaram um compasso gigante com estacas, barbante e usaram a trena no lugar da régua. Em relação à proposta dos demais formatos, embora não tenhamos sugerido o uso de régua e compasso, percebemos que essas atividades poderiam ter sido enriquecidas com sua aplicação. Para os canteiros retangulares, por exemplo, seria possível construir os lados, traçando a reta mediatriz com régua e compasso, dispensando o esquadro. Já no hexágono, a régua seria usada apenas para ajustar a abertura do compasso ao raio da circunferência circunscrita, permitindo construir todo o hexágono apenas com o compasso, mantendo essa abertura constante.

No planejamento, os alunos demonstraram maior facilidade para elaborar estratégias para os canteiros retangulares. Contudo, essa simplicidade não incentivou muitas pesquisas, discussões ou revisitações de conteúdos. Por isso, após o planejamento inicial, as professoras questionaram como poderiam verificar na prática se o quadrilátero era de fato um retângulo. A partir desse ponto, foram relembradas as propriedades desse quadrilátero e o Teorema de Pitágoras, enriquecendo a atividade. Isso também abriu espaço para explorar a história da Matemática, como o método usado pelos antigos egípcios, por volta de 600 a.C., que utilizavam uma corda com 13 nós regularmente espaçados para determinar ângulos retos fazendo uso do Teorema de Pitágoras. Determinar a estratégia para demarcar os círculos interno e externo dos canteiros circulares foi simples; a maior dificuldade, como mencionado, foi definir estratégias para marcar os três caminhos solicitados. Já o planejamento do canteiro em formato de hexágono regular também foi tranquilo, possivelmente devido à condução da atividade. Primeiro, abordamos as propriedades do hexágono, as medidas dos ângulos externos e demonstramos que ele pode ser circunscrito em uma circunferência, o que facilitou a elaboração da estratégia pelos alunos. Contudo, identificamos que a atividade poderia ter sido mais enriquecedora se os alunos tivessem inicialmente autonomia para explorar e pesquisar, com nossa intervenção apenas quando necessário.

Quanto à etapa de verificação e ajustes, após a revisão das atividades, nos surpreendemos com as estratégias propostas para os reajustes dos canteiros hexagonais e retangulares, já descritas neste relato. Merece destaque a proposta de reconstruir o retângulo a partir da propriedade de que suas diagonais são iguais e se cruzam no ponto médio, uma vez que essas propriedades, inicialmente usadas para verificação, passaram a ser aplicadas na construção, invertendo sua finalidade. Para o canteiro circular, não houve necessidade de ajustes. Identificamos que a etapa de ajustes é uma oportunidade riquíssima para aprofundar conceitos, estimular a criatividade e promover um aprendizado mais significativo por meio da aplicação prática de propriedades geométricas.

Considerações Finais

As atividades desenvolvidas demonstraram como a abordagem prática enriquece significativamente o aprendizado. As estratégias iniciais propostas pelos alunos para a construção dos canteiros estavam corretas, mas a prática revelou variáveis adicionais que precisavam ser controladas. Essa descoberta aprimorou a compreensão das propriedades das figuras geométricas envolvidas, e também estimulou a criatividade dos alunos, especialmente na adaptação das estratégias dos formatos como os canteiros retangulares e hexagonais.

Embora as atividades não tenham sido planejadas de forma intencional com base em tendências contemporâneas da Educação, foi possível identificar conexões com várias abordagens como por exemplo, a Aprendizagem Baseada em Problemas (Luchesi *et al*, 2022, p. 33). Para que essa perspectiva seja plenamente integrada, seria necessário proporcionar mais tempo para que os alunos realizassem pesquisas independentes sobre as figuras geométricas na fase inicial do trabalho, em vez de as professoras intervirem para preencher as lacunas no conhecimento deles. Além disso, seria interessante que cada grupo trabalhasse inicialmente de forma independente dos demais grupo, propondo uma estratégia, que fosse posteriormente apresentada e discutida com a turma toda. Essas mudanças seriam pontos de melhoria na proposta das atividades e pretendemos aplicá-las em uma próxima oportunidade. Contudo, é importante destacar que se a proposta for realizada no tempo das aulas regulares, sempre enfrentamos a limitação do tempo disponível, dado que o conteúdo programático da disciplina é extenso e propostas desse tipo demandam mais tempo.

Cabe ressaltar que o projeto da horta envolveu os alunos em todas as etapas, desde o plantio até os cuidados com as plantas e a colheita. Para os alunos do curso técnico em Agroindústria Integrado ao Ensino Médio, foi proposto que, ao final do projeto, eles desenvolvessem um produto inovador utilizando os alimentos que cultivaram. Essa proposta aumentou ainda mais o engajamento deles na construção e no planejamento dos canteiros, tornando a experiência ainda mais significativa.

Referências e bibliografia

André, M. E. D. A., e Mediano, Z. D. (2001). O cotidiano da escola: Elementos para a construção de uma Didática Fundamental. In V. Candau (Org.), *Rumo a uma nova Didática* (12ª ed., pp. 3–13). Petrópolis: Vozes.

Brasil, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base nacional comum curricular: Educação é a base*. Brasília, DF: MEC/SEB.

Lessa, A. C. V., Batista, R. O. S., e Shimada, S. O. (2021). *Guia de produção de uma horta Mandala agroecológica para escolas sustentáveis*. São Cristóvão, Sergipe: Universidade Federal de Sergipe.

Lorenzato, S. A. (1995). Porque não ensinar geometria? *A Educação Matemática em Revista*, 3(4), 3–13.

Luchesi, B. M., Lara, E. M. de O., e Santos, M. A. dos. (Orgs.). (2022). *Guia prático de introdução às metodologias ativas de aprendizagem* [Recurso eletrônico]. Campo Grande, MS: Ed. UFMS. https://repositorio.ufms.br. ISBN 978-65-86943-72-6

Morin, E. (2003*). A cabeça bem feita: Repensar a reforma – Reformar o pensamento* (8ª ed.). Rio de Janeiro: Bertrand Brasil.

Rezende, B. L. A., Almeida, J. S. de, Amado, M. V., Pereira, M. R., Carvalho, V. S. de, Endringer, D. C., e Leite, S. Q. M. (2014). A interdisciplinaridade por meio da pedagogia de projetos: Uma análise do projeto "Horta Escolar: Aprenda Cultivando Hortaliças" numa perspectiva CTSA. *Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica*, 4(1), 179–191.

Silva, E. C. R., e Fonseca, A. B. (2011). Hortas em escolas urbanas, complexidade e transdisciplinaridade: Contribuições para o ensino de ciências e para a educação em saúde. *Revista Brasileira de Pesquisa em Educação em Ciências,* 11(3), 35–53. https://periodicos.ufmg.br/index.php/rbpec/article/view/4207/2772. Acesso em: 12 mar. 2025.

Bitácoras de escritura en un curso de Álgebra Lineal: Un análisis de producción con LLM desde la investigación basada en diseño

Carlos **Rojas Bruna**
Facultad de Matemáticas, Pontificia Universidad Católica de Chile
Chile
carojasb@uc.cl

Resumen

Con el objetivo de evaluar el impacto de las bitácoras de escritura en el aprendizaje del Álgebra Lineal, este estudio examina su uso como herramienta para identificar factores conceptuales y no académicos que influyen en el desempeño estudiantil. Se implementó una estrategia basada en la investigación basada en diseño (DBR), con bitácoras semanales recopiladas en la plataforma Canvas y analizadas mediante Modelos de Lenguaje de Gran Escala (LLM). Los hallazgos indican que la participación constante en las bitácoras se asocia a un mejor rendimiento académico, además de evidenciar dificultades recurrentes en la representación geométrica y la aplicación de desigualdades matemáticas. También se identificaron patrones de regulación emocional y organización del estudio reflejados en la escritura estudiantil, destacando el potencial de las bitácoras para generar ajustes pedagógicos efectivos, como la transición a una clase pseudo invertida. Los resultados sugieren que la integración de LLM en la retroalimentación automatizada optimiza el análisis y fomenta una comprensión más profunda de los procesos de aprendizaje.

Palabras clave: Álgebra Lineal; Escritura reflexiva; Investigación basada en diseño; LLM en educación; Matemática universitaria.

Definición y relevancia del problema

El uso de la escritura en la educación matemática ha sido reconocido como una estrategia efectiva para fomentar la reflexión y el aprendizaje conceptual. En el contexto del Álgebra Lineal, los estudiantes enfrentan dificultades al transitar de un enfoque procedural a la comprensión de estructuras matemáticas abstractas. Las bitácoras de escritura se presentan como una herramienta que permite documentar este proceso, facilitando la metacognición y el desarrollo de la comunicación matemática formal.

Este estudio se enmarca en el curso **Introducción al Álgebra Lineal (MAT1214)**, impartido en el segundo semestre del primer año de la **Licenciatura en Matemáticas** en la Pontificia Universidad Católica de Chile. Este curso introduce conceptos fundamentales de Álgebra Lineal, como **sistemas de ecuaciones lineales, espacios vectoriales y transformaciones lineales**, y enfatiza el desarrollo de habilidades de comunicación matemática, tanto en escritura manuscrita como en LaTeX. En este contexto, las bitácoras de escritura fueron implementadas como una herramienta de evaluación formativa con una ponderación del **10% de la calificación final**, con el propósito de fomentar la reflexión sobre el aprendizaje y proporcionar un espacio para que los estudiantes expresen sus dificultades y estrategias de resolución de problemas.

Este estudio investiga cómo las bitácoras pueden mejorar la comprensión del Álgebra Lineal y en qué medida los modelos de lenguaje de gran escala (LLM) pueden analizar y retroalimentar estas producciones escritas. Desde un enfoque de investigación basada en diseño (DBR), se examinaron cuatro iteraciones del curso, permitiendo ajustes progresivos en la implementación de las bitácoras y la evaluación de su impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

Más allá del aprendizaje matemático, este estudio plantea las bitácoras como una herramienta clave para analizar factores que influyen en el desempeño académico, tales como la regulación emocional, la organización del tiempo y la autopercepción de la competencia matemática. La escritura permite a los estudiantes expresar sus dificultades, reflexionar sobre su progreso y documentar estrategias que emplean para abordar el aprendizaje del Álgebra Lineal. Al analizar estas producciones con LLM, fue posible identificar patrones en las experiencias de los estudiantes y explorar cómo estos factores incidieron en su desarrollo académico.

El propósito de la investigación es generar un marco teórico-práctico que optimice el uso de bitácoras en cursos universitarios de matemáticas, proporcionando evidencia empírica sobre su efectividad tanto en la conceptualización del Álgebra Lineal como en la identificación de dinámicas socioemocionales y de gestión del aprendizaje que impactan el rendimiento estudiantil.

Referencial teórico

La escritura reflexiva ha sido ampliamente estudiada en la educación matemática universitaria como un recurso clave para la comprensión de conceptos complejos. La literatura destaca que la escritura no solo facilita el aprendizaje, sino que también permite explorar los procesos de pensamiento de los estudiantes (Flesher, 2003; Johanning, 2000). En particular, en el contexto del Álgebra Lineal, donde los estudiantes enfrentan dificultades para transitar de un enfoque algebraico procedural a una comprensión más abstracta, la escritura reflexiva puede ser una herramienta efectiva para articular transiciones conceptuales y establecer conexiones entre diferentes representaciones matemáticas (Aytekin & Kıymaz, 2019).

Las bitácoras de escritura, como un género específico dentro de la escritura reflexiva, han demostrado ser una estrategia pedagógica efectiva en la educación matemática superior. Su uso regular y acumulativo facilita el desarrollo de habilidades metacognitivas y fomenta la autorregulación del aprendizaje (Pastells, 2020; Moll et al., 2010). Además, las bitácoras permiten a los docentes obtener información más detallada sobre los procesos de aprendizaje de los estudiantes, lo que favorece una mejor adaptación de las estrategias pedagógicas y una retroalimentación más significativa (Johanning, 2000; Godino, 2021).

Sin embargo, el análisis sistemático de las bitácoras representa un desafío debido al volumen de información que generan y a la necesidad de mantener un equilibrio entre la evaluación cualitativa y la eficiencia en la retroalimentación (Castro et al., 2020; Godino, 2021). En este sentido, los modelos de lenguaje de gran escala (LLM) han surgido como herramientas prometedoras para el análisis de textos educativos, ya que permiten procesar grandes volúmenes de información y detectar patrones en las producciones escritas de los estudiantes (Vallejo & Pineda, 2016). Aunque la aplicación de estas tecnologías en educación matemática presenta desafíos, su combinación con metodologías de análisis humano puede optimizar la interpretación de datos educativos y mejorar la comprensión del desarrollo del pensamiento matemático (Moll et al., 2010).

Desde una perspectiva metodológica, la investigación basada en diseño (DBR) ha demostrado ser una estrategia efectiva para evaluar y refinar intervenciones educativas en contextos reales (González et al., 2011). En la educación matemática universitaria, los ciclos iterativos de DBR han permitido la mejora continua de estrategias pedagógicas, adaptándolas a la evidencia recolectada durante el proceso de implementación (González et al., 2011). Además, la integración de tecnologías emergentes, como la inteligencia artificial y la minería de datos, ha permitido ampliar las capacidades analíticas de estas investigaciones, facilitando la identificación de patrones de aprendizaje y la optimización de estrategias de enseñanza (Vanoy, 2023; Reynaga, 2023; Quiroz & Zúñiga, 2023).

Finalmente, el análisis de producción en educación matemática se ha consolidado como un enfoque clave para examinar las evidencias tangibles del aprendizaje de los estudiantes. Este enfoque no solo permite evaluar el contenido matemático expresado en las bitácoras, sino que también proporciona información valiosa sobre el desarrollo conceptual y las estrategias metacognitivas utilizadas en la resolución de problemas (Godino, 2021; Burgos et al., 2020). En este contexto, las bitácoras pueden ofrecer información relevante sobre factores que afectan el aprendizaje del Álgebra Lineal, como la regulación emocional, la organización del tiempo y la autopercepción de la competencia matemática, elementos que no siempre son evidentes en evaluaciones tradicionales (Hacker et al., 2019; Bracho et al., 2014).

Método y desarrollo conceptual.

El estudio se desarrolló bajo un enfoque de investigación basada en diseño (DBR), caracterizado por su naturaleza iterativa y su capacidad para integrar teoría y práctica en contextos educativos reales (González et al., 2011). A lo largo de cuatro iteraciones de un curso universitario de Álgebra Lineal, se implementaron y refinaron bitácoras de escritura con el objetivo de evaluar su impacto en el aprendizaje y en la identificación de factores que influyen en el desempeño académico de los estudiantes.

El análisis de las bitácoras se llevó a cabo mediante modelos de lenguaje de gran escala (LLM), herramientas emergentes en educación matemática que facilitaron el procesamiento automatizado de textos educativos (Quiroz & Zúñiga, 2023; Vanoy, 2023). El uso de LLM permitió detectar patrones en la evolución del pensamiento matemático y en la gestión del aprendizaje, comparando los hallazgos con métodos cualitativos tradicionales para evaluar la efectividad de estas tecnologías en la retroalimentación y el análisis de producción escrita.

El curso, con una duración de 16 semanas, se estructuró en torno a un programa progresivo que abordó desde la resolución de sistemas de ecuaciones lineales hasta conceptos avanzados como transformaciones lineales, valores propios y descomposición en valores singulares. Dentro de esta planificación, la bitácora semanal fue incorporada como un instrumento de evaluación formativa, representando un 10% de la nota final, con el propósito de fomentar la escritura reflexiva y la autoevaluación.

Fases de implementación

El estudio se estructuró en cuatro fases, cada una correspondiente a una iteración del curso:

1. Análisis retrospectivo:
   Se evaluó una implementación previa de bitácoras en el curso.
   Se diseñaron y validaron instrumentos de análisis.
   Se refinaron los prompts utilizados para guiar la escritura de los estudiantes.
2. Ciclos iterativos (Fases 2-4):
   - Se implementaron progresivamente las bitácoras en nuevos grupos de estudiantes.
   - Se analizaron la evolución de la escritura y los factores asociados al aprendizaje.
   - Se realizaron ajustes y refinamientos al modelo en función de los hallazgos obtenidos en cada iteración.

Recolección y análisis de datos

Los datos se recopilaron a partir de:

- Producciones escritas: Bitácoras generadas por los estudiantes a lo largo del curso.
- Datos de desempeño académico: Calificaciones y participación en actividades del curso.
- Factores no académicos: Encuestas sobre regulación emocional, gestión del tiempo y autopercepción de la competencia matemática.

El análisis combinó enfoques cualitativos y automatizados, empleando herramientas de análisis de producción (Godino, 2021) y modelos LLM para evaluar la estructura y evolución de las reflexiones escritas.

El estudio garantizó el cumplimiento de principios éticos en la investigación educativa, asegurando el consentimiento informado de los participantes, la anonimización de los datos para proteger su privacidad y el uso responsable de la inteligencia artificial

Resultados

Este estudio se fundamenta en el análisis de la implementación de bitácoras de escritura en el curso Introducción al Álgebra Lineal (MAT1214), desarrollado durante el segundo semestre de 2024, como parte de un proceso iterativo de investigación basada en diseño. Los resultados que aquí se presentan corresponden al primer ciclo de iteración, en el cual participaron 27 estudiantes, y se basan en el análisis de su participación en las bitácoras, desempeño académico, respuestas en encuestas docentes, observación en clases y reflexiones expresadas en sus escritos semanales. Durante el año 2025, se desarrollarán dos nuevas iteraciones de esta experiencia, lo que permitirá complementar y expandir estos hallazgos, obteniendo una visión longitudinal del impacto de las bitácoras en el aprendizaje del Álgebra Lineal y en la identificación de factores que influyen en el desempeño estudiantil.

Uno de los primeros aspectos analizados fue la relación entre la frecuencia de entrega de bitácoras y el rendimiento académico. Se observó que, en promedio, los estudiantes entregaron 12 de las 14 bitácoras posibles, con seis de ellos completando la totalidad de las entregas, mientras que solo un estudiante presentó una participación mínima de dos bitácoras.

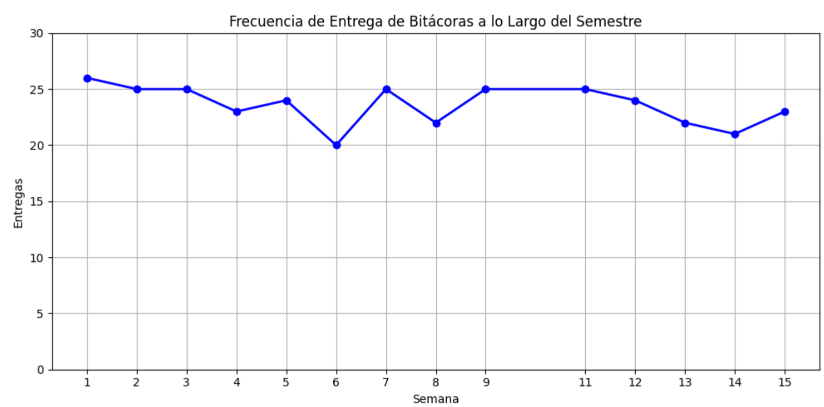


Figura 1. Frecuencia de entrega de las bitácoras.

Como se observa en la Figura 1, la cantidad de entregas se mantuvo relativamente estable a lo largo del semestre, con una baja variabilidad en la participación semanal. Este nivel de cumplimiento permitió identificar una correlación positiva entre la constancia en la escritura reflexiva y el desempeño en el curso. Los estudiantes que registraron 13 o más entregas obtuvieron, en su mayoría, una nota final igual o superior a 6.5, mientras que aquellos que completaron menos de 10 entregas presentaron un desempeño considerablemente más bajo, con notas finales en torno a 5.0 o menos. Esta tendencia sugiere que el uso continuo de la bitácora contribuye a una mejor estructuración del pensamiento matemático y una mayor capacidad de argumentación en la resolución de problemas, elementos que se reflejan en la evaluación formal del curso.

El uso de El uso de bitácoras evidenció tanto aspectos conceptuales del aprendizaje como elementos relacionados con la gestión del aprendizaje y la experiencia emocional. El análisis cualitativo identificó dificultades recurrentes en la representación geométrica de vectores en R^3, con expresiones como *"se me dificulta dibujar operaciones de vectores en R^3"*, la comprensión del producto punto donde estudiantes mencionaron *"no entendía cómo el producto punto servía para saber si dos vectores formaban 90 grados"*, y la aplicación de desigualdades matemáticas como Cauchy-Schwarz, sugiriendo la necesidad de reforzar estos conceptos.

Las bitácoras también revelaron factores no académicos que impactaron el aprendizaje. Los estudiantes expresaron dificultades de adaptación al mencionar *"me costó agarrarle el ritmo de nuevo a la U"* y *"me cuesta organizar el tiempo para estudiar lo suficiente"*. Un hallazgo significativo fue la dificultad en la toma de apuntes, señalando que "me cuesta tomar apuntes porque el profesor no sube los PPT antes". En respuesta, el docente ajustó su metodología proporcionando diapositivas antes de las clases, transformando el curso en una clase pseudo invertida con resultados positivos.

El análisis de las bitácoras de la semana 14, previo a exámenes finales, reveló diferencias en los estilos de escritura. Mientras algunos estudiantes presentaban escrituras organizadas y analíticas, otros mostraban redacciones fragmentadas con expresiones de ansiedad como "estoy ansiosa y con miedo de todos los exámenes que vienen". Estas variaciones permitieron identificar estudiantes que requerían mayor acompañamiento.

Para el análisis automatizado, se utilizaron Modelos de Lenguaje de Gran Escala (LLM) que facilitaron el procesamiento de aproximadamente 13,500 palabras provenientes de 54 documentos. Se diseñó un prompt específico: "Eres un analista educativo especializado en aprendizaje matemático. Tu tarea es analizar un corpus de bitácoras estudiantiles para identificar dificultades conceptuales. Realiza un análisis de frecuencia de términos matemáticos y clasifica los errores en categorías." Este enfoque permitió obtener retroalimentación personalizada sobre dificultades conceptuales, patrones en la organización del estudio y estados emocionales.

Los hallazgos de esta primera iteración demuestran que las bitácoras favorecen tanto la comprensión del Álgebra Lineal como la organización del aprendizaje y la confianza estudiantil. La combinación de análisis cualitativo y automatizado optimiza el uso de la escritura reflexiva en la enseñanza universitaria de matemáticas, con perspectivas de mejora en las dos iteraciones planeadas para 2025.

Conclusiones

El uso de bitácoras de escritura en el curso *Introducción al Álgebra Lineal (MAT1214)* ha demostrado ser una herramienta valiosa para fortalecer el aprendizaje, tanto en términos de comprensión conceptual como en la gestión del estudio y regulación emocional. A lo largo del

primer ciclo de iteración, los datos analizados evidencian que la escritura reflexiva contribuyó a la estructuración del pensamiento matemático, permitiendo a los estudiantes articular ideas, identificar dificultades y establecer conexiones entre distintos conceptos algebraicos.
Desde una perspectiva cuantitativa, la alta tasa de participación en la entrega de bitácoras y su correlación positiva con el desempeño académico sugieren que esta metodología promueve hábitos de estudio más sistemáticos y facilita un seguimiento continuo del aprendizaje. Los estudiantes que realizaron entregas constantes obtuvieron, en general, mejores calificaciones, lo que indica que la reflexión escrita favorece la consolidación del conocimiento.

El análisis cualitativo permitió identificar dificultades recurrentes en temas como la representación geométrica de vectores en R^3, la aplicación del producto punto y la interpretación de desigualdades matemáticas. Además, las reflexiones escritas revelaron factores no académicos que influyen en el aprendizaje, como la organización del tiempo, la carga cognitiva y la ansiedad ante evaluaciones. Un ejemplo concreto del impacto de las bitácoras en la dinámica del curso fue la modificación en la entrega de materiales, luego de que los estudiantes manifestaran dificultades en la toma de apuntes debido a la falta de acceso previo a las diapositivas. Esta adaptación metodológica permitió mejorar la preparación de los estudiantes y transformar la dinámica del curso en una clase pseudo invertida, con efectos positivos en la participación y comprensión del contenido.

El análisis de las bitácoras de la semana 14, período en el que los estudiantes enfrentaban la proximidad de los exámenes finales, refuerza la idea de que esta herramienta también permite identificar cambios en la dinámica emocional y académica. Se observó una diferencia notable en los estilos de escritura: algunos estudiantes organizaron sus reflexiones de manera clara y estructurada, mientras que otros presentaron textos fragmentados y con un tono más ansioso, con expresiones como *"estoy ansiosa y con miedo de todos los exámenes que vienen"*. Estas variaciones sugieren que, además de evidenciar la comprensión conceptual, las bitácoras pueden servir como un instrumento para detectar estudiantes en riesgo académico o emocional, facilitando estrategias de apoyo oportunas.

El uso de Modelos de Lenguaje de Gran Escala (LLM) para el análisis de las bitácoras ha abierto nuevas posibilidades para el estudio sistemático del aprendizaje. Dado el volumen de textos generados, el análisis manual detallado resulta inviable, pero la implementación de herramientas automatizadas ha permitido identificar patrones conceptuales, emocionales y metacognitivos de manera eficiente. La retroalimentación automatizada basada en LLM se perfila como una estrategia prometedora para ofrecer a los estudiantes observaciones detalladas sobre su proceso de aprendizaje, ayudando a detectar errores, mejorar la estructuración del discurso y brindar recomendaciones personalizadas.

De cara a las próximas iteraciones del curso en 2025, la continuidad de este estudio permitirá evaluar con mayor profundidad la evolución de los patrones identificados y validar la efectividad de las estrategias implementadas. Se espera que el análisis longitudinal de las bitácoras contribuya a afinar los criterios de evaluación de la escritura reflexiva en matemáticas, optimizar la retroalimentación automatizada y consolidar el uso de esta herramienta como un elemento clave en la enseñanza universitaria del Álgebra Lineal.

En síntesis, los resultados obtenidos hasta ahora muestran que la escritura reflexiva no solo fortalece la comprensión matemática, sino que también constituye un recurso valioso para la autorregulación del aprendizaje y la identificación de necesidades pedagógicas. La integración de análisis automatizados mediante LLM amplía el potencial de esta estrategia, posicionándola como una práctica innovadora con un impacto significativo tanto en el rendimiento académico como en la experiencia formativa de los estudiantes.

Referencias

Aytekin, C., & Kıymaz, Y. (2019). Teaching linear algebra supported by GeoGebra visualization environment. *Acta Didactica Napocensia, 12(2)*, 75-96. https://doi.org/10.24193/adn.12.2.7

Bracho, R., Jiménez-Fanjul, N., Maz-Machado, A., Torralbo-Rodríguez, M., & Cano, A. (2014). Producción científica sobre narrativa en educación matemática en la Web of Science. *Bolema Boletim de Educação Matemática, 28(49)*, 744-761. https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n49a14

Burgos, M., Castillo, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. (2020). Análisis didáctico de una lección sobre proporcionalidad en un libro de texto de primaria con herramientas del enfoque ontosemiótico. *Bolema Boletim de Educação Matemática, 34(66)*, 40-68. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a03

Castro, P., Gómez, P., Carranza, S., & Cañadas, M. (2020). Comunidad colombiana de educación matemática: una caracterización documental. *Bolema Boletim de Educação Matemática, 34(68)*, 1221-1242. https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n68a18

Flesher, T. (2003). Writing to learn mathematics. *The WAC Journal, 14(1)*, 37-48. https://doi.org/10.37514/wac-j.2003.14.1.04

Godino, J. (2021). De la ingeniería a la idoneidad didáctica en educación matemática. *Revemop, 3*, e202129. https://doi.org/10.33532/revemop.e202129

González, M., Martínez, E., González, J., & Martínez, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 29(1), 75-87. https://doi.org/10.5565/rev/ec/v29n1.435

Hacker, D., Kiuhara, S., & Levin, J. (2019). A metacognitive intervention for teaching fractions to students with or at-risk for learning disabilities in mathematics. *ZDM, 51(4)*, 601-612. https://doi.org/10.1007/s11858-019-01040-0

Johanning, D. (2000). An analysis of writing and postwriting group collaboration in middle school pre-algebra. *School Science and Mathematics, 100(3)*, 151-160. https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2000.tb17250.x

Moll, V., Planas, N., & Godino, J. (2010). Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. Journal for the Study of Education and Development Infancia y Aprendizaje, 33(1), 89-105. https://doi.org/10.1174/021037010790317243

Pastells, Á. (2020). El enfoque de los itinerarios de enseñanza de las matemáticas: ¿por qué?, ¿para qué? y ¿cómo aplicarlo en el aula? Tangram - *Revista de Educação Matemática, 3(2)*, 127-158. https://doi.org/10.30612/tangram.v3i2.12018

Quiroz, H., & Zúñiga, K. (2023). Técnica de minería de datos para procesos educativos en estudiantes con necesidades educativas especiales basado en un modelo predictivo. *Revista Científica Arbitrada Multidisciplinaria Pentaciencias, 5(5)*, 205-217. https://doi.org/10.59169/pentaciencias.v5i5.730

Reynaga, H. (2023). La inteligencia artificial en la educación: aporte o competencia. *Salud Ciencia y Tecnología - Serie de Conferencias, 2*, 133-146. https://doi.org/10.37885/231215175

Vallejo, C., & Pineda, M. (2016). ¿Por qué el concepto de función genera dificultad en el estudiante*? Recacym, 7, 92-104*. https://doi.org/10.61174/recacym.v7i1.99

Vanoy, R. (2023). Educational transformation: optimization in the teaching of logistics in international business through the application of artificial intelligence in higher education institutions. *Salud Ciencia y Tecnología - Serie de Conferencias*, 2, 422. https://doi.org/10.56294/sctconf2023422

Centering Community and Children: Artifacts in Mathematics Methods Courses

Crystal Kalinec-Craig
University of Texas at San Antonio
United States
crystal.kalinec-craig@utsa.edu
Sylvia Celedón-Pattichis
University of Texas at Austin
United States
sylvia.celedon@austin.utexas.edu

The poster highlights how two Mathematics teacher educators leverage the TEACH Math (Teachers Empowered to Advancing CHange in Mathematics; Turner et al., 2012) framework, a research base funded by the National Science Foundation. The primary purpose of TEACH Math was to theorize about how teacher candidates can learn about how to connect Children's Mathematical Thinking (Carpenter et al., 2015) and children's funds of knowledge (Moll et al., 1992) in ways that made meaningful connections between theory and practice. The TEACH Math research group developed several modules for Mathematics teacher educators to use in their methods courses so that teacher candidates could learn to attend to "children's multiple mathematical knowledge bases" (Turner et al., 2012). The primary intention of this poster is to show a series of artifacts, based on the TEACH Math modules, that support the authors' practice of preparing new elementary school teachers as they learn about children's multiple mathematical knowledge bases (Chao et al., 2019). As two authors from the United States who are elementary Mathematics teacher educators, this poster offers a selection of artifacts that serve as activities and assignments. The first author is a former middle and high school Mathematics teacher who works with students from primarily Mexican-American and Central American communities in the local area; students are in a year-long embedded experience in an elementary class for an entire year as they complete their coursework and tracking experiences with a certified teacher. The second author is a former high school Mathematics teacher who taught along the border of Mexico and the United States with primarily students of Mexican descent. Currently, she works with bilingual elementary preservice teachers through a course, Early/Elementary Mathematics Methods, that is required as part of the Professional Development Sequence that lasts two years. The following artifacts will be offered in the poster: 1) Math autobiography/Numbers about me (as developed by Dr. Luz Maldonado); 2) Case Study (Lesson Plan/Mock Parent Conference). For the Numbers About Me activity, the poster highlights how teacher candidates find numbers that reflect meaningful aspects of their lives (e.g., their age, how many pets they have, their favorite baseball player's jersey number). The Numbers About Me artifact humanizes the teacher candidates' experiences in the world and how numbers show value (both mathematical and human experience). For the Case Study Module, the poster will include: 1) interviews with children; 2) problem-solving activities; 3) community walks; and 4) lesson plans that rehumanize children's experiences and brilliance. One example, shared by the first author, is related to the community walk, mathematics problem-solving activities that could be integrated into a mathematics lesson, and reflections on what preservice teachers learned from this community walk. The details of these activities will be highlighted with images on the poster. Another example comes from the first author's methods class. Figure 1 shows a Venn Diagram the teacher candidate, Ms. Grace, created with a child, Araceli, a 7-year-old child (all names are pseudonyms). The second image shows how Ms. Grace decided on the next steps to support Araceli's thinking to her parents in the mock parent-teacher conference. The details of these activities will be highlighted with images on the poster.

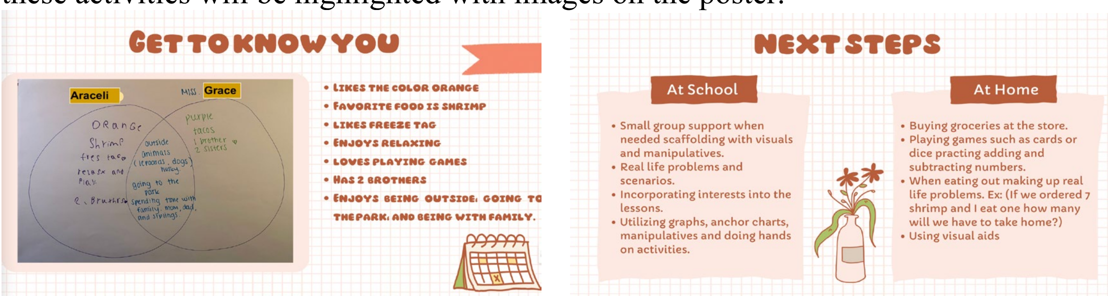


Figure 1. Venn Diagram and Mock Parent Teacher Conference Next Steps.

The authors intend to engage participants in how teacher educators can utilize course assignments and experiences in elementary classrooms in ways that connect to children's multiple mathematical knowledge bases (Chao et al., 2019). By rehumanizing the work of Mathematics teacher education in the worlds of children, their families, and communities, the poster intends to show how methods courses can represent the notion of multiple mathematical knowledge bases. Furthermore, the authors intend to discuss the poster's implications and discussions as a means of fostering connections for (and with) teachers and teacher educators across multiple geographic spaces such as North America, Central America, and the Caribbean.

References

Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L., & Empson, S. B. (2015). Children's mathematics: cognitively guided instruction (Second edition. ed.). Heinemann.

Chao, T., Maldonado, L. A., Kalinec-Craig, C., Celedón-Pattichis, S. (2019). Preparing Pre-Service Elementary Mathematics Teachers to Critically Engage in Elementary Mathematics Methods. In: Bartell, T., Drake, C., McDuffie, A., Aguirre, J., Turner, E., Foote, M. (Eds.), *Transforming Mathematics Teacher Education* (pp. 147-160). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-21017-5_11

Moll, L. C., Amanti, C., Neff, D., & Gonzalez, N. (1992). Funds of knowledge for teaching: Using a qualitative approach to connect homes and classrooms. *Theory Into Practice*, 31(2), 132–141. https://doi.org/10.1080/00405849209543534

Turner, E. E., Drake, C., McDuffie, A. R., Aguirre, J., Bartell, T. G., & Foote, M. Q. (2012). Promoting equity in mathematics teacher preparation: A framework for advancing teacher learning of children's multiple mathematics knowledge bases. *Journal of Mathematics Teacher Education, 15*, 67-82.

Círculos Matemáticos, una visión de aprendizaje experiencial para la comprensión y motivación de las Matemáticas

Vivian Libeth **Uzuriaga** López
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
vuzuriaga@utp.edu.co
Andrés Felipe **Suárez** Zuleta
Universidad Católica de Pereira
Colombia
Andres.suarez@ucp.edu.co
Alejandro **Martínez** Acosta
Universidad Tecnológica de Pereira
Colombia
amartinez@utp.edu.co

Resumen

La presente ponencia es el resultado del proyecto "*Círculos Matemáticos 2024-2*", desarrollado por la Universidad Católica de Pereira y la Universidad Tecnológica de Pereira, en el marco de una iniciativa nacional de la Sociedad Colombiana de Matemáticas y que tiene como objetivo la formación de habilidades matemáticas en estudiantes de bachillerato. El objetivo de este proyecto, fue utilizar un enfoque educativo experiencial para la enseñanza y el aprendizaje, que permitió que 19 estudiantes aplicaran conceptos matemáticos complejos de manera versátil, divertida y rigurosa. La presente ponencia presenta las metodologías experienciales utilizadas y los resultados de un estudio final que evidenció el impacto en el aprendizaje, por parte de los estudiantes y un incremento en la motivación de estas temáticas. Para este proyecto se utilizaron teorías fundantes del aprendizaje de las matemáticas, el aprendizaje experiencial y la teoría acción participación.

Palabras clave: Aprendizaje Experiencial; Aprendizaje de las Matemáticas; Círculos Matemáticos; Momentos Experienciales; Motivación; STEAM.

Definición y relevancia del problema

El programa "Círculos Matemáticos 2024-2", enmarcado en la propuesta nacional de la Sociedad Colombiana de Matemáticas, es la segunda versión de un programa de formación diseñado para acercar a los estudiantes a los conceptos matemáticos mediante un enfoque pedagógico experiencial. Este programa, liderado por la Universidad Católica de Pereira y la Universidad Tecnológica de Pereira, en el departamento de Risaralda, Colombia, tiene como propósito que los estudiantes vivan las matemáticas en diversos contextos, trascendiendo la enseñanza tradicional, que se limita a fórmulas, teoremas y la resolución de ejercicios algorítmicos. Así, los estudiantes pueden experimentar las matemáticas sin fronteras, explorando diferentes áreas del conocimiento, disciplinas y aplicaciones. Esto evidencia que las matemáticas están presentes en todos los aspectos de la vida y que, sin ellas, no existirían desarrollos científicos, tecnológicos, sociales ni humanos.

Este programa de formación benefició a 19 estudiantes de 9º, 10º y 11º grado de las instituciones educativas: Bernardo López Flórez y Pablo VI, ubicadas en el municipio de Dosquebradas, Risaralda, así como a estudiantes de la Institución Educativa La Julita del municipio de Pereira, quienes durante el segundo semestre de 2024 participaron en 9 sesiones de trabajo, equivalentes a 18 horas de formación presencial. En cada una de estas sesiones tuvieron la oportunidad de explorar y conocer las matemáticas desde diferentes contextos.

Los "Círculos Matemáticos 2024-2", se caracterizaron por incluir conceptos teóricos fundantes que van desde la comprensión de las estructuras cognitivas (Piaget, 1970), los tipos de comprensión educativa (Skemp, 1976), el pensamiento estratégico y metacognitivo (Schoenfeld, 1985), el aprendizaje experiencial (Kolb, 1984; Dewey, 1938; Schon, 1983) y los modelos de acción participación (Freire, 1970; Lewin, 1946; Kemmis y McTaggart, 2000).

Según (Piaget, 1970; Skemp, 1976; and Schoenfeld, 1985) el aprendizaje de las matemáticas se basa en la comprensión conceptual, el razonamiento lógico y la aplicación de principios matemáticos a situaciones diversas. No obstante, los indicadores de comprensión, aprendizaje y motivación de las matemáticas por parte de los estudiantes siempre son bajos. En Colombia, los desempeños en matemáticas siempre tienen promedios menores a las otras áreas del conocimiento y la formación profesional que incluye estos contenidos tiene menor demanda. Es por esta razón que se hace estratégico crear programas de formación capaces de mejorar la relación y percepción que tienen los estudiantes con las matemáticas. En este sentido, el aprendizaje experiencial puede ser útil para este propósito. Según autores como (Kolb, 1984 y Schon, 1983) el aprendizaje experiencial puede enfatizar la interacción directa con los conceptos, promoviendo un aprendizaje significativo a través de la práctica, la reflexión y la experimentación (Kolb, 1984).

Referencial teórico

El programa "Círculos Matemáticos 2024-2" se enfocó en diseñar un método experiencial, en el que participaron 19 estudiantes, capaz de responder a 4 etapas presentadas por (Kolb, 1984): *experiencia concreta, observación reflexiva, conceptualización abstracta y experimentación activa*.

Estas 4 etapas permitieron que los estudiantes comprendieran mejor los conceptos matemáticos y lograran tener mayores niveles de motivación hacia las disciplinas que hacen uso de esta ciencia como un recurso o una herramienta.

En este contexto, se crearon 6 momentos experienciales, los cuales incluyeron un reto específico y concreto que se pudiese resolver a través de funciones matemáticas; se crearon momentos de observación reflexiva en donde los estudiantes tuvieron que diseñar soluciones puntuales, se conceptualizaron productos específicos y finalmente se experimentó el aprendizaje a través de los retos experienciales.

En estos momentos experienciales utilizaron lenguajes como la literatura, la música, el origami y los sólidos platónicos, para enseñar temas como: probabilidad, funciones, física, leyes de Kepler, teorema de Pitágoras, entre otros.

Resultados

Los resultados muestran las experiencias vividas por los estudiantes en cada uno de los encuentros.

Momento Experiencial 1: Innovación y desarrollo tecnológico orientado a las ciencias matemáticas.

Los estudiantes hicieron un recorrido por las distintas revoluciones industriales y la influencia de las matemáticas en el desarrollo de la industria, también, abordaron el desarrollo de la aviación y se plantearon preguntas como ¿por qué vuelan los aviones? En este orden de ideas, se realizó una actividad en la cual los estudiantes construyeron aviones de papel siguiendo su intuición y luego usando un molde para recortar de acuerdo con las medidas obtenidas a partir de los conocimientos que se tienen.

Con la actividad, los estudiantes identificaron las diferencias entre cada modelo construido y la importancia de las matemáticas. Por ejemplo, concluyeron que en el vuelo de un avión intervienen fuerzas verticales: por un lado, el peso de la aeronave, que actúa hacia abajo, y por otro, la fuerza de sustentación, que es la responsable de elevarla.

Imagen 1: Momento Experiencial 1 Innovación y desarrollo tecnológico orientado a las ciencias matemáticas.

Momento Experiencial 2: Matemática a través del género literario del cuento

A través del cuento, se crearon historias en las que las matemáticas desempeñan un papel fundamental para resolver diversas situaciones. El objetivo fue ofrecer a los estudiantes una alternativa para acceder al lenguaje matemático mediante las aventuras de un joven adolescente llamado Andrés.

Imagen 2: Momento Experiencial 2: Matemática a través del género literario del cuento.

Momento Experiencial 3: La magia de las matemáticas: explorando el doblado del papel.

Se utilizó el doblado de papel como una estrategia para introducir conceptos de longitud, área y volumen. Esta práctica permitió la exploración, manipulación y comprensión de conceptos de álgebra, aritmética y geometría. Así, se integró la abstracción con lo concreto, promoviendo que los estudiantes establecieran relaciones de comparación, particularización y generalización, además de llegar a conclusiones significativas sobre la teoría.

Imagen 3: Momento Experiencial 3 La magia de las matemáticas: explorando el doblado del papel.

Momento Experiencial 4: Probabilidad en la dida diaria.

Se exploró cómo la teoría y la práctica de la probabilidad están presentes en situaciones cotidianas. Se exploraron conceptos desde la experimentación con dados que llevó a determinar la probabilidad experimental y su comparación con la probabilidad teórica. Lo que permitió a los estudiantes darse cuenta como la probabilidad influye en la toma de decisiones diarias, como el juego que desarrollaron, pronósticos del clima y análisis de riesgos.

Imagen 4: Momento Experiencial 4 Probabilidad en la Vida Diaria.

Momento Experiencial 5: Avanzando en las funciones hasta el confín del universo:

A partir de ejemplos práctico, se exploraron algunos tipos de funciones como la lineal, cuadrática y exponencial. Los estudiantes exploraron situaciones que los llevó a modelarlas por medio de funciones.

Imagen 5: Momento Experiencial 5 Avanzando en las funciones hasta el confín del universo.

Momento Experiencial 6: La matemática como lenguaje musical:

Al comprender las divisiones y la escala musical de Pitágoras, exploraron el concepto de nodo, frecuencia, y elementos matemáticos que se encuentran implícitos en la música.

Imagen 6: Momento Experiencial 6 La matemática como lenguaje musical.

Estos modelos experienciales y pedagógicos de las matemáticas, se sustentaron en un modelo de acción participación, el cual se basa en la construcción colectiva del conocimiento a través de la interacción entre los participantes (Freire, 1970; Lewin, 1946; Kemmis y McTaggart, 2000).

Estos momentos permitieron que los estudiantes estuvieran en un proceso dialógico en el cual construyeron el conocimiento a través de la exploración de ideas, el diseño de soluciones y la reflexión colectiva (Freire, 1970). Igualmente, este método de acción-participación permitió que los estudiantes analizaran su entorno e involucraran a todos los actores en la resolución de problemas (Kemmis y McTaggart, 2000).

Conclusiones

Al finalizar este programa de formación extracurricular, los estudiantes compartieron sus percepciones sobre los Círculos Matemáticos y su experiencia como participantes. Para ello, completaron un formulario durante la clausura, lo que permitió evaluar el impacto de esta estrategia e identificar aspectos motivacionales de estos jóvenes respecto a las matemáticas y sus múltiples aplicaciones.

Los resultados evidenciaron un alto nivel de interés y motivación. Un 77% de los estudiantes calificaron la motivación como “muy alta” o “demasiado alta”, lo que refleja un nivel de curiosidad e interés por las matemáticas y su aplicación.

Igualmente, un 84% de los participantes manifestaron un mayor interés en entender las matemáticas y su aplicación en su cotidianidad. Este resultado evidencia que el programa de Círculos Matemáticos transciende el aprendizaje como sujetos pasivos en el aula de clase, puesto que integra conceptos abstractos o "más complicados" en situaciones reales, logrando aprendizajes significativos. Esta evidencia refleja la importancia de ver las matemáticas como una disciplina no solo teórica sino práctica.

Otro resultado significativo está relacionado con la orientación vocacional de los estudiantes en cuanto a la elección de su carrera universitaria. Antes del inicio de programa Círculos Matemático, los participantes mostraron un interés moderado por las matemáticas. Sin embargo, tras las experiencias vivenciales y la culminación del programa, el 69% de los estudiantes manifestó que ahora consideran más viable estudiar carreras profesionales vinculadas a las matemáticas, la ingeniería y las ciencias. Este hallazgo refuerza la necesidad de fomentar vocaciones científicas y tecnológicas, así como de incrementar la cantidad de programas y proyectos en el ámbito STEM.

Por otra parte, el 85% de los estudiantes mencionaron que el programa les fortaleció las habilidades como el pensamiento crítico, la resolución de problemas y habilidades científicas. Estas habilidades fortalecen la capacidad analítica y la toma de decisiones en variados contextos académicos y no solo en disciplinas matemáticas.

Además, el 90% de los estudiantes expresó su interés en participar en programas similares en los próximos años, lo que refleja un alto nivel de compromiso, aprendizaje y motivación, dejando una huella en su formación académica. Estos resultados demuestran que iniciativas como Círculos Matemáticos son una estrategia para fomentar el interés y la confianza en las matemáticas, permitiendo a los estudiantes visualizar un futuro en el que esta disciplina desempeña un papel fundamental en su desarrollo personal y profesional.

Al finalizar el programa, se dejaron preguntas abiertas, las cuales permitieron identificar los temas más relevantes que los estudiantes notaron en su proceso de aprendizaje. El siguiente wordcloud representa las palabras más relevantes y se evidencia como el elemento experiencial, el programa de formación y los momentos y conceptos se hacen relevantes.

Imagen 7: WordCloud de relevancia de las respuestas abiertas dadas por los estudiantes.

En resumen, El programa **Círculos Matemáticos** presentó un impacto positivo en el público objetivo, quienes fueron estudiantes de los grados 9, 10 y 11 de instituciones educativas de carácter público y privado en el departamento de Risaralda, Colombia, así como alternativas a problemáticas que afronta la educación colombiana, en relación con la apatía hacia la matemática, lo que para algunos investigadores es la matefobia.

Ese miedo irracional a las matemáticas lleva a muchos estudiantes a basar su elección de carrera profesional en la inclusión o exclusión de la asignatura de matemáticas en el programa académico, ignorando que esta disciplina está presente en todos los ámbitos y puede ser una herramienta de transformación social. Tanto estudiantes como padres de familia manifestaron una gran aceptación por el programa, considerándolo una oportunidad para trascender una matemática limitada a fórmulas y acercarse a una matemática "real", aplicada a la resolución y explicación de problemas sociales. Esto permite comprender cómo las matemáticas están integradas en la vida cotidiana y cómo contribuyen al desarrollo del pensamiento lógico y matemático.

Referencias y bibliografía

Dewey, J. (1938). *Experience and education*. Macmillan.

Freire, P. (1970). *Pedagogía del oprimido*. Siglo XXI Editores.

Kemmis, S., McTaggart, R. (2000). Participatory action research. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research*, 567–605. Sage.

Kolb, D. (1984). *Experiential learning: Experience as the source of learning and development*. Prentice Hall.

Lewin, K. (1946). Action research and minority problems. *Journal of Social Issues, 2*(4), 34–46. https://doi.org/10.1111/j.1540-4560.1946.tb02295.x

Piaget, J. (1970). *La epistemología de las matemáticas y la psicología*. Presses Universitaires de France.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.

Schon, D. A. (1983). *The reflective practitioner: How professionals think in action*. Basic Books.

Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 20–26.

Comprensión de lugares geométricos mediante construcciones con doblado de papel de profesores en formación inicial con discapacidad visual

Aura **Taramuel** Cuaical
Facultad de Educación, Universidad de Antioquía.
Colombia
aura.taramuel@udea.edu.co
Carina **Rivera** Londoño
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.
Colombia
carina.rivera@udea.edu.co
Zaida **Santa-**Ramírez
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia.
zaida.santa@udea.edu.co

Resumen

Algunos estudios han demostrado que el doblado de papel puede facilitar la comprensión de ciertos conceptos geométricos; sin embargo, la mayoría de estas investigaciones se han enfocado en estudiantes sin discapacidades. Este estudio de casos cualitativo busca analizar cómo el doblado de papel puede contribuir a la comprensión de lugares geométricos, en el marco de la Enseñanza para la Comprensión, en dos estudiantes con discapacidad visual de un programa de licenciatura en educación especial de una universidad pública de Colombia. En una fase de exploración, se realiza un pilotaje para diseñar una secuencia de pasos con doblado de papel y luego se implementa con las estudiantes participantes. Los resultados preliminares resaltan el rol del doblado de papel como una herramienta didáctica clave para la comprensión, ayudando a superar algunas de las barreras de aprendizaje que afrontan las personas con discapacidad visual en el estudio de la geometría.

Palabras clave: Discapacidad; Doblado de papel; Educación Matemática; Enseñanza para la Comprensión; Formación inicial; Lugares geométricos.

Introducción

Una educación integral y adecuada es fundamental en la sociedad actual, pues cada persona debe contar con los apoyos necesarios para ejercer su derecho a la educación y a la participación social. Sin embargo, en el campo de la Educación Matemática persisten barreras que dificultan el aprendizaje de personas con discapacidad visual. En Colombia, normativas como el Decreto 1421 de 2017, la Ley 1618 de 2013 y la Ley 2294 de 2023 reafirman la necesidad de garantizar un acceso educativo equitativo, adaptando metodologías, reconociendo estilos e intereses diversos y generando entornos inclusivos, en coherencia con la Agenda 2030 de la Organización de las Naciones Unidas (ONU, 2018).

Las personas con discapacidad visual aprenden mediante el fortalecimiento de sentidos como el tacto y el oído, lo que les permite interactuar con su entorno y participar en este. Dicha condición plantea desafíos en la interpretación espacial, la orientación y la interacción social, lo que exige recursos adaptados que fomenten su autonomía e inclusión. Por tanto, es crucial diseñar propuestas educativas que respondan a estas necesidades y promuevan su participación activa en la construcción del conocimiento matemático, superando barreras como la falta de accesibilidad y de preparación docente. Esta visión se alinea con los compromisos internacionales que promueven una educación inclusiva y de calidad, enfocada en eliminar desigualdades.

Desde esta perspectiva, la revisión sistemática de Moreno y Farfán (2025) analiza estudios sobre la enseñanza del álgebra en contextos inclusivos, contrastando dos posturas, una que exige al estudiante adaptarse al conocimiento tradicional, y otra que lo reconoce como agente activo en la construcción del saber. Esta última promueve prácticas centradas en la comprensión, que valoran lo táctil, corporal y experiencial. En particular, algunas estrategias como el doblado de papel para la exploración de lugares geométricos, por ejemplo, podrían permitir una comprensión sensorial, clave para una enseñanza que reconozca la diversidad.

La revisión también identifica acciones en diferentes regiones para favorecer la inclusión, así como obstáculos relacionados con la naturaleza visual de las Matemáticas y la escasa formación docente. En América Latina, se han propuesto materiales accesibles y adaptaciones didácticas (Acevedo et al., 2023; Escalante et al., 2020); a nivel internacional se destacan el uso del braille matemático, descripciones táctiles y tecnologías accesibles (Aljundi y Altakhayneh, 2020; Emerson y Anderson, 2018a, 2018b; Healy y Fernandes, 2011; Klingenberg y Brodin, 2019; Obiero et al., 2021). Así mismo, enfoques como el enactivismo y la teoría histórico-cultural de Vygotsky resaltan el papel del cuerpo en la construcción del conocimiento matemático (Abrahamson et al., 2018).

Estas experiencias muestran que, aunque existen políticas inclusivas en países como Colombia, su aplicación enfrenta desafíos. Como señalan Agudelo-Palacio y Coelho da Rosa (2021) y Caracas et al. (2022, como se citó en Henao, 2023), es esencial que todos los actores, incluido el Gobierno, se comprometan con su implementación; además, que los docentes se formen en sintonía con las necesidades del estudiantado. Estas diferencias regionales deben considerarse al diseñar propuestas para la formación inicial de profesores, promoviendo una Educación Matemática inclusiva, coherente con los objetivos de desarrollo sostenible y con un enfoque epistemológico que contemple la interacción de estudiantes con discapacidad visual con los objetos matemáticos (Moreno y Farfán, 2025).

En este marco, Pontes (2010), Santa y Jaramillo (2010) y Pinho et al. (2016) destacan el origami como un recurso valioso para la comprensión geométrica, al permitir la interacción táctil con figuras. Aunque carecen de visión, los estudiantes con discapacidad visual desarrollan el tacto para obtener información precisa de los objetos (Pérez, 2010). Por ello, se propone el uso del doblado de papel para facilitar la comprensión de conceptos geométricos en esta población, aprovechando sus habilidades sensoriales. Por lo tanto, el objetivo de este estudio es analizar la comprensión de lugares geométricos mediante construcciones con doblado de papel en profesores en formación inicial con discapacidad visual, en el marco de la Enseñanza para la Comprensión.

Referencial teórico

Para fundamentar la presente propuesta, se abordan elementos conceptuales a partir de una perspectiva integral de la inclusión educativa, con especial énfasis en la discapacidad visual, y en la Enseñanza para la Comprensión como marco conceptual para el análisis de la comprensión.

Educación inclusiva

La inclusión educativa, entendida como un principio que garantiza el derecho al aprendizaje de todas las personas, independientemente de sus diferencias individuales, promueve una educación equitativa, accesible y de calidad. En Colombia, esta perspectiva se consolida normativamente mediante el Decreto 1421 de 2017, que reconoce la necesidad de brindar una educación pertinente tanto a personas con barreras para el aprendizaje como a aquellas con talentos excepcionales. La UNESCO (2017) refuerza esta postura al proponer enfoques pedagógicos flexibles que valoren la diversidad como una oportunidad para enriquecer los procesos educativos. En sintonía con los Objetivos de Desarrollo Sostenible de la Agenda 2030 (ONU, 2018), se resalta la urgencia de eliminar desigualdades, transformar los entornos educativos y fortalecer la formación docente, para que los educadores estén preparados metodológicamente para atender la pluralidad de formas de aprender y participar en el aula.

En este marco, se hace necesario comprender la discapacidad visual a partir de un enfoque social que trascienda la noción de deficiencia individual y que reconozca la interacción entre las condiciones personales y las barreras del entorno como configuradoras de la discapacidad. La Ley 1618 de 2013 define legalmente la ceguera y la baja visión, y establece que la discapacidad emerge cuando el entorno no responde a las necesidades del sujeto. Este enfoque humanista plantea importantes desafíos en el campo de la Educación Matemática, particularmente por el carácter visual de muchos de sus contenidos. La Ley 2294 de 2023 refuerza estos principios al establecer como obligación del Estado la adaptación de materiales y entornos para reducir las brechas de desigualdad, lo que incluye ajustes razonables en los procesos educativos para personas con discapacidad visual.

Diversos estudios han aportado comprensiones significativas sobre la inclusión educativa en contextos de discapacidad visual; Moreno y Farfán (2025) enfatizan la necesidad de repensar las prácticas pedagógicas en Matemáticas, integrando recursos sensoriales, corporales y tecnológicos que respondan a los modos en que las personas con discapacidad visual construyen conocimiento, lo que implica no solo adaptaciones, sino transformaciones profundas en las maneras de enseñar y aprender. En esta línea, investigaciones como las de Agudelo-Palacio y Coelho (2021) destacan la relevancia de la mediación didáctica y el diseño de ambientes de aprendizaje accesibles en el proceso de apropiación de saberes matemáticos. Asimismo, estudios recientes como el desarrollado por Caracas et al. (2022, como se citó en Henao, 2023), subrayan la importancia de una Educación Matemática que contemple estrategias colaborativas y el desarrollo de competencias espaciales mediante recursos hápticos, los cuales, además de facilitar la comprensión conceptual, promueven la autonomía y el pensamiento matemático en estudiantes con discapacidad visual.

Enseñanza para la Comprensión

Según Perkins (1999), la comprensión es "la habilidad de pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que uno sabe" (p. 80). Blythe y Perkins (1998) la definen como la capacidad de realizar con un tópico diversas acciones que estimulan el pensamiento, como explicar, demostrar, ejemplificar, generalizar, establecer analogías o presentarlo de manera novedosa. Desde esta perspectiva, la Enseñanza para la Comprensión (EpC) se estructura en torno a cuatro componentes interrelacionados: tópicos generativos, metas de comprensión, desempeños de comprensión y evaluación diagnóstica continua (Stone, 1999; Pogré, 2012).

Los tópicos generativos son ideas clave vinculadas al currículo escolar, relevantes para estudiantes y docentes, que fomentan el interés y la conexión con experiencias significativas. Las metas de comprensión definen de forma explícita y pública los aprendizajes esperados, orientando claramente la práctica docente. Los desempeños de comprensión operacionalizan estas metas mediante experiencias significativas organizadas en tres fases: exploración (activación de saberes previos), investigación guiada (actividades que promueven la comprensión) y proyecto final de síntesis (demostración del nivel alcanzado). En este marco, la evaluación se concibe como un proceso continuo y formativo que permite monitorear constantemente lo que comprenden los estudiantes. Según Stone (1999), la evaluación diagnóstica continua posibilita revisar qué es lo que comprenden los estudiantes durante todo el proceso. Esto transforma el rol del profesor, que pasa de evaluador a mediador, facilitador de la reflexión y la retroalimentación entre pares, y negociador de su autoridad intelectual (Pogré 2012).

Aplicar la EpC en contextos inclusivos, especialmente con estudiantes con discapacidad visual, requiere integrarla con perspectivas centradas en la diversidad y la accesibilidad. Algunas investigaciones recientes (Moreno y Farfán, 2025; Escalante et al., 2020) han generado propuestas desde lo experiencial, en la que el cuerpo, el tacto y la manipulación directa son fundamentales en la apropiación del conocimiento. Así, un diseño en el marco de la EpC se enriquece al incorporar prácticas sensibles a lo sensorial, como el uso del origami para comprender la geometría (Pontes, 2010; Santa y Jaramillo, 2010; Pinho et al., 2016), que posibilita reconstruir táctilmente propiedades geométricas. Este marco conceptual se articula con posturas que reconocen al estudiante como un constructor activo del saber matemático desde una perspectiva enactivista o histórico-cultural (Abrahamson et al., 2018), que valora la interacción sensorial, espacial y corporal. Así, la comprensión se expresa tanto en lo que el estudiante dice como en las acciones significativas que realiza en contextos accesibles, propiciando una Educación Matemática integral donde la EpC actúa como vía para superar barreras y construir comprensiones genuinas en la diversidad.

Método y desarrollo conceptual

Este estudio adopta un enfoque cualitativo orientado a interpretar cómo las personas con discapacidad visual experimentan la comprensión geométrica mediante la manipulación del papel. Se desarrolla como un estudio de casos (Stake, 2005) que describe las comprensiones geométricas alcanzadas a través del doblado. La información se recoge mediante observación participante (Hernández et al., 2014), entrevistas semiestructuradas y diarios de campo elaborados por dos profesoras en formación, lo que permite una comprensión profunda de los procesos de comprensión y posibles mejoras para futuras prácticas pedagógicas inclusivas.

Las participantes son dos estudiantes de un programa de licenciatura en educación especial, de una universidad pública de Antioquia, Colombia. Aunque su programa incluye un componente matemático en su plan de estudios, carece de cursos específicos para atender las necesidades de estudiantes con discapacidad visual en esta área, quienes se están formando para ser profesoras. Ellas están matriculadas en los primeros semestres del programa y se identifican como Natalia y María. La primera presenta ceguera congénita, mientras que la segunda tiene baja visión. El material empleado fue papel, por su adaptabilidad a las necesidades individuales. Se consideraron el tipo y grosor del papel, así como la claridad de las instrucciones. Estas, al ser seguidas secuencialmente y acompañadas por observación y preguntas, permitieron construir figuras tridimensionales desde el doblado de papel.

Las tareas se diseñaron con base en los desempeños del marco conceptual de la Enseñanza para la Comprensión, abordando las fases de exploración, investigación guiada y proyecto final de síntesis. En esta ponencia se presentan, únicamente, las tareas de la fase de exploración, dividida en dos momentos: primero, diseño y validación de instrucciones para construir un prisma de base triangular como una prueba piloto; segundo, implementación con estudiantes con discapacidad visual, explorando sus aprendizajes previos y recogiendo sus recomendaciones para el diseño de tareas posteriores.

Resultados preliminares

En el primer momento de la fase de exploración se conceptualizó y elaboró un esquema de pasos para construir un prisma de base triangular usando el doblado de papel. El pilotaje se realizó con estudiantes del semillero OriGEM, quienes vendaron sus ojos para validar académicamente las instrucciones, sin pretender simular la experiencia de una persona con discapacidad visual.

Durante esta etapa, se identificaron dificultades en el lenguaje de las instrucciones, las cuales debían ser claras y comprensibles sin requerir conocimientos matemáticos previos. Los participantes, estudiantes de licenciatura en Matemáticas, enfrentaron un desafío novedoso y aportaron significativamente a la reestructuración de las descripciones. Se evidenció también la necesidad de nombrar los lados de la figura durante el proceso y de reconocer estrategias de doblado que mejoren la precisión. Aunque la mayoría tenía experiencia con el doblado de papel, presentaron dificultades para seguir instrucciones y realizar los dobleces con exactitud.

En el segundo momento y considerando las recomendaciones surgidas en el primero, se implementó individualmente la exploración de saberes con las participantes Natalia y María. La actividad incluyó preguntas al inicio y al final, orientadas a indagar sobre sus procesos de aprendizaje en Matemáticas, trayectorias formativas y barreras enfrentadas, especialmente en geometría. Se exploraron aspectos como su formación en el área, el momento en que adquirieron la discapacidad, el uso de dispositivos de asistencia, la forma en que aprendieron conceptos geométricos, y su experiencia con el doblado de papel, incluyendo el uso del origami para comprender la geometría. Al finalizar, se les solicitaron recomendaciones para mejorar las instrucciones, pensando en su accesibilidad para personas con discapacidad visual. También se realizó una evaluación retrospectiva de la experiencia con la figura construida, sus percepciones sobre el doblado de papel y su interés en continuar explorando lugares geométricos mediante esta herramienta.

Durante el diálogo inicial, ambas manifestaron no haber tenido una educación adaptada ni un enfoque diferenciado en Matemáticas. Natalia señaló: *“yo nunca recibí una educación diferente [...] por eso mismo, porque yo las recibía tal cual que mis compañeros”*, lo que evidencia cómo la falta de adaptaciones limitó su acceso profundo a los contenidos matemáticos. Ninguna había trabajado previamente con doblado de papel ni en construcciones geométricas.

En cuanto a herramientas tecnológicas, ambas usan lectores de pantalla en sus teléfonos y, en menor medida, el sistema braille. María, con baja visión, resaltó la grabadora de audio como recurso clave en su aprendizaje: *“yo siempre utilizo la grabadora de audio [...] yo la llevo a todos lados”*. Estas estrategias muestran cómo han adaptado su aprendizaje ante la falta de materiales o metodologías accesibles.

Durante la actividad, ambas identificaron la hoja como un cuadrado, aunque con distintos métodos. Natalia lo determinó recorriendo los bordes simultáneamente; María lo hizo contando los lados, pero no logró distinguir un rectángulo no cuadrado, denominando ambas figuras como cuadrados. En general, siguieron las instrucciones sin mayores dificultades, empleando diferentes estrategias de doblado. Natalia mostró mayor precisión usando ambas manos para fijar los dobleces, mientras que María presentó algunas imprecisiones al identificarlos. Sin embargo, ambas reconocieron características geométricas emergentes durante la construcción. La Figura 1 ilustra esta etapa con las participantes.

Figura 1. Primera experiencia con las participantes Natalia y María.

Conclusiones parciales

Este estudio nos revela que, si bien la formación docente busca promover una visión amplia e inclusiva de la educación integrando la reflexión crítica sobre la diversidad en sus múltiples dimensiones a través de los espacios académicos y extracurriculares, aún se identifican desafíos para equipar a los futuros profesores con todas las herramientas necesarias para abordar la diversidad en contextos educativos. Esto resalta la importancia de la formación continua y del desarrollo autónomo de estrategias inclusivas que atiendan las necesidades de todos los estudiantes. En este contexto, los primeros análisis muestran la necesidad de mejorar la claridad en las instrucciones, especialmente en los pasos finales de la construcción del prisma de base triangular, donde fue crucial volver a nombrar los lados de las figuras para garantizar la comprensión. Además, remarcar los dobleces emergió como un elemento fundamental, ya que constituye la única referencia táctil para las personas con discapacidad visual durante la construcción de figuras geométricas.

Las reflexiones de las participantes evidenciaron el impacto positivo de la experiencia, al señalar que el doblado de papel les facilitó la "visualización táctil" de conceptos geométricos, aportando herramientas útiles para su futura labor pedagógica. Asimismo, se subrayó la importancia de evitar dobleces innecesarios o "parásitos", ya que estos interfieren con la correcta percepción de las figuras. Estas recomendaciones abren la puerta a futuros ajustes y mejoras en el diseño de tareas inclusivas para la enseñanza de la geometría.

Los hallazgos reafirman la relevancia de propuestas didácticas que integren lo sensorial y lo corporal como vías legítimas de acceso al conocimiento matemático (Moreno y Farfán, 2025; Abrahamson et al., 2018). Tal como lo indican Aljundi y Altakhayneh (2020), los estudiantes con discapacidad visual requieren experiencias manipulativas guiadas por descripciones verbales precisas y recursos táctiles que les permitan construir significados propios. A su vez, investigaciones como las de Emerson et al. (2018b) y Klingenberg et al. (2019) subrayan que, para garantizar una enseñanza accesible, es indispensable cuidar la secuenciación de actividades, clarificar el lenguaje instruccional y minimizar el ruido perceptivo, elementos que resuenan directamente con los ajustes que emergieron en esta primera experiencia. Así, el trabajo aquí presentado no solo visibiliza la potencia del doblado de papel como estrategia inclusiva en la enseñanza de la geometría, sino que, también, ofrece insumos concretos para enriquecer la formación docente desde una perspectiva situada, multisensorial y comprometida con la equidad.

Referencias y bibliografía

Abrahamson, D., Flood, V, Miele, J.,y Siu, Y. (2018). Enactivism and ethnomethodological conversation analysis as tools for expanding Universal Design for Learning: The case of visually impaired mathematics students. *ZDM, (51),* 291-303. https://doi.org/10.1007/s11858-018-0998-1

Acevedo, J. M., Cárdenas, M. C. y García, R. A. (2023). Estrategias didácticas inclusivas en educación matemática: Un estudio con estudiantes con discapacidad visual. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva*, *17*(1), 89–110.

Agudelo-Palacio, N. y Coelho da Rosa, A. (2021). Aportes para una educación matemática inclusiva desde la discapacidad visual: Una revisión desde la literatura. *Revista Latinoamericana de Educación Inclusiva, 15*(2), 145–164. https://hdl.handle.net/10495/32641

Aljundi, K. y Altakhayneh, B. (2020). The effectiveness of using accessible math e-content in developing mathematical concepts for visually impaired students. *Journal of Educational and Psychological Studies*, *14*(2), 243–258. https://doi.org/10.1145/2468356.2468698

Blythe, T. y Perkins, D. (1998). Comprender la Comprensión. En T. Blythe (Ed.), *Enseñanza para la Comprensión. Guía para el docente* (pp. 35-42). Paidós.
Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional de Colombia]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. 29 de agosto de 2017.
Emerson, R. W. y Anderson, D. K. (2018a). Teaching mathematics to students with visual impairments: A review of instructional practices. *Journal of Visual Impairment & Blindness*, 112(5), 503–515. https://doi.org/10.1177/0145482X1811200505
Emerson, R. W. y Anderson, D. K. (2018b). What mathematical images are in a typical mathematics textbook? Implications for students with visual impairments. *Journal of Visual Impairment & Blindness, 112*(1), 20-32. https://doi.org/10.1177/0145482X1811200103
Escalante, L., Chávez, N. y Pineda, F. (2020). Diseño de materiales accesibles para el aprendizaje de álgebra en estudiantes con discapacidad visual. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, *25*(3), 27–45.
Healy, L. y Fernandes, E. (2011). The role of gestures in mathematical activity: The case of blind learners. *Educational Studies in Mathematics*, *77*(2), 157–174. https://doi.org/10.1007/s10649-010-9290-1
Henao, A. (2023). Revisión sistemática: educación inclusiva como macro concepto en el contexto colombiano. *Revista Boletín Redipe, 12*(5), 97-111.
Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación (6 ed.).* McGraw Hill Education.
Klingenberg, O. G., Holkesvik, A. H., y Augestad, L. B. (2019). Research evidence for mathematics education for students with visual impairment: A systematic review. *Cogent Education, 6*(1), 1626322. https://doi.org/10.1080/2331186X.2019.1626322
Klingenberg, O. G., Holkesvik, A. H.,y Augestad, L. B. (2020). Digital learning in mathematics for students with severe visual impairment: A systematic review. *British Journal of Visual Impairment, 38*(1), 38-57. https://doi.org/10.1177/0264619619876975
Ley 1618 de 2013. Por medio de la cual se establecen las disposiciones para garantizar el pleno ejercicio de los derechos de las personas con discapacidad. 27 de febrero de 2013.
Ley 2294 de 2023. Por la cual se expide el Plan Nacional de Desarrollo 2022–2026 "Colombia Potencia Mundial de la Vida". 19 de mayo de 2023.
Moreno Segura, R. A. y Farfán Márquez, R. M. (2025). Discapacidad visual y educación matemática en álgebra: Una revisión de literatura. Investigación e Innovación en Matemática Educativa, 10(Número Especial), 14–16. DOI: https://doi.org/10.46618/iime.223
Obiero, J. A., Aloka, P. J. O. y Raburu, P. A. (2021). Influence of braille literacy on mathematics achievement among learners with visual impairment in Kenya. *European Journal of Education Studies*, *8*(4), 42–55. https://doi.org/10.46827/ejes.v8i4.3659
Organización de las Naciones Unidas - ONU. (2018). *Informe de los Objetivos de Desarrollo Sostenible 2018*. ONU. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/
Pérez, C. I. P. (2010). *La respuesta educativa a los estudiantes con discapacidad visual.* Fundación MAPFRE: Organización de Estados Iberoamericanos para la educación, la ciencia y cultura.
Perkins, D. (1999). ¿Qué es la Comprensión? En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 69-95). Paidós.
Pinho, T. M. M., Delou, C. M. C. y Lima, N. R. W. (2016). Origami as a Tool to Teach Geometry for Blind Students. *Creative Education, 07*(17), 2652-2665. https://doi.org/10.4236/ce.2016.717249
Pogré, P. (2012). *Enseñanza para la Comprensión. Un marco para el desarrollo profesional docente* [Tesis doctoral]. Universidad Autónoma de Madrid.
Pontes, A. S. (2010). *Origami modular, geometria espacial e deficiência visual* [Tesis de pregrado no publicada]. Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Fluminense.
Santa, Z. y Jaramillo, C. (2010). Aplicaciones de la Geometría del doblado de papel a las secciones cónicas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (31), 338-362.
Stake, R. (2005). Qualitative case studies. En N. K. Denzin y Y. S. Lincoln (Eds.), *The SAGE handbook of qualitative research* (pp. 443-466). Sage.
Stone, M. (1999). La importancia de la comprensión. En M. Stone (Ed.), *La Enseñanza para la Comprensión. Vinculación entre la investigación y la práctica* (pp. 21 – 34). Paidós.
UNESCO. (2017). *Guía para asegurar la inclusión y la equidad en la educación*. UNESCO.

Construindo um livro de códigos de proposição de problemas para análise de tarefas de PPM em transformação linear

Joab dos Santos **Silva**
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba
Brasil
joab.silva@ifpb.edu.br
Silvanio de **Andrade**
Universidade Estadual da Paraíba
Brasil
silvanio@usp.br

Resumo

Esse artigo apresenta a construção das categorias que compõem um livro de códigos para a análise de tarefas de proposição de problemas, voltadas ao ensino e aprendizagem de transformações lineares. Para isso, realizamos uma revisão de literatura com foco em investigar como tais categorias são definidas, promovemos dois workshops com professores de Matemática (em formação inicial e continuada) e analisamos qualitativamente as respostas e os feedbacks dos participantes à luz da literatura. Como resultado, definimos categorias relacionadas ao tipo de problema, à relação com a situação-problema e à solubilidade, bem como à complexidade matemática envolvida, tanto no texto quanto na solução. Os resultados contribuem para o aprimoramento de instrumentos de análise em Educação Matemática e para o desenvolvimento de práticas formativas baseadas na proposição de problemas no contexto da Álgebra Linear.

Palavras-chave: Álgebra Linear; Análise qualitativa; Educação Matemática; Ensino superior; Formação de professores de Matemática; Proposição de problemas matemáticos.

Problema de pesquisa

Nos últimos anos, diferentes abordagens teórico-metodológicas têm sido propostas para o ensino e aprendizagem de Álgebra Linear, incluindo o uso de representações semióticas, demonstrações, problemas abertos, modelagem, tecnologias digitais em ambientes de geometria dinâmica, Educação Matemática Realística e a Teoria APOS (Stewart *et al.*, 2019; Trigueros & Wawro, 2020). Segundo Trigueros e Wawro (2020, p. 477), “começar com problemas reais ou realistas ajuda os alunos a desenvolver abordagens que constroem uma ponte entre situações concretas e os conceitos abstratos necessários para modelá-las”.

No campo da Proposição de Problemas Matemáticos (PPM), embora haja um número crescente de estudos voltados à formação de professores (Imaoka *et al*.,2015; Silber e Cai, 2021; Joaquin, 2024; Kovács, 2024), ainda são escassas as investigações que articulam PPM ao ensino de conteúdos de Matemática avançada. Nesse contexto, este estudo busca responder à seguinte questão de pesquisa: Como construir e aprimorar um instrumento para categorização e análise qualitativa e quantitativa das respostas a uma tarefa de PPM voltada ao ensino e aprendizagem de transformações lineares?

Proposição de problemas matemáticos

Entre as diversas contribuições da pesquisa internacional, destacam-se os trabalhos de Stoyanova e Ellerton (1996) e de Cai *et al*. (2015), que definem a proposição de problemas como um processo de construção de problemas relevantes a partir de interpretações pessoais de situações concretas, baseadas na experiência matemática do participante. Os problemas propostos ou reformulados devem ser solucionáveis com base nas informações fornecidas na situação. Neste estudo, adotamos a definição apresentada por Cai e Hwang (2020), segundo a qual a proposição de problemas em Educação Matemática refere-se a um conjunto de atividades relacionadas que envolvem estudantes e professores na formulação ou reformulação de problemas, e na expressão de um problema ou tarefa, com base em um contexto específico.

O desenvolvimento de uma atividade de PPM parte de uma tarefa de PPM, que é composta por duas partes: a situação-problema e o prompt (Cai *et al*., 2022). A situação-problema apresenta o contexto e dados iniciais, podendo emergir de cenários do mundo real ou cenários puramente matemáticos ou abstratos (Cai e Hwang, 2023). Quanto à estrutura, Stoyanova e Ellerton (1996) classificam as situações problema como livres, semiestruturadas e estruturadas. Mais recentemente, Baumanns e Rott (2021) propuseram a fusão das duas primeiras categorias em uma única, denominada situações-problema não estruturadas, caracterizadas pela ausência de uma tarefa inicial definida ou de um exemplo de problema.

O prompt, por sua vez, explicita aos participantes o que se espera que realizem na tarefa de PPM. Exemplos recorrentes de prompts podem ser encontrados em Cai e Hwang (2023) e Cai *et al*. (2024). Segundo a categorização proposta por Baumanns e Rott (2024), os prompts podem ser abertos ou fechados. Prompts abertos não impõem restrições quanto à dificuldade, ao público-alvo ou ao conteúdo. Assim, uma mesma situação-problema pode gerar quatro configurações distintas de tarefa de PPM, a depender da combinação entre o tipo de estrutura da situação-problema e o tipo de prompt, sendo essa escolha orientada pelos objetivos específicos da atividade.

Nesse estudo, trabalhamos com uma tarefa de PPM baseada em uma situação-problema não estruturada, de contexto puramente matemático. A tarefa envolve a definição de transformação linear entre espaços vetoriais arbitrários, os conceitos de núcleo e imagem, a informação de que ambos são subespaços vetoriais, e três vetores do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. O prompt inicialmente utilizado era aberto, sendo posteriormente reformulado para um prompt fechado.

Desenvolvimento metodológico

A categorização e análise de dados obtidos a partir de uma tarefa de PPM requerem o uso de um instrumento específico, comumente denominado livro de códigos de proposição de problemas. Esse instrumento deve incluir definições gerais e específicas, bem como instruções detalhadas para a codificação das respostas em planilhas eletrônicas, organizadas segundo uma estrutura de fluxograma que oriente de forma sistemática o processo de análise. Na literatura internacional, identificam-se diversos métodos para avaliação das tarefas de PPM. Com base nisso, realizamos uma revisão de literatura com foco em investigar se, e de que maneira, os estudos categorizam aspectos como tipos de respostas, relação com a situação-problema, solubilidade, complexidade matemática e criatividade.

Observa-se que, em muitas pesquisas voltadas à formação de professores de Matemática, os conteúdos presentes nas tarefas de PPM e em suas respectivas respostas estão majoritariamente relacionados à educação básica (Leung e Silver, 1997; Crespo e Sinclair, 2008; Silber e Cai, 2021; Joaquin, 2024). Embora estudos como os de Imaoka *et al*. (2015) e Kovács (2024) apresentem emergências de conteúdos mais avançados — como funções de várias variáveis (Cálculo de Várias Variáveis) e congruência módulo m (Teoria dos Números) —, mesmo nesses casos, as tarefas de PPM não foram direcionadas explicitamente a disciplinas de Matemática avançada.

A pesquisa envolvendo atividades de PPM em contextos de Matemática avançada é ainda incipiente. Como consequência, há carência de exemplos característicos (EC) que subsidiem a formulação das definições e instruções necessárias à construção de um livro de códigos de voltado a esse nível de ensino. Diante disso, realizamos dois workshops com o objetivo de subsidiar o desenvolvimento de tal instrumento, aplicando uma tarefa com foco no ensino e aprendizagem de transformações lineares. O primeiro workshop foi realizado em outubro de 2024, de forma remota (via Google Meet), durante um encontro de um grupo de pesquisa do qual o primeiro autor é membro e o segundo autor é coordenador. A atividade teve duração de duas horas e contou com a participação de seis integrantes do grupo. Foi utilizada uma tarefa de PPM com situação-problema não estruturada, de contexto puramente matemático, e prompt aberto, conforme descrito a seguir:

> A transformação linear é um tipo particular de função, cujo domínio e contradomínio são espaços vetoriais, e que preservam as operações de adição de vetores e a multiplicação de um vetor por um escalar. Silva (2021) define a transformação linear como:
> "Sejam U e V dois K-espaços vetoriais. Uma função $T: U \longrightarrow V$ é uma transformação linear se:
> 1. $T(u_1 + u_2) = T(u_1) + T(u_2), \forall\, u_1, u_2 \in U$
> 2. $T(\lambda u) = \lambda T(u), \forall\, \lambda \in K$ e $\forall\, u \in U$" (p. 107)
> A toda transformação linear $T: U \longrightarrow V$ estão associados dois subespaços, o núcleo e a

imagem, definidos por Silva (2021) como:
"Sejam U e V dois K-espaços vetoriais e $T: U \longrightarrow V$ é uma transformação linear.
1. O conjunto $\{u \in U; T(u) = 0\}$ é chamado núcleo de T e denotamos por $Nuc(T)$.
2. O conjunto $\{v \in V; \exists\ u \in U\ com\ T(u) = v\}$ é chamado imagem de T e denotamos por $Im(T)$." (p. 118)
Considere o $\mathbb{R}$-espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ e os vetores $(-1,4,2)$, $(1,2,-1)$ e $(3,-5,0)$ do $\mathbb{R}^3$.
Proponha três problemas distintos que possam ser resolvidos a partir destas informações.
Algumas orientações: Para os problemas propostos, podem utilizar tanto as informações apresentadas na situação-problema quanto informações elaboradas pelo proponente a partir se suas experiências de vida e conhecimentos prévios.

O segundo workshop foi realizado em novembro de 2024, durante um evento de formação de professores de Matemática na região Nordeste do Brasil. A atividade ocorreu de forma presencial, em um Laboratório de Matemática equipado com computadores e acesso à internet, permitindo o uso do software gratuito *Calculadora de Matrizes*. O workshop teve duração de duas horas e contou com a participação de oito estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática. Foi utilizada a mesma tarefa de PPM aplicada no Workshop 1, com duas modificações principais: o prompt foi reformulado de aberto para fechado, e alguns trechos foram ajustados para melhor adequação ao formato da tarefa. A seguir, apresentamos os fragmentos modificados da tarefa de PPM:

[...] Considere os vetores $(-1,4,2)$, $(1,2,-1)$ e $(3,-5,0)$ do $\mathbb{R}^3$.
Proponha três problemas distintos utilizando os vetores dados (não necessariamente os três) e que possam ser resolvidos a partir destas informações.
Algumas orientações: Para os problemas propostos, além das informações apresentadas na situação-problema, é possível utilizar informações elaboradas pelo proponente a partir se suas experiências e conhecimentos.

Resultados e discussões

Na revisão de literatura, identificamos diferentes propostas de categorização das respostas em tarefas de PPM. Silver e Cai (1996) propõem categorias que consideram o tipo de resposta, a solubilidade, a complexidade linguística e a complexidade matemática. Leung e Silver (1997) analisam as respostas com base na qualidade, plausibilidade, suficiência de informações e complexidade matemática. Bonotto e Santo (2015), com base em Silver e Cai (1996), Leung e Silver (1997) e Yuan e Sriraman (2010), propõem uma categorização que inclui tipo de problema, relevância, plausibilidade, complexidade textual e complexidade da solução. Além disso, as autoras avaliam a criatividade dos problemas plausíveis com informações suficientes, considerando os critérios de fluência, flexibilidade e originalidade. De modo semelhante, Baumanns e Rott (2024) também adotam essas três dimensões da criatividade em suas análises.

A seguir, apresentamos os resultados obtidos nos dois workshops, com foco nas respostas elaboradas pelos participantes e nos feedbacks fornecidos após a realização da tarefa de PPM. Para fins de identificação, adotamos a seguinte notação: *Workshop 1 – Participante 1 – Problema 1* será representado por **W1P1P1**. Abaixo, descrevemos as respostas e análises correspondentes:

W1P1P1: Verifique se os vetores acima é uma transformação linear.
W1P1P2: Classifique esses vetores em LD ou LI.
W1P1P3: Verifique se os vetores formam um triângulo retângulo.
W1P2P1: Determine se o vetor $w = (2,1,-3)$ pertence à imagem da transformação T.
W1P3P1: Qual a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,0) = (-1,4,2)$ e $T(0,1) = (3,-5,0)$?
W1P4P1: O que é um Subespaço?
W1P4P2: O que é um Espaço Vetorial?
W1P4P3: Como resolver algo dessa natureza?
W1P4P4: Onde podemos perceber a transformação linear em nossos cotidianos?
W1P4P5: Como você pretende trabalhar essa situação com um professor que tem um perfil parecido com o meu?
W1P4P6: Como vou propor um problema se tenho dificuldade de compreender o fenômeno explorado?
W2P1P1: Sejam os vetores $(-1,4,2)$ os geradores do núcleo de uma transformação linear. Diga uma transformação que tem esses geradores.
W2P1P2: Seja a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $T(x,y,z) = (x + y + 3z, 4x + 2y - 5z, 2x - y)$. Encontre os vetores geradores da imagem da transformação linear e verifique se ela é de fato uma transformação linear.
W2P1P3: Escreva uma transformação linear cujo os vetores geradores da imagem sejam $(3,-8,0)$.

Com base nas categorias identificadas na revisão de literatura, os problemas **W1P4P3**, **W1P4P5** e **W1P4P6** foram classificados como EC de *problemas não matemáticos*. Todos os demais foram considerados EC de *problemas matemáticos*. Dentre estes, os problemas **W1P4P1** e **W1P4P2** foram inicialmente categorizados, segundo Bonotto e Santo (2015), como EC de *problemas matemáticos irrelevantes*. Contudo, optamos por adotar a nomenclatura *problemas matemáticos não relacionados*, pois entendemos que essa terminologia representa com maior precisão a ideia de que tais problemas não fazem uso das informações fornecidas na situação-problema, rompendo, portanto, a relação com o contexto proposto. Além disso, o termo "irrelevante" pode ser interpretado de maneira negativa pelos participantes, sugerindo uma falta de valor matemático, o que nem sempre corresponde à realidade. Por exemplo, o problema **W1P1P2** é altamente relevante para a Álgebra Linear, embora não estabeleça conexão com o tema central da tarefa (transformação linear). De modo semelhante, **W1P4P4** utiliza o conceito de transformação linear, mas desconsidera os vetores fornecidos na situação-problema. Assim, os problemas **W1P1P2**, **W1P1P3**, **W1P4P1**, **W1P4P2** e **W1P4P4** são classificados como EC de *problemas matemáticos não relacionados*.

Por outro lado, os problemas **W1P1P1**, **W1P2P1**, **W1P3P1**, **W2P1P1**, **W2P1P2** e **W2P1P3** foram identificados como EC de *problemas matemáticos relacionados*. Entre eles, os problemas **W1P1P1**, **W1P2P1**, **W2P1P1** e **W2P1P3** foram classificados como EC de problemas *não solucionáveis*, segundo a tipologia de Silver e Cai (1996). Desses, **W1P2P1**, **W2P1P1** e **W2P1P3** são EC de problemas *não solucionáveis por informação insuficiente* (Silver e Cai, 1996), também descritos por outros autores como *problemas matemáticos plausíveis com informações insuficientes* (Leung e Silver, 1997; Bonotto e Santo, 2015). Em nossa análise, adotamos a terminologia proposta por Silver e Cai (1996). Já o problema **W1P1P1** representa um EC de *problema não solucionável por objetivo incompatível* (Silver e Cai, 1996).

Assim, os problemas **W1P3P1** e **W2P1P2** são EC de *problemas matemáticos relacionados e solucionáveis*. Ao analisar suas estruturas, observamos que o enunciado de **W1P3P1** apresenta apenas uma pergunta/demanda, enquanto o de **W2P1P2** contém duas. Quanto às soluções, **W1P3P1** exige o cálculo de uma transformação linear completamente definida, ao passo que **W2P1P2** demanda, além da definição de uma transformação linear, a determinação de um conjunto gerador da imagem da transformação. Ainda, caso os problemas **W2P1P1** e **W2P1P3** fossem reformulados com a inclusão da informação "$T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$", tornando-os solucionáveis, suas soluções envolveriam o cálculo explícito de uma transformação linear utilizando os vetores fornecidos, a partir de um conjunto gerador do domínio ou da imagem.

Conclusões

Com base nas análises realizadas, foram definidas as categorias que compõem o livro de códigos de proposição de problemas, concebido como instrumento para a categorização e análise quantitativa e qualitativa das respostas de uma tarefa de PPM, voltada ao ensino e aprendizagem de transformações lineares. A Tabela 1 apresenta as descrições das categorias referentes ao tipo de problema, à relação com a situação-problema e à solubilidade. No que diz respeito à complexidade matemática, propusemos uma adaptação do modelo de análise de Bonotto e Santo (2015), organizando a complexidade em duas dimensões: três subcategorias para a complexidade do texto do problema e quatro subcategorias para a complexidade da solução. As Tabelas 2 e 3 detalham, respectivamente, essas subcategorias, acompanhadas de descrições e exemplos representativos para cada grau de complexidade da solução.

Tabela 1

Descrição das categorias de respostas do livro de código de proposição de problemas.

Tipos de respostas	Tipos de problemas	Descrição
Sem resposta		Nenhuma escrita ou respostas não compreensíveis.
Declaração		Sentenças ou expressões matemáticas que não demandam ação com uma exigência por parte do resolvedor (verificar, analisar, calcular, determinar, provar etc.).
Problema	Não matemático	Pergunta que não implica nenhuma relação, cálculo ou conteúdo matemático, ou seja, que não é necessariamente resolvida pela Matemática (Leung e Silver, 1997).
	Matemático	Contém uma exigência matemática de tal modo que demanda do resolvedor uma ação ou determinada resposta.
	Não relacionado	Não usa nenhuma das informações dadas na situação-problema (no caso, os vetores) ou usa fora do contexto (transformação linear: definição, propriedades, núcleo e imagem).
	Relacionado	Usa pelo menos uma das informações dadas na situação-problema (no caso, pelo menos um dos vetores) dentro do contexto (transformação linear: definição, propriedades, núcleo e imagem).
	Não solucionável	Quando falta informação suficiente para gerar uma solução ou propõe um objetivo incompatível com a situação-problema (Silver e Cai, 1996).
	Solucionável	Quando, em conjunto com as informações dadas na situação-problema, contém uma demanda matemática que inclui informação suficiente para gerar uma solução (Silver e Cai, 1996).

Fonte: Autoria própria, 2025.

Tabela 2
Descrição dos graus de complexidade matemática do texto do problema.

Grau	Descrição
Complexidade matemática CT1	Problemas com uma pergunta.
Complexidade matemática CT2	Problemas com duas perguntas.
Complexidade matemática CT>2	Problemas com mais de duas perguntas.

Fonte: Autoria própria, 2025.

Tabela 3
Descrição dos graus de complexidade matemática da solução do problema.

Grau-descrição	Exemplos
Complexidade matemática CR1 – Envolve apenas cálculo direto e conhecimento de definições.	O proponente cria uma transformação linear e pede, por exemplo, para: calcular la imagem de um ou mais dos vetores dados; ou, verificar se os vetores dados pertencem ao núcleo ou à imagem da transformação.
Complexidade matemática CR2 – Envolve propriedades de transformação linear e conhecimentos que são pré-requisitos.	O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados.
Complexidade matemática CR3 – Envolve propriedades de transformação linear, conhecimentos que são pré-requisitos e definições de núcleo e imagem.	O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados + determinar o núcleo ou imagem da transformação.
Complexidade matemática CR>3 – Envolve propriedades de transformação linear, conhecimentos que são pré-requisitos, definições e resultados sobre núcleo e imagem.	O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados + analisar a transformação quanto a injetividade e sobrejetividade (envolve o Teorema do Núcleo e da Imagem e suas consequências). O proponente pede para determinar uma transformação linear (transformação linear completamente definida) utilizando os vetores dados, tomando um conjunto gerador para o domínio ou um conjunto gerador da imagem (Teorema do Núcleo e da Imagem - problemas com solução única ou infinitas soluções).

Fonte: Autoria própria, 2025.

Referências

Baumanns, L., & Rott, B. (2021). Rethinking problem-posing situations: A review. *Investigations in Mathematics Learning*, 13 (2), 59-76.

Baumanns, L., & Rott, B. (2024). Problem-posing tasks and their influence on pre-service teachers' creative problem-posing performance and self-efficacy. *The Journal of Mathematical Behavior*, 73, 101130.

Bonotto, C., & Santo, L. D. (2015). On the relationship between problem posing, problem solving, and creativity in the primary school. *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, 103-123.

Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101391.

Cai, J., & Hwang, S. (2023). Making mathematics challenging through problem posing in the classroom. In *Mathematical challenges for all* (pp. 115-145). Cham: Springer International Publishing.

Cai, J., Hwang, S., Jiang, C., & Silber, S. (2015). Problem-posing research in mathematics education: Some answered and unanswered questions. *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, 3-34.

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., & Jiang, C. (2024). Advances in research on mathematical problem posing: Focus on task variables. *The Journal of Mathematical Behavior*, 101186.

Cai, J., Koichu, B., Rott, B., Zazkis, R., & Jiang, C. (2022). Mathematical problem posing: Task variables, processes, and products. In C. Fernandez, S. Llinares, A. Gutierrez, & N. Planas (Eds.), *Proceedings of the 45th of the Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 119-145). PME

Crespo, A. & Sinclair, N. (2008). What makes a problem mathematically interesting? Inviting prospective teachers to pose better problems. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 395–415.

Imaoka, M., Shimomura, T., & Kanno, E. (2015). Problem posing in the upper grades using computers. *Mathematical problem posing: From research to effective practice*, 257-272.

Joaquin, M. N. B. (2024). Problem Posing Among Preservice and Inservice Mathematics Teachers. In *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 173-187). Singapore: Springer Nature Singapore.

Kovács, Z. (2024). An Approach to Developing the Problem-Posing Skills of Prospective Mathematics Teachers: Focus on the "What if not" Heuristics. In *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education: International Research and Practice Trends* (pp. 189-215). Singapore: Springer Nature Singapore.

Leung, S. S., & Silver, E. A. (1997). The role of task format, mathematics knowledge, and creative thinking on the arithmetic problem posing of prospective elementary school teachers. *Mathematics Education Research Journal*, 9(1), 5-24.

Silber, S., & Cai, J. (2021). Exploring underprepared undergraduate students' mathematical problem posing. *ZDM–Mathematics Education*, 53(4), 877-889.

Silva, J. S. (2021). *Álgebra Linear*. Paco.

Silver, E. A., & Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for research in mathematics education*, *27*(5), 521-539.

Stewart, S., Andrews-Larson, C., & Zandieh, M. (2019). Linear algebra teaching and learning: themes from recent research and evolving research priorities. *ZDM*, 51, 1017-1030.

Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. *Technology in mathematics education*, 4(7), 518-525.

Trigueros, M., & Wawro, M. (2020). Linear algebra teaching and learning. *Encyclopedia of mathematics education*, 474-478.

Yuan, X., & Sriraman, B. (2011). An exploratory study of relationships between students' creativity and mathematical problem posing abilities. In B. Sriraman & K. Lee (Eds.), The elements of creativity and giftedness in mathematics (pp. 5–28). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Construyendo Matemáticas:
Secuencias didácticas para una enseñanza eficaz

Darwin Alexander **Moreno** Gatica
Colegio Monte María
Guatemala
darwinmoreno56@gmail.com

Resumen

Cada vez es más necesario involucrar diversidad de experiencias de aprendizaje que garanticen el desarrollo de las habilidades y competencias de los estudiantes, estas experiencias deben de estár basadas en los intereses de los estudiantes y atendiendo a sus necesidasdes propias de la edad, hoy en día los estudiantes interactuan de forma constante con el ambiente digitial, por eso es de suma importacia involucrar aspectos tencológicos en la enseñanza y por otro lado es valioso seguir desarrollando todas las habilidades que el entorno real nos brinda. Con estudiantes mujeres de primero de secundaria se trabaja una serie de secuencias didácticas, que involucran experiencias de aprendizaje tanto concretas como virtuales, partiendo de la construcción de conceptos matemáticos; esto ha permitido el gusto por aprender Matemática y además la adquisición de habilidades numéricas y de resolución de problemas.

Palabras clave: secuencias didácticas; enseñanza eficaz; experiencias de aula, construcción de conceptos matemáticos, materiales concretos, integración tecnológica.

Definición y relevancia del problema

Cuando se habla de Matemáticas por lo regular a las personas no les provoca buenos sentimientos, por lo general, lo que experimentan al escuchar la palabra es desagrado, nerviosismo, rechazo al área, entre otras situaciones que manifiestan frustración y desánimo, muchas veces se menciona que las Matemáticas no son para todos, lo cual es falso, el problema no está en el área en sí, sino en la forma de transmitirla, en las estretégias que el docente utiliza para desarrollar las habilidades y contenidos indispensables en cada uno de los niveles educativos, debido a esta situación es necesario replantear la enseñanza de las Matemáticas, para que estas sean atractivas para todos pero además de esto sean funcionales y útiles en la vida de los estudiantes, es por este motivo que en el Colegio Monte María de Guatemala se planteo una innovación que incluye una diversidad de momentos, estrategias y recursos que facilitan el aprendizaje de las Matemáticas.

Referencial teórico

El ministerio de educación de Guatemala anualmente realiza una prueba estandarizada de Matemática, la cual responde a estándares mínimos dentro del marco de competencias básicas para la vida (Palala, 2021), en esta prueba durante los años que se ha llevado a cabo lo resultados siempre son menores al 15%, este porcentaje indica el nivel de logro, por lo tanto quiere decir que casi 2 estudiantes de 10, alcanzan las competencias mínimas requeridas al salir del estudio escolar, esto es lamentable a nivel país, por este motivo se hace necesario replantear la forma de enseñar Matemáticas partiendo de experiencias que los estudiantes construyan y contribuyan al aprendizaje.

Alfredo Ravera en su libro Apreciación de los resultados de la acción educativa comparte tres aspectos esenciales para la enseñanza de las Matemáticas, uno de ellos hace referencia al dominio mecánico de la operación, este valor debe ser juzgado por la capacidad de precisión en el acto de operar. Debe tener carácter de medio, nunca de fin. Cuando se convierte al uno en el otro, se está desvirtuando la aspiración y proyección educativa de este aprendizaje. Muchas veces se observa que los maestros se detienen solo o preferentemente en el aspecto mecánico de las operaciones, no van más allá, y con este sentido y enfoque de su trabajo contribuyen a ahogar o eliminar los matices más preciados de esta asignatura. (Ravera, 1953). Es por esta razón que dentro de las secuencias didácticas que se trabajan se involucran algoritmos aritméticos abiertos, los cuáles contribuyen al razonamiento y no a la repetición mecánica sin sentido.

Para el desarrollo de las secuencias didácticas planteadas, la construcción de conceptos matemáticos es fundamental y se sustenta en el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, Espinoza Freire en su artículo Aprendizaje por descubrimiento Vs aprendizaje tradicional, menciona que Meza Bermeo considera que el aprendizaje por descubrimiento es el transcurso de reorganizar y evolucionar los aprendizajes accediendo a otros más complejos, también estima que, el estudiante para aprender debe estar motivado por satisfacer su curiosidad. (Freire, 2022).

Eleizalde menciona que el aprendizaje por descubrimiento, es aquel que los estudiantes construyen por si mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o trasmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes. (Eleizalde M., 2010). Por esto, dentro de las secuencias se realizan actividades que permiten a las estudiantes construir los conceptos matemáticos planteados, partiendo de las experiencias previas, hasta llegar al desarrollo de un análisis profundo del concepto que se trabaja.

Método y desarrollo conceptual

La innovación realizada con las alumnas del Colegio Monte María de Guatemala, consistió en una práctica educativa, esto engloba toda la estructura de clase que se lleva a cabo en un bloque escolar correspondiente a dos meses y medio aproximadamente. Las secuencias didácticas contienen una estructura de clase específica donde se trabajan contenidos tanto declarativos como procedimentales, el objetivo de éstas es proponer diversidad de actividades donde las estudiantes desarrollen habilidades y competencias matemáticas, que no solo les permita dominar contenidos, sino también que puedan aplicar estos contenidos adquiridos en situaciones cotidianas o al momento de resolver problemas numéricos y no numéricos.

Ahora cuando hablamos de Matemática escolar la función que ésta debe cumplir está en desarrollar un pensamiento lógico, crítico y creativo, una actitud de investigación para buscar estrategias de solución de problemas a través del trabajo cooperativo, busca promover la metacognición, esto quiere decir que las estudiantes aprendan a aprender, también pretende desarrollar la capacidad para interpretar y evaluar de forma crítica diversa información, utilizando argumentos basados en datos. Para lograr el desarrollo de habilidades y competencias matemáticas esperadas para el grado de primero básico del nivel secundario, dentro de las secuencias didácticas se plantean diversidad de actividades tomando como referencia los siguientes aspectos fundamentales:

Integración de algoritmos no tradicionales: se desarrollan en las estudiantes estrategias no tradicionales para la eseñanza de la artimética que han demostrado efectividad, como los algortimos abiertos, los cuales son basados en el valor del número, dejando por un lado la práctica de algoritmos tradicionales que desarrollan únicamente la memoría y no aporta a niveles altos de pensamiento.

Etapas de construcción de conocimiento: dentro de las secuencias didácticas se toma en cuenta la construcción de los conceptos matemáticos, se pretende que las estudiantes lleguen a desarrollar dichas habilidades por medio de actividades que les permitirán construir por ellas mismas y con el apoyo docente dichos conceptos, las estudiantes manipulan materiales concretos, realizan representaciones gráficas que contribuyen al desarrollo de imágenes mentales que favorecen el aprendizaje y por último generalizan la forma numérica que hace referencia a símbolos y signos matématicos, este proceso le permite a la estudiante aprender desde el proceso personal de construcción.

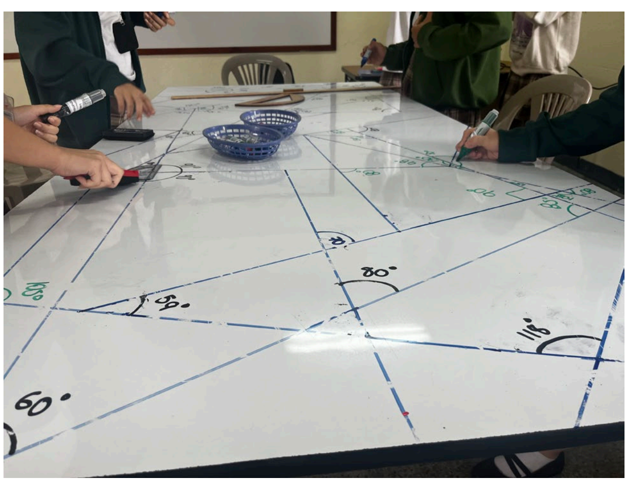


Figura 1. Medición de ángulos. Fuente propia.

Uso de manipulativos concretos y virtuales: las estudiantes durante el proceso de construcción utilizan diversidad de manipulativos concretos específicos para la enseñanza de las Matemáticas como: fichas de colores, geoplano, tangram, bloques de base diez, regletas de Cusinarie, barras de fracciones entre otros, esto les permite formar diseños gráficos para una mayor comprensión de los conceptos; del lado virtual, utilizan el recurso Amplify Polypad, el cuál posee diversidad de manipulativos virtuales, esto permite hacer una conexión idónea entre lo concreto y lo gráfico.

Experiencias contextualizadas: dentro de las actividades de las secuencias didácticas se plantean situaciones de contexto que sean reales en su mayoría para las estudiantes, esto provoca mayor interés al momento de resolver algún ejercicio o problema matemático, lo que busca este aspecto es que las estudiantes se percaten de la aplicabilidad real de las Matemáticas en la vida diaria.

Figura 2. Material concreto. Fuente propia.

Práctica y ejercitación constante y espaciada: la única manera de dominar un contenido o una habilidad es con la práctica constante, pero esta práctica no se refiere a repetir y repetir ejercicios sin contexto o realizar una cantidad exagerada de problemas, estas prácticas deben ser ejercicios con temas que los estudiantes dominan. Dentro de los ejercicios que realizan las estudiantes durante las sesiones de clase, tienen un enfoque para lograr que el aprendizaje perdure en el tiempo, por medio de la repetición constante y sistematica de ejercicios y problemas que generen altos niveles de pensamiento, por lo que los ejercicios de repetición se dan durante todo el bloque y ciclo escolar, esto permite que los temas y subtemas vistos en las secuencias didácticas se práctiquen constantemente.

Resolución de problemas: la resolución de problemas es un eje transversal dentro de las secuencias didácticas que se les plantean a las estudiantes, con esta práctica se logra que desarrollen estrategias específicas a lo largo de las sesiones de clase, logrando de esta manera desarrollar la habilidad de plantear y resolver una situación problemática.

Intengración con tecnología: dentro de las sesiones de clase que corresponden a la secuencia didáctica también se involucra tecnología como dispositivos, páginas web, simuladores, aplicaciones, entre otros recursos, bien sabemos que a más sentidos involucrados mejor será el aprendizaje, por esta razón no solo se trabaja con materiales concretos sino que también se innvolucra las herramientas tecnológicas que permiten el desarrollo de competencias digitales para las estudiantes.

Figura 3. Tecnología y Matemática. Fuente propia.

Rutinas matemáticas: dentro de las clases planteadas, las estudiantes experimentan cada semana tres actividades distintas que contribuyen al desarrollo de las competencias matemáticas que no únicamente corresponden al grado sino al nivel educativo, las cuales son: el cálculo mental, problema del día y actividades de razonamiento, a continuación se detalla una descripción de las mismas:

- Cálculo mental: las estudiantes realizan actividades de cálculo mental utilizando tecnología al menos 2 veces por semana, esto permite activar las estrategias desarrolladas hasta el momento y ponerlas en práctica.
- Problema del día: las estudiantes resuelven problemas del día al menos dos veces por semana, estos problemas pretenden contribuir al repaso constante de contenidos y habilidades ya aprendidas, se utiliza para prácticar constantemente dichos conceptos.
- Actividades de razonamiento: la actividad de razonamiento la realizan una vez por semana, se pretende que este espacio constribuya al pensamiento divergente de las estudiantes, acá se realizan juegos de razonamiento como tangram, actividades con origami, construcción de modelos diversos etc.

Proceso de implementación de la innovación

Todo este trabajo se realiza de forma previa al inicio de un ciclo escolar, se construye un cronograma anual donde se distribuyen los contenidos declarativos y procedimentales que se encuentran en la malla curricular institucional, luego se realiza un dosificador por bloque donde se desglozan los contenidos y las habilidades que se aboradarán durante el bloque y luego se realiza una planificación mensual, la cuál incluye elementos como: competencia a desarrollar, indicadores de logro, contenidos declarativos, procedimentales, actitudinales, actividades y tipo de evaluación. La parte más valiosa y fundamental en esta innovación es la planficación, ya que en este documento se desarrollan a detalle, todas las actividades que se realizarán durante el mes, tomando en cuenta toda la estructura mencionada.

Resultados

Para evaluar la innovación se utilizan dos parámetros generales: 1. las notas consignadas durante cada uno de los bloques, que son un reflejo del trabajo realizado por las estudiantes, 2. La evaluación del curso, esta se aplica al finalizar cada uno de los bloques, las estudiantes expresan su perspectiva del curso a través de un formulario.

A continuación se comparten los resultados obtenidos al cierre de cada uno de los bloques en los cuales se ha implementado la innovación.

Tabla 1
Promedio de resultados al final de cada uno de los bloques

Bloque	Promedio Grupo A	Promedio Grupo B	Promedio total
Primer bloque	83	83	83
Segundo bloque	87	85	86

Notas: resultados internos. 2024

En la tabla se muestra el promedio de resultados de 38 estudiantes, se logra visualizar que el promedio general es superior a 80 puntos, del total de estudiantes una sola alumna está por debajo de 60 puntos en los resultados del segundo bloque.

A continuación se comparten los resultados de algunos aspectos que se preguntaron a las estudiantes al final de cada uno de los bloques concluidos.

Pregunta 1: ¿Cuánto crees que los cálculos mentales contribuyen al desarrollo de esta habilidad?

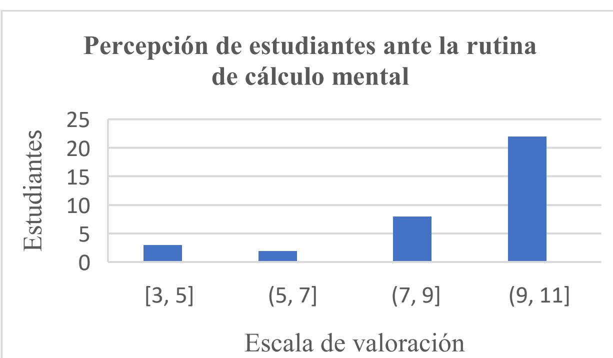


Figura 4. Gráfica sobre pregunta 1. Fuente propia.

La gráfica muestra la apreciación de las estudiantes en relación a la actividad de cálculo mental que se realiza dentro de las secuencias didácticas, de las 35 estudiantes que respondieron el promedio sobre 10 es de 9, esto nos indica que la mayoría valora este espacio y cree que constribuye al desarrollo del cálculo mental.

Pregunta 2: ¿Cuánto crees que los problemas del día te han ayudado a desarrollar la habilidad de resolución de problemas?

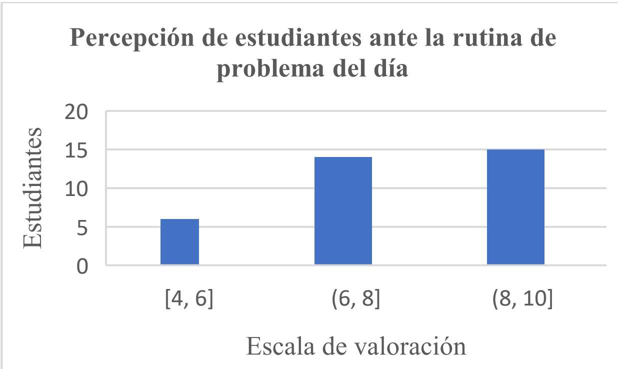


Figura 5. Gráfica sobre pregunta 2. Fuente propia.

La gráfica muestra la apreciación de las estudiantes en relación a la actividad de resolución de problemas que se realiza dentro de las secuencias didácticas, de las 35 estudiantes que respondieron el promedio sobre 10 es de 8, esto nos indica que la mayoría valora este espacio y cree que constribuye al desarrollo de la habilidad de resolver problemas.

Comentarios de estudiantes de primer curso del Colegio Monte María:

- "Me gusta mucho su forma de dar su clase, me gusta que da varias formas para resolver los problemas, es un muy buen profesor" Valerie – primer curso A
- "Lo único que tengo que decir es que estas clases son muy útiles, siempre me voy a casa con algo aprendido, he desarrollado diferentes habilidades más como los cálculos mentales que mencioné anteriormente, también siento que se me ha facilitado aprender y poner en práctica mis nuevos conocimientos" Victoria – primer curso B

Conclusiones

Las estudiantes manifiestan y expresan gusto por las Matemáticas, mencionan que la diversidad de actividades que se implementan en las clases les permite mantener la atención y además aprender, esto es debido a que se lleva a cabo un proceso sistemático en cada secuencia didáctica que permite que las estudiantes construyan sus aprendizajes y que estos a su vez sean significativos.

Las estudiantes expresan que la estructura de clase que se tiene actualmente, les permite aprender y desarrollar los conceptos matemáticos de mejor manera, ya que se dan los espacios para que exista una práctica constante de los contenidos y habilidades desarrolladas, lo cuál permite generalizar los conocimientos y poder aplicarlos en otros contextos o situaciones.

Se observa en los resultados que el promedio de las estudiantes en ambos grupos durante los dos bloques implementados de la innovación es mayor a 80 puntos, el planteamiento de las secuencias didácticas permite, que las alumnas generalicen los conocimientos adquiridos y que através de la práctica constante logren interiorizar y retener lo aprendido en el tiempo.

Referencias y bibliografía

Palala, A. (2021). ¿Cómo estamos aprendiendo matemática en primaria? *Innovación con conocimiento* , 55.

Freire, E. E. (2022). Aprendizaje por descubrimiento Vs aprendizaje tradicional. *Revista Transdisciplinaria de Estudios Sociales y Tecnológicos*, 73-81.

Eleizalde M., P. N. (2010). Aprendizjae por descrubrimiento y su eficacia en la enseñanza de la Biotecnología. *Revista de investigación*, 271-290.

Ravera, A. (1953). *Apreciación de los resultados de la acción educativa* . Buenos Aires : Kapelusz.

Covariación exponencial continua: una razón de cambio directamente proporcional al valor de la magnitud variable de interés

Luis Miguel **Amador** Silva
Departamento de Matemáticas, Posgrado en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
amador.luism6@gmail.com
José Ramón **Jiménez** Rodríguez
Departamento de Matemáticas, Posgrado en Matemática Educativa, Universidad de Sonora
México
joseramon.jimenez@unison.mx

Resumen

Este trabajo presenta los avances[1] de un proyecto de intervención cuyo propósito es desarrollar una secuencia de actividades didácticas que promueva el pensamiento variacional en estudiantes de ingeniería. Metodológicamente, se realizó una revisión crítica a la literatura especializada en el área, en busca de hipótesis teóricas que fundamentaran nuestras decisiones didácticas, entre ellas; el diseño de las actividades, su implementación y valoración. Se espera proporcionar a los estudiantes herramientas para comprender la variación continua y el cambio en progreso, desde la perspectiva de un enfoque dinámico con el uso de cantidades infinitesimales, ofreciendo una alternativa a la enseñanza actual que se basa en nociones estáticas como función numérica, límites y la interpretación discreta de la variación. El desarrollo didáctico se centrará en el estudio de fenómenos de comportamiento exponencial, favoreciendo así la comprensión y aplicación del Cálculo Diferencial en situaciones prácticas.

Palabras clave: Covariación exponencial continua; Enseñanza del Cálculo Diferencial; Pensamiento variacional; Proyecto de intervención; Magnitud variable.

[1] *Nota*: Al momento de la redacción de este reporte, el trabajo se encuentra en desarrollo. Actualmente se ubica en la etapa de diseño de las actividades didácticas que conformarán la propuesta de enseñanza.

Definición y relevancia del problema

El estudio del Cálculo como herramienta para entender y cuantificar fenómenos y procesos del entorno se constituye como uno de los pilares de aprendizaje en la educación de los futuros ingenieros. Por tanto, resultará crucial que ellos logren desarrollar habilidades para innovar y argumentar de forma adecuada, a fin de solventar las dificultades dentro de sus campos de estudio. Estos jóvenes necesitarán adquirir competencias matemáticas que les posibiliten comprender, interpretar y reflexionar sobre los fenómenos del mundo real, y plasmarlos en un lenguaje matemático (Capote et al., 2016; Sharhorodska et al., 2018).

Una crítica fundamental a la enseñanza tradicional y formal del Cálculo es que el enfoque en el cálculo de límites y derivadas no permite a los estudiantes comprender cómo estos conceptos se aplican en situaciones reales (Loachamín et al., 2023; Cruz y Herrera, 2024). La idea de límite en sí misma no está vinculada a la representación de una realidad física, y es una abstracción pura sin conexión directa con ella. Como consecuencia, los estudiantes tienden a percibir esta disciplina matemática como una tarea mecánica, donde se abordan problemas de forma abstracta, sin comprender el entorno en el cual los fenómenos tienen lugar.

De acuerdo con Artigue (2009), las estrategias didácticas que se centran demasiado en la formalización y la rigurosidad matemática pueden confundir a los estudiantes cuando intentan aplicar esos conocimientos en situaciones reales. Al no vincular los conceptos matemáticos a escenarios del mundo real o laboral, los estudiantes tienden a memorizar en lugar de comprender a conciencia los problemas, lo que les dificulta adaptarse y resolver problemas reales en el campo de la ingeniería. Kaput (1994) sugiere que “la enseñanza del Cálculo Diferencial debe ir más allá de algoritmos estáticos, permitiendo que los estudiantes exploren la dinámica de los sistemas a través de la experimentación y la simulación” (p. 110).

Específicamente, en el tratamiento didáctico de fenómenos de comportamiento exponencial, Khanh et al. (2020), quienes analizaron el enfoque de enseñanza de las nociones exponenciales en libros de texto, mencionan que éstos tienden a seguir un patrón: primero se define el concepto, luego se presentan ejemplos prácticos, y finalmente se plantean problemas de aplicación. En esta organización ha habido una transformación pedagógica en el proceso de desarrollo de las nociones exponenciales, en comparación con su surgimiento y evolución histórico-epistemológica. Esta transformación pasa por alto la secuencia temporal del desarrollo del Cálculo y sus objetos de estudio (Khanh et al., 2020, Jiménez et al., 2022).

Dificultades en la enseñanza y aprendizaje de nociones relacionadas con la covariación exponencial continua

En la Matemática del cambio, la comprensión de la covariación y la continuidad en procesos dinámicos es esencial para diversas disciplinas, desde las ciencias naturales hasta las ciencias sociales, la economía y la ingeniería (Thompson y Carlson, 2017; Hodaňová y Nocar, 2016). Estos conceptos son fundamentales no solo para la predicción de fenómenos naturales y científicos, sino también para el desarrollo de habilidades cognitivas y analíticas en los estudiantes.

Particularmente, los procesos de covariación exponencial, matematizados mediante modelos exponenciales, son de gran importancia en muchos campos. Se utilizan para resolver problemas en ciencia y tecnología, como en arqueología, finanzas y fenómenos de crecimiento y decrecimiento natural (Khanh et al., 2020). Estos modelos se basan en la noción de que las magnitudes variables en ciertos fenómenos muestran un comportamiento continuo y suave a lo largo del tiempo o el espacio, sin saltos abruptos ni interrupciones (Castillo-Garsow et al., 2013), donde la variación infinitesimal de la magnitud variable de interés es directamente proporcional a su valor actual, $dy = kydx$, y por lo tanto, la razón instantánea de cambio es directamente proporcional al valor de la magnitud, $\frac{dy}{dx} = ky$. Sin embargo, para muchos estudiantes acostumbrados a pensar en cambios lineales, la naturaleza exponencial del crecimiento y decrecimiento resulta confusa (Davis, 2009). La idea de que las cantidades aumenten o disminuyan de manera exponencial, es decir, en proporción a su valor actual resulta difícil de asimilar, ya que los estudiantes tienden a simplificar relaciones y buscar patrones lineales o discretos (Sureda y Otero, 2013; Campo-Meneses y García-García, 2020).

La representación gráfica de procesos covariacionales también es de gran importancia en el desarrollo de conceptos relacionados con la noción exponencial, entre ellos la razón instantánea de cambio. Sin embargo, para Saldanha y Thompson (1998), así como para Johnson y McClintock (2018), la comprensión e interpretación de gráficos como representaciones de un continuo plantea desafíos para los estudiantes. Esta dificultad se manifiesta con mayor claridad cuando los estudiantes recurren a la técnica de punteo para analizar las gráficas, es decir, trazar algunos puntos para inferir un comportamiento general, y luego conectar estos puntos para formar una curva. Si bien esta técnica es comúnmente empleada para graficar funciones numéricas, puede llevar a los estudiantes a percibir la gráfica covariacional como una representación estática de una relación entre cantidades, pasando por alto su naturaleza dinámica y continua.

Varios estudios (Bressoud et al., 2016; Larsen et al., 2017; Thompson y Harel, 2021) han recurrido al trabajo pionero de Orton (1983) para resaltar las dificultades de los estudiantes en la comprensión del significado cuantitativo, tanto de la razón promedio de cambio, como de la razón instantánea de cambio. Orton señala que estas dificultades surgen de una comprensión deficiente del concepto de razón como relación multiplicativa. Estas investigaciones subrayan la importancia de fortalecer la comprensión temprana de conceptos fundamentales como la razón de cambio, ya que sientan las bases para el éxito en Cálculo y otras áreas de las Matemáticas.

Thompson y Harel (2021) señalan que una fuente más elemental de las dificultades de los estudiantes con el concepto de razón instantánea de cambio se relaciona con la poca coordinación de las relaciones entre covariaciones. En lugar de concentrarse en las relaciones cuantitativas entre las magnitudes, usualmente se presta más atención a la pendiente de las rectas secante y tangente, así como a los valores de entrada de la función. Este enfoque hace que los estudiantes no comprendan la fenomenología dinámica de la razón de cambio, en particular, su vinculación con procesos exponenciales debido a la desconexión entre los conceptos matemáticos y las aplicaciones reales (Khanh et al., 2020; Presmeg y Nenduradu, 2005).

Objetivo

La intención principal de nuestro trabajo es fundamentar y desarrollar un acercamiento didáctico para la enseñanza del Cálculo Diferencial dirigido a estudiantes de ingeniería, desde una perspectiva variacional y dinámica mediante el uso de cantidades infinitesimales. En particular, nos centraremos en abordar las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con la covariación exponencial continua, buscando superar la visión formal (estática y algorítmica) que predomina en la enseñanza tradicional de estos conceptos matemáticos en el salón de clase.

Fundamentos contextuales sobre el pensamiento variacional

En la literatura de investigación en Matemática Educativa no es difícil detectar que el pensamiento variacional ha sido explorado desde diversas perspectivas, las cuales se pueden clasificar en dos categorías. En la primera categoría se encuentran las posturas que relacionan el pensamiento variacional con el estudio de variables y funciones como entidades abstractas, enfocándose en el análisis de las funciones numéricas y sus propiedades a partir de definiciones formales, en el espíritu del Análisis Matemático. Según este enfoque, los fenómenos de la realidad, junto con las magnitudes asociadas, se consideran ejemplos ilustrativos o aplicaciones secundarias de las funciones. Por otro lado, en la segunda categoría se encuentran aquellos que lo ven como un tipo de pensamiento matemático que se centra en el análisis y la matematización de magnitudes variables presentes en fenómenos y procesos, ya sean físicos o sociales, en el espíritu del Cálculo primigenio. Estas interpretaciones enfocan sus realizaciones didácticas en la introducción del concepto de magnitud física y en la representación matemática de su comportamiento, utilizando el concepto de magnitud variable como modelo.

Particularmente, en este proyecto se pretende abordar didácticamente las dificultades de enseñanza y aprendizaje relacionadas con las nociones dinámicas de la covariación exponencial continua desde la perspectiva del pensamiento variacional. Dicho esto, nos alineamos con la postura que considera al pensamiento variacional como un tipo de pensamiento matemático que requiere una manera dinámica de pensar, lo que nos lleva a situarnos en la segunda categoría mencionado anteriormente.

Enfoque del pensamiento variacional

A partir del análisis crítico de la literatura especializada sobre el tema, hemos llegado a concebir que el pensamiento variacional exige una manera dinámica de pensar (Vasco, 2003), y que está directamente relacionado con el estudio de las magnitudes variables. Concebimos a las *magnitudes variables* como aquellas propiedades o cualidades perceptibles y cuantificables en los fenómenos y procesos de la realidad, que por su naturaleza intrínseca son dinámicos. Las magnitudes variables realmente varían. Están por doquier presentes en los así llamados fenómenos o procesos de variación y cambio. En el pensamiento variacional el papel protagónico lo desempeñan las magnitudes variables, que son objetos matemáticos de una naturaleza esencialmente distinta a la de las funciones numéricas, mientras que éstas figuran sólo como actores secundarios, como una de las herramientas emergentes para la matematización de las magnitudes variables y de los procesos en que ellas intervienen (Jiménez et al., 2022).

En el estudio presentado por Thompson y Carlson (2017), así como por Jiménez et al. (2022), los autores conciben que el pensamiento variacional está constituido por dos componentes: el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, ambos tienen que ver con la conceptualización matemática de las magnitudes variables. En el primer caso, se despliega el razonamiento y trabajo matemático sobre una sola magnitud variable en la recta numérica, y en el segundo, el razonamiento simultáneo y el trabajo matemático sobre dos magnitudes variables en el plano cartesiano.

En coherencia con esta postura, se proponen constructos teóricos sustentados en la visión del pensamiento matemático según Harel (2008), para establecer un marco teórico y explicativo orientado al desarrollo del pensamiento variacional, recuperando el dinamismo exigido por este tipo de pensamiento matemático. El propósito es ofrecer herramientas conceptuales y metodológicas para diseñar tareas de aprendizaje que fomenten el razonamiento variacional y el razonamiento covariacional, alejándose del análisis de objetos matemáticos estáticos.

Marco teórico y explicativo

Nuestro marco teórico y explicativo se sustenta bajo la concepción de Harel (2008) quien afirma que el objetivo principal de la Educación Matemática consiste en desarrollar en el estudiante el pensamiento matemático, y que éste se compone de un conjunto de maneras matemáticas de entender y maneras matemáticas de pensar. El autor define a las maneras de entender como el producto cognitivo particular de un acto mental realizado por una persona, y a las maneras de pensar como las características cognitivas de un acto mental, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras de entender.

Esta profunda reflexión realizada por Harel en torno a la caracterización del conocimiento matemático y del propósito fundamental de la enseñanza de las Matemáticas, y promovida por él activamente durante los años recientes, le ha llevado a formular un esquema metodológico para alcanzar tal propósito. Dicho esquema lo ha denominado “la enseñanza basada en DNR”. El acróstico en la denominación proviene de los tres principios fundamentales en los que se sustenta dicho esquema; el principio de Dualidad (D), el principio de Necesidad intelectual (N), y el principio del Razonamiento repetido (R). De especial interés en esta comunicación es el principio de Dualidad.

El principio de Dualidad establece que los estudiantes desarrollan maneras de pensar solo mediante la construcción de maneras de entender, y las maneras de entender que producen están determinadas por las maneras de pensar que ya poseen (Harel, 2008, p. 19). Este principio afirma que las maneras de entender y las maneras de pensar son interdependientes: entre ellas existe una relación bidireccional.

Propuesta teórica: una estructura operativa para el desarrollo del pensamiento variacional

Tomando como base el enfoque del pensamiento variacional, y la visión de pensamiento matemático según Harel (2008), proponemos que, para desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes, se deben diseñar estrategias de aprendizaje que les permitan generar maneras variacionales de entender y maneras variacionales de pensar. A las *Maneras Variacionales de Entender* las definimos como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características o propiedades esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de variación y cambio en progreso, y a las *Maneras Variacionales de Pensar* las describimos como las características cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas realizadas por el estudiante, reveladas de las acciones repetidas de sus maneras variacionales de entender.

.

Por ejemplo, si un estudiante formula una interpretación, similar o igual, argumentando que "los valores numéricos que toma la literal que representa a una magnitud variable están asociados con una unidad de medida", está evidenciando una manera variacional de entender, porque es un producto cognitivo particular de su acto mental de interpretar una característica importante de las magnitudes variables. Y si sostiene más de una manera variacional de entender es probable que posea, además, la manera variacional de pensar que "las magnitudes variables toman progresivamente valores numéricos que podemos dividir en tres grupos: el valor actual, los valores previos y los valores posteriores".

Para la organización, diseño y análisis de las estrategias o actividades didácticas se establece una estructura operativa de las implicaciones metodológico-didácticas resumidas en tres etapas esenciales.

1. Prediseño de las estrategias didácticas*:* el profesor deberá identificar y caracterizar las *Maneras Variacionales de Entender (MVdE)* que espera promover en los estudiantes, y especificar los actos particulares de interés.
2. Diseño de las estrategias didácticas: para la elaboración y organización de las actividades didácticas, esbozar una secuencia cognitivamente lógica de obtención de los productos cognitivos que involucran los actos mentales presentes en los estudiantes en forma de declaraciones y acciones.
3. Análisis de las estrategias didácticas desarrolladas por los estudiantes: el profesor deberá inferir de forma indirecta las características cognitivas comunes entre los productos cognitivos de los actos mentales presentes en las actividades desarrolladas por los estudiantes, estas son las *Maneras Variacionales de Pensar (MVdP)* de los estudiantes.

En nuestro trabajo, hemos identificado y caracterizado un conjunto de *MVdE* y *MVdP*, a nivel general, referidas a cualquier proceso de variación. A partir de ellas, se han identificado y caracterizado *MVdE* más específicas asociadas a los procesos de covariación exponencial continua, las cuales son fundamentales para orientar el diseño de nuestra secuencia de actividades. Lamentablemente, no hay espacio aquí para analizar con detalle este punto. Más adelante en este documento, en la Tabla 1, se presentan de manera resumida algunas de dichas *Maneras Variacionales de Entender la Covariación Exponencial Continua (MVdE-CExpC)*.

Consideraciones y resultados preliminares

A partir de la concepción del pensamiento variacional como el tipo de pensamiento matemático centrado en el razonamiento dinámico de magnitudes variables, y considerando los principios del modelo DNR de Harel (2008), se establecen las siguientes pautas para orientar el diseño de nuestra propuesta de enseñanza:

1. <u>Priorizar el análisis de fenómenos reales e identificar las magnitudes variables de interés:</u> Las tareas deben partir de contextos reales en los que los estudiantes puedan identificar y razonar sobre magnitudes cuya variación sea observable y cuantificable. Esto permite anclar el conocimiento matemático en experiencias significativas, en lugar de comenzar con funciones como objetos abstractos. Particularmente en este trabajo interesan los fenómenos de comportamiento exponencial, dicho esto, en la Tabla 1, se muestran de manera resumida algunas *MVdE-CExpC* que se promoverán en nuestra secuencia de actividades didácticas, recurriendo a la etapa de prediseño de las estrategias didácticas.

Tabla 1
Algunas Maneras Variacionales de Entender la Covariación exponencial Continua.

MVdE-CExpC1	La razón promedio de cambio de una magnitud covariante de comportamiento exponencial, para incrementos iguales de la magnitud variable independiente, es igual a una constante numérica positiva.
MVdE-CExpC2	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial con cambios aritméticos iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales iguales en la magnitud variable dependiente.
MVdE-CExpC3	Una magnitud covariante de comportamiento exponencial $N(\Delta h)$ con cambios aritméticos iguales en la magnitud variable independiente conduce a cambios proporcionales en la magnitud variable dependiente de la forma $N\ (a^{\Delta h}\ -1)$.
MVdE-CExpC4	Una magnitud covariante cuya razón instantánea de cambio es proporcional al valor actual de dicha magnitud variable.

2. <u>Diseñar tareas que promuevan la construcción de significados desde la necesidad intelectual:</u> en coherencia con el principio de Necesidad del modelo DNR, es fundamental que las tareas presenten desafíos cognitivos que despierten en los estudiantes la necesidad de matematizar la variación, en lugar de imponer definiciones, gráficas o fórmulas desde el inicio.
3. <u>Utilizar representaciones gráficas dinámicas y herramientas tecnológicas:</u> la incorporación de entornos como GeoGebra posibilita la visualización continua del comportamiento de magnitudes. Esto permite a los estudiantes experimentar el carácter dinámico de la covariación, superando la percepción estática asociada a gráficas trazadas con la técnica de punteo.

La intención primaria de nuestro trabajo es presentar un acercamiento didáctico basada en el tratamiento dinámico de la covariación exponencial continua, superando las visiones estáticas y algorítmicas que eventualmente dominan el tratamiento de las ideas matemáticas en el salón de clase. En virtud de ello, el resultado más importante que se espera consiste en obtener evidencia sólida que permita valorar si nuestra propuesta contribuye o no a promover en el estudiante el desarrollo de maneras variacionales de pensar en un contexto centrado en el estudio de la covariación exponencial continua.

Referencias y bibliografía

Artigue, M. (2009). Didactical Design in Mathematics Education. Nordic Studies in Mathematics Education, Grupo Editorial Brill, 7-18, 14(3). DOI:10.1163/9789087907839_003

Bressoud, D., Ghedamsi, I., Martinez-Luaces, V., & Törner, G. (2016). Teaching and Learning of Calculus. Springer Nature. https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-319-32975-8

Campo-Meneses, K. G., y García-García, J. (2020). Explorando las conexiones matemáticas asociadas a la función exponencial y logarítmica en estudiantes universitarios colombianos. *Educación Matemática*, 32(3), 209-240.

Capote León, G. E., Rizo Rabelo, N., y Bravo López, G. (2016). La formación de ingenieros en la actualidad. Una explicación necesaria. *Revista Universidad y Sociedad*, 8(1), 21-28.

Castillo-Garsow, C., Johnson, H. L., & Moore, K. C. (2013). Chunky and smooth images of change. For the Learning of Mathematics, 33(3), 31-37.

Cruz L., S. L. y Herrera C., C. J. (2024). Desafíos en la enseñanza del Cálculo en contextos universitarios en un enfoque por competencias. *Plumilla Educativa*, 33 (1) 1-27p. https://doi.org/10.30554/p.e.1.5099.2024

Davis, J. D. (2009). Understanding the influence of two mathematics textbooks on prospective secondary teachers' knowledge. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 12, 365-389.

Harel, G. (2008). What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf

Hodaňová, J., & Nocar, D. (2016). Mathematics importance in our life. In INTED2016 Proceedings (pp. 3086-3092). IATED. DOI: 10.21125/inted.2016.0172

Jiménez R., J. R., Grijalva M., A., Milner, F. A., Dávila A., M. T., y Romero F., C. F. (2022). Reconceptualización didáctica del Cálculo. Editorial de la Universidad de Sonora. México. https://doi.org/10.47807/UNISON.201

Johnson, H. L., & McClintock, E. (2018). A link between students' discernment of variation in unidirectional change and their use of quantitative variational reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 97, 299-316.

Kaput, J. J. (1994). Democratizing access to calculus: New routes to old roots. En A. H. Schoenfeld (Ed.), Mathematical Thinking and Problem Solving (pp. 77-156). Lawrence Erlbaum Associates.

Khanh, T., L. C., Tien, L. V., & Loi, N. H. (2020). An analysis of the concept of exponential functions in history and textbooks in Vietnam. *The International Journal of Engineering and Science*, 9(11), 23-28.

Larsen, S., Marrongelle, K., Bressoud, D., & Graham, K. (2017). Understanding the concepts of calculus: Frameworks and roadmaps emerging from educational research. *Compendium for Research in Mathematics Education*, 526-550.

Loachamín Iza, H. D., Vargas Chavarrea, Álvaro P., Andrade Villarreal, J. V., y Puente Ponce, P. F. (2023). Enseñanza, aprendizaje y enfoque de la matemática en la ingeniería. *Alfa Publicaciones*, 5(3.2), 6–20. https://doi.org/10.33262/ap.v5i3.2.400

Orton, A. (1983). Students' understanding of differentiation. *Educational studies in mathematics*, 14(3), 235-250.

Presmeg, N., & Nenduradu, R. (2005). An Investigation of a Preservice Teacher's Use of Representations in Solving Algebraic Problems Involving Exponential Relationships. International Group for the Psychology of Mathematics Education, 4, 105-112. https://link.springer.com/content/pdf/10.1007/978-94-6300-561-6.pdf

Saldanha, L., & Thompson, P. W. (1998). Re-thinking covariation from a quantitative perspective: Simultaneous continuous variation. In Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Sharhorodska, O., Álvarez, A. P., y Alpaca, N. B. (2018). Las matemáticas y la formación del ingeniero, como una relación simbiótica. *Revista Referencia Pedagógica*, 6(2), 175-189.

Sureda, P., y Otero, M. R. (2013). Estudio sobre el proceso de conceptualización de la función exponencial. *Revista Educación matemática*, 25(2), 89-118. DOI: 10.24844/EM

Thompson, P. W., & Carlson, M. P. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to Calculus learning and their links to students' difficulties. *ZDM–Mathematics education*, 53(3), 507-519.

Vasco U., C. E. (2003). El pensamiento variacional y la modelación matemática. In Anais eletrônicos do CIAEM–Conferência Interamericana de Educação Matemática, Blumenau (Vol. 9, pp. 2009-2010).

¡De jugar a crear!: Recursos para aprender en geometría

Angie **Vega** Vega
Sede Regional del Sur, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
angie.vegavega@ucr.ac.cr
Andrea **Araya** Chacón
Universidad de Costa Rica
Costa Rica
andrea.arayachacon@ucr.ac.cr

Resumen

El objetivo del taller es explorar el uso de actividades lúdicas en la enseñanza de la geometría, a través de la experimentación y adaptación de juegos. En este espacio, dirigido a personas docentes de Matemática de primaria y secundaria, se implementarán actividades acordes con el aprendizaje experiencial propuesto por Kolb (2014), fomentando que las personas participantes jueguen y reflexionen en torno a la experiencia. Se utilizarán cinco juegos matemáticos elaborados o seleccionados para trabajar en los cursos Geometría Euclidiana I y II de la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica durante el 2024. Estos serán adaptados, como parte del taller, para el estudio de otras temáticas del área de geometría. Se espera que esta experiencia permita identificar las potencialidades del uso de actividades lúdicas como parte del proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, motivando al profesorado a integrarlas en su práctica docente.

Palabras clave: Costa Rica; Educación primaria y secundaria; Educación Matemática; Educación presencial; Enseñanza de la geometría; Enseñanza participativa; Formación docente inicial.

Introducción

El uso de actividades lúdicas en la enseñanza de las Matemáticas ha demostrado ser una estrategia efectiva para mejorar la motivación y el aprendizaje del estudiantado. En el caso específico de la geometría, los juegos ofrecen oportunidades para desarrollar habilidades de visualización espacial, razonamiento lógico y exploración de propiedades geométricas en un entorno interactivo y dinámico (López, 2018).

El presente taller consiste en la exploración de cinco juegos matemáticos sobre geometría euclidiana que se elaboraron o seleccionaron para trabajar en los cursos Geometría Euclidiana I y II de la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica durante el año 2024, tanto en la Sede Rodrigo Facio, como en la Sede Regional del Sur. Lo anterior pues, la cátedra de ambos cursos estuvo a cargo de las proponentes de este taller. Algunos de estos juegos también fueron dirigidos por los estudiantes de esos cursos de Geometría en dos Festivales de Matemática que se realizaron en colegios públicos de Costa Rica.

En este espacio, se propone que las personas docentes participantes experimenten los juegos desde la perspectiva del alumnado y reflexionen sobre sus beneficios y desafíos, para que posteriormente en el taller, diseñen adaptaciones según distintos niveles educativos.

Marco Teórico

Las creencias y actitudes hacia la Matemática influyen significativamente en el aprendizaje y desempeño del estudiantado. Gamboa y Moreira-Mora (2017) destacan que la motivación y el compromiso dependen en gran medida de la percepción que se posee de la disciplina. En este sentido, resulta fundamental proponer estrategias didácticas que favorezcan el desarrollo de creencias positivas hacia las Matemáticas y reduzcan la ansiedad comúnmente asociada a su aprendizaje.

Por otro lado, el Ministerio de Educación Pública [MEP] (2012) establece que la enseñanza de la Geometría en el sistema educativo escolar costarricense debe permitir que el estudiantado desarrolle la capacidad de comprender y analizar las propiedades y relaciones de las formas y espacios que los rodean, con el fin de resolver problemas geométricos y aplicar la visualización espacial en situaciones cotidianas. Esto implica promover procesos de enseñanza y aprendizaje basados en la exploración y visualización, donde el sujeto asume un rol activo (MEP, 2012).

En línea con lo anterior, López (2019) resalta la importancia de integrar actividades lúdicas en el aula como herramienta efectiva para la enseñanza de la geometría pues:

> cumple varias funciones dentro del proceso de enseñanza y aprendizaje como el desarrollo cognitivo, el desarrollo de aptitudes, de las relaciones sujeto-sujeto, contexto-objeto y despierta el sentido del humor, predisponiendo su atención para el aprendizaje, además de captar el interés de los(as) estudiantes durante el proceso de enseñanza. (p.137)

Así mismo, estas actividades enriquecen modelos de enseñanza en geometría como el de Van Hiele, "provocando así en el sujeto que aprende un avance significativo de un nivel de razonamiento a otro (…) permitiéndole establecer relaciones desde la cotidianidad" (López, 2019, p. 142). Estas potencialidades se ven fortalecidas cuando los juegos propuestos incluyen el uso de material concreto, pues corresponde a un primer acercamiento hacia los diferentes grados de abstracción que se espera que alcancen las personas estudiantes en el área de Geometría e influye significativamente en el aprendizaje procedimental (López y García, 2008).

Por lo tanto, si se busca favorecer una percepción positiva por parte del estudiantado hacia las Matemáticas y potenciar el desarrollo de habilidades geométricas, es fundamental que las personas docentes en formación y en ejercicio sean capaces de diseñar, adaptar y evaluar estrategias lúdicas que fomenten una experiencia positiva en el aula, acordes con la población que se trabaja (Fonseca y Castillo, 2013). Para ello, como parte de los procesos de formación tanto inicial como continua, se puede proponer no solamente el diseño de actividades lúdicas y la reflexión en torno a estas, sino también la participación activa en su implementación, de manera que se experimenten, de primera mano, los beneficios y desafíos de este enfoque y puedan así tomar decisiones informadas sobre su aplicabilidad en el aula.

Marco del Taller

Objetivos

El taller busca alcanzar los siguientes objetivos:

1) Explorar juegos que promuevan habilidades del área de geometría, reflexionando sobre sus potencialidades y posibles mejoras para su aplicación en el aula.
2) Adaptar juegos geométricos existentes, considerando temáticas y niveles educativos específicos, para favorecer el desarrollo de habilidades asociadas a estos.

Metodología

Un taller corresponde a un "espacio de construcción colectiva que combina teoría y práctica alrededor de un tema, aprovechando la experiencia de los participantes y sus necesidades de capacitación" (Candelo *et al.*, 2003, p. 33). Así, en esta propuesta se buscará discutir en torno a las ventajas de hacer uso de actividades lúdicas en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría, al mismo tiempo que las personas participantes experimentan de primera mano su uso. Así, se pondrán en práctica algunos pasos del ciclo de aprendizaje experiencial propuesto por Kolb (2014; citado en Gleason y Rubio, 2020). En este, se establece que, por medio de una experiencia concreta, el individuo reflexione y la transforme, para que pueda interpretar y actuar con base en dicha información; comprendiendo el aprendizaje como "el principal proceso humano de adaptación que sucede no solo en el salón de clases sino en cualquier ámbito y de manera continua" (Gleason y Rubio, 2020, p.4).

En particular, este se encuentra dirigido a personas docentes de Matemática de primaria y secundaria, las cuales serán expuestas a una experiencia concreta en la que pondrán a prueba una serie de juegos geométricos, para luego reflexionar en torno a esa experiencia. Además, se les solicitará que tomen en cuenta lo anterior, para que planteen una propuesta de modificación, según una serie de indicaciones específicas. A continuación, se describen las características propias de cada fase del taller.

Actividades

La Tabla 1 resume la información general del Taller, en términos de contenidos y elementos organizacionales.

Tabla 1
Información general del taller

Información	Descripción
Contenidos geométricos	Cuadriláteros, perímetro, áreas sombreadas, triángulos, ángulos entre rectas paralelas, sólidos geométricos.
Número de personas	20 participantes.
Duración	Una sesión de 1 hora y 50 minutos.
Recursos	Mesas rectangulares dispuestas para trabajar en grupos, proyector multimedia, conexión a Internet, juegos de geometría, juegos “en blanco”.
Materiales	Papel, lapicero, tijeras, goma, marcadores, lápiz, borrador.

Fuente: elaboración propia.

Actividades del Taller

Introducción (10 minutos)

Se inicia con la presentación de las responsables y la exposición del marco y la agenda del taller. Esto consiste en un breve resumen de las secciones 2 y 3 anteriores, y los párrafos siguientes de esta sección. Recursos: proyector, conexión a internet.

Exploración de juegos (40 minutos)

Los 20 participantes están distribuidos en cinco mesas, cada una con cuatro personas, colocadas en un mismo recinto. En cada mesa se ha dispuesto uno de los siguientes juegos: “Te pareces a mí”, “Te cubro”, “Bájate con las cartas”, “Adivina mi recta” y “Calcu-áreas”. Seguidamente se describen estos juegos.

Nombre: “Te pareces a mí”.
Contenido: Semejanza de Triángulos.
Descripción: Cada jugador tiene una pizarra metálica con segmentos magnéticos con sus longitudes visibles. De la “caja común” se saca un triángulo que se coloca en el centro de la mesa con las medidas de sus lados visibles. El primer participante que crea formar una figura semejante a la dada, debe decir “stop” y todos dejan de construir. Verificará la semejanza haciendo calzar los ángulos del triángulo con los de su figura. Si está correcto, conserva el triángulo. Gana quien tenga más triángulos luego de sacar todos los de la “caja común”.

Figura 1. Pizarra y segmentos del juego “Te pareces a mí”.

Nombre: “Te cubro”.
Contenido: Área de cuadriláteros rectos.
Descripción: Hay una cuadrícula en el centro de la mesa, cada participante tiene piezas de regiones cuadrangulares rectas y una pizarra en donde puede “medir” con mayor facilidad el área de cada pieza. Se lanzan tres dados, uno con solo números y dos con un signo de suma o multiplicación delante de un número. El participante debe colocar una pieza que tenga como superficie el resultado de las operaciones. De no tener una pieza que lo cumpla, cede el turno. Gana quien al cabo del tiempo acordado, haya cubierto más superficie.

Figura 2. Materiales del juego “Te cubro”.

Nombre: “Bájate con propiedades”.
Contenido: Propiedades de cuadriláteros.
Descripción: Los participantes están formados en dos equipos. Cada equipo tiene un mazo de cartas con propiedades de cuadriláteros. Frente a cada equipo se coloca un libro con imágenes de cuadriláteros. Cada equipo observa la misma imagen, que tiene denotadas algunas características, que a su vez, permiten inferir otras. Al mostrar la primera imagen, deben identificarse todas las posibles características que satisface la figura. El primero en terminar dice “stop” y ambos equipos dejan al lado las tarjetas del mazo que no seleccionaron. Inicia la revisión y discusión entre los equipos para saber cuáles son correctas, cada imagen tiene una ficha con las respuestas. Por cada acierto, los equipos reciben un punto. Gana quien al final tenga más puntos.

Figura 3. Materiales del juego "Bájate con propiedades".

Nombre: "Adivina mi recta".
Contenido: Rectas notables de un triángulo o un segmento.
Descripción: El juego es una adaptación del conocido como "Adivina quién soy". Los participantes se dividen en dos equipos, cada uno tiene un "fichero" dispuesto en tres filas, colocado en fundas que pueden ponerse "boca abajo" y subirse. Cada equipo recibe un mazo con las imágenes del fichero; deben elegir una y colocarla "boca abajo" en un lugar visible. Cada equipo debe inferir la imagen seleccionada por el otro, formulando una sola pregunta por turno, cuya respuesta será: sí o no. Así, podrá ir descartando aquellas imágenes que no satisfacen la condición indicada. Gana el primer equipo que adivine.

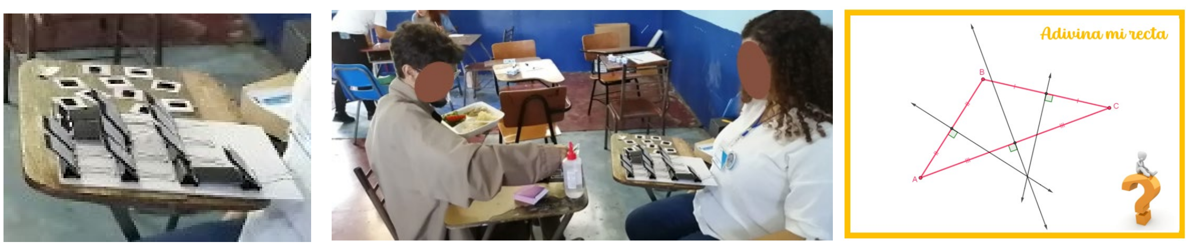


Figura 4. Materiales del juego "Adivina mi recta".

Nombre: "Calcu-áreas".
Contenido: Áreas sombreadas.
Descripción: Los participantes se dividen en dos equipos. Se coloca entre ellos un reloj de arena y un mazo de cartas dentro de una caja abierta a un costado, de manera que no es posible observar su contenido. El primero en jugar saca una carta y coloca de forma visible la figura. Debe decirse la medida del área sombreada. Seguido, voltea la carta para verificar la respuesta. Si es correcta, conserva la carta. De lo contrario, la coloca al lado de la caja. Repite la dinámica hasta que reloj de arena determine que se acabó el tiempo. Al terminar de distribuirse el mazo, ganará quien tenga mayor cantidad de cartas.

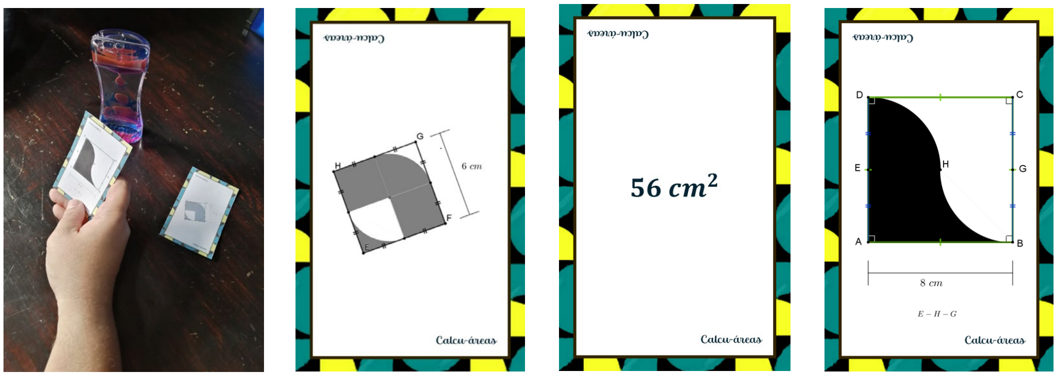


Figura 5. Materiales del juego "Calcu-áreas".

Las responsables del taller se turnarán para describir cada juego y explicar sus reglas. Los equipos permanecerán jugando cinco minutos según la mesa alrededor de la cual están sentados. Al terminar el tiempo, rotarán a la siguiente mesa, donde jugarán nuevamente por cinco minutos. Así seguirá la dinámica hasta que cada equipo haya tenido la oportunidad de conocer y jugar cada una de las actividades propuestas. Seguido, se solicita a algunas personas participantes valorar ciertos juegos.

Adaptación de juegos (50 minutos)

Al azar se asignará a cada uno de los cinco equipos uno de los juegos anteriores "en blanco"; es decir, el material estará recortado y decorado, pero no hay contenido geométrico. También les será asignado una nueva temática sobre la cual cada equipo creará nuevas imágenes o afirmaciones que se adapten a la forma de jugar de cada uno. Los juegos por distribuir y las posibles nuevas temáticas se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2
Juego para adaptar y posibles temáticas

Juego para adaptar	*Temáticas sugeridas para adaptar el juego*
"Adivina mi …"	Cuadriláteros, ángulos congruentes y suplementarios.
"Bájate con …"	Sólidos
"Calcu-…"	Perímetros, áreas de triángulos y cuadriláteros

Fuente: elaboración propia.

Una vez terminadas las propuestas, cada equipo designará a un relator quien expondrá sobre la experiencia y mostrará la nueva versión que realizaron para cada temática. Las facilitadoras del taller ofrecerán otros ejemplos confeccionados por ellas.

Cierre (10 minutos)

Los juegos llevados se rifarán entre las personas ganadoras de estos durante la etapa de exploración. Se valorará la pertinencia de rifar los juegos elaborados entre todas las personas participantes.

Referencias y bibliografía

Candelo, C., Ortiz, G. & Unger, B. (2003). *Hacer talleres: una guía práctica para capacitadores.* WWF. https://awsassets.panda.org/downloads/hacer_talleres___guia_para_capacitadores_wwf.pdf

Fonseca, J. & Castillo, M. (2013). Formación de docentes de matemática: aspectos relevantes. *Uniciencia, 27*(1), 2-14. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4945314

Gamboa, R. & Moreira-Mora, T. (2016). Actitudes y creencias hacia las matemáticas: un estudio comparativo entre estudiantes y profesores. *Instituto de Investigación en Educación, 17*(1), 1-45. https://doi.org/10.15517/aie.v17i1.27473

Gleason, M. & Rubio, J. (2020). Implementación del aprendizaje experiencial en la universidad, sus beneficios en el alumnado y el rol docente. *Revista Educación, 44*(2), 264-282. https://orcid.org/0000-0001-5117-9387

López, O. & García, S. (2008). *La enseñanza de la Geometría*. Instituto Nacional para la evaluación de la educación. https://www.inee.edu.mx/wp-content/uploads/2019/01/P1D401.pdf

López, P. (2019). La lúdica como enriquecedora del modelo de Van Hiele para la enseñanza de la geometría en la educación media venezolana. *Praxis Investigativa Redie, 11*(20), 134-147. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6951595

Ministerio de Educación Pública [MEP] (2012). *Programas de Estudio de Matemáticas*. Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf

Muñiz-Rodríguez, L. & Rodríguez-Muñiz, L. (2014). El uso de juegos como recurso didáctico para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas: estudio de una experiencia innovadora. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, 39,* 19-33. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4870030

De Vieta a Po-Shen Loh: Una fórmula alternativa para la solución de una ecuación de segundo grado

Allan **Gen** Palma
Universidad Estatal a Distancia (UNED)
Costa Rica
agen@uned.ac.cr
Eric **Padilla** Mora
Universidad Estatal a Distancia (UNED)
Costa Rica
epadilla@uned.ac.cr

Resumen

Este taller tiene el propósito de dar a conocer a las personas estudiantes de Matemática, Educación Matemática y docentes de la educación secundaria, la relación que existe entre el trabajo realizado por Vieta y una fórmula alternativa para la solución general de una ecuación de segundo grado con una incógnita propuesta por Po-Shen Loh, esto a partir del diseño de una secuencia didáctica que se sugiere para su enseñanza. Se espera que la actividad contribuya en el área de la didáctica y que la estrategia de mediación pueda ser asimilada por los participantes y que valoren su implementación tanto en su proceso de formación como durante el ejercicio profesional.

Palabras claves: álgebra; didáctica; secuencia didáctica; enseñanza de la Matemática; estrategia didáctica.

Introducción

La búsqueda, creación y construcción de estrategias didácticas que contribuyan a favorecer los procesos de enseñanza y de aprendizaje de la Matemática, es y ha sido un trabajo arduo para quienes se dedican a la Educación Matemática. Sobre todo, porque las dificultades que se han encontrado abarcan la mayoría de los niveles educativos, y casi todas sus áreas. Una de ellas es el álgebra, y específicamente el de la solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, el cual ha sido abordado en diversas investigaciones como las de: Velozo (2011);

Ávila, León y Rodríguez (2018); y Hernández, García y Campo (2023), entre otras. Al respecto estos últimos advierten que:

> algunos errores que se han identificado al resolver las ecuaciones cuadráticas se deben a que aplican inadecuadamente los métodos de solución (como la fórmula general, la factorización y completar el cuadrado perfecto), al intentar factorizar ecuaciones cuadráticas que no son factorizables, entre otros. (Hernández et al., 2023, p. 3)

Además, con la aparición de las calculadoras científicas, en las cuales, con solo digitar los coeficientes numéricos se obtiene el resultado de las raíces, esto más bien provocó una desmejora en cuanto a la comprensión y aplicación de las diversas estrategias que permiten obtener la solución de la ecuación de segundo grado. Esto se evidencia en la actualidad dado que es frecuente escuchar a los estudiantes cuestionarse sobre ¿Qué son esos valores que se obtienen? ¿Para qué se pueden emplear? Pero sobre todo en la resolución de un problema aplicado o en algún contexto cuando preguntan ¿Qué hago con esos valores? ¿Para qué me sirven? ¿Qué significa el valor de “x” y el valor de la “y”?

En esa exploración de alternativas que podrían contribuir con la compresión y favorecer el proceso de solución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, existe un método propuesto por el profesor Po-Shen Loh, quien trabaja para la Universidad Carnegie Mello, al logra diseñar una estrategia pedagógica con un enfoque diferente que se hace evidente al analizar la simetría de una parábola alrededor de la línea vertical que pasa por su vértice. Lo interesante de esta estrategia es que los pasos individuales ya habían sido descubiertos, por separado, por otros matemáticos. No obstante, el aporte de Loh fue lograr combinar esos pasos en un único método coherente. Si se analiza la estrategia con detenimiento se evidencia una clara ganancia de eficiencia, lo que permite considerarlo como algo sorprendente al pensar el por qué no se había descubierto antes. Además, es necesario reflexionar sobre su empleo como un enfoque alternativo para resolver ecuaciones cuadráticas, pero más aún, resulta conveniente presentar una secuencia lógica y didáctica para el abordaje del tema. Sobre todo, porque los métodos tradicionales que se han empleado, por lo general, han presentado diversas dificultades para los estudiantes tal y como se evidencia en el siguiente apartado.

Dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones de primer y segundo grado en una variable

Diversos investigadores como Moreno y Castellanos (1997); Barría y Chavarría (2010); Tettay, Pulgar y Rojas (2019); Pérez, Diego, Polo y González (2019); y Alberola (2024) entre otros, han abordados las dificultades que presentan los estudiantes al resolver ecuaciones lineales. En primer lugar, se puede señalar que, no comprenden adecuadamente el significado del signo igual, lo que se evidencia cuando, al tener un cero en uno de los lados de la ecuación durante una resta, tienden a ignorarlo o incluso eliminarlo. Esto revela una dificultad en la comprensión del concepto de equivalencia.

Además, cuando las ecuaciones incluyen fracciones, no logran resolverlas ni saben cómo abordarlas correctamente. También enfrentan problemas al aplicar la propiedad distributiva del producto respecto a la suma; por ejemplo, ante una expresión como $2(x+1)=7$, suelen escribir erróneamente $2x+1=7$.

Otro aspecto en el que se observan errores frecuentes es en las operaciones con números enteros, cometiendo equivocaciones en sumas, restas, multiplicaciones y divisiones. Asimismo, no logran diferenciar entre los términos con incógnita y los términos independientes.

Finalmente, al utilizar el "método de la balanza"-es decir, realizar la misma operación en ambos miembros de la igualdad para mantener su equilibrio-, muchas veces aplican dicha operación solo en uno de los lados, lo que impide llegar a una solución correcta. Lo complejo de esto, y es señalado por Alberola (2024) es que este tipo de errores es acarreado por los estudiantes al resolver otro tipo de ecuaciones como las de segundo grado y grados superiores, las ecuaciones exponenciales y las logarítmicas, entre otras.

En cuanto a las dificultades presentadas por los estudiantes en la resolución de ecuaciones de segundo grado, los estudios de Ávila, León y Rodríguez (2018) y Barrera (2024) son referentes clave, ya que permiten categorizarlas. Así, las dificultades pueden surgir de:
Los conocimientos previos: al confundir las propiedades y las diferencias entre ecuación, igualdad e inecuación, operar y simplificar erróneamente expresiones algebraicas o aplicar de manera errónea los casos de factorización en un ejercicio.

Realizar operaciones con expresiones algebraicas: transponer incorrectamente los términos en el despeje de una incógnita, operar erróneamente expresiones que estén dentro de paréntesis y despejar de forma incorrecta la incógnita en una ecuación cuadrática.

Calcular valores numéricos: operar los números reales del discriminante de manera incorrecta, calcular mal las raíces de una ecuación cuadrática y reemplazar incorrectamente los resultados obtenidos en la ecuación cuadrática inicial.

Identificar la estructura y los elementos de una ecuación cuadrática: dado que no logran reconocer los términos de una ecuación cuadrática, confunden entre si los parámetros a, b y c dado que los reemplazan equivocadamente en la fórmula general.

Errores al factorizar por método del aspa simple (inspección): dado que, aunque logran determinar los factores primos, se equivocan de signos o bien no logran encontrar los factores correctos.

Errores al emplear el método de completar cuadrados, tales como: omisión de signos y símbolos, omiten el signo + al sumar el término que completa el trinomio cuadrado perfecto del lado izquierdo. Se equivocan al despejar la ecuación lineal, al completar el trinomio cuadrado perfecto dividen entre 2 el coeficiente de "x" dos veces para luego elevarlo al cuadrado, al extraer raíces cuadradas y al encontrar el valor para completar el trinomio cuadrado perfecto al no elevar al cuadrado el resultado $\frac{b}{2}$.

Errores al emplear el método de la fórmula general: se les dificulta el manejo de la fórmula, omiten el signo del radical, prevalece el hecho de no identificar el coeficiente $a = 1$ y, en su lugar, utilizan el exponente 2.

Ahora bien, todas estas dificultades requieren de una intervención desde el proceso de planificación de las actividades de mediación, lo cual conlleva al docente a repensar y replantear el cómo enseñar estos temas. Para así, en caso de presentarse algunas de estas situaciones, saber cómo encausar el proceso de enseñanza. Además, cobra importancia el establecer secuencias didácticas apropiadas en su proceso de enseñanza.

Las secuencias didácticas y su importancia

Las secuencias didácticas pueden ser entendidas como un "conjunto de actividades ordenadas, estructuradas y articuladas para la consecución de unos objetivos educativos que tienen un principio y un final" (Zavala, 2000, p. 16). Es claro que el proceso de enseñanza puede ser dinámico y que en muchas ocasiones requiere de ajustes, pero durante el planeamiento del mismo debe establecerse diversas conexiones, es allí donde cobra mucha importancia este concepto, el cual para Díaz (2013) es:

> El resultado de establecer una serie de actividades de aprendizaje que tengan un orden interno entre sí, con ello se parte de la intención docente de recuperar aquellas nociones previas que tienen los estudiantes sobre un hecho, vincularlo a situaciones problemáticas y de contextos reales con el fin de que la información que a la que va acceder el estudiante en el desarrollo de la secuencia sea significativa, esto es tenga sentido y pueda abrir un proceso de aprendizaje, la secuencia demanda que el estudiante realice cosas, no ejercicios rutinarios o monótonos, sino acciones que vinculen sus conocimientos y experiencias previas, con algún interrogante que provenga de lo real y con información sobre un objeto de conocimiento. (p. 4)

De lo anterior, se podría considerar que las secuencias didácticas cobran importancia en:
La organización del contenido: al estructurar los temas de forma lógica y coherente, lo que facilita la comprensión. Así cada paso de la secuencia está diseñado para que el conocimiento se construya de manera progresiva.

Coherencia en la enseñanza: dado que se garantiza que todas las partes del proceso de enseñanza (objetivos, contenidos, actividades, evaluación) estén alineadas entre sí. Esto evita fragmentaciones en el aprendizaje y asegura que se puedan relacionar diferentes conceptos y habilidades de manera lógica.

Planificación efectiva: esto se relaciona con la panificación de los objetivos y actividades, propiciando que el tiempo se aproveche al máximo.

Fomenta la participación: mediante la planificación de actividades que estimulen la reflexión, el análisis y la resolución de problemas.

Flexibilidad y ajuste: dado que permite realizar ajustes según los avances y necesidades del grupo, lo que contribuye a una enseñanza más dinámica.

Los aspectos mencionados anteriormente sustentaron el diseño y la elaboración del presente taller, el cual articula una secuencia didáctica que comprende: la factorización de polinomios, la solución general de una ecuación de segundo grado, las fórmulas de Vieta para sus soluciones y la forma alternativa de solución propuesta por Po-Shen Loh. El propósito fundamental es ofrecer a los docentes y estudiantes de Matemática una herramienta adicional que optimice la enseñanza y el aprendizaje de este tema.

Con ello, además de cumplir con el compromiso de la divulgación de la Matemática, se espera que la estrategia se convierta en una guía para los participantes y que puedan reflexionar el cómo y cuándo implementarla cada vez que deseen enseñar algún contenido y requieran del diseño de una secuencia didáctica.

Propuesta de la secuencia didáctica del taller

A continuación, se presenta una sugerencia en cuanto a la secuencia lógica didáctica que puede emplearse para desarrollar la temática.

1. Se expone una breve reseña sobre Po-Shen Loh. (5 minutos)
2. Se recomienda iniciar con un repaso de algunos métodos de factorización como:
   a) Factorización de un trinomio cuadrado perfecto. (3 minutos)
   b) Factorización por inspección. (3 minutos)
   c) Factorización por diferencia de cuadrados. (3 minutos)
   d) Factorización por el método de completar cuadrados. (5 minutos)
   e) Solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita empleando la factorización y la propiedad absorbente del cero en los números reales. (3 minutos)
3. Una vez abordados estos temas de factorización se continúa con una forma de obtener la solución general de una ecuación de segundo grado con una incógnita. (18 minutos)
4. Luego es conveniente que a partir de las soluciones de la ecuación cuadrática se obtengan la fórmula de Vieta para la suma y el producto de las soluciones. (10 minutos)
5. Con base en lo desarrollado, se espera deducir la solución alternativa para ecuaciones de segundo grado con una incógnita propuesta por Po-Shen Loh. (20 minutos)
6. Seguidamente, se proponen cuatro ejercicios de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, para resolverlos mediante la fórmula alternativa de Po-Shen Loh. (25 minutos)
7. Finalmente se responden preguntas de los participantes, y se les solicita llenar un cuestionario de evaluación del taller. (15 minutos)

Aspectos generales del taller

Este taller está dirigido a estudiantes de Matemática y de Enseñanza de la Matemática, así como a docentes de Matemática de secundaria. La capacidad máxima de participantes es de 25, las cuales deberán contar con una mesa de trabajo, una libreta de apuntes, un lápiz o lapicero, un borrador y un sacapuntas.

La metodología de trabajo consiste en una propuesta de secuencia lógica didáctica, para lo cual los talleristas irán proyectando una presentación en Power Point con las interrogantes que deben de trabajar y responder, pueden realizarlo en forma individual o en parejas con el objetivo de promover el aprendizaje cooperativo. El objetivo es que bajo la guía e interrogación de los talleristas y la estrategia de mediación propuesta se logre determinar la nueva alternativa de solución de una ecuación cuadrática, la cual se pondrá a prueba mediante la solución de cuatro ejercicios.

Actividades por desarrollar

I parte. Breve reseña sobre Po-Shen Loh

II parte. Repaso de algunos conceptos algebraicos básicos

1. Factorización de trinomios cuadrados perfectos de la forma $a^2 \pm 2ab + b^2$.
   Se asignarán ejercicios.

2. Factorización por inspección de trinomios de forma $ax^2 + bx + c$ usando la estructura
   $$ax^2 + bx + c = (px + s)(qx + r)$$
   Ejemplo, factorizar $x^2 - x - 6$, la cual corresponde a $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2)$.

   Se discutirá la estrategia y se asignarán ejercicios.

3. Factorización por el método de diferencia de cuadrados.
   Se trabajará particularmente binomios de la forma $a^2 - b^2$.

   Se asignarán ejercicios.

4. Factorización por el método de completar el cuadrado.
   Factorizar el siguiente trinomio $x^2 - x - 6$
   $$x^2 - x - 6 = x^2 - x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$$
   $$= \left(x - \tfrac{1}{2} - \tfrac{5}{2}\right)\left(x - \tfrac{1}{2} + \tfrac{5}{2}\right) = (x - 3)(x + 2)$$

   Se discutirá la estrategia y, además, se asignarán ejercicios.

III Parte. Solución de una ecuación de segundo grado con una incógnita

1. Solución de una ecuación cuadrática empleando la factorización y la propiedad absorbente del cero.
   Se discutirá la solución de la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$.
   Dado que $x^2 - x - 6 = (x - 3)(x + 2) = 0$.

   Por lo que $\Rightarrow x - 3 = 0$ Por la propiedad absorvente del cero.
   $\Rightarrow x = 3.$
   Y $\Rightarrow x + 2 = 0$ Por la propiedad absorvente del cero.
   $\Rightarrow x = -2.$
   Por tanto, el conjunto de solución corresponde a $S = \{-2,3\}$.

2. Prueba de la fórmula general de las ecuaciones cuadráticas con una incógnita.
   Se parte de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c constantes reales, y $a \neq 0$. Al utilizar los conocimientos anteriores se comprobará que las soluciones de la ecuación están dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Además, que dichas soluciones se pueden escribir de la forma:
   $$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

   Nota: como parte de la estrategia y secuencia, se empleará la técnica de completar cuadrados para obtener la fórmula general.

3. Fórmulas de Vieta de la suma y producto de las soluciones de la ecuación de segundo grado.
   A partir de los resultados obtenidos en la actividad anterior se concluirá que la suma y el producto de las soluciones de una ecuación cuadrática corresponden a
   $$S = x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{b}{a}$$
   $$P = x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \cdot \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

IV Parte. Método alternativo

1. Análisis visual y discusión del método alternativo de Po-Shen Loh para obtener la solución de las ecuaciones de segundo grado.

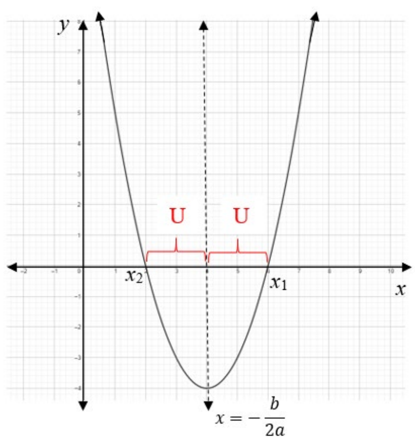


Figura 1. Visualización de la estrategia de Po-Shen Loh

Si se denomina con U la distancia entre el punto medio de las soluciones, se obtiene,
$$\Big(\overbrace{\tfrac{S}{2} + U}^{x_1}\Big)\Big(\overbrace{\tfrac{S}{2} - U}^{x_2}\Big) = P, \text{ con } U = \sqrt{\left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{c}{a}}$$
Nota: solo se considera la solución positiva dado que U representa una distancia.
Por lo tanto, $x_1 = \left(\frac{S}{2} + U\right) = \left(-\frac{b}{2a} + U\right)$ y $x_2 = \left(\frac{S}{2} - U\right) = \left(-\frac{b}{2a} - U\right)$.

Para llegar a este resultado se recurre a lo obtenido en los pasos anteriores, y con ello se completa la secuencia didáctica.

Además, usando dicho método deberán resolver los siguientes ejercicios.

a) $x^2 - 5x + 6 = 0$
b) $x^2 + 2x - 8 = 0$
c) $5x^2 - 6x - 1 = 0$
d) $x^2 + x + 1 = 0$

Referencias y bibliografía

Ávila-León, C., León-Ruíz, L. y Rodríguez-Delgado, D. (2018). *Ecuaciones cuadráticas con una incógnita con raíces reales*. https://repositorio.uniandes.edu.co/server/api/core/bitstreams/79506a0f-47c1-4dd0-8408-745865761ec2/content

Alberola-Palop, J. (11 de abril del 2024). *Errores y dificultades en la resolución de ecuaciones y cómo ayudar a los alumnos a superarlos*. https://www.tekmaneducation.com/errores-dificultades-ecuaciones/

Barrera-González, M. (2024). Comprensiones acerca de los errores que cometen los estudiantes al resolver ecuaciones cuadráticas: una experiencia de estudiantes panameños. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 17*(2) pp. 35-62. ISSN: 22-15-5627. https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/57777/60968

Barría-Bobadilla, A. y Chavarría-Lara, M. (2010). *Dificultades que presentan los estudiantes de primer año de enseñanza media en la resolución de problemas que involucran ecuaciones de primer grado* [Tesis de pregrado. Universidad del Bío-Bío, Chile.] http://repobib.ubiobio.cl/jspui/bitstream/123456789/1986/1/Barria_Bobadilla_Alejandra.pdf

De-Moreno, I. y De-Castellanos, L. (1997). Secuencia de enseñanza para solucionar ecuaciones de primer grado. *Revista EMA, 2*(3), 247-258. https://core.ac.uk/download/pdf/12341542.pdf

Díaz-Barriga, Á. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. http://www.setse.org.mx/ReformaEducativa/Rumbo%20a%20la%20Primera%20Evaluaci%C3%B3n/Factores%20de%20Evaluaci%C3%B3n/Pr%C3%A1ctica%20Profesional/Gu%C3%ADa-secuencias-didacticas_Angel%20D%C3%ADaz.pdf

Hernández-Yañez, M., García-García, J. y Campo-Meneses, K. (2023). Conexiones matemáticas asociadas al concepto de ecuación cuadrática que establecen futuros profesores mexicanos de matemáticas. *Uniciencia, 37*(1), pp. 1-26. https://www.revistas.una.ac.cr/index.php/uniciencia/article/view/16884/28126

Pérez-Istúriz, M., Diego-Mantecón, J., Polo-Blanco, I. y González-López, M. J. (2019). Causas de los errores en la resolución de ecuaciones lineales con una incógnita. *PNA 13*(2), 84-103. https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/v13i2.7613/7339

Po-Shen, L. (2019). *A Simple Proof of the Quadratic Formula Po-Shen Loh*. https://arxiv.org/pdf/1910.06709

Tettay-Mejías, S., Pulgar-García, M. y Rojas-Sandoval, Y. (2019). Errores en la resolución de problemas con ecuaciones de primer grado en estudiantes de secundaria. *Praxis15*(2), 193-205. https://revistas.unimagdalena.edu.co/index.php/praxis/article/view/3249/2612

Velozo-Boza, G. (2011). *Análisis del error en ecuaciones cuadráticas* [Tesis para optar al grado de Licenciado en Educación y al Título de Profesor de Educación Media en Matemática con Mención Didáctica. Universidad de Valparaíso]. https://repositoriobibliotecas.uv.cl/serveruv/api/core/bitstreams/a04d7bc2-0409-47b2-8b01-66f2e1b3c982/content

Zavala-Vidielle, A. (2000). *La práctica educativa. Cómo enseñar*. Editorial Graó, sétima edición. Barcelona España. https://des-for.infd.edu.ar/sitio/profesorado-de-educacion-inicial/upload/zavala-vidiella-antoni.pdf

Del concepto a la aplicación en Cálculo

Jorge **Blanco** García
Escuela de Ciencias Naturales y Exactas, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
ja.blanco@ce.pucmm.edu.do

Resumen

El trabajo que se presenta a continuación se centra en la cuestión: ¿cómo planificar una clase de cálculo que profundice en los conceptos e incorpore aplicaciones que permitan a los estudiantes ver en acción lo aprendido, antes de introducir técnicas y procedimientos? Para responder a esta pregunta, se ha diseñado una secuencia didáctica enfocada en el concepto de derivada, que invierte el orden tradicional de enseñanza de los contenidos de cálculo, con el objetivo de partir del concepto para llegar a la aplicación.

El proceso de enseñanza y aprendizaje de la Matemática en el nivel universitario tradicionalmente sigue una secuencia que se puede describir de la forma siguiente: enseñanza del concepto, luego procedimientos y técnicas, y resolución de aplicaciones. La secuencia diseñada inicia con el concepto para luego pasar a la aplicación, y terminar con los procedimientos y técnicas de derivación.

En el diseño de la secuencia se tomó en cuenta las representaciones semióticas de Duvall para el enfoque conceptual, el método de resolución de problemas japonés junto a las habilidades de Katagiri como marco para la resolución de problemas en clase y el desarrollo de habilidades matemáticas.

Palabras clave: Aplicaciones de derivada; Conceptualización matemática; Enseñanza del cálculo; Habilidades matemáticas; Representaciones semióticas; Resolución de problemas; Secuencia didáctica.

Introducción

El diseño de la secuencia didáctica para la enseñanza de la derivada en el contexto de la comunicación titulada “Del concepto a la aplicación en Cálculo” está centrado en la aplicación de una estructura que priorice el concepto y las aplicaciones sobre los algoritmos, procedimientos y técnicas. Esta estructura consiste en una secuencia de clases que inicia con el tratamiento conceptual, sigue con la presentación y resolución de aplicaciones y termina con la enseñanza de algoritmos, procedimientos y técnicas.

La secuencia didáctica que se propone es concebida como “una organización de las actividades de aprendizaje que se realizarán con los alumnos y para los alumnos con la finalidad de crear situaciones que les permitan desarrollar un aprendizaje significativo” (Díaz-Barriga, 2013, p. 1). Esta “organización de actividades” en el marco de la secuencia se entiende mejor al considerar dos tipos de variables: globales y locales (Artigue, 1995, p. 42). En lo que concierne a las variables globales, las cinco clases se estructuran en una forma que inicia en lo conceptual y termina en lo operacional. Las aplicaciones son colocadas desde el principio, sin embargo, su papel principal es servir como catalizador de los conceptos y como base de lo operacional. Por su parte, las variables locales se centran en la elaboración de un flujo que describe que realizarán los actores involucrados en cada momento de la clase. Este flujo se compone de una introducción, un desarrollo, una conclusión y una evaluación (Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media [EFPEM], 2019, p. 30).

Referencial teórico

Para el diseño de la secuencia se han tomado en cuenta diversos enfoques teóricos que permiten priorizar la comprensión conceptual y la aplicación práctica antes que los procedimientos y técnicas. Entre estos enfoques destacan los sistemas de representación semiótica de Duval, las habilidades académicas propuestas por Katagiri y el método de resolución de problemas japonés.

Representación del concepto

La representación de un concepto en distintas formas es de vital importancia para su comprensión. En el caso del concepto de derivada, la representación numérica, algebraica, verbal y gráfica permiten que los estudiantes se acerquen al mismo desde diferentes perspectivas.

Sobre los diferentes tipos de representación, Duval afirma que, “por un lado, el aprendizaje de los objetos matemáticos sólo puede ser un aprendizaje conceptual y, por el otro, es sólo a través de representaciones semióticas que es posible una actividad sobre los objetos matemáticos” (Duval, 1993, p. 38, citado en D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M., 2015 p.). En tal sentido, se puede afirmar que los sistemas de representación semiótica, tales como el numérico, gráfico, algebraico y verbal, son fundamentales para la comprensión de los conceptos matemáticos.

Es sobre la base de estas distintas representaciones que se aborda el concepto de derivada para facilitar una mejor comprensión. A continuación, se explica estas representaciones:

- Numérico: A través de datos organizados en tablas se pueden observar y tratar en forma numérica las tasas de cambio.
- Gráfico: Haciendo uso del software GeoGebra se grafican y analizan en forma dinámica las pendientes de rectas tangentes a una curva en un punto.
- Algebraico: Se calculan derivadas haciendo uso del límite para definir la derivada.
- Verbal: Se analizan e interpretan diversas situaciones en las que se puede dar una interpretación y explicación de la derivada como una razón de cambio instantánea.

Pasar de una representación a otra es clave en el desarrollo de la comprensión conceptual, porque permite que los estudiantes construyan conexiones significativas entre los diferentes enfoques matemáticos. De esta manera se evita la fragmentación del aprendizaje y a la vez se fomenta la transferencia de conocimientos. Por tal motivo, en las clases 1 y 2 de la secuencia didáctica se priorizará la exploración multimodal del concepto, con el propósito de que no sea reducido solo a técnicas algorímicas.

Habilidades académicas de Katagiri

Las habilidades académicas son un conjunto de capacidades esenciales que ayudan a los estudiantes desarrollar el "pensamiento matemático" (Mathematical Thinking). Estas habilidades no se centran únicamente en el dominio de algoritmos o procedimientos, sino que buscan fomentar un aprendizaje que sea significativo y una comprensión más profunda de la Matemática.

En la secuencia didáctica propuesta se incluyen las habilidades académicas propuestas por Katagiri con el propósito de que en forma intencionada en cada clase se procure potencializar las habilidades que sean pertinentes en los estudiantes. Estas habilidades se detallan a continuación (Isoda y Katagiri, 2016, p. 72):

- La habilidad de memorizar métodos de cálculo formal y de llevar a cabo estos cálculos.
- La habilidad de entender las reglas de cálculo y cómo llevar a cabo cálculos formales.
- La habilidad de entender el significado de cada operación, de decidir cuáles operaciones usar basándose en este entendimiento, y de resolver problemas simples.
- La habilidad de considerar distintas maneras de calcular y de encontrar mejores formas.
- La habilidad de formar problemas cambiando las condiciones o abstrayendo situaciones.
- La habilidad de crear problemas creativamente y resolverlos.

Aplicar estas habilidades en la enseñanza de la derivada puede permitir a los estudiantes no solo comprender el concepto, sino también desarrollar estrategias de solución de problemas y aplicarlas en distintos ámbitos. En lo que se refiere a los elementos de la secuencia, cada clase debe hacer explícitas las habilidades que el docente de forma intencional procura desarrollar en los estudiantes. Para Katagiri "La habilidad más importante a aprender 'no es la habilidad para ejecutar de manera rápida y correcta tareas y comandos predeterminados, sino que la de ser capaces de determinar por sí mismos qué deberían hacer, o que deberían encargarse de hacer'" (Isoda & Katagiri, 2016, p. 69).

Estas habilidades se alinean con el propósito del curso: desde la conceptualización (clases 1-2) hasta la operacionalización aplicada (clases 4-5). Es necesario que los estudiantes vinculen sus habilidades básicas con el pensamiento crítico para que puedan hacer Matemática significativa para ellos. Por ello, en la clase 3 ("¿Para qué se usa?"), se emplearán problemas contextualizados para desarrollar modelación.

Con el propósito de viabilizar las habilidades de Katagiri en el marco del desarrollo de la secuencia y su aplicación, se ha elegido el método japonés de resolución de problemas, el cual enfatiza el descubrimiento y la exploración antes de la formalización de un concepto matemático. Este enfoque consta de cuatro fases principales (Isoda y Olfos, p. 81):

- Presentación del problema y predicciones: El planteamiento del problema se relaciona con el contexto cotidiano o matemático que tiene sentido para el alumno.
- Solucionan problemas por sí mismos: Anticipar respuestas de los alumnos. Se incentiva el uso de diversas representaciones y aproximaciones.
- Presentación, comparación y discusión: Los estudiantes presentan sus ideas y justifican sus respuestas.
- Integración, reflexión: Se analizan las soluciones y se establecen conexiones con otros conceptos matemáticos. Prestar atención a aprender a aprender, o cómo desarrollar Matemáticas.

Es importante tomar en cuenta que el método japonés de resolución problemas ha sido utilizado principalmente en el nivel primario y secundario, sin embargo, para el diseño de la secuencia se ha considerado este método porque podría dar buenos resultados en la dinámica de la clase y en el desarrollo de las habilidades de Katagiri propuestas. En el contexto de la enseñanza universitaria, tanto para los docentes como para los estudiantes, muchas de las dificultades en el área de las ciencias parecen estar relacionadas con la ausencia de métodos claros, aplicados de forma intencional y alineados con las disciplinas en las que se utilizan.

En el desarrollo de la secuencia, el método de resolución de problemas japonés se utilizará principalmente en las clases 3 y 5, porque dichas clases están orientadas a la resolución de problemas. Isoda y Olfos plantean que es de suma importancia desarrollar en los estudiantes "la habilidad para compartir y evaluar estrategias de solución a problemas…para pulir, refinar y finalizar por completo" (Isoda y Olfos, p. 25). En tal sentido, se estimulará a las discusiones grupales, ajustes y refinamiento del abordaje de todo el proceso de resolución y sus respuestas, integrando así la evaluación formativa.

Estructura de la secuencia

Se propone que cada secuencia conste de tres clases previas a la introducción y enseñanza de algoritmos, y que la enseñanza de algoritmos (operacionalización) se desarrolle desde dos enfoques, conceptual y aplicado. A continuación, se describe la estructura:

Tabla 1
Estructura de la secuencia.

Etapas de la secuencia	Tipo de clase	Clase		
Concepto	Conceptualización	Clase 1	¿Qué es?	Qué es el concepto. Descripción.
	Representación	Clase 2	¿Cómo lo represento?	El concepto descrito desde distintos ángulos.
Aplicaciones	Aplicación	Clase 3	¿Para qué se usa?	Para qué sirve el concepto. En esta etapa no se puede aplicar a profundidad, pero se puede aplicar.
Operaciones	Operacionalización conceptualizada	Clase 4	¿Cómo lo uso? ¿Cómo funciona?	Se procura establecer cómo usar el concepto, cómo funciona, cuáles son sus propiedades básicas. Esta etapa no debe ser considerada como un fin, sino como un medio fundamental y necesario para utilizar el concepto de manera apropiada.
	Operacionalización aplicada	Clase 5	¿Cómo usarlo en diferentes contextos?	Utilización del concepto siguiendo las instrucciones. Aplicación en diversas situaciones y problemas estrictamente matemáticos y de otras áreas del saber.

Fuente: creación propia. 2025.

Conclusión

Se espera que la ejecución de la secuencia didáctica propuesta fortalezca la comprensión conceptual de la derivada, al tiempo que permita desarrollar un aprendizaje significativo en los estudiantes, mediante aplicaciones sencillas y contextualizadas. Asimismo, se busca que favorezca una mejor comprensión de”"cómo se hace Matemática” y contribuya al desarrollo de habilidades que no solo sean útiles para resolver un ejercicio específico, sino que resulten imprescindibles para el adecuado desenvolvimiento en diversos ámbitos de la vida. Cabe señalar que, al momento del envío, esta propuesta se proyecta para ser aplicada, es decir, aún no ha sido implementada.

Referencias y bibliografía

Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., & Gómez, P. (Eds.). (1995). Ingeniería didáctica en educación matemática: Un esquema para la investigación y la innovación en la clase de matemáticas. Grupo Editorial Iberoamérica.

D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Iori, M., & Matteuzzi, M. (2015). Análisis de los antecedentes histórico-filosóficos de la "Paradoja Cognitiva de Duval". https://doi.org/http://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1822

Díaz-Barriga, Á. (2013). *Guía para la elaboración de una secuencia didáctica*. Instituto de Investigaciones sobre la Universidad y la Educación, Universidad Nacional Autónoma de México.

Escuela de Formación de Profesores de Enseñanza Media. (2019). *Guía para el profesor: Curso de didáctica especial de la matemática*. Universidad de San Carlos de Guatemala.

Isoda, M., & Katagiri, S. (2016). *Pensamiento matemático Cómo desarrollarlo en la sala de clases* (R. Araya, Coord. 2a ed.). [Traducción de Mathematical Thinking: How to Develop it in the Classroom]. Impreso en Chile. ISBN 978-956-19-0876-5.

Isoda, M., & Olfos, R. (2009). *El Enfoque de Resolución de Problemas en la enseñanza de la matemática a partir del estudio de clases*. Ediciones Universitarias de Valparaíso, Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Desafios e oportunidades em uma tarefa para a aprendizagem de integral definida

Tainá Taiza de **Araujo**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
taina.taiza.araujo@gmail.com
Emily Caroline Felix **Cordeiro**
Universidade Estadual de Londrina
Brasil
emilycfcordeiro@gmail.com

Resumo

A integral definida é um conceito central no Cálculo Diferencial e Integral (CDI), mas sua compreensão ainda apresenta desafios. Este estudo analisou uma tarefa em que os alunos calcularam a área sob uma curva em uma situação contextualizada, buscando construir o conceito de integral definida. Os estudantes utilizaram formas geométricas como retângulos, triângulos e setores circulares para estimar a área. Contudo, a tarefa apresentou limitações na construção das camadas fundamentais da integral de Riemann, pois não direcionava explicitamente à exploração das somas parciais e do limite. Essa ausência dificultou a compreensão da acumulação progressiva, essencial para a estrutura da integral. A análise indica a necessidade de ajustes na tarefa ou no planejamento da aula, enfatizando a estrutura multiplicativa da soma de Riemann. Isso permitiria uma compreensão mais aprofundada da integração e auxiliaria os estudantes em seu processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de cálculo; Integral definida; Soma de Riemann; Acumulação progressiva.

Introdução

Sendo amplamente utilizada em diversas áreas do conhecimento para modelar e resolver problemas envolvendo quantidades acumuladas, a integral definida é um dos conceitos básicos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI). No entanto, sua compreensão apresenta desafios significativos para os estudantes, especialmente no que se refere à construção de seu significado conceitual (Sealey, 2006, 2014; Jones, 2013, 2015; Jones et al., 2017). A dificuldade está associada, em grande parte, à necessidade de articular diferentes representações e interpretações, como o somatório de incrementos infinitesimais e a noção de acumulação progressiva (Thompson & Silverman, 2008).

A tarefa proposta neste estudo buscou introduzir a integral definida de maneira intuitiva, levando os alunos a resolverem o problema por meio do preenchimento da região sob a curva com figuras geométricas. Essa abordagem, embora tenha possibilitado um primeiro contato com a ideia de mensuração de áreas sob curvas, não forneceu estrutura suficiente para explorar as camadas fundamentais da integral de Riemann. A ausência de um foco explícito na construção das somas parciais e no papel do limite no processo de integração impediu que a atividade consolidasse elementos essenciais para uma compreensão robusta do conceito (Sealey, 2006, 2014; Jones et al., 2017).

Diante desse cenário, este estudo busca analisar as potencialidades e limitações da tarefa em questão, refletindo sobre a necessidade de um aprofundamento teórico e metodológico na formulação de atividades voltadas ao ensino da integral definida. O objetivo é compreender em que medida a tarefa adotada contribui nos processos de ensino e de aprendizagem e quais aspectos poderiam ser aprimorados para promover uma aprendizagem mais significativa da integral de Riemann.

Fundamentação Teórica

Na última década, o conceito de Integral Definida tem sido amplamente discutido devido às dificuldades enfrentadas pelos estudantes na sua compreensão (Sealey, 2006, 2014; Jones, 2013, 2015; Jones et al., 2017; Araujo, 2023). Estudos indicam que, embora os alunos desenvolvam habilidades avançadas no que se refere ao conhecimento procedimental, encontram obstáculos na construção e no entendimento do conhecimento conceitual. (Greefrath et al., 2021). "Ao estudar essas dificuldades dos alunos e suas razões, há um reconhecimento que as ideias contidas na estrutura de soma de Riemann são importantes para uma robusta compreensão da integração definida" (Jones et al., 2017, p. 1076, tradução nossa)

Sealey (2006) elenca três razões pelas quais a compreensão das somas de Riemann é essencial. Primeiramente, elas permitem o cálculo de integrais definidas de funções que não possuem primitivas expressadas em termos de funções elementares. Além disso, sua estrutura serve de base para métodos numéricos mais eficientes, como a regra do trapézio, a regra do ponto médio e o método de Simpson. Por fim, mesmo quando uma função possui primitiva conhecida, a compreensão das somas de Riemann auxilia na correta configuração da integral definida, garantindo uma interpretação precisa do que deve ser integrado.

Nesse sentido, um contexto promissor para explorar os conceitos que fundamentam a soma de Riemann é o cálculo da área sob uma curva. A interpretação da integral definida como a medida dessa área constitui uma ferramenta essencial na resolução de problemas envolvendo integrais (Sealey, 2006). No entanto, para que os estudantes possam compreender esse conceito, é necessário que desenvolvam uma visão mais estruturada da acumulação. Isso implica reconhecer que as quantidades acumuladas não são apenas áreas estáticas, mas sim o resultado do somatório de pequenos incrementos multiplicativos (Thompson & Silverman, 2008). Dessa forma, a compreensão da integral definida deve transcender a simples visualização geométrica, incorporando a ideia de acúmulo progressivo de quantidades, permitindo uma abordagem mais profunda e generalizável do conceito.

Jones et al. (2017) definem o conceito de somatório de pequenos incrementos multiplicativos como *Multiplicative Base Sum* (MBS), ou, em tradução livre, Soma de Base Multiplicativa. Essa soma é estabelecida com base em dois elementos:

> (1) a relação multiplicativa entre o integrando e o diferencial [de uma integral definida] para criar um produto resultante, e (2) a ideia de resumir pequenas quantidades (possivelmente infinitesimalmente pequenas) do produto resultante em pequenos pedaços do domínio (possivelmente infinitesimalmente pequenos) para capturar a quantidade total dessa quantidade (Jones et al., 2017, p. 1076, tradução nossa).

Os autores descrevem o conceito de Soma de base multiplicativa (Mutiplicative Base Sum - MBS), que está relacionado à maneira como as integrais definidas acumulam pequenas contribuições ao longo de um domínio. Esse conceito se baseia em dois elementos fundamentais. O primeiro é a relação multiplicativa entre o integrando e o diferencial de uma integral definida.

Em termos matemáticos, ao calcular uma integral $I = \int_a^b f(x)dx$, a função $f(x)$ representa a quantidade a ser acumulada, enquanto dx representa um pequeno intervalo no domínio. O produto $f(x)dx$ forma um incremento infinitesimal, cujo somatório fornece o valor total da integral. O segundo elemento refere-se à ideia de resumir pequenas quantidades ao longo do domínio. Em suma, a integral pode ser vista como a soma de infinitas parcelas infinitesimalmente pequenas do produto $f(x)dx$, permitindo calcular grandezas contínuas a partir da soma de partes discretas.

Atrelado às ideias de Thompson e Silverman (2008) e Jones et al. (2017), Sealey (2014) propõe uma estrutura para caracterizar a compreensão dos alunos sobre a integral definida, definindo-a em quatro camadas que a compõem. A primeira camada da estrutura da integral definida, a Camada do produto, é composta pelo produto de $f(x_i)$ e Δx, no qual $f(x_i)$ pode ser conceituada como o integrando e Δx o diferencial. Já a camada da soma se refere à adição das infinitas parcelas resultantes do produto de $f(x_i)$ por Δx, ou seja, a soma $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x.$ A terceira camada, por sua vez, aborda o conceito de limite, no qual se toma o valor à medida que n se aproxima do infinito, isto é Δx infinitesimalmente pequeno, tendo a zero, da camada do produto e da soma, o que leva à integral de Riemann. Finalmente, a quarta camada permite interpretar a integral definida como uma função de acumulação, na qual a entrada corresponde ao limite superior (ou seja, o ponto final direito) do intervalo de integração, enquanto a saída é o valor numérico da integral, representando a soma acumulada da função sobre esse intervalo, isto é, $f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{b} f(x_i)\Delta x$, a medida de área acumulada conforme b varia.

Procedimentos metodológicos e Apresentação dos dados

A pesquisa em questão caracteriza-se como qualitativa, com abordagem interpretativa, e busca promover uma intervenção em um contexto real (Bogdan & Biklen, 1994). Conforme Gerhardt & Silveira (2009), a pesquisa qualitativa não se preocupa com a representação numérica dos dados, mas sim com uma análise aprofundada de um grupo social ou organização. Segundo esses autores, pesquisadores que adotam esse método visam compreender as causas subjacentes dos fenômenos e propor ações adequadas, sem necessariamente quantificar valores ou submeter suas conclusões a testes empíricos.

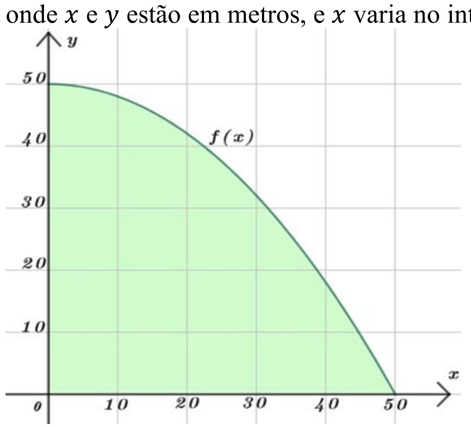
A aplicação da tarefa ocorreu no segundo semestre de 2024, durante algumas aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1) no curso de graduação em Agronomia. A intervenção estendeu-se por quatro aulas de 50 minutos cada, visando a coleta de dados e a análise dos resultados obtidos.

Quadro 1
Tarefa aplicada para os estudantes de Agronomia

Um agricultor deseja calcular a área de uma lavoura plantada em um terreno, onde a borda da plantação pode ser aproximada por uma função polinomial. Após medições, verificou-se que a borda pode ser representada pela seguinte função:

$$f(x) = 50 - 0{,}02x^2$$

onde x e y estão em metros, e x varia no intervalo $[0, 50]$.



a) Para estimar a área total cultivada, o agricultor deseja determinar a região limitada pela curva $f(x)$ e o eixo x, dentro do intervalo especificado. Com base nisso, qual seria a estimativa aproximada para a área cultivada?
b) O que poderia ser feito para refinar o resultado encontrado e obter uma estimativa mais precisa da área, garantindo que a maior região possível seja considerada no cálculo?
c) Explique detalhadamente o processo matemático para a determinação da área, utilizando palavras, desenhos, fórmulas ou qualquer outro tipo de registro que julgar necessário.
d) O método utilizado permite determinar o valor exato da área cultivada? Justifique sua resposta.

Fonte: as autoras.

Inicialmente, os estudantes tentaram associar a tarefa a algum procedimento envolvendo derivada, pois esse havia sido o último conteúdo estudado na disciplina. No entanto, sem sucesso nessa abordagem, expressaram surpresa e questionaram se poderiam resolver o problema sem utilizar derivadas ou se poderiam recorrer a figuras geométricas conhecidas para estimar a área. Com maior confiança, passaram a utilizar ferramentas matemáticas familiares, como as áreas de figuras planas (retângulos, quadrados, triângulos e setores circulares), para desenvolver suas soluções.

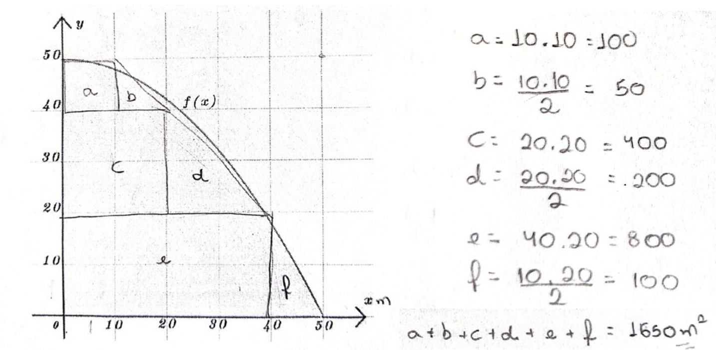


Figura 1. Resolução do Grupo 1, item (a) da tarefa (as autoras).

O Grupo 1 optou por resolver a tarefa utilizando retângulos, dividindo o gráfico em pequenas áreas e somando-as para obter uma estimativa. No item (a), a camada do produto não foi completamente explorada, pois os estudantes não utilizaram a função para determinar a altura dos retângulos. No entanto, a soma das áreas sugere, de forma intuitiva, a mobilização da camada da soma (Sealey, 2006). No item (b) (Figura 2), a tarefa solicitava um refinamento do resultado obtido no item (a). O grupo sugeriu aumentar o número de subdivisões, evidenciando a presença da camada do limite (Sealey, 2006), uma vez que se propõe realizar subdivisões adicionais. Embora a resolução não ofereça suporte completo para a estruturação da camada do produto, ela contribui intuitivamente para esse processo.

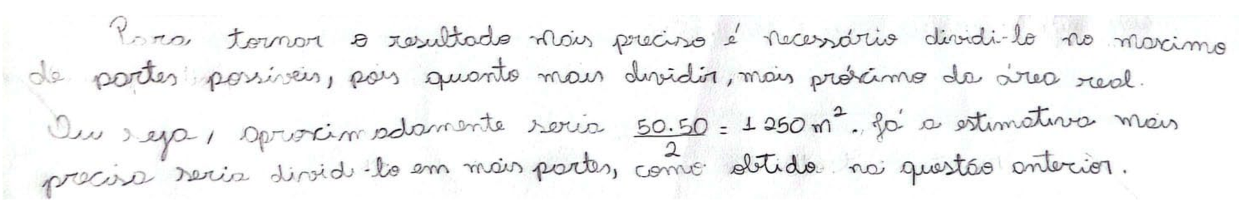

Para tornar o resultado mais preciso é necessário dividi-lo no maximo de partes possíveis, pois quanto mais dividir, mais próximo da área real. Ou seja, aproximadamente seria $\frac{50.50}{2} = 1\,250\ m^2$. Já a estimativa mais precisa seria dividi-lo em mais partes, como obtido na questão anterior.

Figura 2. Resolução do Grupo 1, item (b) da tarefa (as autoras).

O Grupo 2 utilizou a função para encontrar a altura, mas calculou a área como se fosse um grande triângulo retângulo, considerando que a área de ¼ do círculo seria um refinamento (Figura 03), por estar mais próxima de uma curva. No item (b), optaram por esse caminho para obter uma estimativa mais próxima da realidade, sem mobilizar diretamente nenhuma das camadas da estrutura da integral de Riemann.

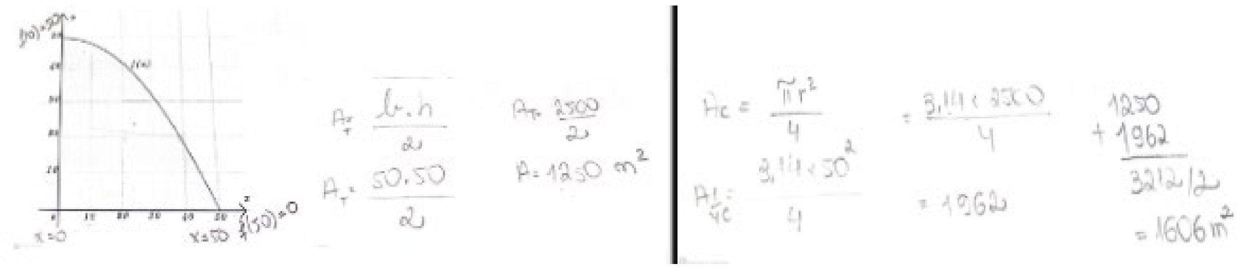


Figura 3. Resolução do Grupo 2, item (a) e item (b), respectivamente da tarefa (as autoras).

De modo geral, os estudantes recorreram a estratégias geométricas para resolver o problema. Alguns consideraram a soma de diversas formas para preencher a região sob a curva, enquanto outros, como o Grupo 2, utilizaram uma única forma geométrica maior. Para introduzir a ideia de soma de Riemann e aproximar-se do conceito de integral definida, foi proposta uma resolução utilizando slides e o software GeoGebra, permitindo aos estudantes visualizarem o conceito por meio de somas de base multiplicativa, valendo-se assim da utilização da função para a determinação da altura.

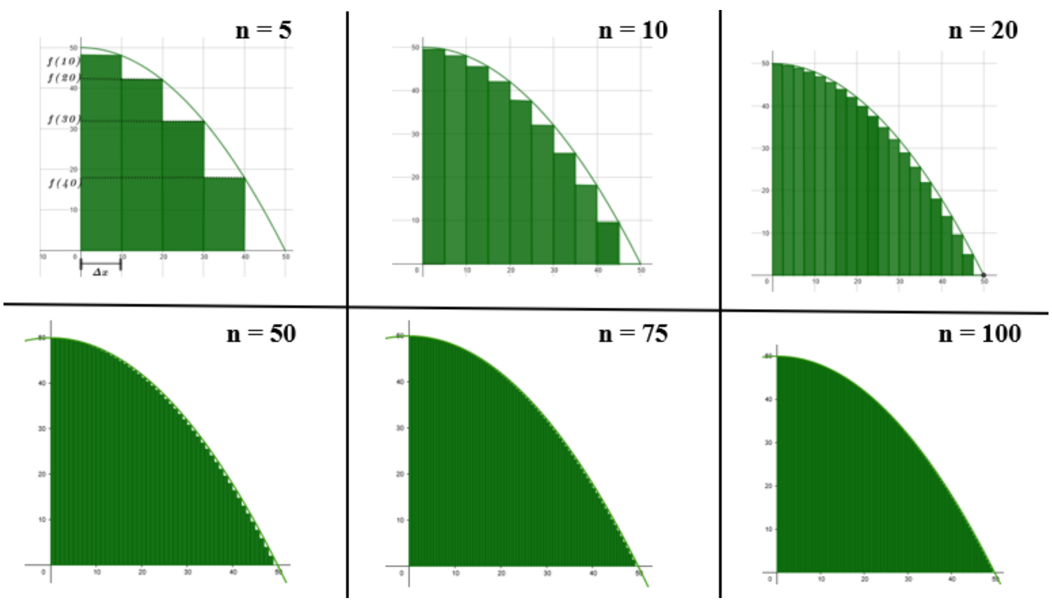


Figura 4. Apresentação das subdivisões feitas com auxílio do geogebra (as autoras)

A professora incentivou a reflexão por meio de questionamentos como: Qual conceito matemático explora essa ideia de aproximação? O que aconteceria se dividíssemos o intervalo em um número muito grande de partições? Seria possível obter um valor exato para a área? Essas discussões conduziram os estudantes à formalização do conceito de soma de Riemann e à definição de integrais definidas.

Com o recurso adicional, os alunos perceberam a relação com o conceito de limite e a soma de base multiplicativa, o que favoreceu a compreensão da camada do produto, da soma e do limite, que inicialmente não havia surgido espontaneamente nas soluções dos grupos.

Análise dos dados

No início da aula, ficou claro que os alunos estavam habituados a um modelo tradicional de ensino, centrado na definição, exemplos e exercícios. Quando desafiados a inverter essa abordagem, iniciando pela resolução de um problema antes da construção da definição, sua reação foi recorrer ao conteúdo previamente estudado, evidenciando uma forte dependência desse formato e a busca constante pela validação do professor, possivelmente devido à falta de oportunidades para assumir um papel mais ativo no aprendizado.

Essa postura reflete uma característica comum no ensino de Matemática, tanto na Educação Básica quanto no Ensino Superior, onde predomina o padrão "cartesiano" de definição-exemplo-exercício. Como apontam Couto et al. (2017), essa abordagem torna as disciplinas monótonas e excessivamente algorítmicas, prejudicando seu propósito e desmotivando os estudantes.

Durante a resolução da tarefa, diferentes estratégias foram adotadas. O Grupo 1 tentou dividir a região sob a curva em retângulos, mas não usou a função para determinar a altura dos retângulos, limitando a exploração da camada do produto. Já o Grupo 2 utilizou a função para determinar a altura, mas tratou a área como um único triângulo retângulo, o que não mobilizou as camadas estruturais da integral de Riemann. Além disso, muitos alunos apresentaram dificuldades em usar a função corretamente, apoiando-se na malha fornecida. Isso sugere que a tarefa não foi suficientemente estruturada para permitir uma exploração autónoma das camadas fundamentais da integral, indicando a necessidade de reformulação para promover uma aprendizagem mais aprofundada.

Considerações finais e conclusão

A tarefa formulada teve como objetivo inicial explorar, de maneira intuitiva, alguns dos conceitos que compõem a integral definida. Para isso, os alunos recorreram a conhecimentos prévios na resolução da atividade. Conforme destacado por Ponte (2005), é fundamental realizar uma análise prévia da tarefa para garantir que os objetivos de aprendizagem sejam alcançados. Muitas vezes, as tarefas são elaboradas com determinadas intenções, mas, sem uma reflexão cuidadosa sobre sua formulação e aplicação, os resultados podem não corresponder às expectativas. Nesse sentido, ressalta-se que: "É formulando tarefas adequadas que o professor pode suscitar a atividade. Não basta, no entanto, selecionar boas tarefas – é preciso ter atenção ao modo de as propor e de conduzir a sua realização na sala de aula" (Ponte, 2005, p. 1).

Uma interpretação comum da integral definida é a sua relação com a área sob a curva. Embora essa abordagem seja útil e intuitiva, ela não se mostra suficiente para uma compreensão completa do conceito. A integral definida possui uma estrutura matemática mais profunda, que não pode ser reduzida apenas a essa interpretação geométrica. Seu significado vai além do cálculo de áreas, abrangendo também a noção de acumulação e a relação com somas de Riemann, aspectos fundamentais para um entendimento mais amplo.

Dessa forma, a tarefa analisada neste estudo, por apresentar um caráter altamente intuitivo e não enfatizar explicitamente o uso da função, pode não mobilizar conceitos essenciais para a compreensão da integral. Observa-se que, frequentemente, são propostas atividades que envolvem o cálculo de áreas dentro de um contexto relacionado ao curso do aluno e, posteriormente, formaliza-se a integral como uma extensão natural desse processo. No entanto, essa tarefa pode ser limitada quando não são trabalhados elementos essenciais, como o cálculo da altura dos retângulos a partir da função. Assim, para que a tarefa oportunize a aprendizagem do conceito de integral, torna-se essencial considerar esses aspectos em sua elaboração e condução.

Referências e bibliografia

Araujo, T. T. D. (2023). *Integrais definidas de uma e mais variáveis: uma proposta de intervenção com tarefas exploratórias* [Dissertação de mestrado, Universidade Tecnológica Federal do Paraná].

Couto, A. F., Fonseca, M. O. S., & Trevisan, A. L. (2017). Aulas de Cálculo Diferencial e Integral organizadas a partir de episódios de resolução de tarefas: Um convite à insubordinação criativa. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 8*(4), 50-61.

Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa* (1ª ed.). Editora da UFRGS.

Greefrath, G., Oldenburg, R., Siller, H. S., Ulm, V., & Weigand, H. G. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of a test instrument, and first results. *ZDM–Mathematics Education, 53*(3), 649-661.

Jones, S. R. (2013). Understanding the integral: Students' symbolic forms. *Journal of Mathematical Behavior, 32*(2), 122-141.

Jones, S. R. (2015). The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann-sum based conceptions in students' explanations of definite integrals. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46*(5), 721-736.

Jones, S. R., Lim, Y. R., & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1075–1095.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient? *Psychology of Mathematics Education, 2*, 46-53.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 230-245.

Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (Vol. 73, pp. 43–52).

Dinámica para el aprendizaje activo del Álgebra Lineal entre pares

Danny **Ramírez Lobo**
Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
danny.ramirez.lobo@una.cr

Introducción

La experiencia de aula se desarrolla como parte de las actividades de un curso de capacitación de LASPAU para académicos universitarios en temáticas de aprendizaje activo. Se aplica en un curso de Álgebra Lineal conociendo las capacidades de los estudiantes en el uso de herramientas digitales tecnológicas y con la intención de mejorar las dinámicas de clase se propuso que los estudiantes fueran los actores principales de su aprendizaje y del de sus compañeros.

Dentro de los fundamentos para una propuesta de este estilo según Ahumada (2005) “los estudiantes tienen diferentes ritmos de aprendizaje producto de poseer diferentes estilos, capacidades de razonamiento y memoria” (p. 22). Además, es ideal que se promuevan actividades de auto aprendizaje o investigación previa a los temas de clase, para aumentar la participación en las discusiones de clase (Crouch & Mazur, 2001) y que se usen herramientas de evaluación no tradicional.

Presentación de la propuesta

Esta experiencia de aula se aplicó en un grupo de Álgebra Lineal, cada estudiante debía realizar tareas de indagación de un tema, preparar un video de exposición de un ejercicio y la evaluación de los videos de sus compañeros. Se promueve la formación de estudiantes autodidactas, cambiar el rol del estudiante en su proceso de aprendizaje, utilizar evaluación auténtica en Matemática universitaria y mejorar el rendimiento académico.

La dinámica consiste en tres etapas:

a. El estudiante investiga el tema matemático del curso, resuelve ejercicios del tema. No hay instrucción en clase por parte del docente, puede hacer consulta al profesor.

b. El estudiante graba y sube a la plataforma la explicación de los ejercicios, en el Aula virtual se crea un foro para retroalimentación de compañeros y del profesor.
c. El estudiante revisa los videos de sus compañeros y evalúa de acuerdo con una rúbrica dada por el docente del curso. Puede realizar retroalimentación.

Los tópicos matemáticos a desarrollar en los videos abarcaron álgebra matricial, tipos de matrices, cálculo del determinante y el método de eliminación de Gauss-Jordan para el cálculo de la inversa de una matriz. Una imagen tomada de los videos muestra el ejercicio que se resuelve y en la esquina superior derecha la imagen de la estudiante que lo está explicando, esta es fundamental en el póster.

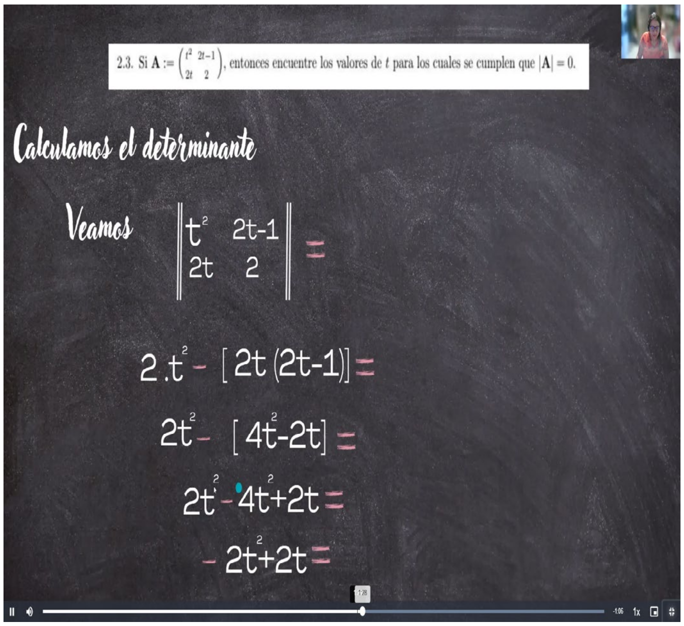


Figura 1. Video de explicación del cálculo de un determinante.

Resultados

Derivado de un cambio de metodología de clase y de evaluación se crea un reto para los estudiantes ante su nuevo rol en la clase. El estudiante pasa de ser agente pasivo a agente activo ya que debe aprender para poder enseñar a sus compañeros de clase y el docente acompaña en este proceso de autoaprendizaje. Los estudiantes crean sus propios materiales de su clase y generan insumos para sus horas de estudio lo que impacta positivamente en su aprendizaje y en el rendimiento académico.

Referencias y bibliografía

Ahumada, P. (2005). La evaluación autentica: un sistema para la obtención de evidencias y vivencias de los aprendizajes. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores*, *45*, 11-24. Recuperado de http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333329100002

Crouch, C. & Mazur, E. (2001). Peer instruction: Ten years of experience and results. *American journal of physics, 69* (9), 970-977. https://doi.org/10.1119/1.1374249

Dos décadas incentivando el talento: Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional-Colombia

Lyda Constanza **Mora** Mendieta
Universidad Pedagógica Nacional
Colombia
lmendieta@pedagogica.edu.co
William **Jiménez** Gómez
Universidad Pedagógica Nacional
wjimenez@pedagogica.edu.co
Tania Julieth **Plazas** Merchán
Universidad Pedagógica Nacional
tplazas@pedagogica.edu.co

Contexto

En las aulas de matemáticas es frecuente encontrar estudiantes con capacidades superiores. ¿Qué hacer con ellos? En las últimas dos décadas, el Club de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional [CM-UPN] (Bogotá, D.C.-Colombia) ha contribuido a dar respuesta a esta necesidad educativa. El CM-UPN funciona de manera remota sincrónica y atiende cada semestre a cerca de 100 estudiantes entre 12 y 18 años, de diferentes regiones de Colombia. Se estudian contenidos que usualmente no hacen parte del currículo escolar: teselados pentagonales, tabletas de Truchet, criptografía, códigos QR, etc. También se enfatiza en una característica de talento.

Aspectos teóricos

Modelo sociocultural del talento matemático y los programas de enriquecimiento

"La forma más sencilla de definir el talento matemático es la de considerarlo como la capacidad matemática que se sitúa significativamente por encima de la media" (Díaz, et al., 2008, p. 31), lo que implica unos pares etarios con quienes hacer la comparación. Esta capacidad se manifiesta en interacción con el entorno social, y se desarrolla en esa interacción, base del modelo sociocultural del TM.

Se identifican tres tipos de características asociadas al TM: el pensamiento convergente, el pensamiento divergente y otros factores. El primero se refiere a la capacidad de encontrar solución a un problema, con procesos lógicos como la visualización, la generalización y la inversión. El pensamiento divergente se trata de generar múltiples soluciones para un problema con creatividad. Otros factores, como el manejo de la frustración o el apoyo familiar también influyen en el progreso del TM (Mora, et al., 2009).

Los programas de enriquecimiento son una forma de atención al TM, se entienden como actividades complementarias en las que los estudiantes pueden profundizar en un área específica (Castro et al., 2006). Ejemplos de estos son *Estalmat* (España), *Penta UC* (Chile), *TAMME* (México) y los *Círculos Matemáticos* y el CM-UPN (Colombia).

La experiencia educativa: el funcionamiento del Club y sus resultados

Cada semestre, profesores de colegios oficiales de Colombia postulan estudiantes que consideran talentosos en matemáticas. Cerca de 500 aspirantes se presentan a una prueba de selección en línea, para completar 100 cupos. La prueba, diseñada por el equipo del CM-UPN, incluye cinco preguntas de selección múltiple y en la que se evalúan características del TM.

Cuando termina la selección, se inician las clases semanales (sincrónicas vía *Teams*). En cada periodo, el equipo del CM-UPN escoge un tema y una característica de talento a enfatizar. Por ejemplo, criptografía – representación, tabletas de Truchet – abstracción y teselados – originalidad. En el caso de las tabletas de Truchet, los estudiantes crearon *bitabletas* (unión de dos tabletas de manera particular) y tapetes (unión de más de dos tabletas). Estos se estudiaron a través de movimientos rígidos del plano; también se crearon y relacionaron representaciones como las que se muestran en la figura 1 potenciando, por ejemplo, la capacidad de abstracción.

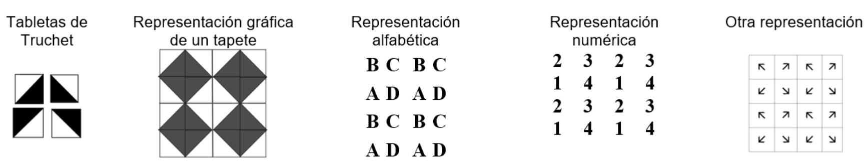


Figura 1. Ejemplos de representaciones con tabletas de Truchet.

Son más de veinte temas los que se han tratado hasta ahora, para los cuales formadores de profesores y futuros educadores matemáticos se preparan. Por el CM-UPN han pasado más de 200 maestros, hoy egresados, que laboran en distintas latitudes. A la fecha se ha atendido a más de 2 000 jóvenes que encuentran en las matemáticas una opción de futuro.

Referencias y bibliografía

Castro, E., Maz, A., Benavides, M. y Segovia, I. (2006). Talento matemático: diagnóstico e intervención. En E. Márquez (Ed.), *Alumnos superdotados y talentosos. Identificación, evaluación e intervención. Una perspectiva para docentes* (pp. 453-473). México: Manual Moderno.

Díaz, O., Sánchez, T., Pomar, C. y Fernández, M. (2008). Talentos matemáticos: Análisis de una muestra. *Faísca. Revista de altas capacidades*, 13(15), 30-39. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=3538471.

Mora, L., Casas, A. y González, M. (2009). La diversidad en el aula, un ejemplo: el talento en matemáticas. *Revista Pedagogía y Saberes*. Universidad Pedagógica Nacional. Vol. 30. p. 131. Editorial Kimpres Ltda. Colombia. ISSN. 0121-2494.

El geoplano como material didáctico para la enseñanza de la geometría en personas con ceguera

Ariana Paola **Lozano** Campos
Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
plozano725@gmail.com

Introducción

Este trabajo tiene como objetivo principal mostrar al geoplano como un recurso valioso para la enseñanza de la geometría a personas ciegas. Desde su invención en 1960, el geoplano ha sido considerado un recurso didáctico propio de la educación primaria. No obstante, Fernández del Valle *et al.* (2022) mencionan que, según estudios anteriores, se evidencian resultados positivos al emplear materiales manipulativos con estudiantes que presentan necesidades educativas específicas, ya que permiten transformar conceptos abstractos en experiencias concretas. Por lo que, bajo una nueva perspectiva, este material puede adaptarse para que sea funcional en la enseñanza a personas con ceguera o baja visión.

Para esta propuesta se trabajó en la modalidad de estudio de casos, con dos personas ciegas: una nació con esta condición, mientras que la otra perdió la vista de manera gradual.

Actividades

En este apartado se hará una breve explicación de las actividades llevadas a cabo con los participantes. Estas actividades están inspiradas en las planteadas por Fernández y Gutiérrez (1980) en su trabajo "Papeles de enseñanza de la matemática".

Reconocer partes de una circunferencia

Con el geoplano circular se representan conceptos como diámetro, radio, arco y cuerda. El profesor representará cada uno de estos conceptos en el geoplano y se los dará al estudiante para que los reconozca con el tacto, facilitando así la formación de una representación mental asociada a la definición de cada concepto. Luego, el estudiante los construirá de forma autónoma, lo que le permite al docente supervisar y valorar su proceso de aprendizaje.

Paralelismo, perpendicularidad y posiciones relativas

Con el geoplano cuadrado se exploran el paralelismo y la perpendicularidad mediante la posición de segmentos. Inicialmente, se pide a los estudiantes trazar segmentos que mantengan la misma dirección o formen ángulos rectos respecto a un segmento fijado. Finalmente, se reflexiona sobre la posición relativa de los trazos, argumentando, por ejemplo, que dos rectas son paralelas al seguir una misma orientación horizontal o vertical en la malla del geoplano.

Clasificación de ángulos y clasificación de triángulos según sus ángulos

El geoplano circular facilita la enseñanza de ángulos agudos, rectos y obtusos. Primero, se divide el geoplano en cuatro cuadrantes iguales (similar al plano cartesiano). Luego, se explica que un ángulo que ocupa menos de un cuadrante se clasifica como ángulo agudo; si ocupa exactamente un cuadrante, se denomina ángulo recto; y si abarca más de un cuadrante, pero menos de dos, se considera un ángulo obtuso. Por otro lado, Para la clasificación de triángulos, se emplea el geoplano cuadrado. Inicialmente se explican a los estudiantes las definiciones de triángulos obtusángulos, rectángulos y acutángulos. A continuación, se les pide que, construyan los triángulos basándose únicamente en su representación mental, sin ejemplos previos y con el conocimiento que adquirieron al aprender a clasificar ángulos.

Resultados

El geoplano mostró resultados alentadores al implementarlo al trabajar con personas en ciegas. En palabras de uno de los participantes: “En el colegio utilicé figuras geométricas así ya construidas; conos, pirámides (…) y lo que habíamos contado, la parte del geoplano me ayudó a crear figuras porque bueno, yo nunca las hice en lo que fue la ruleta (…) lo que yo puedo rescatar es que el geoplano es un complemento”. La adaptabilidad del geoplano es fundamental, pues les permite a los estudiantes tener un aprendizaje significativo mediante un material manipulativo que les conceda la oportunidad de experimentar y crear su propio conocimiento.

Conclusiones

La importancia del geoplano en las aulas radica en que este se puede alterar y no es estático como otros materiales didácticos. El geoplano brinda a los estudiantes la oportunidad de crear, lo que fomenta el aprendizaje significativo a través de la experiencia. Además, al ser un material transformable, permite realizar una evaluación formativa al pedirle a los estudiantes crear por su cuenta conceptos y figuras, esto le permite al profesor detectar posibles errores en las representaciones mentales o bien dar seguimiento al progreso en el aprendizaje de sus alumnos.

Figura 1. Fotografía tomada durante una de las actividades.

https://docs.google.com/presentation/d/1G8tGtcwvPTQ0B_qXfJ8goSjDnFH1mOTR/edit?usp=sharing&ouid=101028196459748490451&rtpof=true&sd=true

Referencias y bibliografía

Fernández, A. y Gutiérrez, A. (1980). *Papeles de enseñanza de la matemática*. Universidad de Valencia. https://www.uv.es/Angel.Gutierrez/archivos1/textospdf/FerGut80.pdf

Fernández del Valle, L., Polo-Blanco, I. y Palacio, N. (2022). Uso del geoplano para el aprendizaje de conceptos geométricos planos: un estudio de caso con un estudiante con necesidades educativas especiales. *Unión- Revista iberoamericana de educación matemática, 18*(65), 1-20. http://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/816

Ensino do conceito de função por nexos conceituais

Maria do Carmo de **Sousa**
Universidade Federal de São Carlos
Brasil
mdcsousa@ufscar.br

Resumo

Este texto apresenta dados referentes à pesquisa qualitativa, de cunho teórico, que se fundamenta na teoria histórico-cultural e está em andamento. O objetivo geral é estudar historiografias de matemática, com foco nos modos de ver e conceber os conceitos matemáticos dos autores que as escreveram. Tais estudos consideram que as vertentes historiográficas da História da Matemática descrevem o lógico de fatos históricos que ocorreram em diversos contextos, em determinados tempos e espaços, os quais são sistematizados, de tempos em tempos. Os resultados mostram que a historiografia de matemática elaborada por Karlson (1961), por exemplo, aborda a história do conhecimento do conceito de função. Ao estudá-la, tanto os licenciandos, quanto os professores de matemática podem delinear alguns nexos conceituais e elaborar situações desencadeadoras de aprendizagem para o Ensino Médio. O movimento lógico-histórico poderá fazer parte de suas práticas educativas e ser compreendido como unidade dialética entre ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Movimento lógico-histórico; Nexos conceituais; Conceito de função; História da Matemática; Ensino Médio; Pesquisas históricas; Ensino de função; Vertentes historiográficas; Formação de Professores; Teoria histórico-cultural.

Definição e relevância do problema

Durante o desenvolvimento da pesquisa que está em desenvolvimento sobre o papel das historiografias no ensino de Matemática, com especial atenção para o ensino de funções, ouvimos constantemente, os professores de Matemática que atuam no Ensino Médio, das escolas brasileiras, pelo menos duas perguntas: 1) Por que ensinar o conceito de função a partir da História da Matemática? 2) Por que ensinar o conceito de função a partir de nexos conceituais?

Ao responder às perguntas destacamos as historiografias de Karlson (1961),Ríbnikov (1987), Eves (1997) e Caraça (1998). Defendemos a necessidade de se pensar em situações desencadeadoras de aprendizagem (SDA) em atividades de ensino (AE) que considerem o movimento lógico-histórico, preconizadas por Moura (2010).

Nesse sentido, tal movimento, o lógico-histórico pode se configurar como didática para o ensino de Matemática. Ao analisarmos o papel das historiografias e do movimento lógico-histórico, tanto na formação dos professores, quanto nas SDA em AE, concordamos com Caraça (1998) que, quando se trata do ensino de Matemática, faz-se necessário romper com a ideia de que a Ciência e, consequentemente, os conceitos matemáticos são imutáveis, prontos e acabados, bastando-se por si só, como se fossem capítulos de livros harmônicos.

Essa forma de pensar promove um ensino de Matemática descolado da realidade, considerando-se que a realidade à qual estamos inseridos é mutável. Ou seja, as ações de sala de aula quando pensadas sobre o jugo do imutável priorizam as listas de exercícios prontas e acabadas. O foco do ensino e da aprendizagem está nas fórmulas. O ponto de partida do conceito de função está na teoria dos conjuntos.

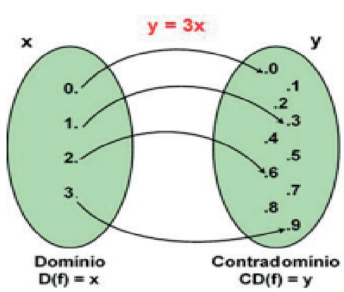
A figura 1 exemplifica como os autores do currículo paulista – fundamentado na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) elaborado pelo Ministério da Educação, publicado em Brasil (2017) e implementado em 2020 em todas as escolas brasileiras Educação Básica, incluindo-se o Estado de São Paulo – apresentam o conceito de função para os alunos do primeiro ano do Ensino Médio.

ATIVIDADE 2 – AS FUNÇÕES POLINOMIAIS DO 1º GRAU.

2.1 Conceito de Função

Define-se por função a lei que relaciona cada elemento **x** de um conjunto **A**, denominado domínio da função, a um único elemento **y** de outro conjunto **B**, denominado contradomínio da função ou seja, para cada valor de **x,** há somente um valor correspondente **y.** Por esse motivo, dizemos que **y** está em função de **x.**

A ideia de função pode ser representada por meio de um diagrama de flechas. Por exemplo, a lei da função **y = f(x) = 3x**, que associa a cada elemento do Domínio A, um único elemento do Contradomínio B



Fonte: Elaborada pelos autores.

Figura 1. O conceito de função no Currículo Paulista

Após a definição do conceito de função, os autores do caderno apresentam mais definições sobre: 1) domínio, contradomínio e imagem; 2) tipos de funções: constante, identidade, linear, afim (função polinomial do 1.º grau); 3) fórmula para se encontrar o zero da função afim e 4) representação gráfica da função afim. Em seguida, propõem exercícios. Vez ou outra, indicam quadros contendo fórmulas de determinadas funções para que os alunos os completem (SEDUC/SP, 2023).

Essa forma de apresentar e ensinar o conceito de função no Ensino Médio prioriza três momentos distintos: definições, treinamentos de exercícios e avaliações.

Isso significa que ensinar os conceitos a partir de definições faz com que os alunos tenham dificuldades em compreender pelos menos três nexos conceituais da função: movimento, interdependência e variável, uma vez que a variável pode assumir pelo menos três papéis: incógnita, na equação; parâmetro, na inequação, e variável, na função.

É por esse motivo que, em nossa pesquisa, especialmente, no que diz respeito ao ensino de função, temos elaborado, a partir dos estudos de (Lima e Moisés 2000) e Grupo Caraça (2002). SDA em AE que tenham como ponto de partida o conceito de movimento, conforme mostra a figura 2

Pensando sobre o universo em movimento

a) Olhe em torno de você. Preste muita atenção! (p. 1).
b) Anote tudo aquilo que você considera que está em movimento (p. 1).
c) Reflita sobre suas anotações e suas ideias sobre o que é "movimento" (p. 1).

Figura 2. Pensando sobre o universo em *movimento*

Ao refletir sobre o universo em movimento, os alunos do Ensino Médio têm a oportunidade de constatar que todos os dias nos deparamos com movimentos irregulares e movimentos regulares, os quais, para serem estudados do ponto de vista da Matemática, necessitam de um instrumento que foi construído historicamente por diferentes povos e contou com a participação de diferentes áreas: a função.

Referencial teórico

As pesquisas históricas (Radford, 2011) que fizemos sobre a história do conhecimento do conceito de função, fundamentam-se nas historiografias de Karlson (1961), Ríbnikov (1987), Eves (1997) e Caraça (1998). Procuramos indicar as diferentes formas que cada um dos autores tem ao ver e conceber: 1) a Matemática e seu ensino; 2) a História da Matemática; 3) a História do conceito de função e 4) os nexos conceituais da função.

Esses nexos, quando tratados didaticamente pelos professores da Educação Básica, podem fundamentar as SDA em AE e frequentar as salas de aula do Ensino Médio.

Ao desenvolvermos a pesquisa consideramos que os nexos conceituais, construídos historicamente, nas diversas práticas sociais, em diversos contextos políticos, culturais e sociais representam elos entre os conceitos, os quais são construídos, historicamente, em diversos contextos e, quando tratados de forma didática podem orientar a elaboração de SDA, conforme os estudos de Moura (2010).

Tais nexos quando compreendidos pelos profissionais do ensino podem se constituir em elementos didáticos que orientam alunos e professores a compreenderem melhor parte do percurso das construções das ideias matemáticas que, foram elaboradas a partir das necessidades de cada povo, em suas práticas culturais, incluindo-se os povos africanos.

Há de se considerar ainda que, quando a formulação contemporânea dos conceitos se torna uma camisa de força para os professores, eles ficam sem escolhas para organizar o ensino. Resta-lhes investir em exercícios e problemas que primam pela memorização das regras e dos algoritmos que, os professores não sabem de onde vieram.

A partir do entendimento do movimento lógico-histórico do conceito de função, por exemplo, podemos elencar os nexos conceituais (internos e externos): movimento, movimento regular, interdependência, variável e campo de variação que, quando tratados didaticamente pelos professores, na forma de SDA podem ser utilizados nas aulas na Educação Básica, de forma que, especialmente, os alunos do Ensino Médio possam compreender o porquê, o conceito de função está presente em praticamente todas as áreas de conhecimento, dentre elas, a Matemática, a Física e a Química.

Método e desenvolvimento conceitual

A pesquisa é qualitativa, de cunho teórico e fundamenta-se na teoria histórico-cultural. A metodologia para desenvolver o estudo se comporá dos seguintes momentos e estratégias:

1) Realização da análise lógica do conteúdo. Essa consiste em um estudo teórico sobre Historiografias de Matemática que se apresentam nas ementas das disciplinas de História da Matemática, dos cursos de licenciatura de Matemática, das universidades federais brasileiras. O estudo remete necessariamente a uma pesquisa bibliográfica que envolve tanto historiografias da Matemática, quanto as ementas das disciplinas dos cursos de licenciaturas de Matemática das universidades federais brasileiras e pesquisas que tratam da implementação de disciplinas de História da Matemática nos cursos de licenciaturas de Matemática brasileiros. Tem como resultado a elaboração de textos diversos sobre a temática.

2) Realização de estudos sobre os nexos conceituais (internos e externos) que se apresentam em conceitos matemáticos propostos nas ementas das disciplinas de História da Matemática, das universidades federais brasileiras.

Todos os momentos do processo acima fazem parte do diário de campo da pesquisadora para a configuração dos dados da investigação.

Destacamos dois tipos de instrumentos a serem usados na pesquisa, aqueles que contribuirão para a construção dos fatos: os textos teóricos que serão produzidos e a explicitação dos nexos conceituais (internos e externos) que se apresentam em conceitos matemáticos tratados nas disciplinas. Esses instrumentos possibilitam considerar o movimento mais geral da pesquisa.

Os textos teóricos se configuram em artigos e contribuirão com reflexões que envolvem estudos de historiografia da Matemática e suas relações com os diferentes modos de ver e conceber conceitos matemáticos dos autores que as escreveram.

A análise dos dados segue uma linha interpretativa cuja característica é a particularização, ao invés da generalização de resultados.

A busca não é de universais abstratos, aos quais se chega, segundo Moreira (1990), através de generalizações estatísticas, mas sim de universais concretos, que se atinge através do estudo detalhado de um caso específico, localizado culturalmente.

Pensamos em deduzir e organizar categorias que representem os diferentes modos de ver e conceber conceitos matemáticos de autores que frequentam os cursos de licenciaturas de Matemática, das universidades federais brasileiras, a partir das historiografias indicadas e estudadas em disciplinas de História da Matemática. Esses modos diferentes de ver e conceber os conceitos matemáticos podem nos auxiliar a configurar os possíveis dos nexos conceituais (internos e externos) que são lógicos e históricos.

Resultados e discussão

Ao nos apropriarmos das ideias que se apresentam nas quatro historiografias de Karlson (1961), Ríbnikov (1987), Eves (1997) e Caraça (1998), poderíamos nos perguntar: quais são os nexos conceituais comuns que se explicitam no movimento lógico-histórico do conceito de função descritos pelos autores?

Explicitamente, podemos indicar que são pelo menos quatro: variável, campo de variação, relação e representação. Implicitamente, movimento e infinito. Entendemos que tais nexos podem ser utilizados pelos professores da Educação Básica na elaboração de SDA para ensinar o conceito de função no Ensino Médio, uma vez que estão presentes nos movimentos do universo, portanto, fazem parte das nossas vidas. Vimos que, para estudar os movimentos, os matemáticos de diferentes grupos sociais criaram um instrumento, denominado função. Ou seja, o conteúdo das funções tratadas no Ensino Médio é decorrente dos estudos dos movimentos gerais das nossas vidas e a forma que materializa tal conteúdo é a expressão $f(x)$. Faz-se necessário que os alunos do Ensino Médio e professores da Educação Básica compreendam tanto os nexos conceituais, quanto o conteúdo e a forma da função. Para tanto, faz-se necessário o estudo de historiografias da Matemática.

Ao descrever de uma forma poética e divulgar o pensamento dos conhecimentos matemáticos na década de 1940, o matemático Karlson (1961) pretendeu divulgar a história dos conceitos matemáticos para todos aqueles que, de alguma forma, desprezavam e odiavam a Matemática.

Tinha como propósito escrever o movimento dos conceitos matemáticos de uma forma simples, para que todas as pessoas pudessem compreendê-los. Não é à toa que, para alguns matemáticos ou não, a historiografia de Karlson pode ser enquadrada como de divulgação científica. É como se fosse um texto não muito sério, em termos de aprofundamento matemático e, por esse motivo, não deve frequentar as aulas de Matemática no Ensino Superior, o que, do nosso ponto de vista, é um grande equívoco.

No entanto, quando começamos a ler a historiografia, constatamos que o autor não deixa nada a desejar, no que diz respeito às argumentações que fundamentam as histórias dos conceitos matemáticos, ainda que não tenha preocupações em apenas enfatizar as demonstrações lógicas e formais. As demonstrações estão lá. O movimento lógico-histórico dos conceitos estão presentes para que, leigos no assunto, professores e, por que não, os matemáticos possam ter acesso aos nexos conceituais dos números, da álgebra, do cálculo, da geometria, e, principalmente, do que denomina reino das funções.

Karlson (1961) nos mostra sua paixão para com as funções. Das 608 páginas, 239 delas, o que equivale a 39% da historiografia, foram dedicadas ao movimento lógico-histórico do conceito de função. Ao nos apresentar a história do conhecimento sobre o conceito de função, o autor nos indica que há um reino que luta insistentemente para representar os movimentos da vida.

A partir de um tratamento didático do que apresentamos até aqui, podemos indicar o primeiro nexo conceitual da função: movimento. Quais movimentos? Aqueles que se apresentam todos os dias em nossas vidas e nas diferentes realidades a que somos expostos.

Quando aceitamos o convite de Karlson (1961) para adentrarmos esse reino e nos apropriarmos da ferramenta que nos faz conhecer os movimentos da vida – regulares e irregulares –, somos informados que se faz necessário considerar que, "se existisse uma taquigrafia especial para os matemáticos, onde as palavras mais frequentes estivessem representadas por símbolos particulares, deveríamos começar por uma palavra e somente uma: a palavra função" (Karlson, 1961, p. 375-376), considerando-se que, desde que os conceitos: infinito, vida, movimento, ação e reação passaram a dominar o mundo, a palavra-chave da matemática passou a ser: função. Vale a pena ressaltar que a taquigrafia é um modo de escrever, de forma sintética, resumida, por símbolos especiais.

Assim, ao nos apresentar o reino das funções, o autor, além de nos chamar a atenção para os movimentos da vida e para o conceito de infinito, indica-nos que há um "segredo da variação" (Karlson, 1961, p. 373) e se faz necessário não ignorar a importância que o conceito de infinito passa a ter, a partir da Renascença.

É nesse período que "Giordano Bruno finalmente arranca o véu que até então cobria o infinito, proclamando a existência de miríades de outros mundos". Ou seja, é durante o Renascimento que se quebra a "harmonia e a paz, pois tudo era de natureza divina. Luta, litígio e discórdia ficavam circunscritos à baixa esfera terrestre, domínio dos homens, que perdera a felicidade divina pelo pecado original" (Karlson, 1961, p. 375).

Se nos atentarmos de forma didática à descrição do autor, podemos constatar que a função não se desvencilha dos números. Podemos considerar mais dois nexos conceituais que fazem parte do movimento lógico-histórico da função: infinito e variação.

Em seguida, por meio de uma poesia, define o conceito de função. Convida-nos a pensar sobre "o sentido matemático da ação", que envolve um possível movimento da vida: a caminhada de um "viandante distraído na floresta" e de um "soldado em férias que tem no sangue a cadência constante das marchas" (Karlson, 1961, p. 376). Chama a nossa atenção para que possamos aprender "alguns vocábulos" que se apresentam nessa ação, tais como: função; variável independente ou variável arbitrária; representação formal; valores admissíveis para uma função; gráfico da função (representação concreta da função).

Ao tratar das "funções e suas representações" (Karlson, 1961, p. 380), chama atenção para a "imagem" e as "relações" que podem ser descritas por meio das funções que chamam a atenção dos trajetos de pessoas ou de trens; guaritas dos guarda-chaves; funcionamento das grandes estações ferroviárias; movimento dos comboios de cargas; movimentos durante a escalada de montanhas; problemas de economia; movimento de altura e pressão atmosférica nos aviões.

Didaticamente, conseguimos detectar a explicitação de mais dois nexos conceituais: representação (analítica e gráfica) e campo de variação.

Para o autor, faz-se necessário que: "consideremos as funções como seres vivos, e procuremos familiarizar-nos com os seus costumes" (Karlson, 1961, p. 387).

O mesmo autor nos convence de que as funções descrevem leis que representam os movimentos das nossas vidas, os quais não se podem, facilmente, generalizar. Podem ser representadas na forma de expressões algébricas. Tais expressões, quando dissociadas dos movimentos que as originaram, parece que têm vida própria. Logo, faz-se necessário que os alunos do Ensino Médio estudem os movimentos mais gerais da vida e suas leis para que possam representá-los de forma sintética, ou seja, analiticamente ou graficamente. Se fizermos um primeiro tratamento didático à historiografia de Karlson (1961) para elencarmos os nexos conceituais presentes no movimento lógico-histórico do conceito de função e que podem nos ajudar a elaborarmos SDA em AE, consideraremos: os movimentos mais gerais das nossas vidas, o infinito, a variação, o campo de variação, a representação (analítica e gráfica) e a relação. Consequentemente, os professores atuantes do Ensino Médio, juntamente com os estudantes, podem definir, com as ferramentas que têm, não necessariamente nessa ordem, o que vem a ser: movimento regular, movimento irregular, variável dependente, variável independente, lei, imagem, domínio, contradomínio e relação entre função e polinômio. Eis aqui uma proposta que pode promover a criação de várias SDA em AE pelos professores da Educação Básica para o conceito de função destinada ao Ensino Médio, uma vez que os nexos conceituais se relacionam com a vida de todos nós.

Considerações finais

Ao retomarmos as perguntas: 1) Por que ensinar o conceito de função a partir da História da Matemática? 2) Por que ensinar o conceito de função a partir de nexos conceituais? podemos pensar em pelo menos três respostas.

A primeira estaria no fato de que o movimento lógico-histórico descrito pelos quatro pesquisadores em suas historiografias nos mostram que o pensamento teórico da função é muito mais amplo do que suas representações nas formas: analítica, f(x) e gráfica e, dos tipos de função tratados no Ensino Médio das nossas escolas.

Por esse motivo, entendemos que os professores da Educação Básica devem ampliar o estudo das funções, incorporando os nexos conceituais que levam ao entendimento do pensamento teórico da função, a partir de sua gênese conceitual que é a compreensão da realidade, enquanto movimentos da vida, os quais, quando isolados, para serem estudados com maior profundidade, podem ser transformados em leis: qualitativas, quantitativas, analíticas e geométricas, por exemplo. Tais leis regem os conhecimentos científicos, os quais se manifestam em diversas áreas do conhecimento, denominadas Exatas e das Humanidades, por exemplo.

Isso quer dizer que áreas como a Medicina fazem uso do conceito de função quando precisam compreender determinados fenômenos, tal qual a Economia, a Física, a Química, a História, a Geografia, dentre outras. Ou seja, o conceito de função é interdisciplinar. Eis aí a segunda resposta possível à mesma pergunta: a interdisciplinaridade do conceito de função.

Com a função podemos: 1) analisar e compreender movimentos regulares da vida; 2) elaborar leis de formação que regem tais movimentos; 3) compreender um poderoso instrumento de leitura e compreensão das infinitas variações que insistem em dominar a nossa realidade e 4) pensar cientificamente, de forma a elaborarmos pensamento teórico sobre a realidade que nos cerca. Alunos e professores da Educação Básica têm a possibilidade de entrarem em atividade ao refletirem sobre as SDA que nos mobilizam, conforme indicam os estudos de Moura (2010).

Podemos compreender melhor o que vêm a ser os pares dialéticos: teoria e prática; interdisciplinaridade e disciplinaridade; regularidade e irregularidade; fluência e permanência, dentre outros. E esse não seria o principal papel das escolas: educar para compreender a realidade que nos cerca?

Temos aí a terceira resposta. Ou seja, defendemos que os professores que ensinam matemática, durante seu desenvolvimento profissional – incluindo-se aí os licenciandos matriculados nos cursos de licenciatura de Matemática – sejam convidados continuamente a analisar, elaborar e desenvolver SDA em AE que se fundamentem nos nexos conceituais dos conteúdos que ministrarão na Educação Básica. Dessa forma, o movimento lógico-histórico poderá fazer parte de suas práticas educativas e ser compreendido como unidade dialética entre ensino e aprendizagem e, consequentemente, contribuir com a inserção de novos elementos que podem vir a compor a Didática da Matemática.

Referências e bibliografia

Brasil (2017). *Base Nacional Comum Curricular* (BNCC**)**. Educação é a Base. Brasília, MEC/CONSED/UNDIME.
Caraça, B. J (1998). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Portugal – Gradiva.
Eves, H (1997). *Introdução à história da matemática*. Campinas: Editora da Unicamp.
Grupo Caraça (2002). Apostila Pensando sobre vida e movimento; variação e função.
Karlson, P. (1961). *A magia dos números*. Rio de Janeiro: Globo.
Lima, L. C; Moisés, R. P (2000). *A variável – ser e não ser*. São Paulo: CTEAC.
Moreira, M. A. (1990). *Pesquisa em Ensino: o vê Epistemológico de Gowin*. S.P.: E.P.U.
Moura, M. O. (Org) (2010). *A atividade pedagógica na teoria histórico-cultural*. São Paulo: Liber.
Ríbnikov, K. (1987) *Historia de las matemáticas*. Editorial Mir Moscú.
Radford, L (2011). *Cognição matemática: história, antropologia e epistemologia*. São Paulo: Livraria da Física.
SEDUC/SP (2023). *Currículo em ação. Matemática e Ciências da Natureza e suas Tecnologias*. Primeira série. Ensino Médio. Caderno do estudante – Volume 1.

Esculturas interactivas que transforman la enseñanza de la geometría

Teresa F. **Blanco**
Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago de Compostela
España
teref.blanco@usc.es
Antía **Fernández** López
Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago de Compostela
España
antiafernandez.lopez@usc.es
Jorge **Albella** Martínez
Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago de Compostela
España
jorge.albella@usc.es
Cristina **Trigo** Martínez
Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago de Compostela
España
cristina.trigo@usc.es
Sergio **Clavero** Ibáñez de Garayo
Facultad de Ciencias de la Educación, Santiago de Compostela
España
sergio.clavero@usc.es

Resumen

Este proyecto pretende superar la tradicional separación de materias mediante un enfoque interdisciplinar que integra puntos clave de las materias Enseñanza y aprendizaje de la Geometría y Educación Visual y Plástica II: Procesos y Proyectos Artísticos, pertenecientes al Grado de Maestro en Educación Primaria. El objetivo general es fomentar prácticas proafectivas que contribuyan a transformar las emociones del alumnado comúnmente asociadas con la geometría y a crear un ambiente de aprendizaje más positivo y estimulante. Entre los objetivos específicos se encuentra el desarrollo de actividades artístico-matemáticas, apoyadas en tecnologías como el diseño y la impresión 3D para diseñar esculturas interactivas basadas en artistas que utilizan la geometría en sus obras. La estructura del proyecto se divide en cinco fases que van desde asentar los conocimientos necesarios hasta crear diseños en 3D para imprimir y ver con Realidad Aumentada, pasando por la construcción de prototipos y análisis de sus características plásticas y geométricas. De esta forma, el proyecto aspira a enriquecer tanto la enseñanza como el aprendizaje, acercando la geometría y el arte al alumnado desde una perspectiva innovadora y colaborativa.

Palabras clave: Geometría; escultura; STEAM; formación.

Introducción

En los últimos años, el Consejo de la Unión Europea (2018) y los documentos curriculares que regulan la educación en España (Gobierno de España, 2020) sugieren que el alumnado trabaje de forma interdisciplinar en los centros escolares. Una buena manera de hacerlo es través de la educación STEAM que conecta las diferentes disciplinas científicas con el Arte, desarrollando en los estudiantes habilidades creativas, mejorando la capacidad para la resolución de problemas y aumentando la motivación y la curiosidad por aprender (Agra y Taboada, 2019; Blanco y Fernández-López, 2021 y Blanco et al., 2021). En este sentido, se presenta aquí un proyecto que pretende fomentar prácticas proafectivas que contribuyan a transformar las emociones del alumnado asociadas con la geometría y a crear un ambiente de aprendizaje más positivo y estimulante. El fin último es ofrecer una oportunidad para que los futuros maestros puedan experimentar actividades interdisciplinares y que pongan de manifiesto la articulación de las Matemáticas y el arte con objetivo de conseguir un producto conjunto que compartir con toda a facultade.

Metodología

El proyecto se desarrolla en la Facultad de Ciencias de la Educación de la Universidad de Santiago de Compostela (España) con estudiantes de tercer curso del Grado en Educación Primaria, durante el segundo semestre. Su objetivo general es fomentar la integración de prácticas proafectivas artístico-matemáticas a través del diseño e impresión 3D, con un enfoque centrado en la escultura. Para ello, se establecen cuatro objetivos específicos: (1) ofrecer a los futuros docentes una experiencia formativa basada en el aprendizaje por proyectos desde una perspectiva artística de la educación, (2) promover la reflexión sobre el papel de las emociones en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, (3) trabajar de manera cooperativa contenidos matemáticos y artísticos en un marco interdisciplinar, alineado con el enfoque STEAM, y (4) conectar el aprendizaje con el contexto educativo real, fomentando la creación de materiales didácticos transferibles a los centros educativos y fortaleciendo la colaboración entre la Facultad y las escuelas. Se sigue una metodología basada en el trabajo colaborativo, que fomenta la construcción conjunta del conocimiento, el intercambio de ideas y la toma de decisiones de manera consensuada. Además, permite que los futuros docentes desarrollen habilidades esenciales como la comunicación, la resolución de problemas y la creatividad, promoviendo un aprendizaje significativo y aplicado a contextos educativos reales.

El proyecto se desarrolla a través de cinco fases interrelacionadas. En la primera fase, se trabajan las habilidades de visualización y la construcción de imágenes mentales a partir del estudio de diferentes tipos de representación. Además, se abordan los elementos fundamentales del lenguaje visual y se realiza un análisis de referentes artísticos. La segunda fase se centra en el estudio de las figuras planas, las ubicaciones geométricas y los tipos de movimientos en el plano y en superficies. A partir de estos conceptos, se desarrolla una práctica artística inspirada en los principios de diseño de Bruno Munari (Munari,1981) y en las cajas metafísicas de Jorge Oteiza (Oteiza,1958), orientada a la exploración del color y las formas geométricas. En esta etapa, también se diseña y construye un prototipo de una escultura desmontable, acompañado de su ficha técnica, donde se documenta el proceso creativo y sus aplicaciones en la Educación Primaria. En la tercera fase, se lleva a cabo el diseño digital de los elementos que componen la escultura y su posterior impresión en 3D. La cuarta fase consiste en el montaje de la escultura interactiva en un espacio de la facultad, permitiendo la experimentación y exploración de sus posibilidades. Finalmente, el proyecto concluye con la exposición de un cartel explicativo que recoge el proceso completo, brindando una visión integral del trabajo realizado.

Como instrumentos de evaluación se utilizará una ficha técnica de la escultura donde se contemplan aspectos de geometría y de plástica, una rúbrica con 5 categorías ('Escala y proporcionalidad', 'Alineación de los elementos, 'Precisión y detalle', 'Similitud con el prototipo' y 'Cuerpos geométricos empleados') para la parte individual de geometría y un informe con indagación y análisis de referentes artísticos para la parte individual de plástica con la presentación al grupo clase. Además, se tendrán en cuenta, en ambas materias, aspectos como la implicación personal, rigor y búsqueda de soluciones diferentes y la observación en el aula.

Desarrollo del proyecto

En esta sección se describirá de manera detallada cada una de las cinco fases del estudio, explicando el desarrollo de cada etapa y presentando los resultados obtenidos en cada una de ellas.

Fase I

Esta fase corresponde a la parte teórica en cada una de las asignaturas relacionadas con el proyecto. En ambas asignaturas se hicieron referencias con ejemplos específicos al Arte desde la Geometría y a la Geometría desde el Arte. Se trabajaron las habilidades de visualización, imágenes mentales y tipos de representación en la materia de geometría y los elementos básicos del lenguaje visual y análisis de referentes artísticos en la materia de plástica.

Fase II

En esta fase se trabajaron las figuras planas y tipos de movimientos en el plano/superficies en geometría. El mayor peso lo llevó la materia de plástica centrándose en las figuras planas y el color basada en los principios de diseño de Bruno Munari (1981) y en las cajas metafísicas (Oteiza, 1958). Es en esta fase en la que se realiza el diseño y construcción de prototipos de la escultura desmontable y la creación de la ficha técnica de la escultura, proceso desarrollado y posibilidades de aplicación en Educación Primaria. La figura1 muestra dos ejemplos de construcción de prototipos de la escultura desmontable realizada con material reciclable.

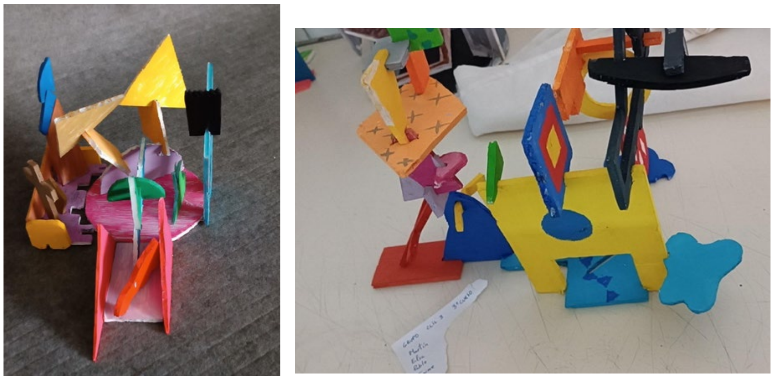


Figura 1. Prototipos esculturas.

En la figura siguiente se muestra un ejemplo de la ficha de una escultura realizada por uno de los grupos de los futuros profesores.

Figura 2. Ejemplo ficha plástica de las esculturas.

Fase III

En esta fase la materia de geometría es la que lleva el peso. Se hizo el modelado 3D de los elementos que componen la escultura. Se trabajaron los cuerpos tridimensionales y la descomposición, propiedades y medición de cuerpos tridimensionales. Se utilizó el programa de modelado 3D Tinkercad para generar recreaciones digitales a escala de las esculturas físicas realizadas. La siguiente figura (Figura 3) muestra algunos de los resultados obtenidos.

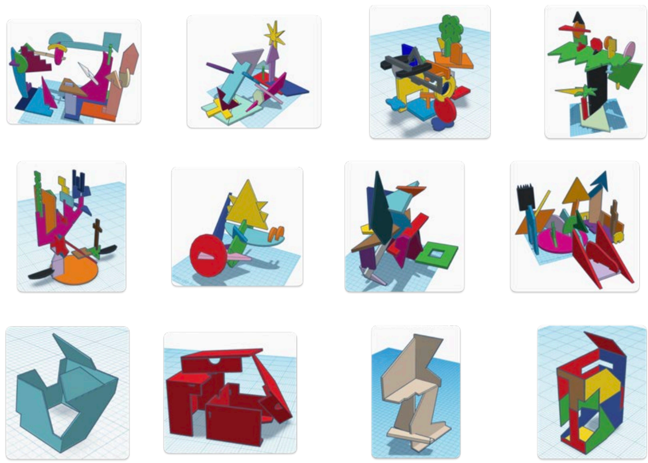


Figura 3. Ejemplos esculturas creadas en Tinkercad.

La creación de las esculturas también implicó completar un formulario cuyo objetivo era recopilar todos los datos recopilados y procesos realizados y objetivar el trabajo de evaluación. La figura 4 muestra parte del trabajo realizado por uno de los grupos de estudiantes a modo de ejemplo.

Figuras empleadas (añade tantas filas a la tabla como figuras tenga tu escultura).

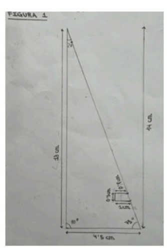
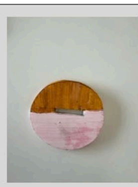
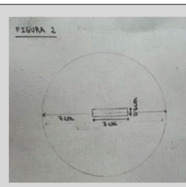
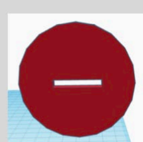
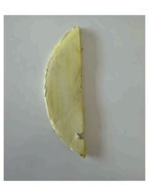
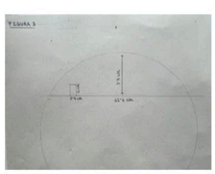
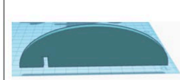
	Fotografía de la figura en físico	Fotografía de las medidas tomadas para la figura	Captura de pantalla de la figura en *Tinkercad*
Figura 1			
Figura 2			
Figura 3			

Figura 4. Ejemplo ficha figuras empeladas.

Fase IV

Esta fase se situó también en la materia de geometría. Se crearon los diseños en Realidad Aumentada sobre las piezas realizadas, trabajando así, las habilidades de visualización espacial y la competencia digital. Además, se utiliza el programa MergeEDU y la plataforma MergeObject Viewer para generar una recreación AR de las esculturas vinculadas a un marcador (en este caso Código QR) que permite visualizarlas. La figura 5 muestra el resultado de una escultura y cómo se visualiza en Realidad Aumentada.

Figura 5. Visualización de una escultura en Realidad Aumentada.

Fase V

En esta fase se realiza el montaje de las esculturas interactivas en el espacio de la facultad y la exposición del cartel que recoge el proceso, implicando en este caso a las dos materias. La figura 5 muestra parte de la exposición de carteles y esculturas interactivas de los diferentes grupos en el acceso principal de la Facultad de Ciencias de la Educación (Campus Norte). Esta exposición se incluye como una de las acciones para conmemorar el Día escolar de la Matemáticas.

Figura 6. Exposición en la Facultad de Ciencias de la Educación.

Conclusiones

Desde el punto de vista del contenido matemático, el análisis de los trabajos realizados por el alumnado revela aprendizajes significativos. El alumnado ha demostrado capacidad para establecer criterios rigurosos y variados de clasificación de sus figuras, así como una considerable implicación en el proceso creativo y reflexivo. El proyecto no solo ha fomentado un aprendizaje matemático significativo, sino que ha contribuido al desarrollo de la visualización espacial, la precisión en las medidas y el trabajo cooperativo. A pesar de ello, también se han encontrado dificultades que aportan información relevante sobre lagunas y conceptos mal asentados o poco generalizados en el conocimiento geométrico del futuro profesorado. Entre las más recurrentes encontramos la descomposición de figuras complejas en formas más simples, clave en la comprensión de operaciones booleanas. Así como errores relacionados con la toma de medidas redundantes que dejan entrever falta de comprensión de relaciones y elementos geométricos (ejemplo de ello podría ser medir tanto radio como diámetro de un cilindro, todos los lados de un rectángulo o la hipotenusa de un triángulo rectángulo). La representación y creación de superficies curvas presentó un desafío significativo, tanto por las limitaciones inherentes al software empleado como por la complejidad en la medición y descomposición de ciertas figuras diseñadas por el alumnado. Asimismo, se observó una limitada consideración de los patrones derivados de transformaciones isométricas, como traslaciones, giros y simetrías, los cuales no fueron aprovechados como herramientas para facilitar el modelado de lsas esculturas ni para optimizar la precisión en la toma de medidas.

Para finalizar, trabajar de forma interdisciplinaria en la universidad requiere transformar las estructuras rígidas de horarios y la segmentación tradicional de las asignaturas. Al mismo tiempo, implica aplicar en la práctica las metodologías y enfoques de aprendizaje que promovemos en las aulas. Esta propuesta solo cobra sentido si los beneficios de ese aprendizaje se revierten tanto en los estudiantes universitarios como en la comunidad escolar, quienes son los destinatarios finales de nuestro trabajo. En este caso, ese impacto se materializa no solo a través del juego y la interacción con la escultura final, sino también mediante la difusión del proceso en los centros educativos, fomentando así un aprendizaje más dinámico e inclusivo.

.

Referencias y bibliografía

Agra, P. G., & Taboada, J. R. (2019). *Las matemáticas del arte: Más allá del número de oro*. Los libros de la Catarata.

Blanco, T. F. & Fernández-López, A. (2021). Pilgrimage way to Santiago de Compostela through robotics and 3d Printing in primary classroom. En L. Gómez Chova, A. López Martínez, I. Candel Torres (Eds). *Proceeedings of 13th International Conference on Education and New Learning Technologies* (11628-11633). EDULERAN. **DOI:**10.21125/edulearn.2021.2432

Blanco, T. F., González-Roel, V., Diego-Mantecón, J. M., & Ortiz-Laso, Z. (2021). Análisis de la conexión arte-matemáticas en los libros de texto de Educación Primaria. *Educación matemática*, *33*(3), 67-93.

Consejo de la Unión Europea. (2018). *Recomendación del Consejo de 22 de mayo de 2018 relativa a las competencias clave para el aprendizaje permanente*. Diario Oficial de la Unión Europea, C 189, 1-13. https://eur-lex.europa.eu/legal-content/ES/TXT/?uri=CELEX:32018H0604(01)

Gobierno de España. (2020). Ley Orgánica 3/2020, de 29 de diciembre, por la que se modifica la Ley Orgánica 2/2006, de 3 de mayo, de Educación (LOMLOE). Boletín Oficial del Estado (BOE), 340, 122868-122953. https://www.boe.es/eli/es/lo/2020/12/29/3

Munari, B. (1981). *El arte como oficio* (A. Giménez, Trad.). Gustavo Gili.

Oteiza, J. (1958). *Cajas metafísicas* [Escultura]. Museo Oteiza, Navarra, España.

Estrategia de gamificación para la enseñanza de la ecuación de la circunferencia

Danny Esteban **Ramírez** Lobo
Escuela de Matemática, Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
danny.ramirez.lobo@una.cr
Rolando Alonso **Navarro** Rodriguez
Colegio Yeshiva Har Sinai
Panamá
rolnava@gmail.com

Resumen

La atención de los estudiantes durante las clases es esencial, pero implica que los docentes planifiquen e innoven sus estrategias didácticas. La gamificación y el uso de GeoGebra facilita la creación de experiencias educativas interactivas. Esta es una propuesta para la implementación de una unidad didáctica destinada a la enseñanza de la geometría en secundaria a través de la manipulación de un juego, los estudiantes pueden aprender sobre la ecuación de la circunferencia y sus diversas representaciones. Se detalla el desarrollo de la herramienta y se proporciona una guía de trabajo en clase, alineada con los objetivos de aprendizaje establecidos en los Programas de Estudio de Matemática de Costa Rica. La elaboración de actividades lúdicas no solo benefició la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, sino que también proporcionó información valiosa y resultados positivos en el rendimiento académico de los estudiantes, además de fomentó su interés por las Matemáticas.

Palabras clave: Aprendizaje; Costa Rica; Didáctica de la Matemática; Educación secundaria; Enseñanza de la geometría; Enseñanza participativa; mediación pedagógica; Software; Universidad Nacional de Costa Rica.

Definición y relevancia del problema

El estudio de la Geometría Analítica en Costa Rica tiene un antes y un después por la implementación de la Reforma Matemática en la educación costarricense en 2012 a los Programas de estudio de Matemática, partir de esa reforma se hizo necesario para los docentes la reformulación de sus lecciones. Antes de esta fecha no estaba en el currículo costarricense el estudio de la ecuación de la circunferencia de forma analítica en el plano cartesiano. En su lugar sólo se trabajaban con cálculos de área y longitud de la circunferencia, por lo que las clases de geometría cambian por completo y la utilización de la tecnología toma un papel fundamental.

Aprender sobre las circunferencias, su ecuación y sus transformaciones puede contextualizarse con múltiples escenarios, incluyendo los videojuegos que tanto llaman la atención de los estudiantes, o con herramientas tecnológicas que permitan la visualización, por ejemplo, los paquetes de geometría dinámica. Sabiendo las bondades de la gamificación una buena forma de innovar es la creación de estrategias didácticas que se apoyen en estas dinámicas de clase.

Objetivos

Al iniciar este proyecto se han planteado los objetivos siguientes:

- Crear un juego con uso de software de geometría dinámica que se enmarque en una actividad de gamificación.
- Planificar la implementación de una unidad didáctica que permita el desarrollo de habilidades matemáticas de geometría analítica mediante el uso de la estrategia de gamificación.
- Crear una guía de clase para el trabajo de los estudiantes con el uso de una computadora y el applet de GeoGebra.
- Implementar la unidad didáctica que permita el desarrollo de las habilidades matemáticas propuestas en los programas de estudio de Matemáticas para décimo año de la educación diversificada en Costa Rica, específicamente la ecuación de la circunferencia, mediante el uso de la estrategia de gamificación.
- Evaluar la experiencia didáctica con gamificación para el aprendizaje de la ecuación de la circunferencia en décimo año en Costa Rica.

Con la intención de mejorar el aprendizaje y facilitar la enseñanza de la Geometría y en particular del tema de la ecuación de la circunferencia, se diseñó una estrategia metodológica que se apoyó en el uso del software GeoGebra y en la gamificación para generar aprendizaje significativo.

Referencial teórico

La Reforma de la Educación Matemática en Costa Rica planteó como meta un cambio en las estrategias didácticas y en la forma de percibir la Matemática. Por ello, “no solo variaron los temas de estudio, sino también la forma de impartirlos y de evaluarlos” (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 5). En el caso de la enseñanza de la geometría, no es la excepción. Un ejemplo significativo es la inclusión de la geometría analítica en el currículo costarricense a partir de 2012, lo cual no tenía espacio anteriormente. Desde entonces, ha sido de interés crear experiencias didácticas innovadoras que incorporen el uso de tecnología, especialmente debido al interés de las nuevas generaciones en estas temáticas.

Para el Ciclo Diversificado en Costa Rica, es necesario crear experiencias de clase que fomenten el desarrollo de habilidades de pensamiento superior, ya que “en este nivel son relevantes los procesos de argumentación y demostración" (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 385). El documento Programas de estudio de Matemática enumera cuatro habilidades deseables en los estudiantes de décimo año, que se pretende trabajar en esta unidad didáctica:

- Representar gráficamente una circunferencia dado su centro y su radio.
- Representar algebraicamente una circunferencia dado su centro y su radio.
- Aplicar traslaciones a una circunferencia.
- Resolver problemas relacionados con la circunferencia y sus representaciones.

El documento mencionado también indica que "el uso de software de geometría dinámica es fundamental en el tratamiento de los diferentes temas" (Ministerio de Educación Pública, 2012, p. 400). GeoGebra, en particular, es una herramienta muy amigable para el usuario.

La gamificación es una estrategia pedagógica que aprovecha el potencial educativo y emocional de las actividades lúdicas para mejorar el aprendizaje, bajo la premisa de "aprender jugando" (Torres-Toukoumidis y Romero-Rodríguez, 2018, p. 62). El principio fundamental es plantear actividades que demanden a los participantes desarrollar procesos de pensamiento y articular conocimientos previos para avanzar o ganar un juego.

Las estrategias gamificadas son eficientes para capturar el interés y despertar habilidades analíticas en la búsqueda de las reglas del juego. Esto puede aprovecharse para que los estudiantes observen, analicen, conjeturen y comprueben las relaciones de causa y efecto presentes tanto en el juego como en el trasfondo matemático del mismo.

En investigaciones previas, los estudiantes comentan que "este tipo de aprendizaje es muy enriquecedor, pues ellos fueron capaces de descubrir los conocimientos por sí mismos de manera autodidacta y utilizarlos de manera práctica" (Mora, Pizarro y Ramírez, 2016, p. 78). Esto sugiere que la gamificación tiene un papel fundamental para que los estudiantes disfruten del proceso de enseñanza y aprendizaje.

Villalustre y del Moral (2015) mencionan que la gamificación es más que un juego; requiere la asignación de puntos, presentación de desafíos y niveles o premios para que el interés aumente y se entienda como un reto la obtención de puntos y el avance. Además, según Marrón y Vivaracho (2018), "el entorno lúdico a la hora de realizar actividades aumenta de forma considerable la motivación de los alumnos, su rendimiento, su nivel de implicación y, por ende, el nivel de aprendizaje" (p. 8). Este es sin duda un objetivo de cualquier docente de Matemáticas al impartir sus lecciones.

La gamificación puede actuar como un antídoto contra la falta de interés y compromiso en el aula, proporcionando un entorno de aprendizaje que es divertido, desafiante y envolvente (Alfabetización Digital, 2023). Esto es crucial para mantener a los estudiantes motivados y comprometidos con el aprendizaje de la geometría.

En el campo de la enseñanza de la Matemática, la gamificación ha demostrado ser una herramienta valiosa. Según Salen y Zimmerman (2004), "el juego implica la toma de decisiones, la resolución de problemas y la creación de estrategias, todos los cuales son habilidades fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas". Al incorporar elementos de juego en las actividades, se puede fomentar un entorno de aprendizaje más dinámico, interactivo y desafiante, lo que puede aumentar la motivación y el compromiso de los estudiantes.

La técnica ha demostrado mejorar la motivación, el compromiso y el rendimiento de los estudiantes (Educación 3.0, 2023), respeta los principios constructivistas presentes en el aprendizaje activo y específicamente en la evaluación auténtica. Ahumada (2005) menciona que "los estudiantes tienen diferentes ritmos de aprendizaje producto de poseer diferentes estilos, capacidades de razonamiento y memoria", y que se "valora el desarrollo de un pensamiento divergente en que resulta fundamental la crítica y la creatividad" (p. 22).

En la actualidad, la integración de metodologías activas y tecnologías está transformando de manera significativa el aprendizaje y la enseñanza. El uso de herramientas digitales, conocido como tecnología educativa, está generando innovaciones importantes que mejoran y reforman el proceso educativo, estas no solo amplían el acceso a recursos educativos de calidad, sino que también promueven una enseñanza más interactiva y personalizada. Todo lo anterior justifica la metodología de trabajo y la necesidad de generar investigación en las áreas mencionadas en este capítulo.

Método y desarrollo conceptual

El estudio está enmarcado en un enfoque cualitativo y con un paradigma constructivista, siguiendo los lineamientos metodológicos propuestos por Sampieri, Collado y Lucio (2014). Este enfoque es adecuado para estudiar cómo los estudiantes aprenden geometría analítica mediante la implementación de una estrategia gamificada apoyada por herramientas tecnológicas, específicamente el uso del applet de GeoGebra. La metodología adoptada es de tipo no experimental, transversal y descriptiva, permitiendo la observación y análisis del fenómeno educativo sin la manipulación de variables.

En este tipo de investigación se centra en el estudiante y sus ideas más que en los resultados como lo considera Martínez (2013) "su objeto es el desarrollo de conceptos que ayuden a comprender los fenómenos sociales en medios naturales dando la importancia necesaria a las intenciones, experiencias y opiniones de todos los participantes" (p.5).

En la propuesta, es el estudiante quien utiliza el applet de GeoGebra para revisar sus conjeturas y de ahí que va conociendo los fenómenos y las relaciones entre las representaciones conforme va avanzando en las actividades y hacia nuevas experiencias de aprendizaje.

Además, los investigadores son parte activa del proceso y mediante la observación harán análisis de los procesos de aprendizaje y se verificarán con las guías de trabajo. En este caso lo fundamental no es "la generalización de sus conclusiones, sino la peculiaridad del fenómeno estudiado de tal modo que se dan, entre los elementos constituyentes, relaciones dependientes, dialógicas y participativas, donde el investigador se sumerge en la realidad para captarla y comprenderla" (Martínez, 2013, p.5)

El paradigma constructivista que guía esta investigación se fundamenta en las teorías de Vygotsky (1978) y Piaget (1952), quienes afirman que el aprendizaje es un proceso activo en el que los estudiantes construyen su conocimiento a través de la interacción con el entorno y la mediación de herramientas. En este caso, los estudiantes interactúan con un applet de GeoGebra, lo que les permite explorar la ecuación de la circunferencia en un entorno lúdico y dinámico, favoreciendo así la construcción de su propio conocimiento.

El estudio se desarrolló con un grupo de estudiantes de décimo año de educación secundaria en Costa Rica, quienes fueron seleccionados intencionalmente. Este nivel educativo es ideal, ya que el contenido relacionado con la ecuación de la circunferencia forma parte del currículo de Matemáticas. El docente y los investigadores también participaron, aportando observaciones y retroalimentación sobre la implementación de la estrategia de gamificación.

Para llevar a cabo la investigación, se utilizaron diversos instrumentos:

Applet de GeoGebra: El uso de esta herramienta tecnológica permite aplicar la gamificación en la enseñanza de la geometría, proporcionando un entorno interactivo que simula un juego. Como señala Gee (2003) los videojuegos y las actividades gamificadas crean un entorno en el que los estudiantes resuelven problemas de manera dinámica, lo que fomenta la motivación y el compromiso con el aprendizaje.

Guías didácticas: Se elaboraron guías para acompañar el trabajo de los estudiantes, estructuradas según las fases de aprendizaje sugeridas por Sampieri et al. (2014). Estas guías fomentan el aprendizaje autónomo y colaborativo, permitiendo que los estudiantes desarrollen habilidades analíticas al interactuar con el applet.

Observación directa: Los investigadores observaron el proceso de los estudiantes mientras interactuaban con el applet, registrando sus estrategias y reflexiones. Este tipo de observación se justifica en el enfoque cualitativo propuesto por Johnson y Christensen (2019), quienes subrayan la importancia de analizar cómo los estudiantes interactúan con el contenido en tiempo real.

Evaluación sumativa: Al finalizar el proyecto, se aplicó una evaluación sumativa que permitió medir el nivel de dominio de los estudiantes sobre los conceptos abordados. La evaluación no solo midió el resultado final, sino también el proceso seguido por los estudiantes, lo cual es coherente con la metodología cualitativa que pone énfasis en la comprensión profunda de los fenómenos educativos (Johnson & Christensen, 2019).

Resultados

El análisis de los datos se realizó mediante una metodología cualitativa descriptiva, siguiendo las directrices de Sampieri et al. (2014), enfocándose en las interacciones observadas y los resultados de las autoevaluaciones de los estudiantes. El objetivo fue identificar patrones de comportamiento y desarrollo cognitivo, prestando especial atención a cómo la gamificación influyó en la motivación y el aprendizaje de los estudiantes.

El applet de GeoGebra y la unidad didáctica han sido presentadas a varios grupos de profesores en ejercicio y profesores en formación en eventos académicos, esto para validar ambos instrumentos. De esta discusión en grupo de expertos se ha dado importante retroalimentación al applet de GeoGebra, tanto en la parte lúdica o de diseño del juego como en lo que subyace el alcance del contenido matemático sobre geometría analítica en la guía didáctica.

Cada estudiante tuvo la posibilidad de explorar el applet y descubrir la funcionalidad de los botones, así como la relación que existe entre las modificaciones que realiza y el criterio algebraico de la circunferencia. La adaptación con fines didácticos propuesta contempló el uso de una circunferencia que simula ser la mira del arma con la que el jugador "dispara" a los patos.

Para apuntar a sus objetivos, el jugador (estudiante) realizó traslaciones a esta circunferencia, y observó como cambiaba la ecuación en cada movimiento.

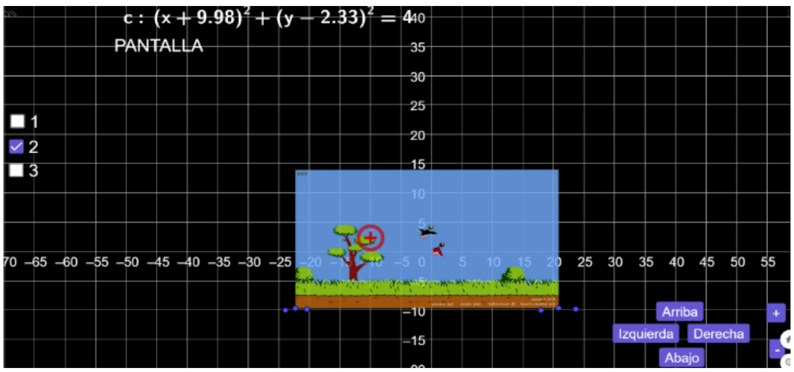
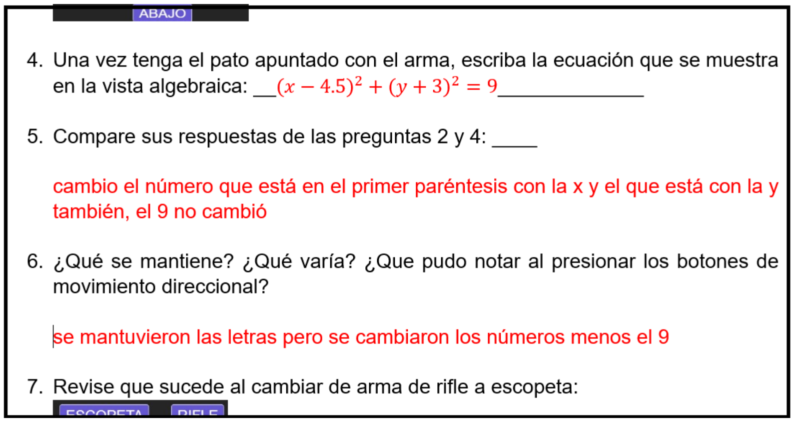


Figura 1. Interfaz de jugador con representación algebraica y botones de control para juego.
Fuente: Elaboración propia.

Para el primer nivel los estudiantes aprendieron a utilizar el juego con los botones de acción y de cambio de nivel. Identificaron que la representación algebraica de la circunferencia y la relación que tiene la misma con el centro y el radio del círculo en la gráfica. Un estudiante A menciona que "es entretenido que lo que haces en la imagen se refleja en las letras". El uso de los botones de dirección para mover la mira del arma hizo que al mismo tiempo se modifiquen la representación geométrica y la representación algebraica. Los estudiantes conjeturaron y comprobaron a modo de acierto y error la relación que existe entre ambas relaciones.

Para el segundo nivel los estudiantes reconocieron el vector de desplazamiento, al tener que mover la mira con una traslación (ya no con botones) y relacionaron cómo se ve afectada la ecuación. Un estudiante B indicó que hay cosas que varían y otras invariantes, en la figura 2 se muestra su trabajó, él indicó que "cambió el número que está en el primer paréntesis con la x y el que está con la y también, el 9 no cambió".

Para el tercer nivel las instrucciones giraron en torno a habilidades como la identificación del centro y el radio en la ecuación o representación algébrica, por lo que el estudiante ya para el tercer nivel ha analizado y puesto a prueba sus conjeturas. Un estudiante C menciona que "los números dentro de los paréntesis son el centro del rifle, y el número es el tamaño del rifle".


ABAJO

4. Una vez tenga el pato apuntado con el arma, escriba la ecuación que se muestra en la vista algebraica: __$(x-4.5)^2+(y+3)^2=9$____________

5. Compare sus respuestas de las preguntas 2 y 4: ____

cambio el número que está en el primer paréntesis con la x y el que está con la y también, el 9 no cambió

6. ¿Qué se mantiene? ¿Qué varía? ¿Que pudo notar al presionar los botones de movimiento direccional?

se mantuvieron las letras pero se cambiaron los números menos el 9

7. Revise que sucede al cambiar de arma de rifle a escopeta:

Figura 2. Guía didáctica resuelta por estudiante en formato digital.
Fuente: Elaboración propia.

Se realizó una evaluación sumativa final, esto sumado a la evaluación del trabajo cotidiano, de estos dos documentos se deriva que los estudiantes lograron comprender la relación entre la ecuación de una circunferencia, su centro y radio, con respecto a la representación gráfica de la misma. Los estudiantes resolvieron satisfactoriamente en muchos de los ejercicios de tipo complete y selección única. El desarrollo destacó las falencias tradicionales sobre orden y rigurosidad al trabajan con álgebra, pero no significó una baja significativa en las notas.

Conclusiones

Se observó que el uso de la gamificación y la tecnología permitió a los estudiantes involucrarse más activamente en el proceso de aprendizaje, lo que concuerda con los hallazgos de Gee (2003), afirmando que la gamificación mejora tanto el rendimiento académico como la motivación.

Los estudiantes manifestaron gusto por haber usado tecnología en la clase, esto es crucial para preparar a los estudiantes para un mundo cada vez más digitalizado, ofreciendo la flexibilidad de personalizar el aprendizaje, atender la diversidad e inclusión, y reducir la brecha digital, brindando oportunidades de desarrollo a estudiantes de diferentes contextos. En este mismo sentido el juego permitió al docente personalizar el aprendizaje de acuerdo con las necesidades y estilos de cada individuo, mejorando tanto la eficacia del proceso educativo como la satisfacción y compromiso del alumnado.

En este tipo de estrategias es importante tomar en cuenta que la aplicabilidad de la propuesta depende de que la institución cuente con el laboratorio necesario, la previa instalación del software y la manipulación del applet. Las instituciones educativas deben invertir en esta tecnología y los docentes que cuenten con estos espacios deben potencialos.

Las observaciones hechas en el trabajo de clase dejaron claro que al aprender jugando se desarrollaron habilidades críticas y creativas de forma más amena y efectiva, se fomentó el pensamiento crítico y la colaboración, ya que los enfrentó a situaciones reales donde debieron aplicar conocimientos teóricos y la solución de problemas prácticos. Se impulsó un aprendizaje más participativo y centrado, permitiéndole desarrollar habilidades de pensamiento crítico, creativo y colaborativo, fundamentales en el mundo laboral actual.

Lo más interesante para los estudiantes fue que la clase fuera un juego, y es que la gamificación ha demostrado en esta experiencia ser una estrategia eficaz para aumentar la motivación y el compromiso de los alumnos. Esta metodología utiliza elementos propios de los juegos para generar experiencias educativas que promueven la resolución de problemas y el uso de conocimientos previos de manera lúdica, y esto se ha alcanzado por parte de los estudiantes objeto de esta investigación.

El uso de una guía durante la clase hizo que los estudiantes pudieran avanzar a su ritmo, a algunos estudiantes les permitió sentirse más acompañados por el docente que en la clase tradicional o magistral. Mencionaron que esta herramienta facilita el seguimiento de instrucciones más que el hecho de que el docente se las indique al inicio y que deba de estar repitiendo cada cierto tiempo de la clase.

El rendimiento académico fue un indicador de éxito en la estrategia pues en la actividad evaluativa los estudiantes tuvieron notas superiores y los mismos estudiantes comentaron que no eran notas que obtuvieran en evaluaciones sumativas tradicionales. Se evidenció que la relación entre las representaciones algebraica y gráfica de la circunferencia se puede aprender mediante un software de geometría dinámica y una guía docente bien planificada.

Referencias

Ahumada, P. (2005). La evaluación auténtica: un sistema para la obtención de evidencias y vivencias de los aprendizajes. *Perspectiva Educacional, Formación de Profesores, 45*, 11-24. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=333329100002

Alfabetización Digital. (2023). *Gamificación en la Educación: Herramientas y Estrategias para aumentar la Motivación Estudiantil*. Recuperado de https://alfabetizaciondigital.redem.org/gamificacion-en-la-educacion-herramientas-y-estrategias-para-aumentar-la-motivacion-estudiantil/

Educación 3.0. (2023). *¿Qué es la gamificación y cuáles son sus objetivos*? Recuperado de https://www.educaciontrespuntocero.com/noticias/gamificacion-que-es-objetivos/

Gee, J. P. (2003). *What video games have to teach us about learning and literacy*. Palgrave Macmillan.

Johnson, B., & Christensen, L. (2019). *Educational research: Quantitative, qualitative, and mixed approaches* (7.ª ed.). SAGE Publications.

Marrón, A. M. P. y Vivaracho, C. E. (2018). Gamificación en el aula: Gincana de programación. *Revisión, 11(1)*, 8.

Martínez, V. (2013). Paradigmas de investigación. Manual multimedia para el desarrollo de trabajos de investigación. Una investigación desde la epistemología dialéctico-crítica. Recuperado de http://biblioteca.udgvirtual.udg.mx/jspui/handle/123456789/3790

Ministerio de Educación Pública de Costa Rica. (2012). *Programas de estudio de Matemáticas*. Autor. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/media/matematica.pdf

Mora, F., Pizarro, E. y Ramírez, D. (2016). Experiencia docente en la Enseñanza de la Probabilidad por habilidades matemáticas en décimo año. *Memoria del X Festival Internacional de Matemática.* Costa Rica. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1163134/Mora2016Experiencia.pdf

Piaget, J. (1952*). The origins of intelligence in children*. International Universities Press.

Salen, K., & Zimmerman, E. (2004). *Rules of play: game design fundamentals*. MIT Press.

Sampieri, R. H., Collado, C. F., & Lucio, P. B. (2014). *Metodología de la investigación* (6.ª ed.). McGraw-Hill.

Torres-Toukoumidis, A. y Romero-Rodríguez, L. M. (2018). *Aprender jugando. La gamificación en el aula.* Educar para los nuevos medios, 61-72. Recuperado de https://www.researchgate.net/publication/324950179_Aprender_jugando_La_gamificacion_en_el_aula

Villalustre, L. y Moral Pérez, E. del. (2015). Gamificación: Estrategia para optimizar el proceso de aprendizaje y la adquisición de competencias en contextos universitarios. *Digital Education Review, 27*, 13-31.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Harvard University Press.

Estrategia Didáctica de implementación del Aprendizaje Basado en la Creación en Cálculo Integral

Eduardo Emiliano **Muñoz** Ortiz
Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
eduardo.munos@ucr.ac.cr

Resumen

El modelo de enseñanza tradicional ha sido ineficiente para contrarrestar la apatía, el bajo rendimiento académico, la repetición o la deserción en la universidad. En respuesta a estos desafíos, se plantea el uso de metodologías activas que posicionan al estudiante como protagonista de su aprendizaje, promueve su participación, fomentan el pensamiento crítico y le brindan la oportunidad de demostrar su comprensión y habilidades en contextos prácticos. Se propone una estrategia didáctica apoyada en el Aprendizaje Basado en la Creación sobre aplicaciones de las integrales que considera la curiosidad, el interés y las habilidades de los estudiantes. Además, reconoce que el carácter creativo de los aprendizajes no es ajeno a la Matemática, ni es exclusivo de disciplinas artísticas, ya que la creación, creatividad e innovación pueden aflorar en distintos escenarios y permiten construir aprendizajes cercanos a la realidad del estudiante de forma amena, incluyente y relevante.

Palabras clave: Aplicaciones de las Integrales; Aprendizaje Basado en la Creación; Educación Superior; Estrategia Didáctica; Metodología Activa.

Introducción

En el ámbito universitario, la enseñanza de las Matemáticas desde un enfoque tradicional asigna al estudiante un rol pasivo, que enfatiza la memorización y la asimilación de contenidos, por lo que el conocimiento se transmite de manera unidireccional, limitando la participación y el pensamiento del estudiantado. “Para la escuela tradicional la enseñanza está centrada en el docente y sus metodologías se fundamentan en el verticalismo, autoritarismo, verbalismo e intelectualismo.” (Calle-Suáres, 2021, p.1207).

Este modelo ha sido poco efectivo para contrarrestar la apatía, el bajo rendimiento académico y la elevada tasa de repetición o deserción. En respuesta a estos desafíos, las metodologías activas posicionan al estudiante como protagonista de su aprendizaje, promueven su participación, fomentan el pensamiento crítico y le brindan la oportunidad de demostrar su comprensión y habilidades en contextos prácticos, además redefinen el rol del docente, quien asume una función de guía, mediador y facilitador del aprendizaje, y no solo fuente de saber.

Esta propuesta ofrece un ejemplo de uso de la metodología activa Aprendizaje Basado en la Creación (ABC) como alternativa al modelo tradicional, busca incrementar la motivación estudiantil y mejorar el rendimiento académico, pretende contribuir a la reducción de las tasas de repetición, deserción y abandono, y espera fortalecer la comprensión de conceptos. Sin embargo, su aplicación requiere una visión clara y un compromiso sólido del docente con la innovación.

Definición y relevancia del problema

América Latina enfrenta distintos desafíos en educación superior, según Améstica-Rivas et al. (2021) en latinoamericana se ha experimentado un creciente y masivo ingreso a dicha educación, acompañado por altas tasas de deserción, con impacto negativo en los estudiantes, sus familias e instituciones educativas, por lo que los gobiernos se esfuerzan por erradicar esta problemática. Según Moré y Maceira (2022), la repitencia es un problema multisectorial, multicausal y multifactorial que involucra múltiples variables y que debe ser concebida como un fenómeno complejo que requiere la reorientación de los procesos y estrategias que aminoren su impacto y mejoren la calidad del sistema educativo universitario.

En este contexto, es necesario abordar el problema del bajo rendimiento académico en Matemáticas con seriedad y dedicación, ya que esta disciplina es fundamental en la formación académica del estudiantado, independientemente de su especialización, porque proporciona herramientas para la comprensión y análisis de problemas complejos en diferentes campos, además, promueve el desarrollo de habilidades críticas asociadas al pensamiento abstracto, razonamiento lógico, pensamiento analítico y resolución de problemas.

Para Acuña (2024), el desafío de la educación moderna implica superar las limitaciones de la enseñanza tradicional, el rol del docente debe evolucionar y debe dejar de ser un mero transmisor de conocimientos para convertirse en un facilitador del aprendizaje, en concordancia con las teorías pedagógicas contemporáneas que favorecen un enfoque centrado en el estudiante.

De manera específica, en Costa Rica, estudios recientes evidencian el problema del bajo rendimiento académico universitario, por ejemplo un estudio realizado por Chacón y Roldán (2021) en estudiantes de primer ingreso del Instituto Tecnológico de Costa Rica (ITCR) que matricularon Matemática General en el primer semestre del año 2018 evidenció que el 48% de esta población reprobó dicho curso, y otro estudio desarrollado en la Universidad Nacional (UNA) por Castillo et al. (2020) obtuvo que el porcentaje anual de estudiantes con condición de reprobado o desertor en el curso Matemática General es de 64,3 % del total de estudiantes matriculados en el I y II semestre del año 2018. Por lo tanto, las universidades deberían potenciar el uso de metodologías activas y sincronizar la formación de sus estudiantes con el momento histórico de cambios tecnológicos, la agilidad y prontitud de acceso a la información.

Referencial teórico: Aprendizaje Basado en la Creación

El ABC es una metodología activa empleada esencialmente en educación artística, debido al carácter creativo de dicha disciplina, sin embargo, se puede implementar en otros ámbitos. Caeiro-Rodríguez (2018) dice que la acción de crear no es exclusiva del arte, aunque la creación es un elemento trascendental del quehacer y saber artístico, indistintamente de la especialización, el acto de crear también es propio del contexto científico, tecnológico, industrial, entretenimiento y cotidianeidad. Además, el ABC valora tanto el resultado como la acción y experiencia gestada en el proceso, por lo que se define como una vivencia educativa, cognitiva, sensitiva y emotiva.

En conclusión, "la creación es un marco proyectivo, un trayecto vivido, no es un instante de un proceso ni un resultado, y como tal, conforma una urdimbre de actos que arrastran una vivencia única y valiosa a la formación escolar." (Caeiro-Rodríguez, 2018, p.160).

Caeiro-Rodríguez (2018) indica que, aunque aprender a través de una experiencia creadora, metódica y proyectiva no es nuevo, el ABC supone una vivencia en la que el estudiante explora y profundiza en la acción creadora, sin embargo, no se debe confundir creación, ni con creatividad ni con innovación, la creación es un acto que incorpora momentos de creatividad, innovación e investigación, es más que el uso intencionado de creatividad, e involucra otras operaciones.

El ABC comparte aspectos con otras metodologías, activas tales como Aprendizaje Basado en Problemas, Aprendizaje Basado en Proyectos y Aprendizaje Basado en Diseño, que fomentan aprendizajes significativos y un papel protagónico del estudiante, pero se diferencia en la medida en que este participa del diseño y creación e impregna su sello personal. El propósito del ABC es "construir un objeto, generar un producto o dar forma física a una idea o a un sentimiento por medio de lenguajes, materiales, herramientas y recursos diversos pasando por acciones y fases que le dan sentido, donde el crear adquiere protagonismo" (Caeiro-Rodríguez, 2018, p.160).

Respecto a ese proceso creador Wallas citado por Caeiro- Rodríguez (2018) indica que está conformado por diferentes fases, sumamente definidas como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1
Fases del proceso de creación de Wallas

Fase	Descripción
Preparación	Recopila y sintetiza información para familiarizarse con la tarea. Ejerce capacidades de atención selectiva, superación de dificultades, curiosidad e interés, intencionalidad hacia la resolución de problemas y disposición al intercambio de ideas.
Incubación	Intervención inconsciente donde las ideas e imágenes afloran para establecer nuevas combinaciones. Parece que el sujeto no está implicado en la resolución o no pensara.
Iluminación	Se establece el orden y la significancia de los constructos y procesos. Surge la comprensión del problema desde una perspectiva súbita e intuitiva.
Elaboración y verificación	El creador elabora o pone en práctica su proyecto creador y verifica si la respuesta creadora cumple con los parámetros de novedad, verdad y utilidad.

Fuente. Adaptado de "Aprendizaje Basado en la Creación y Educación Artística: proyectos de aula entre la metacognición y la metaemoción." por M. Caeiro-Rodríguez, 2018, *Arte, Individuo y Sociedad*, *30*(1), p. 167 (https://doi.org/10.5209/ARIS.57043).

Estrategia Didáctica propuesta: "Integrales: de la teoría a la creación"

La propuesta detallada a continuación, ha sido aplicada de manera cuasiexperimental en la enseñanza de usos o aplicaciones de las derivadas e integrales, en diferentes cursos, enfatizando en la importancia de la utilidad de la Matemática y su influjo en la motivación del estudiantado.

Teóricamente apoyada en la metodología activa ABC, consiste en la creación por equipos de un recurso digital o prototipo, el cual puede ser una página web, juego didáctico, simulador, video documental, noticiero, periódico digital, comic, aplicación móvil, entre otros. Se estudian usos de la Matemática en educación superior universitaria, en este caso, integrales en un curso de Calculo Diferencial e Integral, pero se puede modificar y contextualizar a otros saberes, por ejemplo, usos del cálculo vectorial, diferencial o infinitesimal, incluso a otros cursos y ámbitos. Además, busca la comprensión de conceptos, promueve el trabajo colaborativo, potencia la capacidad de comunicación de conceptos matemáticos y considera saberes interdisciplinares.

Esta estrategia didáctica se subdivide en tres etapas de 150 minutos cada una, requiere de un espacio limpio, ordenado, ventilado, libre de ruido, con buena iluminación, mesa y sillas, lápiz, borrador, sacapuntas, cuaderno, resaltadores, dispositivo electrónico con acceso a internet (computadora de escritorio o portátil, tableta, teléfono inteligente), software de presentación (Canva, Genially, PowerPoint u otro), software de edición (Word, Documento Google u otro), software de comunicación (WhatsApp, Telegram u otro) y acceso a fuentes de información.

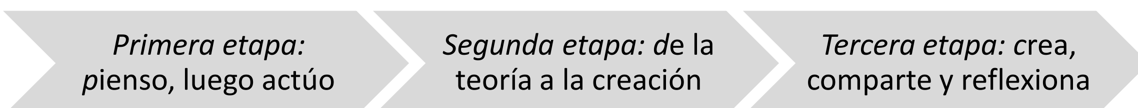


Figura 1. Etapas de la estrategia didáctica: Integrales: de la teoría a la creación.

Las etapas se detallan usando un lenguaje impersonal y científico, aunque, se recomienda que, para fines didácticos, al implementar se use una redacción en primera persona singular o plural que permita una mayor cercanía entre los estudiantes y los contenidos, y que fomente el papel activo y el compromiso del estudiantado con la construcción de sus aprendizajes.

1. Primera etapa: pienso, luego actúo.

Explora sobre algunos usos de las integrales en diferentes contextos y sobre algunas herramientas digitales o prototipo, luego crea un insumo de presentación sobre un uso y una de estas herramientas. Se evidencia la primera fase del proceso de creación de Wallas, preparación.

1.1. Actividad de apertura.

Tiempo estimado: 15 minutos
Objetivos específicos: Reconocer el concepto de integral. Identificar algunos usos de las integrales. Motivar el estudio de algunas aplicaciones de las integrales
Descripción: Visualización de un vídeo sobre la importancia del cálculo integral en la vida cotidiana, por ejemplo, "La importancia del cálculo integral en la vida cotidiana" disponible por el enlace https://youtu.be/UGKz_NkMcpg?si=XiLlxHBo6VWx_iaD. Luego se analiza el ¿De dónde se originan las integrales? ¿Por qué son importantes? ¿En qué áreas se pueden aplicar?

1.2. Presentación del contenido.

Tiempo estimado: 5 minutos
Objetivo específico: Conocer de manera general las diferentes etapas de la guía de trabajo.
Descripción: Indagación sobre algunos usos de las integrales y algunas herramientas digitales. Elección y forja de un insumo de presentación sobre un uso de las integrales y una herramienta.

1.3. Desarrollo de la actividad.

1.3.1. Primera parte del desarrollo de la actividad.

Tiempo estimado: 40 minutos
Objetivo específico: Determinar un uso del cálculo integral como tema de un proyecto creativo.
Descripción: Se definen subgrupos de 3 a 5 integrantes. Cada subgrupo indaga en fuentes arbitradas sobre usos de las integrales (área entre curvas, longitud del arco, volumen de un sólido, fuerza, elongación de un resorte, coeficiente de Gini, curvas de aprendizaje, utilidad máxima, valor presente, crecimiento poblacional, centro de masa, amortiguadores). Luego, discute sobre lo indagado, anota características de los tres usos de mayor interés y elige uno.

1.3.2. Segunda parte del desarrollo de la actividad.

Tiempo estimado: 40 minutos
Objetivo específico: Definir una herramienta para la creación de un recurso digital o prototipo.
Descripción: Cada subgrupo indaga en páginas arbitradas de internet y/o en la biblioteca sobre algunas herramientas digitales que se pueden usar en la creación de un recurso digital (Nearpod, Powtoons, Genially, Noticiero matemático, Periódico digital, Comics Life, Escape room, Canva, Padlet, Youtube, simulador, CmapsTools). Luego, en mesa redonda discute lo indagado y anota características principales de cada una, resalta las tres de mayor interés, y escoge una.

1.3.3. Tercera parte del desarrollo de la actividad

Tiempo estimado: 35 minutos
Objetivo específico: Elaborar un insumo de presentación sobre la herramienta y el tema elegido.
Descripción: Cada subgrupo elabora una síntesis del uso del cálculo integral elegido, anota conceptos claves, contexto de implementación, cómo se plantea, una estrategia de resolución y un ejemplo. Análogamente sintetiza sobre la herramienta seleccionada, e indica dónde se puede obtener, beneficios, contexto y valor pedagógico. Luego realiza una lluvia de ideas sobre una forma creativa de presentar dichas síntesis. Finalmente, crea dicho insumo de presentación.

1.4. Cierre.

Tiempo estimado: 35 minutos
Objetivo específico: Reflexionar sobre la importancia del trabajo colaborativo.
Descripción: Cada subgrupo comparte con el docente, vía correo electrónico o algún software de comunicación, el insumo de presentación elaborado para su valoración y realimentación. Luego, cada estudiante elabora una reflexión escrita de 150 palabras sobre la importancia del trabajo colaborativo y la comparte con el docente vía correo electrónico o un software de comunicación.

2. Segunda etapa: de la teoría a la creación.

En esta etapa se crea un insumo de presentación sobre el diseño de un recurso digital o prototipo de un uso del cálculo integral, y aplica las fases de incubación e iluminación de Wallas.

2.1. Actividad de apertura.

Tiempo estimado: 15 minutos
Objetivo específico: Reconocer la importancia de la creatividad y de crear.
Descripción: Visualización de un vídeo sobre crear y creatividad, por ejemplo, "Qué es la creatividad y cuál es la diferencia con "crear" | Cómo activar la creatividad." disponible por el enlace https://youtu.be/gYjJZt0V-tg?si=z-d_0AFdB2vUDCl4. Y se reflexiona sobre ¿Cuál es la diferencia entre creatividad y crear? ¿En qué ámbitos se usa la creatividad? ¿Soy o no creativo?

2.2. Presentación del contenido.

Tiempo estimado: 5 minutos
Objetivo específico: Conocer de manera general las diferentes etapas de la guía de trabajo.
Descripción: Exploración de la herramienta seleccionada. Selección de conceptos claves y ejemplos de la aplicación de las integrales elegida. Elaboración del diseño de una ruta para la creación del recurso digital o prototipo y creación de un insumo de presentación sobre el mismo.

2.3. Desarrollo de la actividad.

2.3.1. Primera parte del desarrollo de la actividad.

Tiempo estimado: 50 minutos
Objetivo específico: Determinar los elementos de la herramienta y los tópicos del uso del cálculo integral elegidos en la primera etapa, que se emplearan en el proyecto creativo.
Descripción: Cada subgrupo explora la herramienta seleccionada e identifica las potencialidades de implementación. Además, explora en internet algunos ejemplos del uso de dicha herramienta, anota los descubrimientos relevantes y precisa elementos de la herramienta a usar en el proyecto. Luego, amplía con una indagación y en un foro de discusión elige conceptos claves y ejemplos.

2.3.2. Segunda parte del desarrollo de la actividad.

Tiempo estimado: 65 minutos
Objetivo específico: Elaborar un insumo de presentación sobre el diseño del proyecto creativo.
Descripción: Cada subgrupo elabora un diseño del recurso digital o prototipo que explique el uso del cálculo integral seleccionado usando la herramienta elegida. Luego, con una lluvia de ideas se define como presentar dicho diseño, y se crea dicho insumo de presentación.

2.4. Cierre.

Tiempo estimado: 15 minutos
Objetivo específico: Reflexionar sobre la importancia de la creatividad y la creación, y su relación con el aprendizaje de un uso del cálculo integral.
Descripción: Cada subgrupo comparte con el docente, vía correo electrónico o software de comunicación, el insumo de presentación elaborado. Luego cada estudiante elabora una reflexión escrita de 150 palabras sobre la importancia de la creatividad y la creación en nuestras vidas y su relación con el aprendizaje de un uso del cálculo integral, y la comparte con el docente.

3. Tercera etapa: crea, comparte y reflexiona.

Esta etapa concretiza la creación de un insumo digital o prototipo sobre un uso del cálculo integral, comparte dicha producción con la clase y reflexiona sobre los retos y bonazas de implementar el ABC, además manifiesta la cuarta fase del proceso creativo de Wallas.

3.1. Actividad de apertura.

Tiempo estimado: 12 minutos
Objetivo específico: Reconocer la importancia de la Matemática en la vida cotidiana.
Descripción: Visualización de un vídeo sobre la importancia de la Matemática en la vida cotidiana, por ejemplo, "Pero... ¿para qué sirven las Matemáticas?" disponible por el enlace https://youtu.be/RlUZv0MoVWk?si=Wvd7Vm5bWmVPQ2iM. Y se analiza mediante las preguntas generadoras: ¿Para qué sirve la Matemática? ¿En qué me beneficia saber Matemática?

3.2. Presentación del contenido.

Tiempo estimado: 3 minutos
Objetivo específico: Conocer de manera general las diferentes etapas de la guía de trabajo.
Descripción: Creación de un recurso sobre el uso del cálculo integral elegido con la herramienta escogida. Luego se expone a la clase y se reflexiona sobre los retos de aprender usando ABC.

3.3. Desarrollo de la actividad.

3.3.1. Primera parte del desarrollo de la actividad.

Tiempo estimado: 95 minutos
Objetivo específico: Crear un recurso digital o prototipo sobre un uso del cálculo integral.
Descripción: Cada subgrupo elige una estrategia para la elaboración del recurso, todos los integrantes participan en la creación de una primera versión y la comparte con la clase, que realiza un análisis crítico de la misma y define puntos de mejora. Luego, cada subgrupo crea una versión final y elabora un esquema sobre los principales desafíos enfrentados en el proyecto.

3.3.2. *Segunda parte del desarrollo de la actividad.*

Tiempo estimado: 30 minutos
Objetivo específico: Exponer un recurso digital o prototipo sobre un uso del cálculo integral.
Descripción: Cada equipo expone su proyecto creativo a la clase y comparte una síntesis de los principales retos o desafíos suscitados en el proceso. Luego, escucha las realimentaciones e inquietudes de su presentación, y brindan respuesta a tres de estas inquietudes. Cada equipo posee aproximadamente 5 minutos, según la cantidad de grupos que componen la clase.

3.4. Cierre.

Tiempo estimado: 10 minutos
Objetivo específico: Reflexionar sobre los retos y beneficios del uso del ABC en Matemática.
Descripción: Cada subgrupo comparte con el docente y la clase, vía correo electrónico o software de comunicación, el recurso digital o prototipo elaborado. Cada estudiante elabora una reflexión escrita de cerca de 150 palabras sobre los retos y beneficios de aprender Matemática mediante el ABC con base en la experiencia gestada en el proyecto y la comparte con el docente.

Conclusiones

La educación superior universitaria atraviesa muchos retos y desafíos, uno de ellos es el bajo rendimiento académico, notorio por las tasas de deserción o abandono, las tasas de repitencia y la extensión en el tiempo de titulación. Una causa de esta problemática es el uso desmedido de metodologías tradicionales. A su vez, el acceso a la información es cada vez más expedito, la tecnología cambia a un ritmo vertiginoso y ya no basta con que los profesionales dominen los saberes propios de sus disciplinas, impera el desarrollo de competencias ligadas al trabajo colaborativo, aprendizaje autónomo, investigación, creación, innovación, comunicación, uso de herramientas digitales, entre otras, por lo que se requiere un cambio metodológico.

Esta propuesta, fundamentada en el ABC, considera la curiosidad, interés y habilidades del estudiantado, procura incrementar su motivación y participación en la construcción de sus aprendizajes, además promueve la creatividad, la creación y la innovación, e incentiva la investigación, el trabajo en equipo y el desarrollo de competencias de convivencia y comunicación, todo con la finalidad de lograr un mejoramiento del rendimiento académico en Matemática superior universitaria.

Además, brinda una guía a seguir para la implementación de ABC en Matemática superior universitaria mediante un tema específico de un curso de Calculo Diferencial e Integral, a su vez establece un modelo que puede ser replicado en otros contenidos de este u otros cursos, en otras disciplinas e incluso en otros niveles educativos.

Aunque en este momento no se tienen resultados finales respecto a la implementación de esta propuesta ya que se continua en estudio, se espera una reformulación de esta y avanzar en el análisis de dichos resultados a medida que se logre una aplicación piloto de validación.

Un aporte esencial de este trabajo es reconocer que el carácter creativo de los aprendizajes no es ajeno a la Matemática, ni es exclusivo de disciplinas artísticas, puesto que la creación, creatividad e innovación afloran en diferentes escenas y permiten la construcción de aprendizajes cercanos a la realidad del estudiante de una forma más amena, incluyente y relevante.

Referencias y bibliografía

Acuña Acuñar, E. G. (2024). Didáctica Universitaria 4.0 para los Profesionales del Siglo XXI. *Revista De Gestão Social E Ambiental, 18*(8), e06190. https://doi.org/10.24857/rgsa.v18n8-006

Améstica-Rivas, L., King-Domínguez, A., Sanhueza Gutiérrez, D. y Ramírez González, V. (2021). Efectos económicos de la deserción en la gestión universitaria: el caso de una universidad pública chilena. *Hallazgos*, 18(35), 209-231. https://doi.org/10.15332/2422409X.5772

Caeiro-Rodríguez, M. (2018). Aprendizaje Basado en la Creación y Educación Artística: proyectos de aula entre la metacognición y la metaemoción. *Arte, Individuo y Sociedad*, *30*(1), 159-177. https://doi.org/10.5209/ARIS.57043

Calle-Suáres, C. A., y del Rocío Quichimbo-Rosas, A. (2021). Presencia de metodologías tradicionales en la educación del Ecuador. *Dominio De Las Ciencias, 7*(4), 1205–1215.

Castillo Sánchez, M., Gamboa Araya, R. y Hidalgo Mora, R. (2020). Factores que influyen en la deserción estudiantil y las calificaciones reprobatorias en una carrera universitaria de matemáticas. *Uniciencia,* 34(1), 219-245. https://doi.org/10.15359/ru.34-1.13

Chacón Vargas, E. y Roldán Villalobos, G. (2021). Factores que afectan el rendimiento académico de los estudiantes de primer año del curso de matemáticas generales del ITCR. *Uniciencia ,* 35 (1), 265-283. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.16

Moré Polanco, E. y Maceira de Armas, C. (2022). Comportamiento de la repitencia universitaria: un caso de estudio. *Cumbres,* 7(2), 57-70. https://doi.org/10.48190/cumbres.v7n2a5

Estrategia didáctica para la enseñanza del análisis de gráficas de funciones a estudiantes ciegos en secundaria

Cristian Andrés **Ortega** Aguilar
Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
cristian.ortega@ucr.ac.cr
Steven Josué **Rodríguez** Gómez
Escuela de Formación Docente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
steven.rodriguezgomez@ucr.ac.cr

Resumen

Esta investigación busca desarrollar una estrategia didáctica sobre el análisis de funciones matemáticas, basada en las percepciones de personas ciegas y contextualizada según las directrices del Ministerio de Educación Pública de Costa Rica (MEP). La metodología se divide en tres fases: recolección de datos mediante entrevistas a personas ciegas universitarias, diseño de la estrategia didáctica a partir de dicha información y las indicaciones del MEP, y aplicación individual de la estrategia a estudiantes ciegos en secundaria.

Aunque los resultados están en análisis, se destaca que el uso de material táctil, como gráficas impresas en Braille, facilita el análisis de funciones al mejorar la precisión, también permitir integrar información de manera clara, como la numeración de los ejes cartesianos. Este enfoque potencia la comprensión matemática y mejora la accesibilidad de los contenidos educativos.

Palabras clave: Inclusión educativa; Discapacidad visual; Análisis de gráficas de funciones; Material didáctico táctil; Propuesta didáctica; Matemática para estudiantes ciegos; Procesos matemáticos; Mediación pedagógica para estudiantes con necesidades especiales.

Definición y relevancia del problema

La educación ha sido un elemento preciado a lo largo del tiempo, este, por mucho tiempo ha sido inherente al ser humano y le ha permitido evolucionar en aspectos básicos como alimento y abrigo, hasta cuestiones más avanzadas como eficiencia de los procesos y soluciones a problemas complejos del cosmos o de la física cuántica, además de permitirnos vivir en sociedades más justas y pacíficas, generando mejores oportunidades personales, brindando autonomía, pensamiento crítico y un autoconocimiento a cada persona.

La negación de la educación a una persona implica que se pierda en gran parte de un mundo de conocimiento, un mundo que debería de estar al alcance de todas las personas. Dentro de todas las temáticas educativas, este escrito se centra en el apartado de las Matemáticas, más específicamente del tema de análisis de funciones, este es un tema el cual tiene especial importancia en áreas como la ingeniería, economía, finanzas o estadística, ya que permite conocer comportamientos de datos de una forma muy sencilla, sintetizando gran cantidad de información en una sola imagen, lo cual puede ser muy útil en este tipo de trabajos.

Ahora bien, como se mencionó, "la gráfica de una función permite sintetizar mucha información en una imagen", esto crea la pregunta de ¿qué sucede si una persona no puede observar dicha imagen? ¿No puede aprovechar esa facilidad que brindan las funciones matemáticas? Esto, sumado a experiencias personales nos han hecho preguntarnos ¿cómo dicho tema es abordado en personas ciegas? Luego de una revisión de textos sobre la temática notamos como autores que han trabajado con población ciega hablan sobre la falta de "medios para la difusión y divulgación de resultados en seminarios o congresos donde se sensibilice a docentes y estudiantes en prácticas más inclusivas" (Sandí y Víquez, 2024, p.159).

Autores que han trabajado con población ciega hacen alusión a como "el empleo de las nuevas tecnologías es un gran apoyo para todos los estudiantes, pero sobre todo para aquel que presenta una discapacidad visual" (Cobo, 2021, p.48). Dentro de Costa Rica el MEP no proporciona a los profesores una guía adecuada para el abordaje de temáticas matemáticas a población ciega, por lo que nos parece de suma relevancia aportar a dicha temática, integrando en la investigación nuevas tecnologías que ayuden al aprendizaje de las personas con ceguera, por lo que se plantea la siguiente pregunta.

¿Cuáles propuestas didácticas promueven el desarrollo de procesos matemáticos de aprendizaje del tema de análisis de funciones desde su representación gráfica orientadas para personas estudiantes con ceguera del ciclo diversificado de la Educación Pública costarricense?

Referente Teórico

Uno de los pilares teóricos dentro de este trabajo de investigación es establecer una conceptualización de discapacidad, para esto se ha optado por seguir las ideas planteadas por Victoria (2013) o las de Palacios (2008), ya que estos ofrecen una conceptualización de la discapacidad no como un elemento relacionado a las personas, sino como un concepto arraigado más a las infraestructuras físicas y sociales que no permiten una accesibilidad universal a los distintos elementos y servicios. La línea de pensamiento que se utiliza como soporte dentro de esta investigación es el modelo social, que descrito por Victoria (2013) "significa entender la cuestión de la discapacidad como una cuestión de derechos humanos, señalando cómo este modelo supone un progreso frente a los modelos anteriores: el de prescindencia, el de marginación y el rehabilitador" (p.1095).

Se establece qué es una propuesta didáctica. Se toma de referencia lo mencionado por Baque-Reyes y Portilla-Faican (2021) los cuales definen la propuesta didáctica como todas aquellas "herramientas que permiten innovar los modelos de educación, promoviendo la implementación de técnicas que optimicen y desarrollen el conocimiento de los estudiantes" (p.82). A su vez la propuesta debe de estar basada en alguna teoría de aprendizaje, que en el caso de esta investigación se basa en el constructivismo el cual "es un movimiento pedagógico que considera al aprendiz como un ente activo, capaz de construir su conocimiento sobre la base de sus potencialidades y experiencias, en conjunción con el contexto ambiental que lo rodea" (Díaz y Hernández, 2008, p. 25).

Asimismo, se quieren fortalecer los procesos matemáticos que el MEP hace alusión como primordiales y que se deberían de impulsar al momento de realizar una propuesta didáctica. Estos son *razonar y argumentar, plantear y resolver, conectar y establecer relaciones, representar de diversas formas, comunicar o expresar ideas matemáticas verbal y formalmente.* Se toma en cuenta lo mencionado por el MEP (2012) sobre cada uno de estos elementos, y a su vez las perspectivas de autores cómo Blanché (1973), Acosta y Hermosa (2015), García-Quiroga et al. (2015), Soler-Alvarez y Manrique-Pérez (2014), en el apartado de razonar y argumentar, Espinoza (2017) , Bados y García (2014), Polya (1965), sobre plantear y resolver Businska (2008), Vasquez et al. (2023), en conectar y establecer relaciones, Zapatera (2020), Oviedo et al. (2012), sobre representar de diversas formas y Gonzalez (2004), Sepúlveda-Delgado (2015), en comunicar y expresar ideas matemáticas verbal y formalmente. Todos estos referentes aportan definiciones de dichos procesos matemáticos, lo que permite generar redefiniciones de cada uno de los procesos desde una perspectiva más amplia, uniendo material del MEP junto con estos autores.

También se conceptualiza la temática matemática a tratar dentro de la propuesta didáctica generada, autores como Engler et al. (2020) relatan sobre cómo nace el concepto de función alrededor del siglo XVII. En nuestros días la definición más acertada que se mantiene es la brindada por el matemático Dirichlet, quien define la función como una regla de correspondencia entre dos conjuntos (Engler et al, 2020). Una función puede ser representada de diversas formas: tabular, gráfica y escrita, dichas representaciones (en mayor medida la gráfica) brinda información valiosa que puede ser analizada por el estudiante, elementos como: dominio, ámbito, imágenes, preimágenes, inyectividad, crecimiento, decrecimiento, ceros, máximos y mínimos.

Método y desarrollo conceptual

Desde el punto de vista metodológico, este apartado se desarrollará bajo un enfoque de investigación-acción, dado que no se limita únicamente a analizar cómo la población ciega comprende los conceptos matemáticos, sino que además busca proponer soluciones que permitan generar acceso efectivo a estos conocimientos. Así, esta metodología aborda

> una forma de indagación introspectiva colectiva emprendida por participantes en situaciones sociales, con el objetivo de mejorar la racionalidad y la justicia de sus prácticas sociales o educativas, así como su comprensión de esas prácticas y de las situaciones en que éstas tienen lugar (Rivera-Michelena & Vidal-Ledo, 2007, p. 1).

El proceso metodológico consistió en tres fases. En la primera fase, se seleccionaron cuatro personas ciegas que ya habían concluido su educación secundaria y que se encontraban cursando estudios superiores. El criterio de selección consideró la diversidad de condiciones visuales: dos personas con ceguera total y dos con baja visión, distribuidas en tres hombres y una mujer. No se estableció una edad mínima o máxima para la participación, aunque las edades de los entrevistados oscilaron entre los 19 y 25 años. A estos participantes se les aplicó una encuesta, diseñada con preguntas abiertas que orientaban la entrevista hacia el conocimiento de sus experiencias previas en el aprendizaje de las Matemáticas, con énfasis en el análisis y la representación gráfica de funciones durante su etapa de secundaria.

La segunda fase consistió en el análisis de la información recopilada durante las entrevistas realizadas a los estudiantes universitarios, a un docente del Centro Nacional de Educación Helen Keller (CNEHK) y a partir de la revisión de antecedentes relacionados con el abordaje de esta temática en personas ciegas. Este análisis se efectuó mediante la técnica de análisis de contenido presente en la teoría fundamentada, aplicando una codificación abierta de las respuestas, lo que permitió identificar categorías emergentes de forma inductiva (Vives y Hamui, 2021).

El proceso se orientó a reconocer coincidencias, patrones y divergencias en las respuestas de los participantes, lo cual facilitó detectar las principales dificultades, oportunidades y percepciones en torno al aprendizaje y enseñanza de conceptos matemáticos para personas con discapacidad visual. Dichas categorías emergentes se tomaron como base para la elaboración de una estrategia didáctica adaptada, la cual se aplicaría en la fase siguiente.

En la tercera y última fase, se procedió a la aplicación de la estrategia didáctica elaborada, la cual incluyó recursos tecnológicos como impresoras 3D y materiales en sistema Braille. Para esta etapa se seleccionaron cuatro estudiantes ciegos que cursaban la secundaria en instituciones costarricenses, específicamente a partir del décimo año de la Educación Básica Superior. La lista de posibles participantes fue facilitada por el CNEHK. No se definió un rango etario específico para la participación, aunque la edad máxima registrada fue de 21 años.

Como complemento a la aplicación de la estrategia, se realizaron entrevistas no estructuradas antes y después de la intervención. La entrevista inicial tuvo como propósito conocer a cada estudiante, confirmar los datos proporcionados por el CNEHK, verificar su condición visual y comprender la metodología de enseñanza de las gráficas de funciones que recibían en sus centros educativos. Posteriormente, tras la aplicación de la estrategia didáctica, se efectuó una segunda entrevista para valorar la percepción de los estudiantes respecto al material y recursos utilizados, y recoger una comparación con la forma tradicional en que se les había impartido anteriormente la misma temática en el ámbito escolar. Estas entrevistas también se analizaron mediante la técnica de análisis de contenido, identificando categorías emergentes que permitieron valorar la pertinencia y efectividad de la estrategia y el material aplicado.

En cuanto a los aspectos éticos, tanto en la primera como en la tercera fase se empleó el consentimiento informado, se garantizó la confidencialidad de sus datos personales y el anonimato de sus respuestas en todos los registros y reportes. En el caso de los entrevistados menores de edad, la autorización y firma legal en sus consentimientos informados, fueron brindadas por los encargados legales.

Resultados

Al momento de la redacción de este documento, los resultados obtenidos mediante la aplicación de la estrategia didáctica aún se encuentran en proceso de análisis. No obstante, es posible identificar algunas observaciones preliminares que resultan relevantes para valorar la experiencia.

La relevancia del material táctil para estudiantes ciegos se evidenció como un aspecto fundamental a partir de la implementación de la estrategia, coincidiendo con lo planteado por Cobo (2021). Los cuatro estudiantes entrevistados reconocieron la funcionalidad de este tipo de recursos, destacando particularmente la incorporación de impresiones tridimensionales, tecnología que generó gran curiosidad entre los participantes, dado que la mayoría desconocía los productos finales que se podían obtener mediante este medio y la precisión que estos alcanzan. La manipulación del material didáctico se constituyó en una herramienta clave para favorecer su implicación activa en el proceso de aprendizaje.

Si bien los estudiantes no percibieron el material como completamente perfecto, identificando algunas sugerencias de mejora, coincidieron en señalar una mejora significativa en comparación con los recursos didácticos habitualmente utilizados en sus centros educativos. Además, se constató un notable interés y motivación cuando se les presentaron nuevas estrategias de trabajo, lo cual pone de manifiesto la importancia de diversificar y actualizar los recursos empleados en los procesos educativos para personas con discapacidad visual, esto constata lo mencionado por Cobo (2021).

Es importante subrayar que, como docentes, se debe procurar la inclusión áulica en todos los dominios, considerando que las estrategias didácticas no deben condicionarse únicamente al tipo de discapacidad, sino adaptarse de manera que puedan ser accesibles a cualquier población estudiantil. La experiencia permitió corroborar que el uso de material táctil facilita el entendimiento de temáticas gráficas, aunque también se evidenciaron limitaciones, como los extensos tiempos de edición y ejecución de los materiales en impresoras 3D.

Como aprendizaje preliminar, se concluye que el uso de recursos táctiles, especialmente aquellos generados con tecnología de impresión 3D, no solo favorece la comprensión conceptual en estudiantes ciegos, sino que también incrementa su motivación y participación activa en clase. Sin embargo, su implementación requiere planificación anticipada, disponibilidad de recursos técnicos y capacitación docente.

Para futuras experiencias, se recomienda explorar opciones que permitan optimizar la generación de estos materiales y ampliar su uso a otras áreas curriculares. Asimismo, resulta pertinente continuar validando estas estrategias con muestras más amplias y diversificadas, de manera que puedan integrarse de forma estable y eficiente en los programas de estudio.

Conclusiones

Una de las principales conclusiones alcanzadas es que la planificación de una clase siempre debe centrarse en las necesidades de los estudiantes. Es fundamental que los docentes conozcan estas necesidades específicas y diseñen estrategias que permitan abordar la temática de manera inclusiva, sin que las decisiones tomadas afecten negativamente al resto del grupo.

Por otro lado, es importante destacar la funcionalidad del material táctil para personas ciegas, ya que, según expresaron los estudiantes durante la aplicación, este tipo de recursos facilita significativamente la comprensión de los temas abordados y constituye un complemento muy útil respecto a las indicaciones únicamente orales. Asimismo, el uso de nuevos materiales, como las impresiones en 3D, motiva e involucra más al estudiantado dentro de la clase, favoreciendo su participación.

Además de los resultados obtenidos a través de esta investigación, se considera pertinente hacer un llamado a la comunidad educativa para fomentar la conciencia sobre la importancia de desarrollar estudios que contribuyan a visibilizar a poblaciones que, con frecuencia, son relegadas a un segundo plano. En última instancia, se busca que la educación funcione como una herramienta accesible para todas las personas, sin distinción alguna.

Referencias y bibliografías.

Acosta, J. A., & Hermosa, R. (2015). La movilización de la competencia matemática “razonar y argumentar” a través del estudio de la media aritmética. *Revista Amazonia Investiga, 4*(7), 6–18. https://www.amazoniainvestiga.info/index.php/amazonia/article/view/690/650

Bados, A., & García, E. (2014). *Resolución de problemas* [Material docente]. Colección Objetos y Materiales Docentes (OMADO). http://hdl.handle.net/2445/54764

Baque-Reyes, G. R., & Portillo-Faican, G. I. (2021). El aprendizaje significativo como estrategia didáctica para la enseñanza–aprendizaje. *Polo del Conocimiento: Revista Científico-Profesional, 6*(5), 75–86. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7927035

Businskas, A. M. (2008). *Conversations about connections: How secondary mathematics teachers conceptualize and contend with mathematical connections* [Tesis doctoral, Universidad de Toronto]. https://core.ac.uk/download/pdf/56373465.pdf

Cobo, S. (2021). *Enseñanza matemática al alumnado ciego.*[Tesis de Máster, Universidad de Alcalá]. Repositorio de la biblioteca digital Universidad de Alcalá. https://ebuah.uah.es/dspace/handle/10017/52152

Díaz, F., & Hernández, G. (2003). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo: Una interpretación constructivista* [Libro digital]. McGraw-Hill. https://dfa.edomex.gob.mx/sites/dfa.edomex.gob.mx/files/files/2_%20estrategias-docentes-para-un-aprendizaje-significativo.pdf

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2020). *Funciones* (2.ª ed.) [Libro digital]. Ediciones UNL. https://bibliotecavirtual.unl.edu.ar:8443/bitstream/handle/11185/2308/funciones.pdf

Espinoza, J. (2017). La resolución y planteamiento de problemas como estrategia metodológica en clases de matemática. *Atenas, 3*(39), 64–72. https://www.redalyc.org/journal/4780/478055149005/478055149005.pdf

García-Quiroga, B., Coronado, A., & Giraldo Ospina, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas*. Universidad de la Amazonía. https://www.researchgate.net/publication/320912006_Orientaciones_Didacticas_para_el_desarrollo_de_Competencias_Matematicas

González, J. L. (2004). *Competencias básicas en educación matemática*. Universidad de Málaga. https://riuma.uma.es/xmlui/bitstream/handle/10630/4170/TD_Gonzalez_Juan.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Ministerio de Educación Pública. (2012). *Programa de estudio: Matemáticas* [Programa de estudio]. San José, Costa Rica. https://www.mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf

Oviedo, L. M., Kanashiro, A. M., Bnzaquen, M., & Gorrochategui, M. (2012). Los registros semióticos de representación en matemáticas. *Revista Aula Universitaria, (13)*, 29–36. https://doi.org/10.14409/au.v1i13.4112

Palacios, A. (2008). *El modelo social de discapacidad: Orígenes, caracterización y plasmación en la Convención Internacional sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad* (1.ª ed.). Grupo Editorial CINCA.

Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas* (1.ª ed.) [Libro digital]. Trillas Editorial. https://repositorio.uasb.edu.ec/bitstream/10644/5669/1/Polya-Cómo-plantear-y-resolver-problemas.pdf

Rivera-Michelena, N., & Vidal-Ledo, M. (2007). Investigación-acción. *Educación Médica Superior, 21*(4). http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0864-21412007000400012

Sandí, D. &Víquez, D. (2024). *Enseñanza Del Tema De Funciones A Estudiantes Con Discapacidad Visual: Propuesta Didáctica Basada En El Dua*. [Tesis de Licenciatura, Universidad de Costa Rica].

Sepúlveda-Delgado, O. (2015). Estudio del conocimiento didáctico-matemático del profesor universitario: Un marco teórico de investigación. *Revista de Investigación, Desarrollo e Innovación, 6*(1), 29–43. https://revistas.uptc.edu.co/index.php/investigacion_duitama/article/view/4048

Soler-Álvarez, M., & Manrique-Pérez, V. (2014). El proceso de descubrimiento en la clase de matemáticas: Los razonamientos abductivo, inductivo y deductivo. *Enseñanza de las Ciencias, 2*(32), 191–219. https://ddd.uab.cat/pub/edlc/edlc_a2014v32n2/edlc_a2014v32n2p191.pdf

Vásquez, C., Pincheira, N., & Alsina, A. (2023). Los procesos matemáticos en educación infantil: Una aproximación desde libros de texto de Chile y España. *PNA, 18*(1), 1–34. https://doi.org/10.30827/pna.v18i1.27164

Victoria, J. (2013). El modelo social de la discapacidad: Una cuestión de derechos humanos. *Boletín Mexicano de Derecho Comparado, 46*(138), 1093–1109. http://www.scielo.org.mx/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0041-86332013000300008

Vives, T., & Hamui, L. (2021). La codificación y categorización en la teoría fundamentada, un método para el análisis de los datos cualitativos. *Investigación En Educación Médica*, *10*(40), 97-104. https://doi.org/10.22201/fm.20075057e.2021.40.21367

Zapatera, A. (2020). El método Singapur para el aprendizaje de las matemáticas: Enfoque y concreción de un estilo de aprendizaje. *Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology, 1*(2), 263–274. https://dehesa.unex.es/bitstream/10662/13097/1/0214-9877_2020_2_1_263.pdf

Estrategias de impacto pedagógico y social en el área de Matemáticas en la Fundación Universitaria Salesiana

Yadira **Sanabria Mejía**
Fundación Universitaria Salesiana
Colombia
yadira.sanabria@salesiana.edu.co
Ana Sofía **Montenegro Arango**
Fundación Universitaria Salesiana
Colombia
ana.montenegro@salesiana.edu.co

Resumen

Los estudiantes enfrentan desafíos en el desarrollo de habilidades matemáticas, reflejados en bajos niveles de rendimiento y altas tasas de deserción. En respuesta, la Fundación Universitaria Salesiana ha propuesto un enfoque pedagógico innovador para favorecer el rendimiento académico y el gusto por las Matemáticas, contribuyendo al desarrollo integral a partir de la creación de espacios de fortalecimiento y profundización en Matemáticas.

La implementación de estrategias activas, tecnológicas y lúdicas en Cálculo Diferencial logró reducir en un 25% la pérdida del curso en el segundo semestre de 2024. Las actividades extracurriculares lideradas por el semillero de Matemáticas aumentaron en un 50% la participación estudiantil, fortaleciendo el gusto por la disciplina. Las olimpiadas matemáticas contaron con más de 500 participantes, incluyendo instituciones no salesianas, permitiendo identificar fortalezas y desafíos por pensamiento matemático. El acompañamiento social y pedagógico infantil evidenció aprendizajes significativos y mayor interés hacia las Matemáticas desde una perspectiva lúdica.

Palabras clave: Acompañamiento académico; Deserción escolar; Educación inclusiva; Innovación pedagógica; Matemáticas; Metodologías didácticas; Olimpiadas matemáticas; Rendimiento académico; Tecnologías educativas.

Introducción

La inmersión en el mundo universitario trae consigo temores y dificultades, en particular a lo que refiere al área de Matemáticas. En gran parte del estudiantado, se ha evidenciado un prejuicio arraigado hacia esta disciplina, el cual se ha alimentado por diversos factores durante el proceso formativo. Este prejuicio se traduce en bajos índices de rendimiento académico y altas tasas de deserción en cursos de Matemáticas. Por lo tanto, los estudiantes enfrentan múltiples desafíos al desarrollar competencias matemáticas. Adicionalmente, la escasa incorporación de metodologías activas y tecnologías educativas limita la comprensión profunda de los conceptos matemáticos, como han señalado Font et al. (2007) y Orrantia (2006).

Las Matemáticas son fundamentales para el desarrollo tecnológico, científico y económico actual, y su apropiación es clave para que los estudiantes enfrenten los retos del mundo moderno. Sin embargo, los métodos tradicionales de enseñanza no están generando los resultados esperados, lo cual exige propuestas innovadoras, tal como lo plantea Godino et al. (2003). Desde el área de Matemáticas de la Fundación Universitaria Salesiana se propone un conjunto de estrategias pedagógicas ya implementadas, centradas en metodologías activas como la gamificación (Marín-Díaz et al., 2020), el uso de recursos digitales como Khan Academy y el enfoque CPA, que han facilitado una experiencia más cercana, significativa y efectiva en el aprendizaje matemático. Por esta razón, desde el área de Matemáticas de la Fundación Universitaria Salesiana, se investigan y establecen propuestas metodológicas que favorezcan el abordaje de esta materia mediante estrategias cercanas y significativas para el estudiante, con el fin de responder la pregunta de investigación: ¿Cómo influye la implementación de estrategias pedagógicas innovadoras en el desarrollo de competencias matemáticas y en el bienestar educativo de estudiantes de la Fundación Universitaria Salesiana, de poblaciones vulnerables y de sus colegios adscritos?

El objetivo del proyecto consiste en generar espacios de fortalecimiento y profundización en el área de las Matemáticas para los estudiantes de tercer semestre que cursan la asignatura de Cálculo Diferencial de los diferentes programas académicos de la Fundación Universitaria Salesiana mediante el establecimiento de metodologías didácticas innovadoras que presentan las Matemáticas de una forma diferente y cercana. Además, busca extender estos beneficios a un grupo de niños que hacen parte de Casa Bosconia, cuyas edades están entre los ocho y doce años, y colegios a nivel nacional, contribuyendo así a cerrar brechas educativas y promover la equidad.

Referente Teórico

La enseñanza de las Matemáticas ha sido objeto de múltiples estudios que buscan mejorar la comprensión y aplicación de conceptos matemáticos en los estudiantes. De acuerdo con Font et al. (2007), el enfoque ontosemiótico permite comprender la representación matemática desde una perspectiva didáctica y cognitiva, facilitando el desarrollo de competencias matemáticas a partir de diferentes niveles de abstracción. Así mismo, Orrantia (2006) resalta las dificultades en el aprendizaje de las Matemáticas desde una perspectiva evolutiva, evidenciando la necesidad de metodologías activas y contextualizadas.

El uso de tecnologías educativas en la enseñanza de las Matemáticas ha demostrado ser una estrategia efectiva para fortalecer el aprendizaje. Chávez (s.f.) señala que las narrativas transmedia educativas permiten un aprendizaje interactivo y multisensorial, facilitando la apropiación de conceptos matemáticos de manera dinámica. De igual forma, el Ministerio de Educación Nacional (2006) resalta la importancia de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas como herramienta para estructurar el aprendizaje en función de niveles de desempeño y pensamiento matemático.

En el contexto del presente estudio, la metodología de Concreto, Pictórico y Abstracto (CPA) ha sido clave para estructurar el aprendizaje de los estudiantes. Esta metodología se fundamenta en la transición gradual de la manipulación de objetos concretos hacia la representación abstracta de conceptos matemáticos, permitiendo una mejor asimilación de los contenidos. Según Marín-Díaz et al. (2020), la gamificación mejora la motivación, el compromiso y la participación del estudiante en procesos de aprendizaje activo lo que ha permitido generar un ambiente de aprendizaje más cercano y significativo para los estudiantes. La relevancia del acompañamiento social y pedagógico también ha sido discutida en diversas investigaciones. Godino et al. (2003) enfatizan la necesidad de estrategias de apoyo personalizadas para estudiantes con dificultades en Matemáticas, lo que coincide con la propuesta del presente estudio en cuanto a la implementación de tutorías y actividades extracurriculares para fortalecer el aprendizaje en contextos vulnerables.

Metodología

Para el desarrollo del proyecto se establecieron cuatro líneas o componentes de trabajo, en las cuales se consolidan el trabajo realizado desde el área de Matemáticas para favorecer la generación de espacios que fortalezcan el desarrollo de competencias de los estudiantes de la Fundación Universitaria Salesiana de la asignatura de Cálculo Diferencial, así como de los colegios a nivel nacional y la población vulnerable perteneciente a la fundación Casa Bosconia.

Los dos primeros componentes favorecen directamente a los estudiantes de Salesiana de la asignatura de Cálculo Diferencial, dentro y fuera del aula. En el tercer componente se favorece a la población infantil vulnerable de Casa Bosconia y con el último componente se generan espacios de interacción con los estudiantes de la media de instituciones educativas a nivel nacional. A continuación, se presenta en detalle el desarrollo metodológico de cada uno de los componentes.

Innovación en estrategias pedagógicas

En primer lugar, se realizó un análisis detallado de las estrategias pedagógicas empleadas en las asignaturas relacionadas con las Matemáticas, haciendo énfasis en la asignatura de Cálculo Diferencial, cursada por todos los estudiantes de la universidad durante el tercer semestre. Este análisis incluyó la identificación de áreas de mejora y la evaluación de la efectividad de las metodologías aplicadas. Para ello, se aplicaron encuestas a cincuenta (50) estudiantes que cursaron la asignatura en el periodo académico 2024-1 y a los dos (2) profesores del área, además de realizar observaciones de clase que permitieron obtener una visión completa del proceso de enseñanza-aprendizaje. Como lo señala Cantoral (2003), se buscó transformar la concepción tradicional del aula, caracterizada por discursos autoritarios y formatos comunicativos rígidos, promoviendo ambientes más participativos y dialógicos.

Con base en este análisis, se diseñaron y desarrollaron nuevas estrategias pedagógicas innovadoras que incorporan tecnologías educativas y metodologías activas. Esto incluye el uso de plataformas digitales, aplicaciones educativas, y herramientas multimedia para enriquecer el proceso de aprendizaje. Por ejemplo, el uso de plataformas de aprendizaje en línea para ofrecer cursos complementarios o las aplicaciones móviles para resolver problemas matemáticos.

Además, se implementaron metodologías activas como el aprendizaje basado en problemas y el aprendizaje significativo. El proyecto desarrollado en la asignatura de Cálculo Diferencial se denominó **"Etnomatemáticas en Salesiana"**. Según D'Ambrosio (1999), son entendidas como los saberes matemáticos presentes en diversas prácticas culturales, muchas veces invisibilizados por el enfoque tradicional de la enseñanza. A través de este proyecto, los estudiantes exploraron contextos socioculturales propios o cercanos, con el fin de identificar y modelar situaciones matemáticas reales vinculadas a su entorno. Esta estrategia permitió articular el conocimiento formal con experiencias significativas, promover una visión crítica de la Matemática y fortalecer el sentido de pertenencia hacia los saberes locales, tal como se muestra en la Figura 1, en la cual se puede apreciar las relaciones existentes entre las Matemáticas, y la venta y manipulación de la ahuyama y el guandú.

Figura 1. Póster etnomatemático: venta y manipulación de la ahuyama y el guandú.

El aprendizaje significativo enfatiza que el aprendizaje es más efectivo cuando los conocimientos se relacionan de manera significativa con los conocimientos previos del estudiante. Para lograr esto, se diseñaron actividades que conectan los conceptos matemáticos con la experiencia previa de los estudiantes, facilitando la comprensión profunda y la aplicación práctica de los conocimientos. Entre las estrategias aplicadas se destacó el uso de fichas pedagógicas para guiar procesos y procedimientos matemáticos, facilitando la comprensión paso a paso. En la figura 2, se puede observar un fragmento de una ficha utilizada para el desarrollo de la temática análisis de funciones.

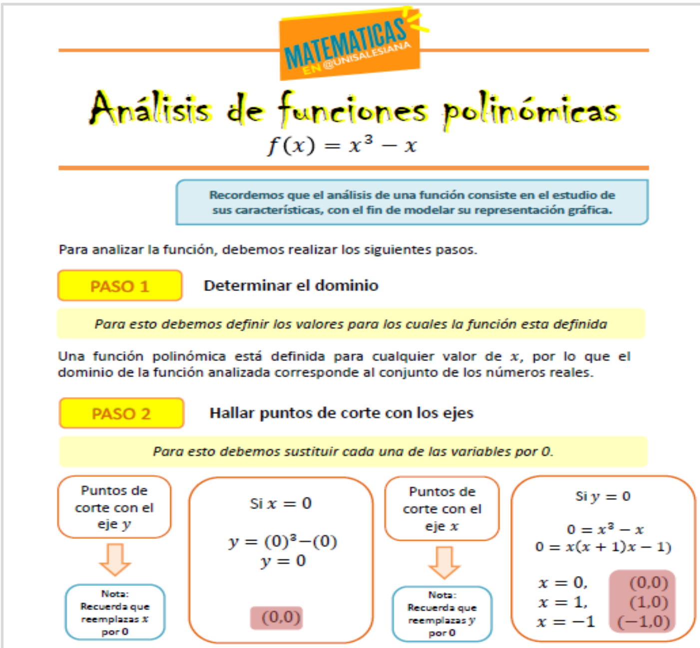


Figura 2. Ficha para el análisis de funciones polinómicas. Elaboración propia.

A su vez, se realizará una evaluación continua de las nuevas estrategias para asegurar su efectividad y hacer los ajustes pertinentes. Esto incluirá la recopilación de retroalimentación de los estudiantes y profesores, así como la realización de pruebas para medir el impacto del aprendizaje.

Actividades fuera del aula

Desde el semillero de Matemáticas, se ofrecieron actividades extracurriculares que permitieron a los estudiantes explorar y profundizar en temas matemáticos de manera más informal y creativa. Entre estas actividades se encuentra la incorporación de juegos y desafíos matemáticos para hacer que el aprendizaje sea competitivo y divertido, como el establecimiento de Decatlones Matemáticos, en donde los estudiantes pudieron resolver problemas de forma rápida y preciosa, promoviendo la práctica y el interés por las Matemáticas.

Otras actividades a desarrollar consisten en la celebración del día de las Matemáticas mediante la realización de actividades lúdicas y talleres que acerquen las Matemáticas a la comunidad, mostrando su importancia y diversión. Además, los proyectos de investigación dirigidos por estudiantes permitirán que ellos exploren temas matemáticos de interés personal, desarrollando habilidades de investigación y resolución de problemas.

Acompañamiento social y pedagógico

En cuanto al acompañamiento social y pedagógico, se establecieron talleres y actividades orientadas al desarrollo de habilidades matemáticas, en la población vulnerable de Ciudad Bolívar, atendiendo a lo propuesto por Barcena y Prado (2016), en los ODS cuando manifiesta que la educación busca asegurar el acceso igualitario a todos los niveles de la enseñanza para las personas vulnerables. Desde el proyecto se contribuye a reducir estas brechas, favoreciendo la adquisición de competencias a partir del desarrollo de juegos. Además, como lo indica Guíñez (2020) para lograr un desarrollo íntegro es importante que el momento de la enseñanza se dé desde los primeros años, ya que la parte cognitiva y la emocional, tienen el mismo grado de importancia.

Para esto se emplea la metodología de Concreto, Pictórico y Abstracto (CPA) posibilita una forma más espontánea y lúdica a los niños acorde a la edad a desarrollar habilidades que les ayudarán a enfrentar desafíos en relación con los problemas matemáticos en contextos cotidianos. Esta metodología se basa en tres fases que ayudan a los estudiantes a comprender conceptos matemáticos de forma gradual y profunda. Según Fonseca et al. (2017), el método permite a los estudiantes, pasar de una fase manipulativa a una fase de dibujo para gradualmente alcanzar un nivel abstracto.

La primera fase consiste en la manipulación de objetos concretos y tangibles para comprender los conceptos matemáticos. Esto permite que los estudiantes desarrollen una comprensión intuitiva de los conceptos; la exploración activa permite descubrir la relación entre los objetos, lo que fomenta el pensamiento crítico y la resolución de problemas. Por otra parte, la fase pictórica introduce dibujos, diagramas o gráficos que representen las relaciones entre las cantidades o procesos matemáticos. Permitir que los estudiantes creen modelos visuales para resolver problemas, permite conectar las ideas abstractas con su contexto y desarrolla una conexión más profunda. Por último, tenemos la fase abstracta, en donde los estudiantes trabajan con símbolos y expresiones matemáticas, como ecuaciones y fórmulas, para representar conceptos de manera abstracta, Esto permite resolver problemas de manera más eficiente y comunicar sus ideas con precisión.

Olimpiadas matemáticas

Las olimpiadas matemáticas corresponden a otro componente clave del proyecto. Se han centrado en el diseño y ejecución de competencias a nivel nacional, que incentivan la resolución de problemas matemáticos complejos y la aplicación de conocimientos teóricos en contextos prácticos. Estas competencias fomentan la competitividad académica y el trabajo en equipo entre los estudiantes, promoviendo un ambiente de colaboración y aprendizaje mutuo.

Las pruebas se han estado realizando atendiendo a lo propuesto en los documentos del Ministerio de Educación Nacional y las especificaciones del Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (Icfes), para esto se evaluaron las competencias de formulación y ejecución, interpretación y representación y argumentación. Estas preguntas se organizan en tres grupos de pensamientos matemáticos. Además, a las instituciones educativas participantes, se les entregan los resultados desagregados por pensamientos, competencias y niveles de desempeño en las categorías mencionadas, para que conozcan cómo está su desempeño en el área de Matemáticas y se planteen estrategias para mejorarlo.

Resultados

La implementación de las estrategias en la asignatura de Cálculo Diferencial evidenció una mejora significativa: la pérdida del curso se redujo en un 25 % durante el segundo semestre de 2024. En la evaluación docente, los estudiantes destacaron que las metodologías activas, el uso de tecnologías y las actividades lúdicas facilitaron la comprensión de los temas y generan mayor motivación hacia las Matemáticas.

En cuanto a las Olimpiadas Matemáticas, participaron más de 500 estudiantes de colegios salesianos adscritos y, por primera vez, de dos instituciones educativas no salesianas. Los resultados se desagregaron por pensamiento matemático y por competencia matemática (figura 3), lo que permitió identificar fortalezas y oportunidades de mejora en los pensamientos numérico y variacional, métrico y espacial, y aleatorio, así como en las competencias de formulación y ejecución, interpretación y representación, y argumentación. Esta información ha sido clave para orientar futuras estrategias pedagógicas en el área.

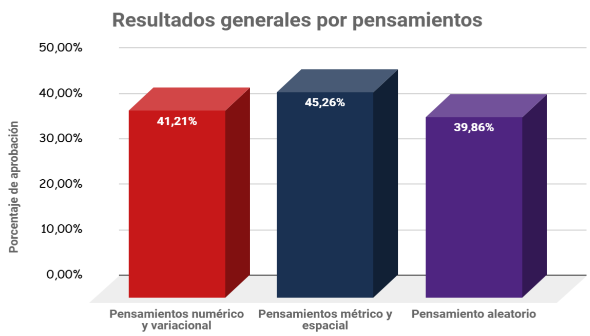


Figura 3. Resultados generales del total de estudiantes participantes desagregados por pensamientos matemáticos. Elaboración propia.

En el componente de acompañamiento social y pedagógico, la constancia en la participación de los estudiantes y la retroalimentación recogida al cierre de cada experiencia evidencian que las actividades están bien planeadas y generan interés y aprendizaje en los niños acompañados. Estas sesiones han permitido fortalecer habilidades matemáticas desde una perspectiva lúdica y significativa.

En las actividades extracurriculares lideradas por el semillero de Matemáticas, se ha evidenciado un aumento del 50 % en la participación estudiantil frente a periodos anteriores. Estas actividades, como jornadas lúdicas, talleres temáticos y celebraciones del Día de las Matemáticas, han generado espacios de aprendizaje alternativo que fortalecen el vínculo de los estudiantes con la disciplina de forma creativa y motivadora.

Conclusiones Finales

La implementación de estrategias pedagógicas innovadoras en la enseñanza de las Matemáticas en la Fundación Universitaria Salesiana ha demostrado ser una vía efectiva para mejorar el rendimiento académico y reducir la deserción. La combinación de metodologías activas, tecnologías educativas y el enfoque CPA ha permitido a los estudiantes enfrentar los desafíos matemáticos con mayor confianza y comprensión.

Además, el impacto del proyecto no se limita al ámbito académico, sino que también abarca aspectos socioemocionales y de equidad educativa, permitiendo a estudiantes de poblaciones vulnerables acceder a oportunidades de aprendizaje de calidad. La realización de olimpiadas matemáticas y actividades extracurriculares ha incentivado la participación y el interés por las Matemáticas en diferentes contextos educativos.

En conclusión, la integración de estas estrategias ha permitido no solo fortalecer el aprendizaje de los estudiantes de la Fundación Universitaria Salesiana, sino también ampliar el alcance del proyecto hacia comunidades vulnerables, promoviendo una educación inclusiva y equitativa. Futuras investigaciones podrán enfocarse en evaluar el impacto a largo plazo de estas estrategias y en el diseño de nuevas metodologías que continúen fortaleciendo el desarrollo de competencias matemáticas en diversos entornos educativos.

Referencias y bibliografía

Barcena, A., & Prado, A. (2016). *Agenda 2030 y los objetivos de desarrollo sostenible una oportunidad para América Latina y el Caribe*. Naciones Unidas. https://www.agci.cl/images/centro_documentacion/AGENDA_2030_y_los_ODS.pdf

Cantoral, R., & Reséndiz, E. (2003). El papel de la variación en las explicaciones de los profesores: un estudio en situación escolar. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 6(2), 133-154.

Chávez, D. (s.f.). *Narrativa transmedia educativa; implicaciones pedagógicas, comunicativas e interactivas*. Universidad del Valle de México.

D'Ambrosio, U. (1999). Literacy, matheracy, and technoracy: A trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning,* 1(2), 131–153.

Fonseca, A., Hernández, R., & Mariño, L. (2017). *Enfoque CPA en la resolución de problemas para el aprendizaje de fracciones mediante el uso del software matemático*. Recuperado de https://funes.uniandes.edu.co/funes-documentos/enfoque-cpa-en-la-resolucion-de-problemas-para-el-aprendizaje-de-fracciones-mediante-el-uso-de-software-matematico/

Font, V., Godino, J., & D'Amore, B. (2007). Enfoque ontosemiótico de las representaciones en educación matemática. *For the Learning of Mathematics*, Montreal.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros.*

Guíñez, C. (2020). *Influencia de las prácticas socioafectivas de los Docentes en el proceso de aprendizaje en el aula en primer ciclo de Educación Básica*. Biblioteca Digital UAHC. Recuperado de http://bibliotecadigital.academia.cl/xmlui/bitstream/handle/123456789/6638/TPEB%20932.pdf?sequence=1&isAllowed=y

Marín-Díaz, V., González, E. A., & García, J. C. (2020). *Gamificación en educación superior: percepción del alumnado universitario*. Educación XX1, 23(1), 251–273. https://doi.org/10.5944/educxx1.24147

Ministerio de Educación Nacional-MEN. (2006). *Documento No. 3: Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas.* Recuperado de https://bit.ly/2EOJfR1

Orrantia, J. (2006). *Dificultades en el aprendizaje de las matemáticas: una perspectiva evolutiva*.

Funciones didácticas en la enseñanza de la Matemática

Leobel **Morell** Pérez
Universidad Estatal Amazónica
Ecuador
leobelm2014@gmail.com

Resumen

El taller "Funciones Didácticas en la Enseñanza de la Matemática" busca analizar y aplicar estrategias clave que estructuren el proceso de enseñanza-aprendizaje en Matemáticas de manera lógica y efectiva. A través de actividades teóricas y prácticas, se explorará cómo integrar funciones como la motivación, la fijación y la evaluación para promover un aprendizaje significativo y adaptable. La metodología incluye una introducción conceptual, debates guiados y conclusiones colectivas, fomentando la reflexión crítica y la generación de estrategias prácticas para el aula. Al finalizar, los participantes obtendrán herramientas concretas para mejorar sus prácticas docentes y enfrentar los retos educativos actuales, contribuyendo a una enseñanza estructurada y dinámica.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación preuniversitaria; Educación universitaria; Funciones didácticas.

Introducción

En el ámbito de la Educación Matemática, la planificación y estructuración de las clases juegan un papel crucial en el éxito del proceso de enseñanza-aprendizaje. Las funciones didácticas, como eslabones de este proceso, permiten articular y garantizar la lógica de las actividades en el aula. Estas funciones comprenden aspectos como el aseguramiento del nivel de partida, la motivación, la orientación hacia el objetivo, el tratamiento del nuevo contenido, la fijación y la evaluación, y son fundamentales para lograr los objetivos educativos.(Ballester Pedroso et al., 2001).

El taller que se propone tiene como finalidad analizar y aplicar cada una de estas funciones en el contexto de la enseñanza de las Matemáticas, abordando tanto su conceptualización teórica como su implementación práctica en el aula.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

El taller propuesto se centra en la integración de las funciones didácticas como eje central del proceso de enseñanza-aprendizaje en Matemáticas. Estas funciones, conceptualizadas como un marco organizador que guía la enseñanza de manera lógica y efectiva, aseguran que cada etapa del aprendizaje tenga un propósito claro, contribuyendo a la estructuración coherente de las dinámicas educativas y al cumplimiento de los objetivos formativos. Su relevancia radica en que permiten adaptar la enseñanza a las características específicas de los estudiantes, potenciando el desarrollo de habilidades matemáticas superiores y fomentando un aprendizaje significativo y contextualizado.

El enfoque del taller está respaldado por una revisión conceptual que permite a los participantes comprender cómo estas funciones operan como eslabones interconectados dentro de la planificación y ejecución de clases. Investigaciones previas, como las de Ruiz Cordovés & Beltrán Pazo, (2021) destacan que las funciones didácticas no solo estructuran la progresión del aprendizaje, sino que también potencian la adaptabilidad de las estrategias pedagógicas a contextos diversos. Así, este marco teórico proporcionará a los docentes herramientas prácticas que optimicen la enseñanza de las Matemáticas.

En la actualidad, la Educación Matemática enfrenta desafíos significativos, como la necesidad de equilibrar métodos tradicionales y enfoques innovadores, y de incorporar tecnologías educativas sin perder el rigor conceptual. Aunque los métodos modernos, como el aprendizaje basado en proyectos y la clase invertida, han mostrado potencial para enriquecer el aprendizaje, su implementación sin un análisis pedagógico profundo puede resultar en prácticas inconsistentes. El taller abordará estas tensiones, analizando tanto los beneficios como los riesgos asociados, y propondrá estrategias que armonicen la innovación con los principios de la didáctica matemática. (Lessani et al., 2017)

Además, se explorará el impacto de las funciones didácticas en el aprendizaje de los estudiantes, considerando su capacidad para:

- ❖ Diagnosticar y activar conocimientos previos, conectando el nuevo aprendizaje con experiencias significativas.
- ❖ Estimular la motivación a través de problemas contextualizados y relevantes.
- ❖ Guiar el aprendizaje mediante objetivos claros y actividades bien estructuradas.
- ❖ Consolidar conocimientos con tareas que promuevan la aplicación práctica y el pensamiento crítico.
- ❖ Evaluar y retroalimentar de manera formativa, ajustando las estrategias según las necesidades de los estudiantes.

Con esta propuesta, el taller busca no solo fortalecer las competencias docentes en la planificación y ejecución de actividades matemáticas, sino también contribuir al debate sobre cómo integrar eficazmente teorías pedagógicas y tecnológicas en el aula de Matemáticas, respetando su estructura y lenguaje propios. Esto garantizará un aprendizaje que no solo sea significativo, sino también sostenible y adaptable a las demandas educativas actuales.

Referencial teórico

La enseñanza de las Matemáticas enfrenta el desafío constante de equilibrar el rigor conceptual y la aplicación práctica, logrando que los estudiantes no solo adquieran conocimientos técnicos, sino que desarrollen habilidades para resolver problemas y analizar situaciones del mundo real. En este contexto, las funciones didácticas emergen como un marco organizador esencial, que permite estructurar el proceso de enseñanza-aprendizaje de manera coherente, efectiva y adaptada a las necesidades individuales y grupales de los estudiantes. Estas funciones no solo promueven la progresión lógica del aprendizaje, sino que también garantizan la integración de principios pedagógicos que fomentan la reflexión crítica, el análisis profundo y el aprendizaje significativo en las Matemáticas (Reyes Carrillo et al., 2023)

Las funciones didácticas pueden definirse como elementos metodológicos que guían y organizan el proceso de enseñanza-aprendizaje, asegurando que cada etapa de la clase esté orientada hacia el logro de objetivos específicos y que las actividades realizadas tengan un propósito claro. Según Danilov & Skatkin, (1975) estas funciones operan como eslabones que conectan las diferentes fases del aprendizaje, contribuyendo a la consolidación del conocimiento matemático en niveles cada vez más complejos. En el ámbito de la enseñanza de las Matemáticas, estas funciones toman una relevancia especial, ya que permiten abordar conceptos abstractos y estructurados de manera que los estudiantes puedan comprenderlos, aplicarlos y contextualizarlos en problemas reales. (Jungk, 1975)

Entre las funciones didácticas fundamentales en el aprendizaje de las Matemáticas autores como Ballester Pedroso et al., (2001) señalan las siguientes:

Aseguramiento del nivel de partida: Identificar y activar los conocimientos previos relacionados con los conceptos matemáticos a trabajar, lo que permite establecer conexiones entre lo aprendido y los nuevos contenidos. Esta función es crucial en Matemáticas, dada la naturaleza acumulativa de los aprendizajes.

Orientación hacia el objetivo: Presentar de manera clara y explícita los objetivos de aprendizaje, guiando a los estudiantes hacia el propósito de la clase. En Matemáticas, esto implica definir habilidades específicas, como resolver ecuaciones, analizar funciones o interpretar gráficos, y conectar estas metas con aplicaciones prácticas.

Motivación: Crear un entorno que despierte el interés y la curiosidad hacia los temas matemáticos, utilizando problemas significativos y desafiantes. Teniendo en cuenta que la motivación en Matemáticas debe apoyarse en ejemplos prácticos que relacionen los conceptos abstractos con situaciones reales, como el uso de geometría en construcción o estadística en análisis de datos.

Tratamiento de la nueva materia: Introducir los contenidos matemáticos de forma estructurada, utilizando ejemplos, representaciones gráficas y explicaciones claras que faciliten la comprensión. Esta etapa se caracteriza por el uso de recursos como diagramas, modelos matemáticos y software educativo.

Fijación y sistematización: Consolidar los conocimientos adquiridos mediante la resolución de ejercicios, problemas y actividades que promuevan el pensamiento crítico y el razonamiento lógico.

Control y evaluación: Monitorear el progreso de los estudiantes a través de pruebas, actividades prácticas y retroalimentación, asegurando que comprendan y apliquen los conceptos matemáticos de manera efectiva.

La implementación de las funciones didácticas en la enseñanza de las Matemáticas encuentra sustento en diversas teorías pedagógicas. Vîgotskiy (1982) enfatiza el papel mediador del docente en la construcción del conocimiento, destacando que el aprendizaje se produce en un contexto social donde el maestro guía a los estudiantes desde su **Zona de Desarrollo Próximo (ZDP)** hacia niveles más avanzados de comprensión matemática. En este sentido, la función didáctica del docente no se limita a la transmisión de conocimientos, sino que implica la creación de situaciones de aprendizaje en las que los estudiantes, a través de la interacción con sus pares y con el maestro, interiorizan conceptos matemáticos que inicialmente no podrían desarrollar de manera autónoma

Desde una perspectiva complementaria, Galperin (1986) amplió este enfoque al desarrollar la **teoría de la formación por etapas de las acciones mentales**, que aporta una base para estructurar las funciones didácticas en la enseñanza de las Matemáticas. Según esta teoría, el docente debe organizar la enseñanza de manera que los estudiantes avancen desde la manipulación concreta hasta la internalización abstracta de los conceptos. En este proceso, las funciones didácticas se distribuyen en la presentación materializada de los conceptos matemáticos, la guía en la construcción de representaciones perceptivas y la transición hacia la verbalización y el pensamiento abstracto Así, el docente no solo actúa como mediador, sino que también estructura de manera secuencial y progresiva el aprendizaje, asegurando que cada etapa favorezca el desarrollo cognitivo del estudiante.

Por su parte, Talízina (1988) expandió las ideas de Galperin al desarrollar un enfoque sistemático de la **psicología de la instrucción**, en el que la enseñanza debe garantizar que cada función didáctica esté alineada con las necesidades del estudiante en cada fase del aprendizaje. Su trabajo resalta que las funciones didácticas del docente no deben ser improvisadas, sino diseñadas estratégicamente para optimizar la formación de conceptos matemáticos, asegurando que los estudiantes no solo memoricen procedimientos, sino que comprendan su estructura lógica y su aplicación. Sustentando un enfoque instruccional bien diseñado permite que los estudiantes progresen sin lagunas conceptuales, evitando errores derivados de una enseñanza fragmentada.

Desde esta perspectiva, las funciones didácticas en la clase de Matemáticas deben cumplir un rol mediador, estructurar el aprendizaje en etapas progresivas y diseñar secuencias de enseñanza efectivas. Esto permite que los estudiantes no solo adquieran conocimientos matemáticos, sino que los internalicen y los apliquen de manera significativa en distintos contextos.

Por su parte, Brousseau (1997) introduce el concepto de "Situaciones Didácticas", que plantea que los estudiantes deben enfrentarse a problemas auténticos que les permitan construir conocimiento a través de la exploración, la formulación de hipótesis y la validación de sus respuestas. Este enfoque se alinea con las funciones didácticas, especialmente en las etapas de tratamiento de la nueva materia y fijación, donde el estudiante aplica los conceptos aprendidos en tareas prácticas.

En el proceso de enseñanza de las Matemáticas, las funciones didácticas desempeñan un papel crucial al organizar y guiar el aprendizaje de los estudiantes. Los conocimientos previos constituyen el punto de partida fundamental dentro de estas funciones, particularmente en el "Aseguramiento del nivel de partida", ya que influyen directamente en la capacidad de los estudiantes para abordar nuevos conceptos matemáticos. Identificarlos permite al docente establecer conexiones entre lo que los estudiantes ya saben y los nuevos contenidos, facilitando una progresión adecuada en el aprendizaje.

Asimismo, las heurísticas o estrategias de resolución de problemas se integran en la función de "Tratamiento de la nueva materia", al proporcionar a los estudiantes herramientas que les permitan enfrentar desafíos matemáticos de manera efectiva. La incorporación de ejemplos prácticos y actividades estructuradas favorece el desarrollo de un repertorio de estrategias útiles en la resolución de problemas.

Por otro lado, la metacognición, entendida como la capacidad de reflexionar sobre el propio proceso de aprendizaje, se articula estrechamente con las funciones de "Fijación y sistematización" y "Control y evaluación". A través de la metacognición, los estudiantes pueden monitorear su comprensión y ajustar sus estrategias, lo que resulta fundamental para consolidar conceptos matemáticos y mejorar el desempeño en la resolución de problemas.

Finalmente, el sistema de creencias de los estudiantes, que engloba sus actitudes y percepciones hacia las Matemáticas, influye en la función de "Motivación". Estas creencias pueden potenciar o limitar la disposición al aprendizaje, por lo que el docente debe generar un entorno que desafíe y transforme aquellas concepciones negativas, promoviendo una actitud positiva mediante la vinculación de los contenidos con situaciones reales y significativas.

Schoenfeld (1985) destaca que el aprendizaje de las Matemáticas está fuertemente influenciado por los conocimientos previos, las heurísticas, la metacognición y el sistema de creencias de los estudiantes. Estos componentes, al integrarse en la práctica docente, se relacionan con las funciones didácticas, permitiendo potenciar la enseñanza y favorecer el desarrollo de habilidades matemáticas profundas y transferibles.

La enseñanza efectiva de las Matemáticas requiere que el docente no solo domine los conceptos matemáticos, sino que también posea habilidades pedagógicas específicas para implementar las funciones didácticas. Según Torres Fernández (2024) estas habilidades incluyen:

Dominio conceptual: Conocimiento profundo de los conceptos matemáticos, sus aplicaciones y su conexión con otras áreas del currículo. Esto permite al docente contextualizar los contenidos y presentarlos de manera que los estudiantes puedan relacionarlos con su realidad.

Capacidad metodológica: El docente debe dominar las herramientas básicas de la didáctica de la Matemática para abordar situaciones típicas y procedimientos de solución. Diseñar estrategias que fomenten la comprensión conceptual y el razonamiento lógico incluyendo el uso de recursos como software educativo, herramientas tecnológicas y materiales manipulativos.

Fomento del pensamiento crítico: Desarrollo de estrategias que estimulen a los estudiantes a analizar, comparar y evaluar diferentes enfoques para resolver problemas matemáticos.

Gestión del aula: Crear un ambiente que fomente la participación, la colaboración y el respeto por las diferentes estrategias de resolución.

Habilidades comunicativas efectivas: Explicación clara y adaptada de los conceptos matemáticos, utilizando ejemplos prácticos, analogías y representaciones visuales para facilitar la comprensión.

Las funciones didácticas, correctamente implementadas, no solo estructuran el proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también facilitan el desarrollo de un aprendizaje significativo. Este tipo de aprendizaje permite a los estudiantes integrar nuevos conceptos matemáticos en sus esquemas previos, relacionándolos con situaciones reales y aplicándolos a problemas prácticos. Según Reyes Carrillo et al., (2023) las funciones didácticas deben concebirse como un sistema interrelacionado que propicie la asimilación consciente y crítica de los conocimientos matemáticos, permitiendo a los estudiantes transferir lo aprendido a nuevos contextos y desafíos.

Estrategia para desarrollar el taller

Metodología seleccionada

La metodología del taller está diseñada para combinar elementos de exposición teórica, debate guiado y reflexión colectiva, organizados de manera que el núcleo del aprendizaje sea un análisis crítico mediante preguntas clave durante el tiempo dedicado al debate. Este enfoque permite, primero, establecer una base conceptual sólida; luego, fomentar la interacción y el intercambio de ideas a través de preguntas estructuradas que guían la discusión; y finalmente, consolidar los aprendizajes mediante una síntesis participativa. Esta metodología garantiza una experiencia que equilibra teoría y práctica, promoviendo la transferencia del conocimiento a contextos reales de enseñanza. (110 minutos)

Agenda general del taller

❖ <u>Introducción y contextualización teórica de las funciones didácticas (30 minutos)</u>

<u>Objetivo:</u> Establecer un marco conceptual claro sobre las funciones didácticas, destacando su importancia como herramienta organizadora en la enseñanza de las Matemáticas.

<u>Actividades:</u>

- ✓ Breve presentación de los objetivos del taller y su relevancia en el contexto educativo actual.
- ✓ Exposición detallada sobre las funciones didácticas, abordando sus definiciones, ejemplos y fundamentación teórica, basados en autores relevantes como
- ✓ Ejemplificación práctica de cada función didáctica (aseguramiento del nivel de partida, orientación hacia el objetivo, motivación, tratamiento de la nueva materia, fijación y sistematización, control y evaluación) en contextos específicos de enseñanza matemática.

<u>Resultado esperado:</u> Los participantes comprenderán el concepto y la importancia de las funciones didácticas como marco estructural en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

❖ <u>Debate guiado por preguntas del moderador (65 minutos)</u>

Objetivo: Promover la reflexión crítica, el intercambio de experiencias y la construcción conjunta de soluciones pedagógicas relacionadas con la implementación de las funciones didácticas.

Actividades:

Presentación inicial de preguntas orientadoras, como:

- ✓ ¿Qué desafíos enfrentan los docentes al aplicar las funciones didácticas en sus clases?
- ✓ ¿De qué manera las funciones didácticas pueden adaptarse y contribuir al éxito de metodologías de enseñanza no tradicionales, manteniendo la estructura y el propósito del proceso de enseñanza-aprendizaje?

Organización de los participantes en grupos pequeños para discutir las preguntas. Cada grupo abordará una o más preguntas específicas durante un tiempo determinado (15-20 minutos por pregunta).

En el plenario, cada grupo compartirá sus reflexiones y conclusiones, generando una discusión colectiva moderada. El moderador guiará la discusión para identificar puntos comunes y divergentes, enriqueciendo el análisis.

Resultado esperado: Los participantes analizarán críticamente las funciones didácticas, generarán ideas innovadoras y compartirán estrategias aplicables a sus contextos educativos.

- ❖ Conclusiones colectivas y cierre del taller (15 minutos)
- ❖

Objetivo: Sistematizar los aprendizajes del taller y plantear acciones concretas para implementar las funciones didácticas en el aula.

Actividades:

- ✓ El moderador recogerá las ideas clave surgidas durante el debate y las registrará en un rotafolio o pizarra.
- ✓ Reflexión grupal: Los participantes compartirán brevemente cómo planean aplicar lo aprendido en sus prácticas docentes.
- ✓ Síntesis final del taller, enfatizando los aspectos más relevantes discutidos y los aprendizajes logrados.
- ✓ Agradecimiento a los participantes y entrega de material complementario (resumen teórico y lista de recursos para profundización).
- ✓

Resultado esperado: Los participantes saldrán del taller con una comprensión profunda de las funciones didácticas y con estrategias concretas para implementarlas en sus clases.

Recursos

- ✓ Presentación en PowerPoint con gráficos y esquemas.
- ✓ Ejemplos visuales y problemas reales que ilustran la aplicación de las funciones didácticas.
- ✓ Material impreso con un resumen conceptual para los participantes.
- ✓ Guía de preguntas para el debate, distribuida a cada grupo.
- ✓ Rotafolios, pizarras o láminas para registrar las ideas principales de cada grupo.
- ✓ Micrófono, en caso de grupos grandes, para facilitar la participación.

Consideraciones finales

Con esta estrategia, el taller no solo asegura la transmisión de conocimientos teóricos sobre las funciones didácticas, sino que también promueve un espacio de aprendizaje colaborativo y de reflexión práctica. Al integrar la exposición teórica con el debate guiado y las conclusiones colectivas, los participantes no solo comprenderán la importancia de estas funciones como marco organizador del proceso de enseñanza-aprendizaje, sino que también desarrollarán habilidades para aplicarlas en contextos educativos diversos, incluidos aquellos que incorporan metodologías no tradicionales.

El enfoque basado en preguntas garantiza que los asistentes participen de manera activa, analicen críticamente sus propias prácticas pedagógicas y generen propuestas innovadoras adaptadas a las necesidades de sus estudiantes. Esto fomenta un aprendizaje significativo y sostenible, proporcionando herramientas concretas que mejoran su desempeño docente, fortalecen su capacidad para enfrentar desafíos pedagógicos y potencian su creatividad en la planificación y ejecución de clases. Al integrar estas experiencias y conocimientos, los docentes estarán mejor preparados para implementar las funciones didácticas como un eje fundamental de su práctica educativa, contribuyendo al desarrollo de una enseñanza estructurada, dinámica e innovadora que favorezca el aprendizaje matemático en cualquier contexto educativo.

Referencias

Ballester Pedroso, S., Santana de Armas, H., Hernández Montes de Oca, S., Cruz Arango González, C., García García, M., Álvarez Gómez, A., Rodríguez, M., Batista, L. C., Villegas Jiménez, E., Almeida Carazo, B., & Torres Fernández, P. (2001). *Metodología de la enseñanza de la Matemática: Vol. I* (Pueblo y Educación, Ed.).

Brousseau, G. (1997). Theory of Didactical Situations in Mathematics: Didactique des Mathématiques, 1970–1990. *Springer Science & Business Media*, *19*.

Danilov, M. A., & Skatkin, M. N. (1975). *Didáctica de la escuela media.* (Pueblo y Educación., Ed.).

Galperin, P. Y. (1986). *Sobre el método de formación por etapas de las acciones mentales.* (Pueblo y Educación, Ed.).

Jungk, W. (1975). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática* (Pueblo y Educación, Ed.).

Lessani, A., Suraya Md. Yunus, A., & Bt Abu Bakar, K. (2017). Comparison of new mathematics teaching methods with traditional method. *International Journal of Social Sciences*, *3*(2), 1285–1297. https://doi.org/10.20319/pijss.2017.32.12851297

Reyes Carrillo, R. Á., La O Ramírez, L., & Licea Reyes, M. E. (2023). Las funciones didácticas en el aprendizaje de los educandos del Nivel Educativo Primaria. *Revista Didáctica y Educación.*, *14*, 120–140.

Ruiz Cordovés, R., & Beltrán Pazo, C. (2021). Las funciones didácticas en la enseñanza de la Matemática. *EduSol* , *21*.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* (Academic Press, Ed.).

Talízina, N. F. (1988). *Psicología de la enseñanza* (Editorial Pueblo y Educación., Ed.).

Torres Fernández, P. A. (2024). Niveles de preparación didáctico-metodológica de los docentes para el trabajo con la Enseñanza Desarrolladora. *VARONA, Revista Científico-Metodológica*, *79*.

Vîgotskiy, L. S. (1982). *Pensamiento y lenguaje.* (Editorial Pueblo y Educación, Ed.; 5ta ed.).

Generalización y estrategia: Juegos matemáticos para potenciar el aprendizaje en el aula

Leonel **Chaves Salas**
Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
leochaves@itcr.ac.cr
Melvin **Ramírez Bogantes**
Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
meramirez@itcr.ac.cr

Resumen

El presente taller tiene como propósito proporcionar a los docentes de educación secundaria herramientas didácticas innovadoras mediante el uso de juegos matemáticos de estrategia como recurso de enseñanza. A partir de un enfoque metodológico activo y participativo, el taller explora cómo estos juegos pueden mejorar la motivación estudiantil, fortalecer el pensamiento crítico y desarrollar habilidades cognitivas superiores. Se abordarán cinco etapas clave en la implementación de los juegos: sorpresa y motivación, análisis del juego, justificación matemática, identificación de conceptos y generalización, permitiendo así un aprendizaje progresivo y significativo. Además, se fundamenta en un marco teórico que integra el aprendizaje basado en juegos, el pensamiento estratégico en Matemáticas y la generalización matemática a partir de patrones, garantizando su aplicabilidad en el aula. A lo largo del taller, los participantes experimentarán juegos matemáticos, analizarán su estructura y diseñarán actividades adaptadas a sus contextos educativos, con el fin de replicarlas en sus propias prácticas docentes y enriquecer la enseñanza de la Matemática.

Palabras clave: Educación Matemática; juegos de estrategia; resolución de problemas; estrategias didácticas; aprendizaje activo.

Introducción

La enseñanza de las Matemáticas enfrenta desafíos significativos en la educación secundaria, entre los que destacan la falta de motivación estudiantil, la dificultad en la comprensión conceptual y la limitada aplicación de conocimientos en contextos reales. Estos factores contribuyen a una percepción negativa de la Matemática y a un bajo rendimiento en la materia. Investigaciones han evidenciado que el aprendizaje basado en juegos y dinámicas interactivas mejora la participación y el interés de los estudiantes, al presentar los conceptos matemáticos de una manera más atractiva y accesible (Guzmán y Fernández, 2016). En particular, los juegos de estrategia ofrecen un entorno en el que los alumnos pueden experimentar, tomar decisiones y desarrollar habilidades de razonamiento lógico sin la presión de los métodos tradicionales de enseñanza.

Ante esta realidad, se hace evidente la necesidad de transformar la enseñanza de la Matemática, incorporando metodologías activas que fomenten el pensamiento crítico y la resolución de problemas. La gamificación y el uso de juegos matemáticos han demostrado ser estrategias efectivas para fortalecer la autonomía y el aprendizaje significativo en los estudiantes (Boaler, 2016). Los juegos de estrategia permiten a los alumnos enfrentarse a desafíos matemáticos en un contexto lúdico, lo que favorece la exploración de patrones, la formulación de hipótesis y la aplicación de modelos matemáticos a problemas reales. Además, estas actividades promueven la interacción y el trabajo en equipo, fortaleciendo la comunicación matemática y el desarrollo de habilidades socioemocionales.

Relevancia y aplicabilidad de los juegos de estrategia en la Educación Matemática

El impacto positivo de los juegos de estrategia en la Educación Matemática ha sido ampliamente documentado. Se ha encontrado que su uso mejora el desarrollo de habilidades cognitivas superiores, como el pensamiento lógico, la toma de decisiones y la capacidad de abstracción (Kaput, 2008). Juegos como el ajedrez, el cubo de Rubik y otros rompecabezas estratégicos han sido empleados con éxito en contextos educativos para reforzar el aprendizaje de conceptos algebraicos y geométricos, al tiempo que incrementan la motivación y el compromiso de los estudiantes. Estas herramientas brindan la oportunidad de aprender de manera experiencial, permitiendo a los estudiantes construir su conocimiento de forma activa y significativa.

En este contexto, el presente taller tiene como objetivo proporcionar a los docentes herramientas prácticas para incorporar estas metodologías en la enseñanza de la Matemática. A través de la exploración y aplicación de distintos juegos de estrategia, los participantes conocerán cómo estructurar actividades que potencien el pensamiento matemático y favorezcan el aprendizaje basado en la resolución de problemas. Además, se abordarán estrategias de implementación en el aula y se analizarán experiencias exitosas en la integración de juegos en la enseñanza de la Matemática, con el fin de garantizar su aplicabilidad y efectividad en diversos entornos educativos.

En el taller se resaltarán cinco etapas claves que se pueden desarrollar en la implementación de un juego de estrategia. En la primera etapa, sorpresa y motivación, se busca captar el interés de los participantes mediante la presentación del juego en un contexto atractivo y desafiante, incentivando la curiosidad y el deseo de resolver problemas. Luego, en la etapa de análisis del juego, los participantes explorarán las reglas, patrones y estrategias involucradas, fomentando la observación y el pensamiento crítico. La tercera fase, justificación matemática, permitirá vincular el juego con principios matemáticos, analizando sus fundamentos lógicos y estructurales. En la cuarta etapa, identificación de conceptos, se conectarán las estrategias utilizadas con contenidos curriculares específicos, facilitando la comprensión y aplicación de nociones matemáticas en un contexto significativo. Finalmente, en la fase de generalización, se promoverá la abstracción y transferencia del conocimiento, permitiendo a los participantes extrapolar las estrategias aprendidas a otros problemas matemáticos y situaciones del mundo real.

Este enfoque estructurado busca que el uso de los juegos de estrategia en la Educación Matemática no solo sea una herramienta lúdica, sino un recurso didáctico efectivo para fortalecer el pensamiento matemático y la resolución de problemas. Esto permitirá maximizar el aprendizaje y la aplicabilidad de los conceptos matemáticos a través del juego.

Marco referencial

El diseño de estrategias didácticas innovadoras en la enseñanza de las Matemáticas requiere un marco teórico sólido que sustente su implementación y efectividad en el aula. En este sentido, el presente taller se fundamenta en tres pilares teóricos principales: el aprendizaje basado en juegos, el desarrollo del pensamiento estratégico en Matemáticas y la generalización matemática a partir de patrones.

Aprendizaje basado en juegos en la Educación Matemática

El aprendizaje basado en juegos se fundamenta en la idea de que el uso de actividades lúdicas en la enseñanza permite una interacción significativa con los conceptos matemáticos, promoviendo el pensamiento crítico y la resolución de problemas (Gee, 2007). Este enfoque favorece la exploración y experimentación, permitiendo a los estudiantes construir su conocimiento a partir de experiencias concretas (Papadakis *et al.*, 2018).

Investigaciones recientes han demostrado que los juegos en el aula pueden incrementar la motivación estudiantil y mejorar la capacidad de resolución de problemas matemáticos (Wouters *et al*., 2019). En particular, los juegos de estrategia han sido identificados como herramientas clave para el desarrollo de habilidades de razonamiento lógico y toma de decisiones fundamentadas. Devlin (2011) señala que los juegos permiten a los estudiantes formular hipótesis, evaluar escenarios y anticipar consecuencias**,** lo que fortalece su capacidad de argumentación matemática y pensamiento estructurado.

Pensamiento estratégico y su desarrollo en la enseñanza de las Matemáticas

El pensamiento estratégico en Matemáticas implica la capacidad de analizar patrones, estructurar razonamientos y tomar decisiones óptimas con base en información previa (Schoenfeld, 2014). Este tipo de pensamiento es fundamental en la resolución de problemas y en la construcción de conocimiento matemático sólido.

Según Kebritchi *et al.,* (2017), los juegos de estrategia fomentan el razonamiento inductivo y deductivo**,** promoviendo la capacidad de estructurar argumentaciones lógicas y justificar respuestas de manera rigurosa. A través de la experimentación con juegos, los estudiantes desarrollan habilidades para prever resultados, adaptar estrategias y reflexionar sobre los procesos matemáticos involucrados**.**

Generalización matemática a partir de patrones

La generalización matemática es un proceso esencial en el aprendizaje, ya que permite a los estudiantes extrapolar reglas y principios a contextos más amplios (Mason, 2002). Este proceso implica la identificación de estructuras matemáticas dentro de problemas concretos y su aplicación a nuevas situaciones, promoviendo la comprensión profunda de los conceptos.

A través del análisis de juegos de estrategia**,** los participantes del taller explorarán cómo la identificación de patrones puede llevar a la formulación de reglas generales. Devlin (2011) destaca que el desarrollo de la capacidad de reconocer estructuras generales a partir de ejemplos específicos es fundamental en la enseñanza de la Matemática. En este sentido, los juegos proporcionan un entorno ideal para que los estudiantes formulen conjeturas, validen hipótesis y desarrollen estrategias matemáticas transferibles a otros contextos**.**

El presente taller, por tanto, se fundamenta en un marco teórico que integra estos enfoques para comprender la importancia del uso de juegos en la enseñanza de las Matemáticas y su aplicación efectiva en el aula.

Metodología del taller

En este taller se sigue una metodología activa y participativa que permite a los docentes experimentar, analizar y diseñar actividades basadas en juegos matemáticos de estrategia. Se busca generar un espacio dinámico donde los participantes comprendan los fundamentos teóricos del uso de juegos en la enseñanza y desarrollen habilidades prácticas para su aplicación en el aula.

Estrategia metodológica

El taller se desarrollará mediante una combinación de estrategias didácticas, favoreciendo la exploración, el análisis y la aplicación de los juegos en la enseñanza de las Matemáticas.

- *Exploración guiada*: Los participantes experimentarán juegos sin explicaciones previas, fomentando la indagación y el descubrimiento de estrategias.
- *Trabajo en grupos:* Se organizarán equipos para analizar patrones y estrategias matemáticas dentro de los juegos.
- *Diseño de estrategias didácticas:* Los docentes crearán y adaptarán juegos a diferentes niveles educativos y contextos específicos.
- *Cierre y retroalimentación:* Reflexión sobre los aprendizajes adquiridos y discusión sobre su aplicabilidad en el aula.

Justificación de la metodología

El uso de juegos en la enseñanza de la Matemática ha demostrado favorecer el aprendizaje significativo y la participación activa del estudiante (Cai *et al.*, 2019). La combinación de exploración, discusión y diseño permite que los docentes no solo comprendan los conceptos teóricos, sino que también adquieran herramientas para aplicarlos en su práctica educativa**.**

Esta metodología asegura que el proceso de enseñanza integre la experimentación con el análisis reflexivo**,** permitiendo que los docentes internalicen estrategias que puedan replicar con sus estudiantes para mejorar la comprensión matemática.

Agenda general del taller

El taller se desarrollará en cinco fases, con una duración total de 1 hora y 50 minutos (110 minutos), distribuidos de la siguiente manera:

Fase	**Duración en minutos**	**Actividades principales**
Introducción y motivación	10	Presentación del taller y breve discusión sobre el papel de los juegos en la enseñanza de las Matemáticas.
Exploración de juegos	25	Participación en juegos matemáticos sin instrucciones previas para promover la indagación y el descubrimiento.
Análisis y justificación	30	Discusión en grupos sobre estrategias ganadoras, patrones y justificación matemática de los juegos.
Diseño de actividades	30	Creación de variantes y adaptación de juegos para diferentes niveles educativos.
Reflexión y cierre	15	Puesta en común de estrategias, desafíos y oportunidades para la implementación en el aula.

La metodología propuesta permite que los docentes experimenten los juegos de estrategia desde una perspectiva didáctica**,** asegurando que comprendan su valor pedagógico **y** puedan aplicarlos de manera efectiva en el aula. Al integrar la exploración, el análisis y el diseño, el taller proporciona una experiencia de aprendizaje práctica y significativa, alineada con los principios de la Educación Matemática contemporánea.

Referencias

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Cai, J., Hwang, S., y Yang, Y. (2019). *Foundations of mathematics education: Research on learning and teaching.* Springer.

Devlin, K. (2011). *Mathematics Education for a New Era: Video Games as a Medium for* Learning. A K Peters/CRC Press.

Gee, J. P. (2007). What Video Games Have to Teach Us About Learning and Literacy. Palgrave Macmillan.

Guzmán, M. y Fernández, L. (2016). *Aprendizaje basado en juegos para potenciar las inteligencias lógico-matemática, naturalista y lingüística en educación primaria*. Pixel-Bit. Revista de Medios y Educación, (49). https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=36846509013

Kaput, J. J. (2008). *Algebra in the early grades*. Lawrence Erlbaum Associates.

Kebritchi, M., Hirumi, A., y Bai, H. (2017). The effects of modern mathematics computer games on mathematics achievement and class motivation. *Computers and Education*, 55(2), 427-443.

Mason, J. (2002). Generalization in Mathematics: A Handbook for Teachers and Students. Routledge.

Papadakis, S., Kalogiannakis, M., y Zaranis, N. (2018). Educational apps from the Android market for preschoolers: A systematic review. *Computers and Education*, 126, 1-17. https://doi.org/10.1016/j.compedu.2018.06.001

Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.

Wouters, P., Van Nimwegen, C., Van Oostendorp, H., y Van Der Spek, E. D. (2019). A meta-analysis of the cognitive and motivational effects of serious games. *Journal of Educational Psychology*, 105(2), 249-265. https://doi.org/10.1037/a0031311

¡Hagamos música con fracciones!
Una experiencia de aula con estudiantes de séptimo grado

Darwin Alexander **Moreno** Gatica
Colegio Monte María Escuela de Matemática
Guatemala
darwinmoreno56@gmail.com

La experiencia de aula se desarrolló con dos grupos de séptimo grado, con un total de 38 estudiantes, este proyecto se divide en tres fases, la de comprensión de conceptos matemáticos relacionados a fracciones, luego la creación o replica de una melodía utilizando los conceptos de fracciones en un recurso digital y por último la preparación de una exposición.

El ministerio de educación de Guatemala anualmente realiza una prueba estandarizada de Matemática, la cual responde a estándares mínimos dentro del marco de competencias básicas para la vida (Palala, 2021). En esta prueba, durante los años que se ha llevado a cabo, los resultados siempre son menores al 15%, este porcentaje indica el nivel de logro, por lo tanto, quiere decir que casi 2 estudiantes de cada 10 alcanzan las competencias mínimas requeridas al salir del estudio escolar. Por este motivo se hace necesario replantear la forma de enseñar Matemáticas partiendo de experiencias que los estudiantes construyan y contribuyan al aprendizaje.

Para el desarrollo de la secuencia didáctica planteada, la construcción de conceptos matemáticos es fundamental y se sustenta en el aprendizaje por descubrimiento de Bruner, Espinoza Freire en su artículo Aprendizaje por descubrimiento Vs aprendizaje tradicional, menciona que Meza Bermeo considera que el aprendizaje por descubrimiento es el transcurso de reorganizar y evolucionar los aprendizajes accediendo a otros más complejos, también estima que, el estudiante para aprender debe estar motivado por satisfacer su curiosidad. (Freire, 2022). Eleizalde (2010) menciona que el aprendizaje por descubrimiento es aquel en el que los estudiantes construyen por sí mismos sus propios conocimientos, en contraste con la enseñanza tradicional o trasmisora del conocimiento, donde el docente pretende que la información sea simplemente recibida por los estudiantes.

A continuación, se detallan las tres fases del proyecto: 1) Comprensión de conceptos: el objetivo es el domino de los conceptos de fracción. Las actividades de construcción involucran ejercicios individuales y grupales, la adquisición de los conceptos se realizó, partiendo de materiales concretos, realizando representaciones gráficas, para llegar al lenguaje simbólico o numérico, para esto se elaboró una secuencia didáctica donde se trabajó de forma sistemática estos conocimientos previos para poder elaborar la melodía musical posteriormente. 2) Elaboración de pieza musical: El objetivo era crear o replicar una pieza musical, utilizando el recurso Amplify Polypad, el cuál es una herramienta que contiene manipulativos virtuales y permite generar piezas musicales utilizando fracciones. Se desarrolló un ejercicio donde notaron que la fracción se relaciona con los tiempos de las notas, y que cada nota tiene un sonido y un valor, que a su vez se puede representar en distintas formas, la utilizada en el proyecto fue la del cifrado americano. Luego de experimentar con la herramienta y tener los conceptos claros, procedieron a completar un formato donde debían colocar la melodía a replicar, realizar la escritura en notas en escala de sol, luego expresar cada nota en fracción según el tiempo en la melodía, después escribir el cifrado americano de las notas para por último trasladar todo esto al recurso Polypad y generar la melodía. 3) Presentación de proyecto: el objetivo era expresar de forma verbal y escrita el desarrollo de lo trabajado y aprendido.

Dentro de los resultados obtenidos relevantes, el 100% de las estudiantes, hicieron entrega de la fase 2 y 3, las estudiantes manifestaron que el proyecto les había permitido observar la relación entre las fracciones y la música, también su aplicación directa al momento de generar una pieza musical, ya que se percataron que, si colocaban otros valores a las notas, estas no sonaban como debían. Otro logro que generó el proyecto fue que las estudiantes aplicaron un concepto en una situación real, en la siguiente gráfica se observa lo que dijeron al respecto:

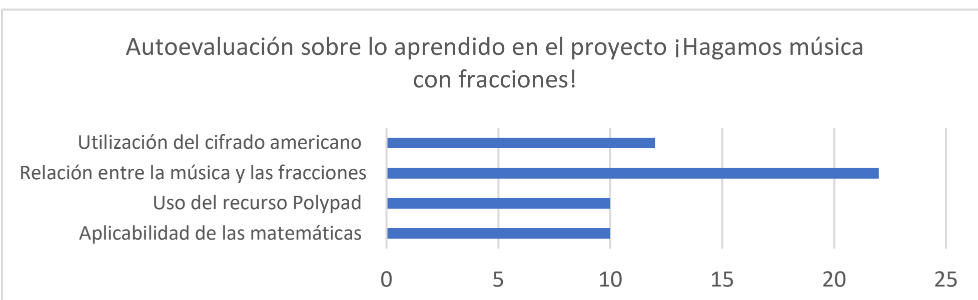


Figura 1. Encuesta privada.

Se observa que 22 estudiantes manifestaron que aprendieron sobre la relación que existe entre la música y las fracciones, 10 estudiantes mencionaron que aprendieron la aplicabilidad que la Matemática puede tener en otros contextos.

Regularmente las Matemáticas son enfocadas únicamente a lo algorítmico y a la repetición de procedimientos memorísticos, nuevamente sin sentido, el proyecto permite que se expresen de forma escrita y verbal donde se evidencia el dominio de lo que desarrollaron y aprendieron.

Referencias y bibliografía

Eleizalde M., P. N. (2010). Aprendizaje por descubrimiento y su eficacia en la enseñanza de la Biotecnología. *Revista de Investigación*, 271-290.

Freire, E. E. (2022). Aprendizaje por descubrimiento Vs aprendizaje tradicional. *Revista Transdisciplinaria de Estudios Sociales y Tecnológicos*, 73-81.

Palala, A. (2021). ¿Cómo estamos aprendiendo matemática en primaria? Innovación con conocimiento, 55.

Impacto de la actividad “Matemática y tu entorno” en la percepción de las Matemáticas en estudiantes universitarios

Ana Mercedes **Báez**
Ciclo Básico, Universidad ISA
República Dominicana.
abaez@isa.edu.do
Heidy María **Gómez**
Ciclo Básico, Universidad ISA
República Dominicana.
heidygomez@isa.edu.do
Ignacio **Rodríguez**
Ciclo Básico, Universidad ISA
República Dominicana.
irodriguez@isa.edu.do

Resumen

Las Matemáticas suelen verse como algo abstracto y alejado de la realidad, lo que representa un reto en la educación universitaria. Para cambiar esta percepción, la Universidad ISA llevó a cabo la actividad "Matemática y tu Entorno", basada en la Matemática realista, con la participación de más de 100 estudiantes de distintas carreras, quienes aplicaron conceptos matemáticos a problemas reales de su área. El estudio siguió un enfoque mixto con diseño pre-experimental, evaluando su impacto en un ciclo académico. Se aplicó una encuesta subdividida en distintos momentos (antes, durante y después), combinando preguntas cerradas y abiertas, además de observaciones docentes. Los resultados mostraron un cambio positivo en la forma en que los estudiantes ven las Matemáticas, destacando su utilidad para resolver problemas, desarrollar el pensamiento crítico y fomentar el trabajo en equipo. Esta experiencia confirmó que las Matemáticas, lejos de ser solo teoría, son una herramienta clave en la vida profesional.

Palabras claves: Matemática Aplicada; Innovación Educativa; Proyectos Interdisciplinarios; Trabajo Colaborativo; Interacción Matemática-Realidad.

Introducción

Las Matemáticas suelen ser percibidas como una disciplina abstracta, alejada de la vida cotidiana, lo que representa un reto persistente en la educación universitaria (Villar-Sánchez *et al*., 2022). Esta desconexión entre el contenido matemático y la realidad de los estudiantes ha motivado el diseño de estrategias pedagógicas innovadoras, orientadas a vincular los conceptos matemáticos con contextos reales y significativos (OECD, 2023; Chacón-Vargas y Roldán-Villalobos, 2021). A través de enfoques activos y contextualizados, se ha demostrado una mejora en la actitud, el rendimiento académico y el desarrollo de habilidades como el pensamiento crítico y la creatividad (Catalán-Maldonado *et al*., 2023; Prada Núñez *et al*., 2021).

En este contexto, la Universidad ISA llevó a cabo la actividad "Matemática y tu Entorno", una iniciativa interdisciplinaria que involucró a más de 100 estudiantes de distintas carreras, como agronomía, veterinaria y administración. El propósito fue demostrar la aplicabilidad de las Matemáticas en diversas áreas del conocimiento mediante presentaciones, conferencias y exposiciones interactivas. Organizada en 12 bloques temáticos, la actividad permitió explorar el papel de las Matemáticas en ámbitos como la historia, la naturaleza, la tecnología, la poesía y los juegos, promoviendo un aprendizaje más cercano, práctico y creativo. Este artículo analiza el impacto de dicha experiencia en la percepción estudiantil sobre las Matemáticas y su contribución al desarrollo de competencias clave, como la creatividad, la colaboración y el pensamiento crítico.

Marco Teórico

La propuesta pedagógica que sustenta esta experiencia se basa en la Matemática realista, un enfoque impulsado por Hans Freudenthal, quien plantea que las Matemáticas no deben enseñarse como un conjunto de reglas abstractas, sino como una actividad humana que parte de situaciones comprensibles para los estudiantes. Según esta teoría, el aprendizaje matemático debe construirse progresivamente a partir de la resolución de problemas contextualizados, permitiendo a los alumnos descubrir, formalizar y aplicar conceptos en su entorno real (Lázaro Guillermo *et al*., 2024).

Desde esta perspectiva, las Matemáticas dejan de ser vistas como una asignatura teórica y desconectada, y se convierten en una herramienta significativa para la vida cotidiana y profesional. Estudios recientes refuerzan esta visión, indicando que estrategias didácticas contextualizadas favorecen una actitud más positiva hacia la disciplina y generan mejores resultados académicos (Prada Núñez *et al*., 2021). Además, se reconoce la importancia de integrar emociones, creatividad y colaboración en el proceso de aprendizaje matemático, para lograr un impacto duradero en la formación del estudiante (Catalán-Maldonado *et al*., 2023).

Metodología

El estudio empleó un enfoque mixto con un diseño pre-experimental, evaluando su impacto en un solo ciclo académico sin grupo de control. Participaron más de 100 estudiantes de la Universidad ISA de carreras como Ingeniería Agronómica, Tecnología de los Alimentos, Administración y Veterinaria, lo que permitió explorar distintas perspectivas sobre la aplicabilidad de las Matemáticas en sus profesiones. Para medir los cambios en su percepción, se aplicó una encuesta subdividida en diferentes momentos (antes, durante y después de la actividad), con preguntas cerradas y abiertas, facilitando el análisis tanto cuantitativo como cualitativo.

El tratamiento de los datos se basó en estadística descriptiva, utilizando medidas de tendencia central y dispersión para analizar las respuestas cuantitativas, mientras que las respuestas abiertas fueron examinadas mediante análisis de contenido. Además, se consideraron observaciones directas de los docentes (autores del estudio), permitiendo contrastar la información con lo observado en la dinámica de la actividad. La combinación de estos métodos evidenció que la estrategia fortaleció el interés y la valoración de las Matemáticas como una herramienta práctica y creativa en su formación profesional (Hernández Sampieri *et al*., 2014).

Resultados

Los siguientes resultados reflejan cómo la actividad impactó la percepción de los estudiantes sobre la utilidad y aplicabilidad de las Matemáticas, demostrando la efectividad de esta estrategia pedagógica.

Como se observa en la Figura 1, las percepciones iniciales sobre las Matemáticas eran diversas. Mientras una parte del estudiantado las consideraba fascinantes, otros las veían difíciles, lejanas o poco útiles en su vida cotidiana. Esta variedad de opiniones revela no solo distintas experiencias previas, sino también la urgencia de acercar la asignatura a contextos reales.

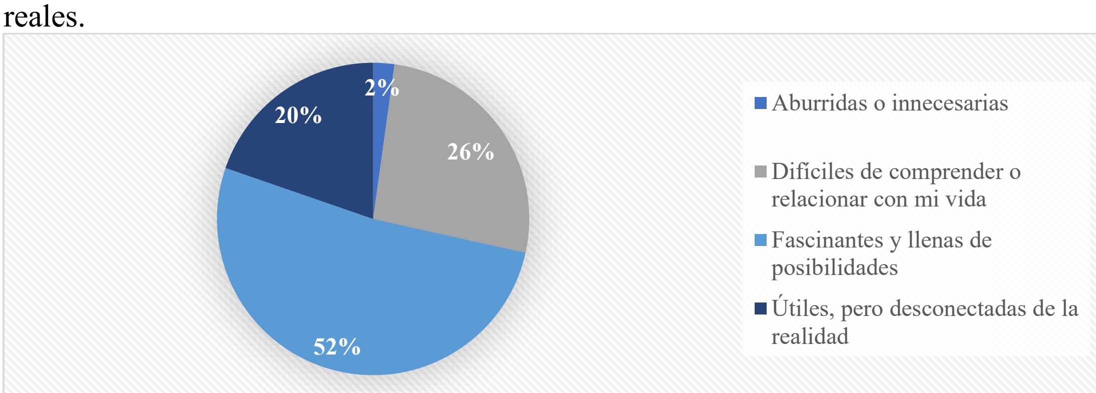


Figura 1. Percepción inicial de los estudiantes ante las Matemáticas.

La Figura 2 revela distintas formas en que los estudiantes comprenden la utilidad de las Matemáticas. Para muchos, representan herramientas valiosas en su vida cotidiana, mientras que otros las vinculan más con lo académico o científico. También hay quienes perciben su aplicación como limitada a contextos muy específicos. Esta diversidad sugiere la necesidad de mostrar con mayor claridad su utilidad en la vida real.

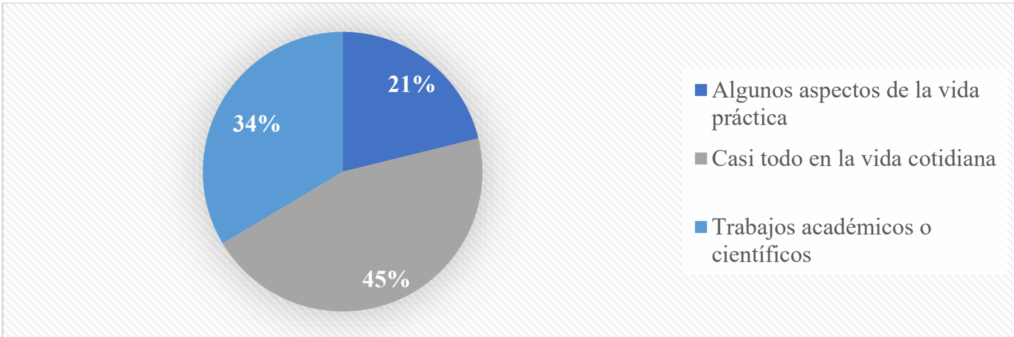


Figura 2. Percepción inicial de los estudiantes sobre las aplicaciones prácticas de la Matemática.

Durante la elaboración de los proyectos, las emociones de los estudiantes fueron variables. Al inicio, muchos sintieron nerviosismo e incertidumbre, mientras que otros mostraron curiosidad y entusiasmo al aplicar los conceptos en situaciones reales. Conforme avanzaban, desarrollaron mayor autonomía, asumiendo responsabilidades dentro de sus equipos. Hubo momentos de tensión, pero también de satisfacción al lograr avances. La Figura 3 sintetiza visualmente estas experiencias y la dinámica emocional durante la actividad.

Figura 3. Síntesis visual de las experiencias estudiantiles durante la actividad.

En relación con la aplicación práctica de los conceptos matemáticos, 126 de los 137 estudiantes afirmaron que su proyecto reflejaba claramente cómo las Matemáticas pueden aplicarse en la vida cotidiana. Este resultado confirma que la actividad no solo permitió poner en práctica los conocimientos matemáticos, sino que también ofreció una experiencia significativa. Las Tablas 1 y 2 presentan una detallada ejemplificación y descripción de los proyectos desarrollados, organizados según el área y la carrera académica, evidenciando la diversidad de enfoques aplicados por los estudiantes.

Tabla 1

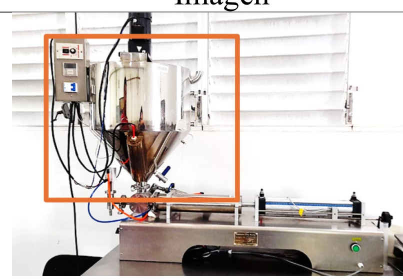
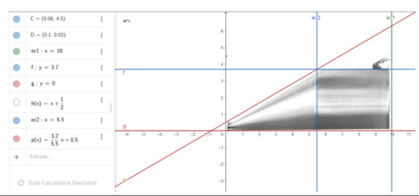
Ejemplificación de Proyectos Presentados según Área y Carrera Académica

Carrera	Matemática	Cálculo	Estadística
Ingeniería Agronómica	Cálculo del área de parcelas agrícolas mediante figuras geométricas.	Optimización de recursos hídricos en sistemas de riego.	Análisis de datos climáticos para predicción de cosechas.
Tecnología de los Alimentos	Diseño de empaques eficientes utilizando principios geométricos.	Modelado de reacciones químicas en procesos alimenticios.	Estudio estadístico de preferencias de consumidores en productos locales.
Administración	Planificación financiera usando progresiones y porcentajes.	Maximización de ganancias aplicando funciones lineales.	Encuestas para análisis de mercado y toma de decisiones estratégicas.
Veterinaria	Análisis geométrico de fracturas en radiografías veterinarias.	Cálculo del volumen de dosificaciones medicamentosas.	Estudio estadístico de prevalencia de enfermedades en animales.

Nota. Elaboración Propia

Tabla 2

Descripción de Proyectos Presentados según Área y Carrera Académica

Carrera	Área	Descripción	Imagen
Tecnología de los Alimentos	Cálculo	En la Universidad ISA, los estudiantes calcularon el volumen de una tolva utilizando los métodos de discos y capas con apoyo de GeoGebra. Plantearon y resolvieron las integrales según distintos ejes de revolución, compararon los resultados con herramientas digitales y analizaron la precisión obtenida. Finalmente, discutieron las diferencias encontradas y exploraron la posibilidad de simular el sólido en software especializado.	 
Agronomía	Estadística	En una finca agrícola de la Universidad ISA, donde se cultiva plátano, guineo y rulo bajo las mismas condiciones de terreno, los estudiantes analizaron los registros de producción de cinco semanas para determinar el promedio de rendimiento, calcular la desviación estándar y establecer cuál de los cultivos es el más adecuado en función del mayor promedio de producción.	

Agronomía	Matemática	En un área destinada a la crianza de iguanas en la Universidad ISA, los estudiantes aplicaron conceptos matemáticos para analizar y modelar geométricamente el hábitat. A partir de sus dimensiones (altura de 30 p, circunferencia de 62.7 p, diámetro de 20 p y radio de 10 p), calcularon el área de la base y plantearon la ecuación de una hipérbola con abertura hacia abajo que represente su estructura.	

Nota. Elaboración Propia

Al finalizar la actividad, se aplicó un instrumento para explorar la percepción estudiantil sobre las Matemáticas y su impacto en el aprendizaje. La Figura 4 refleja un cambio positivo: muchos las reconocen como clave para comprender el mundo, otros valoran su creatividad y presencia cotidiana, y varios integran ambas visiones. Incluso quienes antes las veían lejanas, comienzan a percibirlas como útiles y accesibles, lo que sugiere una comprensión más práctica y cercana de la disciplina.

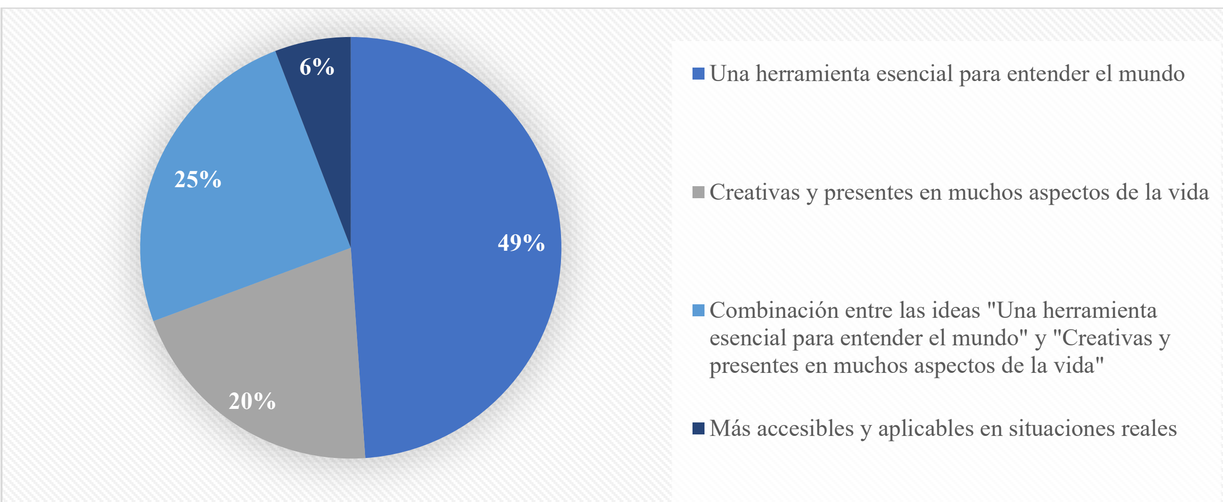


Figura 4. Percepción final de los estudiantes ante las Matemáticas.

Los resultados reflejan un cambio importante en la percepción estudiantil sobre las Matemáticas. La Figura 5, en forma de nube de palabras, resalta términos como "herramienta", "resolver problemas" y "colaboración". Un 54.7 % las considera clave para afrontar desafíos personales y globales, mientras otros destacan su vínculo con el arte, la historia y la ciencia (9.5 %) o su papel en proyectos colaborativos (8.8 %). Esta evolución sugiere una visión más interdisciplinaria y funcional, alejada de la idea de que las Matemáticas son solo fórmulas y números.

Figura 5. Impacto de la actividad en la percepción y aplicación de las Matemáticas

La actividad fue altamente valorada por los participantes, con un 83.2% calificándola como enriquecedora, destacando su impacto en el desarrollo personal y profesional. Un 37.2% resaltó el descubrimiento de nuevas aplicaciones matemáticas, un 23.4% el trabajo en equipo y un 5.8% el desarrollo de habilidades de investigación y presentación. Además, un 16.8% valoró la combinación de estos aprendizajes, evidenciando un enfoque integral en su formación. Estos resultados reflejan cómo la actividad no solo fortaleció conocimientos matemáticos, sino también habilidades clave como la cooperación, la comunicación y la aplicación práctica de conceptos.

Conclusión

La 3ra Exposición Matemática y tu Entorno tuvo un impacto positivo en la percepción estudiantil, ayudándolos a reconocer la importancia de las Matemáticas en su vida cotidiana y futura profesión. Al inicio, algunos las consideraban complejas o poco conectadas con la realidad, pero al finalizar la actividad, muchos comenzaron a verlas como una herramienta esencial para comprender y transformar su entorno. Estos resultados refuerzan la idea de que el contexto es clave en la enseñanza, permitiendo a los estudiantes darle sentido y aplicabilidad a los conceptos matemáticos (Peña-Becerril y Camacho-Zuñiga, 2020).

Desde la perspectiva de la Matemática realista, este tipo de estrategias facilita un aprendizaje más significativo al partir de situaciones concretas y comprensibles. Siguiendo el enfoque de Freudenthal, al integrar las Matemáticas con el entorno, los estudiantes desarrollan habilidades como el pensamiento crítico y la creatividad, además de ampliar su visión sobre su utilidad más allá del ámbito académico (Lázaro Guillermo *et al*., 2024). Dado que el diseño de tareas contextualizadas sigue siendo un desafío para los docentes, este tipo de iniciativas ayuda a construir un aprendizaje más profundo, conectado con los procesos de variación y cambio, fundamentales en diversas disciplinas (Báez, 2018; Báez *et al*., 2017; Báez y Gómez Muñoz, 2025). Por ello, es fundamental seguir implementando estrategias innovadoras que vinculen la enseñanza matemática con el mundo real, promoviendo una formación más dinámica y cercana a las experiencias de los estudiantes.

Agradecimientos

Agradecemos a la Universidad ISA por su apoyo, clave para el éxito de este proyecto y el desarrollo de los estudiantes.

Referencias

Báez, A. (2018). *Estrategia didáctica para el desarrollo conceptual procedimental en el cálculo diferencial de una variable real, para las carreras de ingeniería* [Tesis doctoral, Universidad de Camagüey "Ignacio Agramonte Loynaz", Centro de Estudios de Ciencias de la Educación "Enrique José Varona"].

Báez, A., Pérez-González, O. y Triana-Hernández, B. (2017). Propuesta didáctica basada en múltiples formas de representación semiótica de los objetos matemáticos para desarrollar el proceso de enseñanza-aprendizaje del cálculo diferencial. *Academia y Virtualidad, 10*(2), 20–30. https://doi.org/10.18359/ravi.2743

Báez, A. y Gómez Muñoz, H. (2025). Dificultades en el diseño de tareas matemáticas de desarrollo procedimental de procesos de variación y cambio: un estudio con docentes dominicanos. *Transformación, 21*(e-486). https://transformation.reduc.edu.cu/index.php/transformacion/article/view/486/561

Catalán-Maldonado, V., Roy-Sadradín, D. y Peña-Caldera, V. (2023). Innovación docente y aplicación de metodologías activas en la enseñanza de matemáticas aplicadas. *Atenas, 61*, e11153, 1–13. https://doi.org/10.35622/j.rie.2023.11153

Chacón-Vargas, E. y Roldán-Villalobos, G. (2021). Factores que inciden sobre el rendimiento académico de los estudiantes de primer ingreso del curso matemática general del Instituto Tecnológico de Costa Rica. *Uniciencia, 35*(1), 265–283. https://doi.org/10.15359/ru.35-1.16

Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C. y Baptista Lucio, P. (6.ª ed.). (2014). *Metodología de la investigación*. McGraw-Hill Education.

Lázaro Guillermo, J., Guitton Lozano, E., Pérez Marín, J., Barreda Fachin, M., Peña Pasmiño, R. y Yon Delgado, J. (2024). *Teoría matemática realista de Hans Freudenthal: Didáctica y paradigmas de la investigación*. Editorial Mar Caribe. https://editorialmarcaribe.es/teoria-matematica-realista-de-hans-freudenthal-didactica-y-paradigmas-de-la-investigacion

OECD (2023). *PISA 2022 results (Volume I): The state of learning and equity in education*. OECD Publishing. https://www.oecd.org/content/dam/oecd/en/publications/reports/2023/12/pisa-2022-results-volume-i_76772a36/53f23881-en.pdf

Peña-Becerril, M. y Camacho-Zuñiga, C. (2020). El contexto como una estrategia para fomentar el sentido de utilidad de las matemáticas en estudiantes de ciencias sociales. *Formación Universitaria, 13*(1), 145–156. https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000100145

Prada Núñez, R., Hernández Suárez, C. y Avendaño, W. (2021). Percepción de estudiantes sobre el desarrollo de aptitudes matemáticas en el aula y su relación con el desempeño académico. *Boletín Redipe, 10*(4), 388–401. https://doi.org/10.36260/2256-1536

Villar-Sánchez, P., Arancibia-Carvajal, S., Robotham, H. y González, F. (2022). Factores que inciden en la actitud hacia el aprendizaje de las matemáticas en primer año de ingeniería. *Revista Complutense de Educación, 33*(2), 337–349. https://doi.org/10.5209/rced.74356

Implementación de la metodología COIL en clases espejo entre la Universidad Mariana y la PUCMM

José Bitsmar **Núñez** Vargas
Departamento de Estudios Generales, Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra
República Dominicana
jo.nunez@ce.pucmm.edu.do

Resumen

En este estudio se explora la implementación de la metodología de Aprendizaje Colaborativo Internacional en Línea (COIL) entre la Universidad Mariana de Colombia y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM) de República Dominicana, con el objetivo de valorar su aplicación en el diseño de clases espejo que fomentan la interacción cultural e intelectual entre estudiantes de diferentes contextos. A través de actividades que combinaron el aprendizaje en línea y el aula invertida, se buscó potenciar la participación activa y el desarrollo de competencias interculturales. Los resultados indicaron un alto nivel de satisfacción entre los estudiantes, quienes apreciaron la calidad de los recursos y la experiencia de trabajar con docentes internacionales, lo que sugiere que estas metodologías pueden enriquecer significativamente el aprendizaje y la colaboración en un entorno globalizado.

Palabras clave: Aprendizaje en línea; Educación Matemática; Educación superior; Investigación educativa; Aula invertida; Matemáticas; Mediación pedagógica; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra; República Dominicana.

Definición y relevancia del problema

En el contexto actual de la educación superior, se hace crucial la adaptación del estudiantado a las exigencias de un mundo globalizado. Esto implica una evolución en las metodologías educativas que garantice, no solo la adquisición de conocimientos, sino también el desarrollo de competencias interculturales y habilidades colaborativas. Este estudio se fundamenta en la implementación de la metodología de Aprendizaje Colaborativo Internacional en Línea (COIL) mediante clases espejo entre la Universidad Mariana de Colombia y la

Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM), facilitando la interacción entre estudiantes y docentes de ambos contextos para enriquecer el proceso de aprendizaje a través del intercambio de experiencias y conocimientos.

La relevancia de esta investigación radica en su búsqueda de diseñar y evaluar experiencias de aprendizaje que integren metodologías innovadoras, como el aula invertida y las clases espejo, que fomentan la colaboración y el trabajo en equipo. Estas estrategias preparan a los estudiantes para abordar problemas reales en un entorno educativo que valora la participación global. Al explorar el potencial de la metodología COIL, este trabajo aspira a contribuir al desarrollo de una Educación Matemática más efectiva, adaptada a los desafíos del siglo XXI y fortaleciendo las competencias sociales, culturales y tecnológicas de los estudiantes.

En este sentido, se plantean las siguientes preguntas de investigación, las cuales orientan el estudio de esta propuesta:

- ¿Cuál es el nivel de satisfacción de los estudiantes respecto a la aplicación de una clase espejo?
- ¿Cuáles ventajas brinda la aplicación de la metodología de aula invertida en el desarrollo de experiencias de Aprendizaje Colaborativo Internacional en Línea (COIL) como las clases espejo?
- ¿Cuál es la pertinencia de una clase espejo en el marco de aplicación de las metodologías COIL?
- ¿Cuáles beneficios se evidencian en la interacción de experiencias COIL respecto al intercambio cultural e intelectual?

La concepción de estas preguntas permite establecer una serie de objetivos que apuntan a conseguir respuestas pertinentes a las necesidades planteadas. En este sentido, se pretende valorar la aplicación la metodología de Aprendizaje Colaborativo Internacional en Línea (COIL) en el diseño de clases espejo entre el curso de Estadística Descriptiva y Razonamiento Cuantitativo de la Universidad Mariana y la asignatura Razonamiento Lógico-Matemático de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM).

Referencial teórico

La metodología de Aprendizaje Colaborativo Internacional en Línea (COIL) utiliza tecnologías digitales para conectar a estudiantes y docentes de diferentes contextos culturales en actividades de aprendizaje colaborativo (Rubin, 2017). Su incorporación en la educación superior busca responder a los desafíos de la globalización, facilitando una interacción directa y significativa entre estudiantes de distintos países (O'Dowd, 2021). Las experiencias de colaboración COIL brindan la oportunidad de transformar los espacios de aprendizaje al ofrecer experiencias globales accesibles a estudiantes que no pueden participar en programas de movilidad física (Helm, 2015), y su enfoque intercultural permite a los estudiantes desarrollar habilidades como la empatía y la resolución de conflictos (Deardorff, 2006). Este modelo combina enfoques constructivistas y colaborativos, alentando a los estudiantes a ser protagonistas de su aprendizaje mientras trabajan en tareas auténticas y significativas, promoviendo así una interacción enriquecedora y fomentando el pensamiento crítico, aspectos esenciales en la educación superior del siglo XXI (Guth et al., 2012).

Por otro lado, las clases espejo, un formato dentro del COIL, permiten la interacción simultánea entre estudiantes de diferentes instituciones a través de actividades compartidas (Rubin & Guth, 2015). Estas clases favorecen no solo el aprendizaje disciplinar, sino también el entendimiento cultural, conectando a participantes de diversas perspectivas. Son especialmente efectivas para integrar teoría y práctica, lo que permite a los estudiantes reflexionar sobre sus conocimientos en contextos globales (Leask, 2015). Su efectividad radica en la integración de herramientas digitales y métodos activos de aprendizaje, como el aula invertida, lo que maximiza la interacción y mejora la motivación (Guth et al., 2012). La estructura típica de una clase espejo incluye varias etapas: planificación conjunta de objetivos, preparación de materiales introductorios, un encuentro sincrónico con actividades colaborativas y, finalmente, actividades posteriores que fomentan reflexiones y una evaluación compartida, valorando el aprendizaje y la colaboración.

Por último, el aula invertida es una metodología que transforma la dinámica tradicional del aula al trasladar la instrucción teórica al espacio individual del estudiante, reservando las sesiones presenciales o virtuales para actividades prácticas y colaborativas (Bergmann & Sams, 2012). Esta estrategia, en el contexto de COIL y la implementación de clases espejo, ofrece una base común de conocimiento que facilita la interacción entre estudiantes de diferentes contextos culturales y académicos (Lo & Hew, 2017). Además, Abeysekera y Dawson (2015) subrayan que el aula invertida incrementa la motivación de los estudiantes y mejora la retención de información al involucrarlos activamente en su aprendizaje. En lugar de recibir la lección teórica en las sesiones sincrónicas, como en los métodos tradicionales, este modelo promueve el aprendizaje autónomo previo a la clase y maximiza el tiempo de interacción entre estudiantes de diversas instituciones, fomentando un aprendizaje activo y significativo.

Método y desarrollo conceptual

La implementación de esta propuesta de colaboración basada en la metodología COIL y clases espejo entre la Universidad Mariana y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM), se desarrolló a través de un proceso estratégico que buscó, dentro de las limitaciones temporales y logística, maximizar el aprendizaje y la experiencia intercultural de los estudiantes participantes. Sin embargo, el mayor reto de planificación se encontró en la coordinación de los espacios simultáneos para hacer posible el intercambio entre ambos grupos. La figura 1 resume el proceso de preparación, ejecución y análisis de esta experiencia. Por lo que, a continuación, se describe cada momento de la implementación.

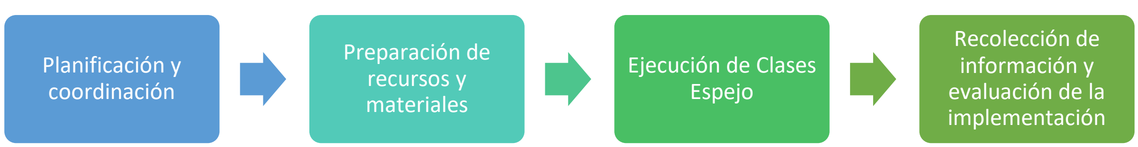


Figura 1. Metodología de trabajo

La planificación de la propuesta comenzó el 18 de septiembre de 2024 cuando la Universidad Mariana envió la propuesta de colaboración por correo mediante la previa coordinación de los equipos de Relaciones Internacionales de ambas universidades. Los docentes involucrados sostuvieron reuniones virtuales donde se discutieron objetivos de la implementación, estructura de las clases espejo y materiales necesarios para su desarrollo. El principal desafío de esta etapa tuvo lugar en la diferencia entre los calendarios académicos: la Universidad Mariana finalizaba su periodo académico en noviembre y la PUCMM en diciembre. Esto limitó la interacción entre grupos de trabajo, aunque se desarrollaron clases espejo como se había decidido. Se acordó realizar dos sesiones interactivas bajo la metodología de aula invertida donde los estudiantes debían completar asignaciones antes de los encuentros con los docentes internacionales para favorecer su participación activa y lograr los objetivos pedagógicos. Las sesiones se describen a continuación:

- El 6 de noviembre, donde la docente colombiana, Angela Daniela Malte, facilitaría la clase de razonamiento lógico-matemático para los estudiantes de la PUCMM con el tema: *Introducción a la Teoría de Conjuntos*.

- El 15 de noviembre, donde el docente dominicano, José Bitsmar Núñez, facilitaría la experiencia de clase con el grupo de estudiantes de la Universidad Mariana con la aplicación de un taller para el *Uso de InfoStat en la Determinación de Estadísticos*.

En segundo lugar, los docentes diseñaron y organizaron los materiales necesarios para el desarrollo de las sesiones, facilitándolos en formato digital mediante las plataformas virtuales de aprendizaje como Moodle, propias de cada institución educativa. Estos recursos incluyeron materiales de estudio previo como documentos explicativos, ejercicios y videos de guía pedagógica que los estudiantes debían revisar antes de cada clase; un cuestionario de autoevaluación para evaluar la comprensión del contenido previo y fomentar la preparación individual de los estudiantes; guías de sistematización y práctica para la facilitación de cada Clase Espejo, es decir, guías de contenido visual que prepararon los docentes para favorecer los momentos de interacción y sistematización del contenido en clase; y finalmente, la implementación de plataformas digitales para llevar a cabo ambas sesiones.

En tercer lugar, cada clase se realizó con una estructura adaptada a las características del grupo y el contenido propuesto. En la primera sesión (6 de noviembre), la docente de la Universidad Mariana dirigió una clase interactiva centrada en habilidades elementales de razonamiento lógico y la teoría de conjuntos, utilizando respuestas del cuestionario de autoevaluación previa. Los estudiantes participaron en discusiones y resolvieron problemas sobre notación, pertenencia, cardinalidad y clasificación de conjuntos. En la segunda sesión (15 de noviembre), el docente de la PUCMM facilitó un taller práctico sobre el uso del software Infostat para determinar estadísticos descriptivos, que incluyó una introducción teórica, ejemplos guiados y ejercicios en las computadoras del laboratorio. Al inicio de cada sesión, se realizaron dinámicas para presentar a los docentes y algunos estudiantes, favoreciendo la interacción.

En cuarto lugar, luego de las sesiones de clases espejo, se llevó a cabo una recolección de información y evaluación para analizar la experiencia desde la perspectiva de los estudiantes, identificando fortalezas, áreas de mejora e impacto de la metodología. Se diseñaron instrumentos específicos para recopilar datos cualitativos y cuantitativos, destacando un formulario de satisfacción con 10 preguntas cerradas según el Net Promoter Score (NPS), que evaluó la claridad de los materiales, la organización de las sesiones y la interacción con docentes internacionales. También se utilizó un cuestionario de autoevaluación previo a la primera sesión, que no solo preparó a los estudiantes, sino que proporcionó datos sobre su comprensión del contenido, ayudando a evaluar el impacto de la metodología de aula invertida.

Resultados

Debido a las limitaciones de tiempo y la proximidad al cierre del periodo académico en la Universidad Mariana, no fue posible recopilar respuestas al formulario de satisfacción de los estudiantes de esa institución. Sin embargo, de los 20 estudiantes inscritos en la asignatura Razonamiento Lógico-Matemático (ESG-105-T) de la PUCMM, participaron 12 estudiantes en la encuesta de satisfacción diseñada para evaluar su experiencia en la implementación de la metodología COIL mediante clases espejo. Este grupo representó el único conjunto de datos recolectados y sus respuestas constituyen la base para el análisis presentado en esta sección (ver figura 2).

Figura 2. Número de participantes en la encuesta de satisfacción

Por otro lado, con el objetivo de obtener evidencia respecto a los objetivos planteados, el análisis de las respuestas se realizó utilizando la estrategia del Net Promoter Score (NPS) o Índice de Promotores Netos, una herramienta ampliamente utilizada para medir la satisfacción y lealtad de los participantes (Owen y Brooks, 2020). El NPS clasifica las respuestas de 0 a 10, donde 9 a 10 son promotores (altamente satisfechos), 7 a 8 son pasivos (neutrales) y 0 a 6 son detractores (insatisfechos), con el índice final calculado al restar el porcentaje de detractores del de promotores, proporcionando un indicador cuantitativo de satisfacción. Según Reichheld (2003), el puntaje puede oscilar entre -100 (todos detractores) y +100 (todos promotores), donde un NPS positivo indica satisfacción y un puntaje superior a 50 es excelente. Los datos se interpretan como: -100 a 0 indica mala percepción, 1 a 50 refleja una percepción positiva con margen de mejora y 51 a 100 denota excelente lealtad y satisfacción. La metodología permite analizar tanto los aspectos positivos como las áreas de mejora identificadas por los estudiantes, como se resume en la tabla 1 del índice de promotores netos por pregunta.

Tabla 1
Índice de Promotores Netos de las respuestas de los estudiantes en la encuesta de satisfacción

Pregunta en la encuesta de satisfacción	Índice NPS	Promotores	Pasivos	Detractores
1. ¿Consideras que los materiales y recursos proporcionados para la clase (lecturas, videos, etc.) fueron adecuados para el aprendizaje en un entorno colaborativo en línea?	83	10	2	0
2. ¿Consideras que la estructura y el ritmo de la clase fueron adecuados para el formato de aprendizaje en línea?	42	6	5	1
3. ¿Consideras que la clase espejo COIL te brindó oportunidades para mejorar tus habilidades interculturales (comunicación, trabajo en equipo, etc.)?	58	7	5	0
4. ¿En qué medida consideras que la clase espejo COIL contribuyó a tu aprendizaje de la temática abordada?	42	5	7	0
5. ¿Cómo calificarías tu nivel de interacción y participación en clase de acuerdo con la guía de los docentes en esta experiencia de colaboración?	41	7	3	2
6. ¿Qué tan clara fue la comunicación entre docente y estudiantes durante esta experiencia de colaboración?	42	6	5	1
7. ¿Cómo calificarías tu experiencia al participar de una sesión de clase en línea con la presencia de un docente internacional?	67	8	4	0
8. ¿Qué tan satisfecho/a estás con el soporte brindado por los profesores en la experiencia previa y durante la clase espejo COIL?	50	7	4	1
9. ¿Recomendarías la participación en una clase espejo COIL a otros estudiantes?	50	8	2	2

Fuente: formulario de satisfacción a estudiantes de la PUCMM. 2024.

De acuerdo con estos resultados, en lo siguiente, se construye un análisis para cada uno de los objetivos específicos planteados en este estudio tomando en cuenta el índice de promotores netos calculados para cada pregunta y clasificando estos resultados de acuerdo con el propósito para el que fueron diseñadas. De esta manera, se aportan conclusiones de manera individual para cada objetivo.

Primero, el nivel de satisfacción de los estudiantes con la experiencia de clase espejo en la metodología COIL, evaluado mediante las preguntas 1, 6, 7, 8 y 9, muestra resultados variados. La adecuación de los materiales y recursos obtuvo un NPS de 83, indicando una percepción muy positiva, lo que sugiere que fueron fundamentales para el aprendizaje colaborativo, con 10 promotores y ningún detractor. Sin embargo, la claridad en la comunicación entre docentes y estudiantes, con un NPS de 42, destaca la necesidad de mejorar las estrategias comunicativas en contextos multiculturales e interuniversitarios, especialmente debido a los retos que presenta la conexión a distancia. La experiencia de trabajar con docentes internacionales fue valorada positivamente, con un NPS de 67, mientras que el soporte de los profesores alcanzó un NPS de 50, reflejando expectativas de un acompañamiento más intensivo. Finalmente, la recomendación de la experiencia también obtuvo un NPS de 50, lo que evidencia una aceptación de la metodología con áreas de mejora identificadas.

Segundo, el análisis de las preguntas 1, 2, 5 y 9 revela ventajas significativas de la metodología de aula invertida en las experiencias COIL. La efectividad del enfoque de preparación previa se evidencia con un NPS de 83 para los materiales y recursos, considerados fundamentales. No obstante, la estructura y ritmo de las clases reflejan un NPS más moderado de 42, lo que sugiere ajustar la planificación para optimizar el aprendizaje virtual. La participación e interacción obtuvieron un NPS de 41, indicando que, aunque se promovió cierto compromiso, algunos estudiantes no lograron integrarse del todo. Aun así, la disposición a recomendar la experiencia (NPS de 50) refuerza que esta metodología es valorada como una herramienta efectiva para el aprendizaje en contextos internacionales, pese a las áreas identificadas para mejora.

Tercero, la evaluación de la pertinencia de las clases espejo dentro de las metodologías COIL, a través de las preguntas 2, 4, 5, 6 y 7, revela áreas de mejora y limitaciones en su implementación. Tanto la estructura y ritmo de las clases, como su contribución al aprendizaje, presentaron un NPS de 42, indicando que algunos estudiantes no vieron un impacto significativo en su aprendizaje. La interacción en clase obtuvo un NPS de 41, reflejando que, si bien algunos valoraron la dinámica, otros enfrentaron obstáculos en su colaboración. La claridad de la comunicación tuvo un NPS de 42, mientras que la experiencia con un docente internacional se destacó con un NPS de 67, subrayando el valor del componente internacional. A pesar de que la metodología se considera pertinente, sus resultados sugieren ajustes para maximizar su efectividad, especialmente con un mayor número de sesiones o actividades grupales que refuercen el dominio de las competencias involucradas en la interacción.

Por último, los beneficios de la interacción en experiencias COIL, evaluados a través de las preguntas 3, 5 y 7, revelan un impacto significativo en el desarrollo de habilidades interculturales. En particular, la pregunta sobre las oportunidades de mejora en competencias interculturales obtuvo un NPS de 58, indicando que los estudiantes consideraron la experiencia enriquecedora para aspectos como la comunicación y el trabajo en equipo. Sin embargo, el análisis de participación, con un NPS de 41, sugiere un compromiso desigual entre los estudiantes, donde algunos tuvieron dificultades para integrarse plenamente. Este fenómeno podría estar relacionado con su nivel de preparación previa. Por otro lado, la experiencia con un docente internacional fue valorada positivamente, alcanzando un NPS de 67, resaltando el valor del componente internacional de la clase espejo en la promoción de intercambios culturales. Estos hallazgos destacan la relevancia de las metodologías COIL en el fortalecimiento de competencias globales, aunque indican la necesidad de optimizar el diseño para maximizar su efectividad.

Conclusiones

A través del análisis de resultados obtenidos mediante un formulario de satisfacción basado en la metodología Net Promoter Score (NPS), se identificaron logros, desafíos y áreas de mejora en relación con los objetivos planteados. Así pues, se sintetizan las conclusiones de la implementación como sigue:

- Los estudiantes demostraron un alto nivel de satisfacción con la experiencia COIL, destacando la calidad de los recursos, el impacto positivo de trabajar con docentes internacionales y la recomendación general de esta metodología, aunque con oportunidades de mejora en la comunicación y el diseño de la experiencia colaborativa.
- La metodología de aula invertida permitió una preparación previa efectiva que favoreció el aprendizaje, aunque es necesario ajustar la estructura y ritmo en las sesiones de sistematización para mejorar la interacción y participación de los estudiantes.
- La clase espejo fue pertinente como una estrategia para promover la internacionalización y el aprendizaje colaborativo, aunque su implementación requiere ajustes en las actividades para maximizar el impacto académico y participativo.
- La interacción en las experiencias COIL fortaleció habilidades interculturales y promovió un enriquecedor intercambio cultural e intelectual, evidenciando el valor de estas dinámicas internacionales en la formación global de los estudiantes.

Referencias y bibliografía

Abeysekera, L., & Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher Education Research & Development*, 34(1), 1-14.

Bergmann, J., & Sams, A. (2012). Flip your classroom: Reach every student in every class every day. *International Society for Technology in Education.*

Deardorff, D. K. (2006). Identification and assessment of intercultural competence as a student outcome of internationalization. *Journal of Studies in International Education*, 10(3), 241-266.

Guth, S., Helm, F., & O'Dowd, R. (2012). *Telecollaborative language learning*. Peter Lang.

Helm, F. (2015). The practices and challenges of telecollaboration in higher education in Europe. *Language Learning & Technology*, 19(2), 197-217.

Helm, F., & Beaven, A. (2020). Developing interculturality through virtual exchange. *Language Learning Journal*, 48(4), 491-504.

Hsieh, J. S. C., Smith, R. A., & Cho, Y. J. (2021). Cultural exchange in virtual learning communities: Outcomes of a COIL project. *Computers & Education*, 167, 104197.

Leask, B. (2015). *Internationalizing the curriculum.* Routledge.

Lo, C. K., & Hew, K. F. (2017). A critical review of flipped classroom challenges in K-12 education. *Educational Technology Research and Development,* 65(3), 1-23.

O'Dowd, R. (2018). From telecollaboration to virtual exchange: State-of-the-art and the role of UNICollaboration in moving forward. *Journal of Virtual Exchange*, 1, 1-23.

Owen, J., & Brooks, J. (2020). Measuring Success in Customer and Student Experiences with NPS. *Educational Metrics Quarterly*, 15(2), 78-92.

Reichheld, F. (2003). The One Number You Need to Grow. *Harvard Business Review*, 81(12), 46-54.

Innovación pedagógica para el aprendizaje matemático y habilidades transversales

Mahsa **Allahbakhshi**
Faculty of Mathematics, Pontificia Universidad Católica de Chile
maallahbakhshi@uc.cl
Maria Josefa **Smart T**orrealba
Escuela de Psicología, Pontificia Universidad Católica de Chile
mjsmart@uc.cl
Karen Daniela **Cordova** Villalobos
Escuela de Psicología, Pontificia Universidad Católica de Chile
kdcordova@uc.cl

Resumen

Este estudio describe y analiza una innovación pedagógica diseñada para potenciar el aprendizaje matemático y el desarrollo de habilidades transversales en estudiantes de primer año de la Facultad de Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica de Chile. A través de un curso-taller basado en aprendizaje activo, se integraron enfoques de las matemáticas, la lingüística y la psicología para fomentar la colaboración, la reflexión crítica y la conciencia socioemocional.

La evaluación del curso empleó un enfoque multimétodo, combinando análisis de video, encuestas, evaluaciones grupales e entrevistas. Los resultados evidencian mejoras en la conciencia cognitiva, emocional y social del trabajo colaborativo, la reducción de brechas de conocimiento y el fortalecimiento de la escritura matemática. Además, se identificaron desafíos en la formación de ayudantes y la adecuación de los espacios educativos. Estos hallazgos aportan evidencia sobre el efecto de la innovación pedagógica en la transición universitaria y abren nuevas líneas de investigación sobre su impacto en el desempeño académico y la retención estudiantil.

Palabras clave: Aprendizaje activo en educación superior; Educación Matemática; Innovación pedagógica; Enfoques interdisciplinarios; Colaboración y comunicación estudiantil; Transición a la universidad.

Definición y relevancia del problema

Las dificultades en el aprendizaje matemático en la educación superior han sido ampliamente documentadas, especialmente en la transición desde la enseñanza secundaria. Los y las estudiantes a menudo enfrentan desafíos en la resolución de problemas y el razonamiento matemático, los cuales requieren no solo fluidez en los procedimientos, sino también la capacidad de aplicar conceptos abstractos, reconocer estructuras subyacentes y construir argumentos lógicos en contextos no familiares (Schoenfeld, 1992). Esta transición resulta aún más compleja debido a la tendencia de los y las estudiantes a depender del razonamiento intuitivo e informal en lugar de definiciones precisas y construcciones rigurosas de prueba (Edwards y Ward, 2004). Además, los errores frecuentes en matemáticas no siempre derivan de descuidos, sino de intentos fallidos de generalizar marcos conceptuales que han sido desarrollados en contextos limitados y que no se transfieren eficazmente a escenarios matemáticos más amplios (Chin y Pierce, 2019).

El paso de la educación secundaria a la universitaria introduce cambios fundamentales en las demandas cognitivas, requiriendo que los y las estudiantes transiten de un enfoque basado en la aplicación de fórmulas a uno que exige razonamiento abstracto, argumentación basada en demostraciones y una mayor formalización teórica (Rach y Heinze, 2017; Vollstedt et al., 2014). Sin embargo, las metodologías de enseñanza predominantes en la educación superior continúan priorizando la transmisión de conocimientos en lugar de guiar a los y las estudiantes en la construcción de su conocimiento mediante el desarrollo de competencias conceptuales, críticas y de resolución de problemas. Como resultado, muchos estudiantes no logran desarrollar habilidades clave como la autorregulación del aprendizaje, la adaptabilidad a nuevos desafíos matemáticos y la interacción colaborativa para la construcción del conocimiento, lo que afecta su desempeño académico y su capacidad para resolver problemas en contextos interdisciplinarios (Bengmark et al., 2017; Anthony, 2000; Lugosi y Uribe, 2020; Johnston, 2020).

A su vez, el creciente énfasis en competencias transversales dentro de la educación superior resalta la importancia de habilidades como el pensamiento crítico, la comunicación efectiva y el trabajo en equipo, las cuales son cada vez más valoradas por empleadores junto con la especialización técnica (Hora et al., 2018). Se ha observado que los y las estudiantes que participan activamente en discusiones entre pares y adoptan hábitos de estudio estructurados tienden a desempeñarse mejor en tareas de resolución de problemas, mientras que aquellos que dependen de estrategias de aprendizaje pasivas encuentran mayores dificultades al enfrentarse a problemas complejos. A pesar de esta evidencia, las universidades siguen priorizando el desarrollo de competencias disciplinares en detrimento de habilidades transversales, lo que podría limitar la preparación de los graduados para desempeñarse en entornos profesionales diversos (Moreau y Leathwood, 2006).

Este estudio explora innovaciones pedagógicas diseñadas para mejorar el aprendizaje matemático y el desarrollo de competencias transversales en estudiantes de primer año de universidad. Basándose en investigaciones en educación matemática y psicología del aprendizaje, se analiza cómo el aprendizaje activo, la resolución colaborativa de problemas y estrategias metacognitivas estructuradas pueden mitigar las barreras comunes en el aprendizaje matemático. Al fomentar una participación conceptual más profunda, estos enfoques buscan apoyar a los y las estudiantes en el desarrollo de habilidades matemáticas y transversales esenciales para el éxito académico y la resolución interdisciplinaria de problemas.

Revisión de literatura

El aprendizaje de las matemáticas en la educación superior enfrenta desafíos que van más allá de la memorización de procedimientos. La literatura ha demostrado que los enfoques tradicionales limitan el desarrollo del pensamiento crítico y la comprensión conceptual (Freeman et al., 2014; Rasmussen et al., 2019). En respuesta, se han desarrollado metodologías innovadoras basadas en aprendizaje activo, colaboración y metacognición para fortalecer la formación matemática.

Desde la psicología del aprendizaje, la metacognición (Flavell, 1979) y la autoeficacia (Bandura, 1986) han sido identificadas como factores clave en la enseñanza de las matemáticas. La primera permite a los y las estudiantes reflexionar sobre sus estrategias de resolución de problemas, mientras que la segunda influye en su confianza y persistencia ante desafíos matemáticos. Además, la teoría de la autodeterminación (Ryan y Deci, 2000) destaca la importancia de la motivación intrínseca en la participación activa en el aprendizaje.

El aprendizaje activo se ha consolidado como una estrategia eficaz para mejorar la enseñanza de las matemáticas, favoreciendo la exploración, la argumentación y la resolución de problemas en contextos colaborativos (Prince, 2004; Watkins y Mazur, 2013). Investigaciones en educación STEM han demostrado que este enfoque mejora la retención del conocimiento y reduce brechas en el desempeño académico (Kogan y Laursen, 2014; Theobald et al., 2020).

Dentro de este marco, el aprendizaje colaborativo desempeña un papel fundamental. Estudios han evidenciado que la interacción entre pares facilita la construcción de conocimiento y optimiza la carga cognitiva en la resolución de problemas complejos (Sweller et al., 2011; Paas y Sweller, 2012). La argumentación matemática refuerza este proceso, permitiendo que los y las estudiantes articulen y justifiquen sus razonamientos, lo que mejora su comprensión y capacidad crítica (Hanna, 2000; Yackel y Cobb, 1996).

A pesar de los beneficios documentados, la adopción del aprendizaje activo en cursos universitarios de matemáticas sigue siendo limitada por factores como la resistencia al cambio metodológico y la falta de capacitación docente (Laursen et al., 2019; CBMS, 2016). En el contexto chileno, la investigación en este ámbito sigue siendo escasa, lo que resalta la necesidad de explorar enfoques innovadores que faciliten la transición a la educación superior y potencien la formación matemática.

Este estudio responde a esta necesidad mediante una propuesta pedagógica interdisciplinaria que integra estrategias de aprendizaje activo, metacognición y colaboración, con el objetivo de mejorar la experiencia educativa de los y las estudiantes de primer año y fortalecer su desempeño académico en matemáticas.

Metodología

El estudio adoptó un enfoque mixto, combinando técnicas cualitativas y cuantitativas para evaluar el impacto del Taller de Matemáticas en la formación de estudiantes de primer año. La metodología se diseñó para analizar cómo la estructura del taller y sus estrategias pedagógicas contribuyen al aprendizaje colaborativo, la escritura matemática y la autoevaluación de habilidades transversales.

Para representar las dimensiones clave del análisis, se diseñó la Figura 1, que sintetiza los principales ejes del estudio y las relaciones entre ellos.

Diseño del curso-taller

El curso-taller fue diseñado con base en cuatro ejes metodológicos:

1. **Aprendizaje colaborativo**: Se implementaron actividades de resolución conjunta de problemas con progresión en dificultad, fomentando la argumentación matemática y la interacción entre pares.
2. **Materiales asincrónicos**: Se desarrollaron cápsulas de video con problemas contextualizados y espacios de discusión en foros virtuales para promover la reflexión sobre los conceptos matemáticos.
3. **Normas de colaboración y autoevaluación**: Se establecieron reglas de trabajo en equipo y se aplicaron encuestas de autoevaluación tras cada actividad, permitiendo identificar desafíos cognitivos, emocionales y sociales en la dinámica grupal.
4. **Apoyo a la escritura matemática**: Se diseñaron recursos didácticos para mejorar la redacción de demostraciones matemáticas y fomentar la valoración del error como parte del proceso de aprendizaje.

Este diseño metodológico buscó fortalecer tanto el razonamiento matemático como el desarrollo de habilidades transversales en los y las estudiantes de primer año, facilitando su transición a la educación superior.

Estrategias de recolección de datos

Para evaluar el impacto del taller, se utilizaron diversas fuentes de información:

- Encuestas pre y post-intervención, aplicadas a estudiantes para medir cambios en su percepción del aprendizaje y habilidades colaborativas.
- Grupos focales, donde los participantes reflexionaron sobre su experiencia en el taller y discutieron los desafíos y beneficios del aprendizaje colaborativo.
- Análisis de video, registrando sesiones del taller para examinar patrones de interacción y argumentación matemática.
- Entrevistas semiestructuradas, realizadas con estudiantes y ayudantes para profundizar en su percepción del taller y su rol en la formación matemática.
- Evaluaciones grupales y rúbricas de escritura matemática, empleadas para medir la claridad, precisión y estructuración del razonamiento matemático.

Análisis de datos

El procesamiento de los datos combinó:

- Análisis cualitativo, mediante codificación temática de los grupos focales, entrevistas y videos.
- Estadística descriptiva, aplicada a las encuestas pre y post-intervención para identificar tendencias en la percepción del aprendizaje colaborativo.
- Comparación de desempeños, con base en las evaluaciones escritas y análisis de escritura matemática.

Resultados

Los hallazgos del estudio reflejan que los y las estudiantes valoran el Taller de Matemáticas como una instancia clave en su adaptación a la universidad, pero también identifican desafíos en su implementación. Los resultados se organizan en dos dimensiones:

1. Valoración de las características del taller

Modalidad del taller: extensión y trabajo práctico. Los y las estudiantes destacaron que la estructura del taller facilita la transición a la universidad, permitiendo una mayor interacción con sus pares. Sin embargo, la extensión horaria fue percibida como excesiva, afectando la organización del tiempo de estudio personal. Además, la cantidad de ejercicios y su nivel de dificultad generaron tensión, aunque algunos estudiantes reconocieron que este desafío favoreció su tolerancia a la frustración y su desarrollo cognitivo.

Contenidos del taller: articulación con las asignaturas del semestre. El taller es visto como un espacio de aplicación de los contenidos de los cursos teóricos, facilitando la comprensión de conceptos matemáticos. No obstante, se identificó la necesidad de una mayor coordinación entre el taller y las asignaturas teóricas, ya que en algunos casos los y las estudiantes enfrentaron ejercicios con contenidos que aún no habían sido abordados en las clases.

Rol del ayudante. Los y las estudiantes valoraron el apoyo de los ayudantes como un factor clave en su aprendizaje, tanto en la resolución de problemas matemáticos como en la orientación general sobre la vida universitaria. Sin embargo, la calidad de la retroalimentación varió según el ayudante, lo que impactó la percepción de su efectividad.

2. Percepción del aprendizaje colaborativo

Experiencia de trabajo en equipo. El trabajo en grupos fue visto como una estrategia valiosa para el aprendizaje matemático, ya que permitió la discusión y comparación de estrategias de resolución de problemas. Sin embargo, algunos estudiantes expresaron dificultades en la gestión del tiempo dentro de los grupos y en la negociación de roles, especialmente cuando un integrante dominaba la discusión.

Desafíos socioemocionales en la colaboración. Se identificaron barreras socioemocionales, como la inseguridad al compartir ideas y el temor a no ser un aporte en el equipo. Además, algunos estudiantes mencionaron que la cultura competitiva de la disciplina dificultó la colaboración efectiva.

Síntesis de los ejes de análisis. Para ilustrar la organización de los aspectos clave del Taller de Matemáticas y su impacto en el aprendizaje colaborativo, se presenta la siguiente figura:

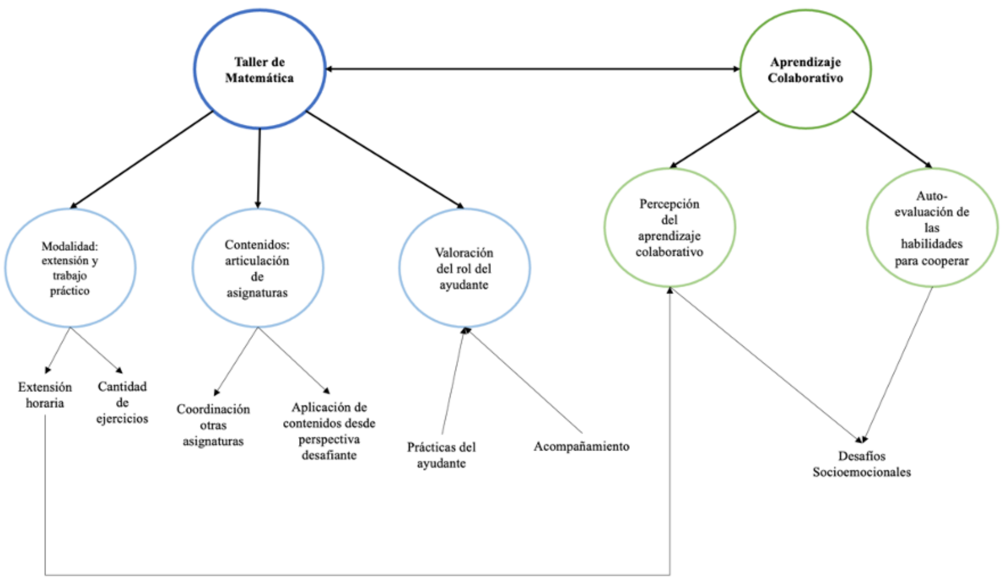


Figura 1. Estructura del análisis del Taller de Matemáticas

La Figura 1 representa los principales ejes metodológicos y evaluativos del taller, destacando la articulación entre su modalidad, contenidos, rol del ayudante y la percepción del aprendizaje colaborativo por parte de los y las estudiantes. Asimismo, se identifican elementos clave como la autoevaluación de habilidades y los desafíos socioemocionales en el trabajo grupal.

Conclusión

Los resultados de este estudio confirman que la integración de estrategias colaborativas y metacognitivas en la enseñanza de matemáticas contribuye significativamente a la comprensión conceptual y al desarrollo de habilidades transversales en estudiantes de primer año. La implementación del curso-taller permitió fortalecer la argumentación matemática, la comunicación efectiva y la capacidad de autoevaluación en entornos colaborativos, factores clave en la transición universitaria.

Si bien se identificaron desafíos en la formación de ayudantes y en la adecuación de los espacios educativos, estos hallazgos evidencian la necesidad de diseñar estrategias que no solo optimicen la enseñanza matemática, sino que también promuevan una cultura de aprendizaje colaborativo en la educación superior.

Este estudio aporta evidencia empírica sobre el impacto del aprendizaje activo y la argumentación matemática en la formación universitaria, proporcionando un modelo de enseñanza replicable en otros contextos. Futuras investigaciones podrían explorar cómo estas estrategias influyen en el rendimiento académico a largo plazo y en la retención estudiantil, así como profundizar en el papel de la escritura matemática como herramienta para la consolidación del conocimiento disciplinar.

Bibliografía y referencias

Anthony, G. (2000). Factors influencing first-year students' success in mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 31*(1), 3–14. https://doi.org/10.1080/002073900287336

Bandura, A. (1986). *Social foundations of thought and action: A social cognitive theory.* Prentice-Hall.

Bengmark, S., Thunberg, H., y Winberg, T. M. (2017). Success-factors in transition to university mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 48*(7), 988–1001. https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1310311

CBMS. (2016). *Active learning in post-secondary mathematics education.* Conference Board of the Mathematical Sciences.

Chin, K. E., y Pierce, R. (2019). University students' conceptions of mathematical symbols and expressions. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 15*(9), em1748. https://doi.org/10.29333/ejmste/103736

Edwards, B. S., y Ward, M. B. (2004). Surprises from mathematics education research: Student (Mis)use of mathematical definitions. *The American Mathematical Monthly, 111*(5), 411–424. https://doi.org/10.1080/00029890.2004.11920092

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906–911. https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

Freeman, S., Eddy, S. L., McDonough, M., Smith, M. K., Okoroafor, N., Jordt, H., y Wenderoth, M. P. (2014). Active learning increases student performance in science, engineering, and mathematics. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 111*(23), 8410–8415. https://doi.org/10.1073/pnas.1319030111

Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics, 44*, 5–23. https://doi.org/10.1023/A:1012737223465

Hora, M. T., Benbow, R. J., y Smolarek, B. B. (2018). Re-thinking soft skills and student employability: A new paradigm for undergraduate education. *Change: The Magazine of Higher Learning, 50*(6), 30–37. https://doi.org/10.1080/00091383.2018.1540819

Johnston, B. M. (2020). Students as partners: Peer-leading in an undergraduate mathematics course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 52*(5), 795–806. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1795287

Kogan, M., y Laursen, S. L. (2014). Assessing long-term effects of inquiry-based learning: A case study from college mathematics. *Innovative Higher Education, 39*(3), 183–199. https://doi.org/10.1007/s10755-013-9279-9

Laursen, S. L., Hassi, M. L., Kogan, M., y Weston, T. J. (2019). Benefits for women and men of inquiry-based learning in college mathematics: A multi-institution study. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(4), 430–452. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.4.0430

Lugosi, E., y Uribe, G. (2020). Active learning strategies with positive effects on students' achievements in undergraduate mathematics education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 53*(2), 403–424. https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1773555

Moreau, M., y Leathwood, C. (2006). Graduates' employment and the discourse of employability: A critical analysis. *Journal of Education and Work, 19*(4), 305–324. https://doi.org/10.1080/13639080600867083

Paas, F., y Sweller, J. (2012). An evolutionary upgrade of cognitive load theory: Using the human motor system and collaboration to support the learning of complex cognitive tasks. *Educational Psychology Review, 24*, 27–45. https://doi.org/10.1007/s10648-011-9179-2

Prince, M. (2004). Does active learning work? A review of the research. *Journal of Engineering Education, 93*(3), 223–231. https://doi.org/10.1002/j.2168-9830.2004.tb00809.x

Rach, S., y Heinze, A. (2017). The transition from school to university in mathematics: Which influence do school-related variables have? *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1343–1363. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9744-8

Rasmussen, C., Ellis, J., Zazkis, D., y Bressoud, D. (2019). Features of successful calculus programs at five doctoral degree–granting institutions. *Journal for Research in Mathematics Education, 50*(1), 98–124. https://doi.org/10.5951/jresematheduc.50.1.0098

Ryan, R. M., y Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist, 55*(1), 68–78. https://doi.org/10.1037/0003-066X.55.1.68

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D. A. Grows (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). Macmillan.

Sweller, J., Ayres, P., y Kalyuga, S. (2011). *Cognitive load theory.* Springer. https://doi.org/10.1007/978-1-4419-8126-4

Theobald, E. J., Hill, M. J., Tran, E., Agrawal, S., Arroyo, E. N., Behling, S., ... y Freeman, S. (2020). Active learning narrows achievement gaps for underrepresented students in undergraduate science, technology, engineering, and math. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 117*(12), 6476–6483. https://doi.org/10.1073/pnas.1916903117

Vollstedt, M., Heinze, A., Gojdka, K., y Rach, S. (2014). Framework for examining the transformation of mathematics and mathematics learning in the transition from school to university. En S. Rezat, M. Hattermann, y A. Peter-Koop (Eds.), *Transformation - A fundamental idea of mathematics education.* Springer, New York, NY. https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3489-4_2

Watkins, J., y Mazur, E. (2013). Retaining students in science, technology, engineering, and mathematics (STEM) majors. *Journal of College Science Teaching, 42*(5), 36–41.

Yackel, E., y Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education, 27*(4), 458–477. https://doi.org/10.2307/749877

Innovando la Enseñanza del método de bisección con ejercicios programables

Filánder **Sequeira** Chavarría
Escuela de Matemática, Universidad Nacional y Universidad de Costa Rica
Costa Rica
filander.sequeira.chavarria@una.cr / filander.sequeira@ucr.ac.cr
Helen **Guillén** Oviedo
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica
hellen.guillen.oviedo@una.ac.cr

Resumen

Este artículo presenta una propuesta didáctica compuesta por tres ejercicios innovadores orientados a mejorar la comprensión del método de bisección mediante su implementación en MATLAB. La experiencia se realizó con nueve estudiantes del curso de Métodos Numéricos de la carrera de Bachillerato en la Enseñanza de la Matemática (BLEM) de la Universidad Nacional (UNA), Costa Rica, quienes resolvieron individualmente uno de los ejercicios asignados. Siete de ellos lograron modificar correctamente el algoritmo, evidenciando que la programación facilita la comprensión del proceso iterativo y la detección de errores comunes. Sin embargo, también se identificó como dificultad la traducción del lenguaje matemático al computacional, especialmente en estudiantes sin formación previa en programación. Los resultados destacan el potencial de las herramientas computacionales como apoyo didáctico en el aprendizaje de métodos numéricos.

Palabras clave: Método de bisección, Métodos Numéricos, Programación, Educación Matemática; MATLAB.

Introducción

El avance tecnológico en campos como la inteligencia artificial y el análisis de datos ha resaltado la relevancia de los algoritmos numéricos en la resolución de problemas computacionales, los cuales se abordan en los cursos universitarios de Métodos Numéricos, disciplina clave para obtener soluciones aproximadas cuando los métodos analíticos no son viables (Flórez et al., 2019). Sin embargo, en carreras de la Universidad Nacional y la Universidad de Costa Rica, muchos estudiantes carecen de formación previa en programación, lo que dificulta su aprendizaje al enfrentarse simultáneamente a conceptos computacionales y matemáticos. Además, el enfoque predominantemente procedimental de estos cursos puede limitar el desarrollo de habilidades como el razonamiento lógico y el pensamiento crítico, reduciendo el aprendizaje a una ejecución mecánica (Montero et al., 2015).

El método de bisección, aunque útil y sencillo para encontrar raíces de ecuaciones, suele enseñarse desde un enfoque teórico que no siempre permite a los estudiantes apreciar su utilidad (Burden et al., 2015; Chapra, 2008; Süli, 2003). Integrar la programación como herramienta didáctica favorece la comprensión del proceso iterativo, el desarrollo de habilidades computacionales y la apropiación conceptual del método. En este marco, se propone una serie de ejercicios programables que buscan fortalecer la comprensión y aplicación del método de bisección desde un enfoque práctico.

Marco Teórico

Uno de los problemas más significativos a abordar en todo curso sobre Métodos Numéricos corresponde a la resolución de ecuaciones en una dimensión, o equivalentemente, a la búsqueda de ceros de una función de una variable. Más precisamente, es de gran interés hallar las posibles soluciones a ecuaciones de la forma: $f(x) = 0$ para $x \in [a, b]$ donde $f: [a, b] \to IR$ es al menos continua sobre $[a, b]$. Su importancia surge en la necesidad de dar solución a problemas en múltiples disciplinas como la modelización de fenómenos físicos (por ejemplo, en Análisis Estructural, Mecánica de Fluidos y Electromagnetismo), biológicos (por ejemplo, en Modelamiento de crecimiento poblacional) y la optimización de procesos financieros (por ejemplo, en Modelos de oferta y demanda), por mencionar algunas.

A primera impresión se puede considerar un problema simple, pero de hecho no es algo que se resuelva de forma inmediata. En efecto, a manera de ejemplo, considere la ecuación $e^x - 2x - 1 = 0$ sobre $[1,2]$ (Süli, 2003), no es difícil comprobar que no es posible despejar la variable x explícitamente debido a la ausencia de técnicas naturales en estos procesos (factorización, leyes de potencias, propiedades de exponenciales, entre otras), en virtud de que es una ecuación que combina distintas familias de funciones (la exponencial con la polinomial). En virtud de ello se descartan las técnicas deterministas y se consideran estrategias numéricas con el fin de hallar una aproximación suficientemente aceptable para esta ecuación. La más natural en todo texto sobre el tema corresponde al método de bisección, primero porque su deducción suele ser inmediata cuando se aborda como consecuencia del Teorema de Valores Intermedios (Burden et al., 2015; Chapra, 2008).

Método de bisección

El método de bisección se define como sigue. Sea $f: [a, b] \to IR$ una función continua sobre $[a, b]$, tal que $f(a)f(b) \leq 0$. Se conoce como la iteración de bisección a la sucesión numérica $\{x_k\}_{k\in IN} \subseteq [a, b]$, definida recursivamente por:

$$x_k := \frac{a_k + b_k}{2}, \qquad \text{para } k = 1,2, \ldots,$$

donde se cumple que:

$$[a_k, b_k] := \begin{cases} [a, b] & \text{si } k = 0 \\ [a_{k-1}, x_{k-1}] & \text{si } k \geq 1 \wedge f(a_k)f(x_k) < 0 \\ [x_{k-1}, b_{k-1}] & \text{si } k \geq 1 \wedge f(a_k)f(x_k) > 0 \end{cases}$$

La sucesión generada por el método de bisección garantiza converger a un cero de la función f sobre el intervalo $[a, b]$ siempre que se cumpla que $f(a)f(b) \leq 0$. Es importante tener en cuenta que la solución dada por bisección es única, pero esta depende del intervalo inicial. Así, si se desean otras soluciones se debe elegir un intervalo inicial adecuado, donde preferiblemente exista un único cero de la función. (Burden et al., 2015; Chapra, 2008, Süli, 2003).

MATLAB

MATLAB es una herramienta ampliamente utilizada en la enseñanza y aplicación de métodos numéricos por su eficiencia, facilidad de uso y enfoque específico en cálculos matemáticos y científicos. Su entorno optimizado y su sintaxis intuitiva permiten implementar algoritmos sin preocuparse por aspectos técnicos complejos, además de ofrecer funciones visuales útiles para analizar la convergencia y estabilidad de los métodos. Estas características lo hacen superior a otros lenguajes de propósito general como Python o C++, especialmente en contextos académicos e industriales (Yang et al., 2005; Chapra, 2008).

Enfoques de la Educación Matemática

Una de las corrientes más relevantes en la Educación Matemática para este estudio es el enfoque basado en la resolución de problemas, el cual sostiene que los estudiantes construyen conocimiento matemático cuando se enfrentan a situaciones desafiantes que demandan exploración, reflexión y análisis (Schoenfeld, 1992). Esta perspectiva se complementa con el constructivismo, desde el cual autores como Piaget (1970) y Vygotsky (1978) afirman que el aprendizaje es más eficaz cuando los estudiantes participan activamente en la construcción del conocimiento mediante la interacción con el entorno y con otros. En este marco, la implementación del método de bisección mediante ejercicios programables en MATLAB permite estructurar actividades que no solo enseñan una técnica, sino que sitúan al estudiante en un proceso activo de resolución de problemas de tipo computacional. Esta forma de enseñanza responde a la necesidad de superar las limitaciones de la educación tradicional, la cual raramente promueve el desarrollo de habilidades, competencias y capacidades clave. Por tanto, se propone una transformación en la concepción del proceso de enseñanza-aprendizaje, que no excluye la clase expositiva, pero sí la complementa con estrategias orientadas al desarrollo integral del estudiante (Morales et al., 2004).

En esta línea, el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) se presenta como una metodología que favorece la participación activa y autónoma de los estudiantes, colocando la resolución de problemas como eje central del proceso formativo. Según Guamán y Espinoza (2022), el ABP se caracteriza por el protagonismo del estudiante, el rol del docente como facilitador, y el trabajo colaborativo en equipos pequeños. Además, esta metodología desarrolla habilidades investigativas a través de la búsqueda de información, y fomenta la responsabilidad tanto individual como colectiva en el logro de objetivos. El ABP también tiene un enfoque interdisciplinar, ya que los problemas tratados suelen requerir la integración de conocimientos de diversas áreas. Aplicado al contexto de ejercicios innovadores en MATLAB, el ABP permite presentar estos desafíos como problemas abiertos, en los que los estudiantes deben comprender conceptos matemáticos, traducirlos a código, interpretar los resultados y corregir errores. De este modo, se promueve una comprensión más profunda del método de bisección, trascendiendo su simple aplicación mecánica y fortaleciendo la conexión entre la Matemática y su implementación computacional.

Marco Metodológico

Esta investigación se enmarca en un enfoque cualitativo de tipo investigación acción educativa, en tanto busca mejorar la práctica docente a través de una intervención pedagógica diseñada, aplicada y analizada en el contexto real de enseñanza del curso de Métodos Numéricos. Se trata de una experiencia didáctica implementada por un docente con amplia trayectoria en la enseñanza de esta asignatura, cuyo objetivo fue valorar el impacto de actividades basadas en programación sobre la comprensión del método de bisección por parte del estudiantado. La experiencia se desarrolló en el curso de Métodos Numéricos del BLEM en la UNA, durante el primer semestre del año 2024. Participaron nueve estudiantes del curso, quienes trabajaron individualmente durante una clase presencial de 90 minutos. Cada estudiante fue asignado a una de las tres actividades propuestas, de modo que tres personas realizaron la Actividad 1, tres la Actividad 2 y tres la Actividad 3.

Previo a la aplicación de las actividades, se desarrolló en clase una introducción teórico-práctica del método de bisección, en la que el docente presentó la definición formal del método, sus condiciones de aplicabilidad, y su fundamento matemático como proceso iterativo. A continuación, y mediante trabajo conjunto con el estudiantado, se llevó a cabo la programación paso a paso del método en MATLAB, de manera que se discutiera el papel de cada línea de código en relación con el procedimiento numérico. Esta fase tuvo como propósito promover una comprensión conceptual del algoritmo más allá de su simple ejecución, articulando el razonamiento matemático con la lógica computacional. Luego de este trabajo introductorio, se procedió a la aplicación de tres actividades originales diseñadas para profundizar en la comprensión del método de bisección. Estas actividades requerían que el estudiante modificara o adaptara la programación previamente vista, para resolver situaciones específicas que ponían a prueba su dominio tanto del funcionamiento del método como de su implementación computacional. Los problemas propuestos incluían análisis de convergencia, identificación de errores comunes y exploración de condiciones límite del algoritmo.

La propuesta metodológica combina componentes didácticos clave para fomentar un aprendizaje activo y significativo del método de bisección, utilizando la programación como herramienta para visualizar y experimentar con el algoritmo, e integrando representaciones múltiples para enriquecer la comprensión. Las actividades, diseñadas como situaciones abiertas que promueven la interpretación, el análisis crítico y la conexión entre teoría y práctica, también buscan desarrollar pensamiento computacional y matemático, incluso en estudiantes sin experiencia previa en programación, promoviendo además la metacognición y el aprendizaje autorregulado.

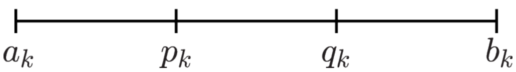
Actividad 1

Recuerde que el método de bisección para aproximar una solución de $f(x) = 0$ corresponde a: dados a_0 y b_0 tales que $f(a_0)f(b_0) \leq 0$, se tiene que:

$$x_k := \frac{a_k + b_k}{2} \quad y \quad [a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} [a_k, x_k] & \text{si } f(a_k)f(x_k) \leq 0 \\ [x_k, b_k] & \text{si } f(a_k)f(x_k) > 0 \end{cases}$$

para todo $k \in IN$.

Ahora, considere la siguiente variante, la cual conoceremos como el **método de tribisección**: Sean a_0 y b_0 tales que $f(a_0)f(b_0) \leq 0$. Dividimos, en cada iteración, el intervalo $[a_k, b_k]$ en tres partes iguales:



donde:

$$p_k := \frac{2a_k + b_k}{3}, \quad q_k := \frac{a_k + 2b_k}{3}, \quad [a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} [a_k, p_k] & \text{si } f(a_k)f(p_k) \leq 0 \\ [p_k, q_k] & \text{si } f(p_k)f(q_k) \leq 0 \\ [q_k, b_k] & \text{en otro caso} \end{cases}$$

y así la nueva aproximación x_k está dada por:

$$x_k := \frac{a_{k+1} + b_{k+1}}{2} \quad \forall\, k \in IN.$$

a) Realice 4 iteraciones del método de tribisección para aproximar una solución de $2x - \cos(x) - \operatorname{sen}(x) = 0$ en $[0, 2]$. $(\star)$
b) Anote las semejanzas y diferencias que puede notar entre este nuevo método con la iteración de bisección tradicional.
c) Describa cuál o cuáles líneas de la implementación de bisección realizada en clase, deben modificarse para implementar en MATLAB la nueva variante del método de tribisección.
d) Implemente en MATLAB una función de nombre:

[x, k] = tribiseccion(f, a, b, tol, iterMax)

la cual lleve a cabo la iteración de tribisección para aproximar un cero de f en $[a, b]$.

e) Utilice su implementación para aproximar una solución de $(\star)$ con una tolerancia de 10^{-8} y un número máximo de 100 iteraciones. Responda: Aproximación obtenida: _____. Iteraciones usadas: _____.

Actividad 2

Esta es similar a la Actividad 1, denominado el **método de tribisecciónPF**, pero ahora las definiciones de p_k, q_k y del nuevo intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ son:

$$p_k := a_k + \lambda(b_k - a_k), \quad q_k := b_k - \lambda(b_k - a_k), \quad [a_{k+1}, b_{k+1}] := \begin{cases} [a_k, p_k] & \text{si } f(a_k)f(p_k) \leq 0 \\ [p_k, q_k] & \text{si } f(p_k)f(q_k) \leq 0 \\ [q_k, b_k] & \text{en otro caso} \end{cases}$$

para $\lambda \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$. Luego, las cinco preguntas a responder son las mimas de la Actividad 1.

Actividad 3

La tercera actividad es similar a la Actividad 1, pero donde la nueva aproximación x_k se calcula de la forma:

$$x_k := \begin{cases} p_k & \text{si el cambio de signo ocurre en } [a_k, p_k]\ , \\ p_k & \text{si el cambio de signo ocurre en } [p_k, q_k] \quad \text{y} \quad |f(p_k)| \leq |f(q_k)| \\ q_k & \text{si el cambio de signo ocurre en } [p_k, q_k] \quad \text{y} \quad |f(q_k)| \leq |f(p_k)| \\ q_k & \text{si el cambio de signo ocurre en } [q_k, b_k]\ , \end{cases}$$

para todo $k \in IN$, donde es claro que el nuevo intervalo $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ es aquel que preserva el cambio de signo. A esta variante se le conocerá como el **método de trisección**.

Luego, las cinco preguntas a responder son las mimas de la Actividad 1, excepto en el punto a), donde la ecuación ahora es: $e^x + \csc(x) - 7 = 0$ en $[1, 2]$.

Resultados

La implementación de las actividades con los nueve participantes del curso permitió identificar resultados relevantes en términos de comprensión conceptual y desempeño en programación del método de bisección. De los nueve estudiantes, siete lograron completar exitosamente la actividad asignada, mientras que dos encontraron dificultades relacionadas con la interpretación de instrucciones matemáticas o con la gestión del tiempo para completar la codificación. En particular, uno de los casos correspondió a un estudiante que no logró comprender la notación matemática en la Actividad 2, y el otro, asignado a la Actividad 3, aunque logró entender el procedimiento, no alcanzó a finalizar la implementación por falta de tiempo.

Entre los estudiantes que finalizaron exitosamente, se observó un proceso consistente: dedicaron la mayor parte del tiempo a comprender el método de forma analítica antes de proceder a la codificación. El trabajo previo con papel y lápiz, así como el uso constante del dibujo del intervalo trisecado, funcionó como un apoyo visual importante para facilitar la lógica del algoritmo. Esta estrategia evidencia una apropiación del enfoque de resolución de problemas como medio para construir conocimiento matemático (Schoenfeld, 1992) y confirma la importancia de representaciones múltiples en la comprensión de procesos computacionales complejos. A continuación, se presenta en la Figura 1 la solución de un estudiante que resolvió la Actividad 1, ilustrando este enfoque.

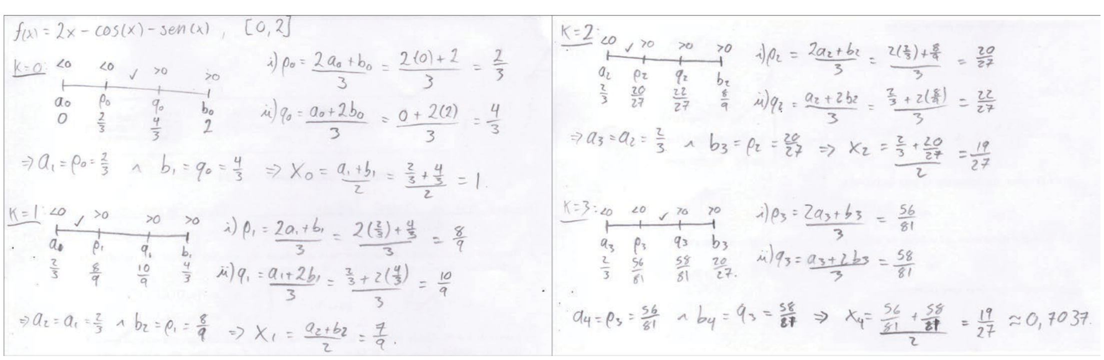


Figura 1. Solución propuesta por un estudiante de la actividad 1.

En la programación con MATLAB, los estudiantes mostraron habilidad para modificar el código base del método de bisección, especialmente en la definición de subintervalos y el cálculo de la nueva aproximación x_k. Sin embargo, se observó variabilidad en la ubicación de este cálculo dentro del código, en particular en las Actividades 1 y 2, lo cual se atribuye a un cambio conceptual importante: a diferencia del algoritmo tradicional, las variantes empleadas requerían seleccionar primero el subintervalo y luego calcular la nueva aproximación, lo que resultó más complejo de asimilar para algunos estudiantes.

Por ejemplo, en la siguiente Figura 2 se muestra parte de la programación realizada por tres estudiantes: las dos primeras corresponden a la Actividad 1 y la última a la Actividad 2. Todas son correctas, pero resulta innecesario contar con más de un cálculo para x_k, como ocurre en los dos últimos ejemplos de la figura.

```
while k < interMax && err >= tol
    p=(2*a+b)/3;
    q=(a+2*b)/3;
    % determinar el nuevo intervalo
    if f(a)*f(p)<=0
        b=p;
    elseif f(p)*f(q)<=0
        a=p;
        b=q;
    elseif f(q)*f(b)<=0
        a=q;
    end
    %preparar la siguiente interaccion
    k=k+1;
    x=(a+b)/2;
    err=abs(b-a);%Ya el error toma su valor ve
end
```

```
while  k < itermax && err >= tol  %aquí es más
    %se calcula la aproximación
    p = ((2*a)+b)/3;
    q = (a+(2*b))/3;
    %determinar el nuevo intervalo
    if f(a)*f(p) < 0
        % Se escoge el intervalo [a,p]
        b = p;
        x = (a + b)/2; % Este x se determina c
        % la definición del método
    elseif f(p)*f(q) < 0
        % Se escoge el intervalo [p,q]
        a = p;
        b = q;
        x = (a + b)/2;
    else
        % Se escoge el intervalo [q,b]
        a = q;
        x = (a + b)/2;
    end
    %preparar la siguiente iteracion
    k = k+1;
    err = abs(b-a); %ahora este se toma luego
end
```

```
while k < iterMax  && err >= tol          %Par
    %Determinar el nuevo intervalo
    %Definir p, q
    p = a + lambda*(b-a);
    q = b - lambda*(b-a);
    % Se calcula la aproximación
    x = (a+b)/2;
    if f(a)*f(p) < 0
        %Se elije el subintervalo [a,x]
        b = p;
    elseif  f(p)*f(q) < 0
        a = p;
        b = q;
        %Se elije el subintervalo [x,b]
    else
        b = q;
    end
    x = (a+b)/2;
    %preparar la siguiente iteración
    k = k + 1;
    err = abs(b-a);
end
```

Figura 2. Solución propuesta por dos estudiantes de la actividad 1 y otro estudiante de la actividad 2, respectivamente.

Estas observaciones revelan que, aunque la lógica subyacente al algoritmo fue comprendida, la adaptación estructural del código presentó cierto grado de dificultad, lo que valida la premisa de que traducir el lenguaje matemático al lenguaje computacional implica un reto significativo para estudiantes sin experiencia previa en programación (Londoño, 2019; Morales & Landa, 2004). Aun así, las producciones estudiantiles evidencian avances importantes en la comprensión del método, el razonamiento computacional y la capacidad de análisis crítico frente a errores.

Conclusiones

La experiencia descrita en este estudio pone en evidencia que, aunque los textos clásicos sobre métodos numéricos explican el funcionamiento del método de bisección (Burden et al., 2015; Chapra, 2008), rara vez ofrecen actividades prácticas de programación que permitan a los estudiantes aplicar y profundizar en el contenido. En este sentido, las tres actividades propuestas se consolidan como una herramienta didáctica eficaz, ya que lograron comprometer a los estudiantes con el proceso de implementación algorítmica, incluso en un contexto donde no se dispone de formación previa en programación.

Los hallazgos confirman que la programación en MATLAB, utilizada como medio de aprendizaje activo y no como fin, permite a los estudiantes visualizar, manipular y experimentar con el algoritmo, favoreciendo una comprensión más profunda del método. Además, el trabajo con representaciones múltiples y la resolución de problemas abiertos fomentaron el pensamiento computacional, el análisis crítico y la reflexión sobre el error, todos elementos que fortalecen la metacognición y el aprendizaje autorregulado (Guamán & Espinoza, 2022). Aunque se reconocen las dificultades iniciales al traducir conceptos matemáticos a código, los resultados muestran que, una vez superado ese umbral, la programación se convierte en una herramienta accesible y poderosa para el aprendizaje. En consecuencia, se evidencia la necesidad de integrar este tipo de propuestas en la enseñanza de los métodos numéricos, no solo para mejorar el dominio técnico, sino también para desarrollar habilidades clave en el contexto profesional actual, alineadas con enfoques como el Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) y las teorías constructivistas del aprendizaje (Piaget, 1970; Vygotsky, 1978).

Referencias y bibliografía

Burden, R. L., Faires, J. D., Burden, A. M. (2015). *Numerical Analysis*, 10th. United States: Cengage Learning.

Chapra, S. C. (2008). *Applied Numerical Methods with MATLAB for Engineers and Scientists*. Spain: McGraw-Hill Companies,Incorporated.

Guamán Gómez, V. J., & Espinoza Freire, E. E. (2022). Aprendizaje basado en problemas para el proceso de enseñanzaaprendizaje. Revista Universidad y Sociedad, 14(2), 124-131.

Londoño, D. A. F. (2019). Programación Científica: Una Propuesta Didáctica para la Enseñanza de Métodos Numéricos y Programación. *Encuentro Internacional de Educación en Ingeniería*.

Morales, P., & Landa, V. (2004). Aprendizaje basado en problemas. *Theoria*, *13*(1), 145-157.

Montero, Y. H., Pedroza, M. E., Astiz, M. S. y Vilanova, S. L. (2015). Caracterización de las actitudes de estudiantes universitarios de Matemática hacia los métodos numéricos. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 17(1), 88-99. Recuperado de http://redie.uabc.mx/vol17no1/contenido-montero-etal.html

Schoenfeld, A. H. (1992). On paradigms and methods: What do you do when the ones you know don't do what you want them to? Issues in the analysis of data in the form of videotapes. *The Journal of the Learning Sciences*, *2*(2), 179-214.

Süli, E., Mayers, D. F. (2003). *An Introduction to Numerical Analysis*. United Kingdom: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1970). *The Science of Education and the Psychology of the Child*. Viking Press.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in Society: The Development of Higher Psychological Processes*. Harvard University Press.

Yang, W. Y., Cao, W., Chung, T., Morris, J. (2005). *Applied Numerical Methods Using MATLAB*. Germany: Wiley.

Intuiciones probabilísticas y su alcance para la enseñanza de la probabilidad

Hugo **Alvarado**
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
alvaradomartinez@ucsc.cl
Lidia **Retamal**
Universidad Católica de la Santísima Concepción
Chile
lretamal@ucsc.cl

Resumen

Concordamos que, para el aprendizaje de Probabilidad, los estudiantes deben tener la oportunidad de variadas experiencias de situaciones probabilísticas asociadas a los diversos significados de la probabilidad. Se presentan las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad mediante un cuestionario de ítems cerrados y abiertos, y analizan las intuiciones de los asistentes y la construcción de argumentaciones mediadas por variadas representaciones. El propósito del taller es introducir la motivación y desarrollo del razonamiento probabilístico mediante la argumentación al incorporar elementos mediacionales en el proceso inicial de aprendizaje estocástico. Proponemos una enseñanza de la probabilidad que relacione la comprensión teórica y práctica de los significados de la probabilidad, que va del intuitivo al axiomático, a través de la estimación cuantitativa de las intuiciones probabilísticas como grado de creencia personal, y la confrontación explícita de las diversas heurísticas con el conocimiento formal de la probabilidad.

Palabras clave: Educación preuniversitaria; estocástica; implementación curricular; incertidumbre; intuición; significados de la probabilidad.

1. Introducción

Aunque utilizamos nociones probabilísticas informales a diario para tomar decisiones, la investigación sobre probabilidad se ha centrado principalmente en los significados clásico y frecuentista, siendo casi inexistente la investigación sobre el significado intuitivo de la probabilidad. Concordamos con Sharma (2014) que los entornos sociales y la cultura común pueden influir en las ideas informales de probabilidad, y en la necesidad de confrontar las creencias cotidianas intuitivas con los conceptos probabilísticos, para aclarar los objetivos, el propósito y las limitaciones de la enseñanza de la probabilidad.

Aun cuando se reconoce que la intuición se basa en las propias creencias epistemológicas, las cuales disponen a los estudiantes a aceptar o no la incertidumbre (Fulmer, 2014), escasa es la atención del papel de las intuiciones en la comprensión de la probabilidad en estudiantes de educación terciaria. Esta falta de atención contradice el papel potencialmente influyente del significado intuitivo de la probabilidad en la construcción del conocimiento probabilístico (Alvarado et al. 2018).

En general, la educación secundaria no se caracteriza por entregar conocimientos profundos de Probabilidad, ni por realizar experimentaciones concretas o simuladas para el aprendizaje en ambientes de incertidumbre (Alvarado et al. 2021). Es así que, muchos estudiantes llegan a la universidad sin haber tenido la oportunidad de desarrollar habilidades, análisis crítico y actitudes hacia el azar y las probabilidades que les permitan fortalecer su formación como ciudadanos con sentido probabilístico.

En Didáctica de la Probabilidad, un área de indagación es el análisis de las dificultades de comprensión en el razonamiento probabilístico y las argumentaciones que presentan los sujetos (Estrella et al. 2019). En la actualidad profesores y estudiantes de nivel terciario se enfrentan cotidianamente con información sobre situaciones en que hay incerteza en los medios de comunicación o en situaciones en que deben tomar una decisión de carácter objetivo. Sin embargo, los profesores no han llegado a adquirir un razonamiento probabilístico que les permita reconocer y modelar situaciones de azar (Ortiz et al. 2012), analizar las contradicciones entre sus creencias y concepciones con la probabilidad formal, para enfrentar las ideas informales y creencias que tienen sobre las probabilidades y progresar con comprensión en la axiomática de la probabilidad.

Batanero (2005) en su estudio analizó los elementos de campos de problemas, procedimientos, lenguaje, propiedades y conceptos relacionados a cinco significados de la probabilidad, a saber, significado de la probabilidad intuitivo, Laplaciano, frecuencial, subjetivo y axiomático. En este taller tendremos en cuenta el significado intuitivo y axiomático; analizando las intuiciones y heurísticas sobre la probabilidad con los asistentes por medio de la presentación de ítems relacionados con la intuición y heurísticas en situaciones de incertidumbre.

2. Significados de Probabilidad

En la enseñanza de probabilidades en educación media son de interés las siguientes aproximaciones:

a. *Significado intuitivo de probabilidad*. Aceptación del azar: Para comenzar a enseñar este concepto es necesario que los estudiantes sean capaces de diferenciar las situaciones aleatorias con las deterministas, es decir, que aprendan las características de un suceso aleatorio. Los conceptos que surgen son aleatoriedad y variabilidad, suceso seguro, posible e imposible, posibilidad y grado de creencia.

b. *Significado clásico de probabilidad*. Se define la probabilidad de un suceso como el cociente entre el número de casos favorable al suceso y el número de todos los casos posibles, siempre que todos sean equiprobables. Los conceptos que emergen son juego de azar, casos favorables y casos posibles, probabilidad como cociente.

c. *Significado frecuencial de probabilidad*. Se obtiene una estimación experimental de la probabilidad. Su valor teórico sería el límite de la frecuencia relativa de aparición del suceso al realizar la experiencia un número infinito de veces en las mismas condiciones. Un aspecto importante en este enfoque es comprender la diferencia entre probabilidad (valor teórico constante que nunca alcanzamos) y frecuencia relativa (estimación experimental de la probabilidad, que puede cambiar de una estimación a otra). También, hay que entender que los resultados de una experiencia son impredecibles, pero se puede predecir el comportamiento general de un gran número de resultados. Los conceptos que emergen frecuencia, experimento aleatorio, infinito, ensayo y ensayos repetidos.

d. *Significado de probabilidad Condicional*. A menudo se sabe que ha ocurrido un suceso A y se desea conocer la probabilidad de otro suceso B. Veremos cómo influye la ocurrencia del suceso A en la probabilidad del suceso B. Si P(A) >0 la probabilidad condicional de B dado que ocurrió A, denotada por P(B/A), se define por:

$$P(B/A) = \begin{cases} \frac{P(A \cap B)}{P(A)} & si\ P(A) > 0 \\ 0 & si\ P(A) = 0 \end{cases}$$

e. *Función de probabilidad*. Sea X una variable aleatoria discreta con recorrido R_X. Sea p una función que asigna a cada x $\in R_X$ un número $p(x) = P(X = x)$ llamado probabilidad de x. La función de probabilidad p de la v.a. X debe satisfacer las siguientes propiedades:

a) $p(x) > 0$; $\forall\ x \in R_X$ b) $\sum p(x) = 1$; $x \in R_X$

La función p es expresada usualmente como los pares $(x, p(x))$ $\forall\ x \in R_X$, llamada *distribución de probabilidades*, que es una lista de todos los resultados posibles de un experimento y de la probabilidad relacionada con cada resultado.

f. *Experimento de probabilidad Binomial*. Un experimento se dice que es Bernoulli si tiene dos resultados posibles, que llamaremos "éxito" o "fracaso" dependiendo de que ocurra o no un cierto suceso, que llamaremos "A". Llamamos p a la probabilidad que ocurra el suceso A en una sola prueba Bernoulli, probabilidad de éxito y, q la probabilidad que no ocurra el suceso A. La función de probabilidad para la variable aleatoria X como una variable dicotómica es dada por

$$p(x) = P(X = x) = \begin{cases} p^x q^{1-x} & si\ x = 0, 1 \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Suponga ahora que realizamos *n* repeticiones independientes de un experimento aleatorio en que en cada repetición podemos definir una variable aleatoria Bernoulli X_i que nos dé el resultado de cada prueba, así, tenemos *n* variables aleatorias independientes. Si nuestro interés es saber el número de éxitos obtenidos, cada vez que ocurre en suceso A la variable aleatoria $X_i = 1$ y de esta forma el número de éxitos obtenido será la suma de *n* variables aleatorias independientes X con $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$. La probabilidad que ocurra el evento A *r* veces en las *n* repeticiones será:

$$p(r) = P(X = r) = \begin{cases} \binom{n}{r} p^r q^{n-r} & si\ r = 0,1,\cdots,n \\ 0 & en\ otro\ caso \end{cases}$$

Para indicar que una variable aleatoria *X* sigue distribución Binomial con parámetros *n* y *p* usamos por notación $X \sim \mathrm{B}(n,p)$

Las actividades pretendidas del Taller conducen a la apropiación progresiva de nociones de probabilidad mediante tres tipos de representaciones (manipulativas, computacional y algebraica) para argumentar los resultados de experimentos aleatorios.

3. Estrategia para desarrollar el taller

El fundamento de este Taller considera los significados de la probabilidad en la enseñanza y el razonamiento probabilístico.

Objetivos:

• Reflexionar sobre la utilidad de la probabilidad en el análisis de las situaciones aleatorias.

• Valorar el uso sistemático y didáctico de las intuiciones y heurísticas en las prácticas de enseñanza de la probabilidad.

• Explorar la ley de los grandes números por medio de la repetición de experimentos aleatorios y su aplicación a la asignación de probabilidades.

• Resolver problemas de donde emergen los significados de probabilidad y el uso del modelo binomial.

Las actividades propuestas conducen a la apropiación progresiva mediante tres tipos de representaciones para argumentar los experimentos aleatorios. Se entiende por recursos didácticos a todos aquellos instrumentos que facilitan la comunicación hacia la exploración, aplicación y argumentación de conceptos importantes en el aula de estadística.

• *Representación manipulativa*: el estudiante trabaja con dispositivos manipulativos (dados, fichas), papel-lápiz o calculadora, sin utilizar notación o cálculo algebraico. Aparecen la noción de experimento aleatorio y estadístico. Los procedimientos son empíricos y gráficos y el lenguaje se reduce a expresiones verbales y gráficas en papel y lápiz.

• *Representación algebraica*: se caracteriza por el lenguaje simbólico y la demostración deductiva, así como el recurso a elementos de álgebra, los procedimientos serían analíticos.

• *Representación computacional*: amplía la variedad de gráficas dinámicas. Además, del lenguaje icónico, incorpora como procedimiento la simulación y permite trabajar con las variables estadísticas y aleatorias simultáneamente. El argumento preferible es inductivo, estudio de ejemplos y la generalización. Aparecen conceptos como el experimento de probabilidad binomial.

3.1 Diseño del Taller:

Los siguientes ítems ponen en juego las intuiciones, heurísticas y conocimientos de probabilidad.

Actividad 1. Se propone evaluar nueve ítems de contexto diario, para estimar su grado de creencia sobre probabilidades dentro de un rango del 0 al 100.

Tabla 1
Cuestionario sobre Probabilidades y objetivo de cada ítem.

Ítem	Objetivo de evaluación
1. Llegar a los 80 años de edad en República Dominicana	Autopercepción del contexto
2. Que los estudiantes de último año de tu colegio obtengan sobre el promedio de puntos en la Prueba de Matemática de ingreso a la Universidad	Autopercepción del contexto
3. Que un joven sea ingeniero si su padre es ingeniero	Relación de causalidad
4. Un profesor con 10 estudiantes dice que obtendría más grupos distintos formado de 2 estudiantes en vez de 8 estudiantes.	Razonamiento combinatorio, heurística de disponibilidad
5. En un gimnasio hay 1000 personas y cada una de ellas lanza 3 monedas. Aproximadamente, ¿qué porcentaje de las personas obtendrían tres caras?	Aplicar la ley de los grandes números
6. Una familia se proyecta tener tres hijos. ¿Qué tan probable es que los dos primeros sean hombres y el tercero sea mujer?	Distinguir entre probabilidad conjunta y probabilidad condicional
7. Si se lanza una moneda tres veces, ¿qué tan probable es obtener sello en el tercer lanzamiento si se sabe que los dos primeros lanzamientos fueron caras?	Distinguir entre probabilidad condicional y probabilidad clásica de Laplace
8. En una encuesta de opinión se consulta a los alumnos del colegio si están o no de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a tres alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor de tareas escolares para la casa?	Modelar experimentos binomiales
9. Domino los principales contenidos de la Probabilidad en el currículo de Educación Media.	Autopercepción del contexto

Los siguientes ítems de experimentación, visualización y cálculo de probabilidades, serán analizados con apoyo de la planilla Excel y/o el programa Geogebra.

Actividad 2. En un establecimiento educacional se seleccionan 2000 estudiantes y cada uno lanza dos dados de seis caras. Estime qué porcentaje de los estudiantes obtendrían un resultado mayor que 6.

Actividad 3. Utiliza Geogebra. En una encuesta de opinión se consulta a los alumnos del colegio si están o no de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a tres alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor de tareas escolares para la casa?

Ahora te toca a ti, responde los ítems a continuación. ¿Qué observas? Analiza y hace comentarios.

Actividad 4. En una encuesta de opinión en un colegio 1/3 de los alumnos está de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a tres alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas escolares para la casa?

Actividad 5. En una encuesta de opinión en un colegio el 25% de los alumnos está de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a cuatro alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es que uno de ellos esté a favor del envío de tareas escolares para la casa?

Actividad 6. En una encuesta de opinión en un colegio el 10% de los alumnos está de acuerdo con el envío de tareas escolares para la casa. Si eliges al azar a 120 alumnos del colegio que respondieron la encuesta, ¿qué tan probable es encontrar menos de 20 alumnos a favor del envío de tareas escolares para la casa?

Actividad 7. En un primer curso de matemática para ingenieros la probabilidad de que repruebe la asignatura un estudiante es de un 50%. ¿Cuál de estos casos te parece más probable?

a) Que de 10 alumnos seleccionados 5 reprueben.
b) Que de 100 alumnos seleccionados 50 reprueben.
c) Los dos casos anteriores son igual de probables.

La Actividad 7 corresponde a una adaptación en un contexto educacional al problema de Tversky y Kahneman (1974), sobre la heurística de la representatividad, que prescinde del tamaño de la muestra y de la variabilidad del muestreo. La respuesta correcta, opción (a), asume que el grupo de 10 estudiantes tiene más probabilidad de tener un 50% de estudiantes reprobados, debido a la variabilidad en muestras pequeñas. La opción (b) da evidencia del sesgo de representatividad, en cuanto hay mayor proporción en muestras más grandes y la opción (c) no considera el efecto del tamaño de las muestras.

Además, la Actividad 7, si bien, puede argumentarse por la variabilidad en pequeñas muestras, también permite la modelización probabilística identificando la variable aleatoria discreta con distribución binomial de parámetros n=10 y p=1/2 para el caso (a) y de parámetros n=100, p=1/2 en el caso (b); y luego comparar los valores del cálculo de la probabilidad binomial.

La solución algebraica y que puede apoyarse con calculadora se presenta a continuación: Consideremos la variable aleatoria X como el número de alumnos que reprueban una asignatura de un grupo de n estudiantes. La variable X se distribuye binomial de parámetros n y probabilidad de éxito p = 1/2 y fracaso 1 - p = 1/2. Así, bajo el modelo binomial $\mathrm{P(X = x)} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{x}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\mathrm{x}}$ para x = 0, 1, 2,…, n, las opciones se presentan algebraicamente como:

(a) $P(X=5)=\binom{10}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}$=0,2461; (b) $P(X=50)=\binom{100}{50}\left(\frac{1}{2}\right)^{100}$=0,07958;
(c) $P(X=5)=P(X=50)$

Siendo la opción (a) la correcta, ya que $P(X=5)>P(X=50)$.

Reconocimientos

Taller elaborado en el marco del Centro de Investigación en Educación y Desarrollo CIEDE-UCSC.

Referencias

Alvarado, H., Estrella, S., Retamal, L. y Galindo, M. (2018). Intuiciones probabilísticas en estudiantes de ingeniería: implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. 21 (2), 131-156.
Alvarado, H., Retamal, L. y Peake, C. (2021). Evaluación y desarrollo del enfoque intuitivo a la comprensión de probabilidades: alcances producidos por estudiantes de secundaria. *Boletim de Educação Matemática, Bolema*. 35 (71).
Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, 8(3), 247-264.
Estrella, S., Alvarado, H., Olfos, R. y Retamal, L. (2019). Desarrollo de la alfabetización probabilística: textos argumentativos de estudiantes. *Revista Paradigma*. 40(1), 280-304.
Fulmer, G. W. (2014). Undergraduates' attitudes toward science and their epistemological beliefs: Positive effects of certainty and authority beliefs. *Journal of Science Education and Technology*, 23(1), 198-206.
Ortiz, J., Batanero, C. y Contreras, C. (2012). Conocimiento de profesores en formación sobre la idea de juego equitativo. *Revista Latino Americana de Matemática Educativa*, 15(1), 63-91.
Sharma, S. (2014). Teaching probability: A socio-constructivist perspective. *Teaching Statistics*, 78-84.
Tversky, A., y Kahneman, D. (1974). Judgement under uncertainity: Heurístics and biases. *Science*, 185, 1124-1131.

Modelación de problemas elementales de Dirichlet con GeoGebra: Una propuesta didáctica en variable compleja basada en modelos

José **Saquimux**
Universidad de San Carlos
Guatemala
jsaquimux@yahoo.co.uk

Resumen

Presentamos una propuesta didáctica basada en un modelo constructivo visual desarrollada en el ambiente dinámico de GeoGebra para comprender y resolver problemas elementales de Dirichlet en contexto de electrostática 2D. En el modelo se usan ideas de mapeo conforme de variable compleja de ingeniería. Sustentamos su creación y aplicación apoyados en la teoría de enseñanza y aprendizaje de matemática basada en modelos. Describimos y ejemplificamos su construcción y su uso didáctico. Observaciones cualitativas preliminares indican mejoras en la comprensión para algunos estudiantes y el impacto positivo del uso de GeoGebra. Sugerimos la propuesta como apoyo o complemento a enfoques algebraicos tradicionales Al final discutimos algunas bondades, limitaciones y dificultades didácticas.

Palabras clave: Aprendizaje centrado en modelos; GeoGebra; Ingeniería; Mapeo conforme; Problema de Dirichlet; Variable compleja.

Introducción

La enseñanza de resolución de problemas elementales de Dirichlet para la ecuación de Laplace[1], estudiados en cursos de variable compleja de ingeniería eléctrica (en nuestro medio), en general; se realiza con métodos algebraicos tradicionales de la teoría de mapeo conforme (Schinzinger y Laura, 2003, pp. 33-59. Zill y Shanahan 2011, pp. 200-203, 389-390) [2]

[1] Encontrar una función armónica en un dominio bidimensional que cumpla ciertas condiciones de frontera.
[2] También está el enfoque analítico (no estudiado en el curso) propuesto por Coffie, R. (2023)

En nuestra experiencia docente de este tema, hemos observado que tales enfoques analítico-algebraicos de enseñanza tradicional, para varios estudiantes presenta obstáculos y conflictos de aprendizaje. Tales dificultades obstaculizan la comprensión de su naturaleza, resolución y aplicación en ingeniería eléctrica.

Intentando minimizar esta problemática de aprendizaje, y tratando de ayudar a los estudiantes con una mejor comprensión y resolución de estos problemas, como complemento a enfoques algebraicos, estamos ensayando la puesta en acción en nuestro curso de variable compleja, una estrategia de enseñanza y aprendizaje, basada en la construcción, exploración y uso de modelos visuales y dinámicos, utilizando GeoGebra (www.geogebra.org) como herramienta tecnológica base.

Para fundamentar nuestra propuesta, intentamos aplicar principios teóricos generales de enseñanza y aprendizaje de matemática basada en modelos usando GeoGebra que proponen Bu et al. (2011). Estos investigadores aconsejan centrar la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en la construcción y exploración de modelos matemáticos dinámicos, utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica principal. Estos modelos podrían incluir el uso interrelacionado de representaciones matemáticas y actividades interactivas en las que los estudiantes coparticipen activamente en su proceso de aprendizaje. Se espera que estas características didácticas fomenten la construcción y uso de modelos mentales dinámicos en los estudiantes, promoviendo una comprensión más profunda de las ideas matemáticas en cuestión.

El objetivo central de esta comunicación es compartir una propuesta didáctica basada en un modelo visual interactivo, desarrollado en el contexto de electrostática 2D, para la comprensión y resolución de problemas elementales de Dirichlet con variable compleja en el entorno dinámico de GeoGebra. Así en este escrito, describimos algunos principios teóricos generales de la enseñanza de la matemática centrada en modelos que usamos para orientar nuestros ensayos de propuesta, describimos y caracterizamos la propuesta y, al final señalamos y discutimos algunas observaciones, bondades y problemas pedagógicos observados o que creemos que puedan generarse al ponerlo en acción en la enseñanza habitual de variable compleja de ingeniería en nuestro medio.

Sustento teórico

Interesados en mejorar la calidad de enseñanza de variable compleja y motivados por trabajos desarrollados en GeoGebra, sobre visualización dinámica de mapeos en análisis complejo (Flashman, 2022), hemos estado ensayando el uso de GeoGebra como una herramienta digital en la enseñanza de variable compleja de ingeniería. En particular para favorecer la comprensión y resolución de problemas elementales de Dirichlet aplicado a electrostática.

En nuestro intento de sustentar y orientar el uso reflexivo de GeoGebra en la enseñanza de variable compleja, como docentes usuarios de teorías en educación matemática, nos apoyamos en el marco teórico preliminar propuesto por Bu et al. (2011) para una enseñanza aprendizaje de la matemática centrado en modelos usando GeoGebra. En su marco teórico, dichos autores retoman ideas de matemáticas dinámicas atribuidas a Kaput, (1992) y Moreno-Armella et al. (2008), quienes, según ellos, promueven el uso de representaciones dinámicas múltiples, la vinculación dinámica entre dichas representaciones múltiples, y la integración de tecnologías dinámicas e interactivas como infraestructura natural para la vinculación automatizada de representaciones (Bu et al. 2011 p. 19). Así también mencionan que su marco se basa en principios teóricos de educación matemática realista, propuesto por Freudenthal, (1973); Streefland, (1991) y Treffers, (1987), en el aprendizaje facilitado por modelos de Milrad et al., (2003) y, además, en la teoría de la génesis instrumental desarrollada por Guin et al. (2005). En base a esta fundamentación teórica, Bu et al. (2011 p. 15) consideran que el entorno tecnológico de GeoGebra puede usarse como herramienta efectiva para la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas basado en modelos.

En su modelo de enseñanza, Bu et al. (2011, p. 13) proponen una definición operativa de comprensión matemática: "como la capacidad de tener un modelo mental dinámico que permita a un individuo [estudiante] simular mentalmente las relaciones estructurales de la idea matemática en múltiples representaciones, con el fin de realizar inferencias y predicciones".

En relación con la compresión de una idea matemática, construcción y uso de modelos mentales dinámicos, y la integración de GeoGebra en la enseñanza y el aprendizaje de la matemática, Bu et al. (2011, p. 19) resumen:

> Nuestra comprensión de una idea matemática depende de un modelo mental viable que capture sus relaciones estructurales y los procesos correspondientes. Dada la complejidad de las matemáticas, es esencial que los estudiantes interactúen con sus múltiples representaciones y las construyan. Estas representaciones múltiples pueden construirse y manipularse por separado y también coordinarse dinámicamente mediante tecnologías de aprendizaje emergentes, como GeoGebra, en un entorno que apoya las coacciones entre el estudiante y las representaciones matemáticas.

Mencionemos brevemente las principales características para el diseño instruccional facilitado por modelos para las matemáticas dinámicas, que proponen. De las recomendaciones de matemáticas dinámicas y educación matemática realista; realizar un análisis de la fenomenología didáctica de la idea matemática, considerando sus conexiones estructurales y sus relaciones históricas, realistas y formales; la consideración de herramientas computacionales de modelación y simulación que favorecen la presencia de representaciones múltiples dinámicas e interactivas. Aplicar principios de la matemática facilitada por modelos, en los que se proponen modelos de representación y estructura múltiple que promuevan en el estudiante la exploración interactiva, matematización, el tratamiento de la complexidad y la operación coordinada del sistema tarea matemática-herramienta tecnológica de la génesis instrumental. En la secuencia de enseñanza, sugieren proponer modelos en los que los estudiantes tengan la oportunidad de examinar y modificar su actividad en los mismos, desarrollar una comprensión cada vez más abstracta y tomar decisiones fundadas en situaciones problemáticas; y promover entornos de modelado con comprensión cíclica cada vez más altas.

Considerando la definición de comprensión e ideas didácticas anteriores, creemos que se pueden construir modelos visuales en el entorno dinámico GeoGebra para ayudar a los estudiantes la comprensión y resolución de problemas de Dirichlet en variable compleja de ingeniería, aplicando algunos principios básicos de educación matemática realista y matemática facilitada por modelos. Modelos en los que se trata de darle sentido al problema en sí, y conjuntamente, a las ideas de variable compleja detrás de este problema. Modelos por medio de los cuales se resuelve y comprenda el problema, se evalúe la comprensión del estudiante, se use como modelo conceptual, y complemente tratamientos algebraicos tradicionales en variable compleja.

Descripción y generalidades de la propuesta

En variable compleja de ingeniería, los problemas elementales de Dirichlet se presentan en problemas concretos de flujo de calor, de electrostática en 2D (Zill y Shanahan, 2011, pp. 386-390), o de otras cantidades eléctricas en 2D (Levi, 2023, 2024). Proponemos un modelo en contexto de electrostática en 2D. En su comprensión y resolución se presentan conceptos, representaciones y relaciones entre ellas, así como procedimientos específicos de teoría de electrostática y su relación con funciones armónicas y funciones analíticas (Zill y Shanahan, pp. 144-153, pp. 386-390). El modelo aplica para problemas electrostáticos ideales en 3D reducibles a 2D con valores concretos en las condiciones de frontera que se pueden modelar en GeoGebra. Para aplicar el modelo es necesario que el estudiante posea conocimientos elementales sobre mapeos conformes, mapeos con GeoGebra, y de electrostática elemental en 2D.

Sistema electrostático y actividades de aprendizaje

Consideremos dos placas rectangulares verticales de dimensiones infinitas separadas una distancia d y mantenidas a potencial $V_2 = 0$. Un cable circular vertical de longitud infinita que corre entre las placas con potencial $V_1 > 0$ está localizado a una distancia $a < d$ de una de las placas. Suponiendo que el radio del cable es muy pequeño comparado con la distancia entre las placas. (adaptado de Ganguli, 2008) Les pedimos a los estudiantes: (a) Revisar sus conocimientos de electrostática elemental y elaborar un prototipo concreto aproximado (tanque de aceite, electrodos y semillas) que simule el sistema electrostático, y usarlo para realizar un análisis físico-cualitativo que permita estimar y explicar la distribución del potencial y campo electrostático entre las placas, vistos en 3D y 2D, (b) con orientación guiada, construir un modelo visual de la red de curvas ortogonales equipotenciales y líneas de fuerza en 2D con GeoGebra que ilustre el uso de conceptos y procesos de variable compleja involucrados, y (c) usar el modelo para explorar y responder preguntas que ayuden a mejorar su comprensión de problemas de Dirichlet con variable compleja.

Simulación concreta y estudio físico cualitativo

En esta etapa, usando conocimiento de electrostática elemental y su prototipo concreto, papel y lápiz, pretendemos propiciar discusión guiada entre estudiantes relacionada con sus ideas previas que poseen sobre la naturaleza física del sistema en 3D en términos de superficies equipotenciales-fuerza ortogonales en el espacio y su equivalente en 2D en términos de curvas equipotenciales-fuerza ortogonales en el plano complejo. Apoyados del prototipo concreto, les pedimos que expliquen, propongan y justifiquen sus estimaciones o inferencias sobre la distribución del potencial en términos de curvas equipotenciales, líneas de fuerza y campo electrostático en 2D del problema propuesto en 3D. Estimaciones que posteriormente deben contrastarse como el modelo a construir.

Construcción del modelo con GeoGebra

Para comprender el escenario del problema y su resolución en 2D proponemos construir un modelo en GeoGebra con guía orientada del profesor. Iniciamos usando redondeo de 4 cifras decimales, generemos deslizadores para poder variar las condiciones de frontera, $3 \leq d \leq 6, 1 \leq a \leq d - 0.5$, con incrementos de 0.5, y $-5 \leq V_2 \leq 0$, $0 \leq V_1 \leq 10$, con incrementos de 0.1. Seleccionando, $d = 3$, $a = 2$, $V_1 = 10$ y $V_2 = 0$ y suponiendo que el cable pasa en $(0, 2i)$, dibujamos el dominio físico del plano z en la Vista gráfica 1 y sus condiciones de frontera que muestra la figura 1. Las placas representadas como rectas horizontales $y = 0$ y $y = 3$, el cable como el punto $(0, 2i)$ en el plano complejo.

Les proporcionamos la función $w = \frac{1}{e^{\pi z/d} - e^{-i\pi a/d}} + \frac{i}{2\sin(\pi a/d)}$, con $a = 2$ y $d = 3$, la cual es analítica en este dominio. Con esta función y el comando lugar geométrico mapeamos la frontera del dominio de la Vista gráfica 1, en el dominio coaxial de la Vista gráfica 2, mostrada en la Figura 1.

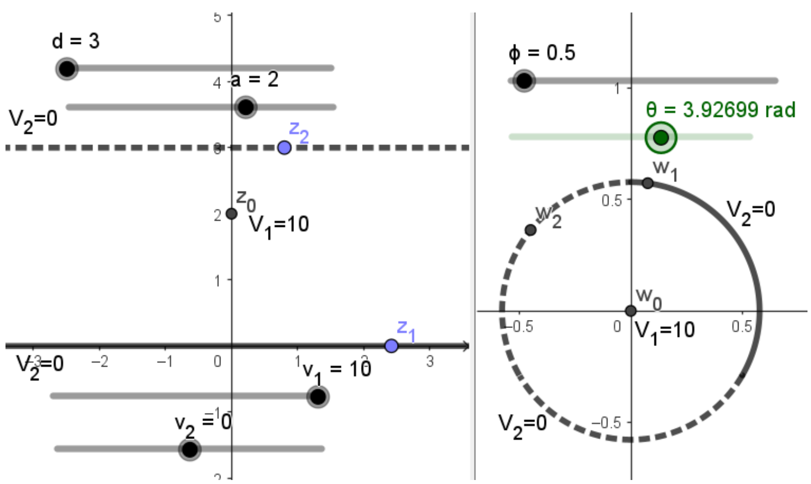


Figura 1. Dominio original plano z, Vista 1. Dominio coaxial plano w, Vista 2.

El punto $(0, 2i)$ se mapea en el punto $w = 0$, la recta $y = 0$ se mapea en el arco de línea continua, y la recta $y = 3i$ se mapea en el arco de línea discontinua, ambos arcos con igual radio. Cuando hacemos que $z_1 = x \to +\infty$, sobre ele semieje real positivo, vemos en la Vista 2 que w_1 tiende sobre el arco circular en el primer cuadrante a un punto sobre el eje imaginario, en la función del mapeo vemos que $w \to i/2\sin(\pi 2/3)$, por lo que radio del arco deber $R = \frac{1}{2\mathrm{sen}(2\pi/3)} = 0.5773$.

Con esta transformación, definimos el problema en el dominio de la Vista gráfica 2. Tenemos un dominio coaxial, un círculo de radio $r_2 = R$ a potencial $V_2 = 0$ y un círculo de radio $r_1 \ll R$ a potencial $V_1 = 10$ concéntricos en el origen. Por simetría las líneas equipotenciales son círculos concéntricos. La función potencial que resuelve este problema es

$\phi = \frac{(V_2 - V_1)\ln r + V_1 \ln r_2 - V_2 \ln r_1}{\ln(r_2/r_1)}$, de la cual, podemos expresar el radio de los círculos equipotenciales en términos de ϕ: $r(\phi) = \exp\left[\frac{\phi \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) + V_2 \ln r_1 - V_1 \ln r_2}{V_2 - V_1}\right], 0 \leq \phi \leq 10.$

Creamos el deslizador $V_2 \leq \phi \leq V_1$ con incrementos de 0.5, estos son los valores constantes que definen los círculos equipotenciales, tomando $r_2 = 0.5773$ como radio exterior del dominio, y proponemos $r_1 = 0.01$ como radio interior del dominio, con la ecuación $x^2 + y^2 = [r(\phi)]^2$, al deslizar ϕ generamos una familia de circunferencias equipotenciales con $V_2 \leq \phi \leq V_1$ en la Vista gráfica 2.

Para las líneas de fuerza, definimos el deslizador $0 \leq \theta \leq 2\pi$ con incrementos de $\pi/8$, tomando como punto inicial $r_1 e^{i\theta}$ y punto final $r_2 e^{i\theta}$, con el comando segmento generamos la familia de segmentos de líneas de fuerza en la Vista gráfica 2.

Esta red ortogonal en la Vista 2, es imagen de la red ortogonal preimagen de la Vista gráfica 1 bajo la función analítica $w = f(z)$. Por lo que la red ortogonal en la Vista gráfica 1 (por construirse) debe ser imagen de la red ortogonal en la Vista gráfica 2 bajo el mapeo de la función inversa $z = f^{-1}(w)$.

Construimos la función inversa de $w = f(z)$, la cual es, $z = \frac{d}{\pi}\ln\left(\frac{2i \operatorname{sen} \pi a/d}{2wi \operatorname{sen} \pi a/d + 1} + e^{-i\pi a/d}\right)$. Con esta función y el comando lugar geométrico mapeamos una circunferencia equipotencial y una línea fuerza de la Vista grafica 2 a la Vista gráfica 1, obteniendo una curva equipotencial y una línea de fuerza en la Vista gráfica 2.

Con el comando rastro, deslizando ϕ y θ podemos generar redes curvas en ambas vistas. Visualizamos que la red de curvas equipotenciales mapeadas en la Vista gráfica 1 cumple las condiciones de frontera, y que las redes de curvas equipotenciales y de fuerza son ortogonales. La red de curvas en la Vista gráfica 2 representan funciones armónicas, dado que un mapeo analítico transforma funciones armónicas en funciones armónicas, concluimos que la red en la Vista gráfica 1, representan las gráficas de funciones armónicas. Por lo que la red de curvas equipotenciales (línea continua) y líneas de fuerza (línea punteada) en el dominio resuelven visualmente el problema de Dirichlet propuesto.

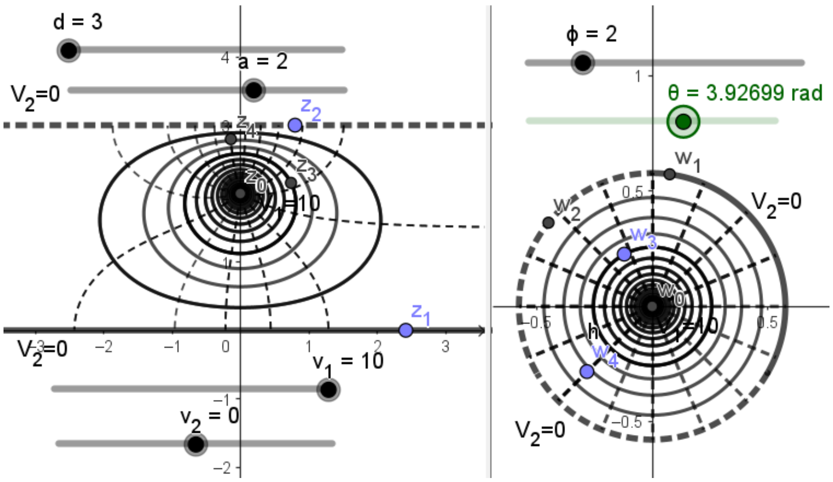


Figura 2. Redes ortogonales de equipotenciales y líneas de fuerza.

El modelo como herramienta de aprendizaje cooperativo

Con el modelo construido le solicitamos realizar algunas actividades de investigación o exploración interactiva-cooperativa, sobre conceptos físicos y matemáticos, y procedimientos relativos al problema, que apoyen a mejorar su comprensión del fenómeno, naturaleza del problema y su resolución. Entre ella mencionamos algunas

- Comparar y discutir sus estimaciones cualitativas iniciales establecidas del prototipo concreto con el modelo construido.
- Con argumentos visuales, de electrostática en 2D y3D, y variable compleja, explorar, estimar y explicar las relaciones entre curvas equipotenciales y de fuerza, mapeos analíticos usados, funciones armónicas, función potencial compleja, campo electrostático y el cumplimiento de la ecuación de Laplace,
- Proponer un procedimiento algebraico para establecer la representación algebraica de las curvas equipotenciales a partir del procedimiento de construcción del modelo.
- Elaborar la secuencia de pasos del procedimiento para construir el modelo en general con GeoGebra, y
- Discutir sobre la utilidad del modelo en la comprensión y resolución del problema.

Esperamos que las actividades anteriores justifiquen la necesidad de fundamentar y formalizar contenidos de variable compleja necesarios para comprender y resolver estos problemas.

Discusión y conclusiones

Nuestra propuesta se enfoca en centrar la enseñanza y el aprendizaje de contenidos de variable compleja relativos a problemas elementales de Dirichlet, en la construcción y exploración de modelos matemáticos en el contexto realista de electrostática utilizando GeoGebra como herramienta tecnológica principal. Entre sus bondades pedagógicas señalamos. Está basada en fenómenos observables o experimentables de electrostática elemental 2D, lo que permite a los estudiantes relacionar su experiencia o intuición con ideas electromagnéticas, funciones analíticas, funciones armónicas y procesos de mapeos conformes en variable compleja. Creemos que pueden proporcionar un marco referencial para dar sentido a dichos conceptos y procedimientos. Además, puede promover o fomentar la construcción significativa y progresiva de modelos analíticos-algebraicos para describir y analizar problemas elementales de Dirichlet con variable compleja.

Siguiendo recomendaciones de matemática dinámica, el modelo intenta proporcionar conexiones entre una variedad de ideas en contextos de electrostática 2D y variable compleja en sus distintas representaciones ejecutables en el modelo de GeoGebra como en la mente del estudiante. Incluye representaciones visuales interactivas y dinámicas, actividades orientadas de exploración y, discusiones en coparticipación estudiantil. Con ello esperamos fomentar una comprensión más profunda de los conceptos de variable compleja implicados.

En cuanto a su puesta en acción, por ahora su realización es inicial e informal. Lo hemos propuesto como proyectos para entregarse a largo plazo en un trimestre. Los modelos se construyen en grupos de tres integrantes. El profesor proporciona una guía para la construcción y la orienta. Al final cada estudiante presenta su trabajo y es evaluado.

Falta por realizar una experimentación específica o detallada sobre sus bondades y dificultades en el aprendizaje. Sin embargo, en experimentaciones preliminares observamos en algunos estudiantes sentimientos de comprensión, valoración positiva y mayor interés el aprendizaje de los contenidos de variable compleja, posesión y manejo apropiado de modelos metales reflejados en sus evaluaciones y entrevistas personales.

En cuanto a algunas dificultadas observadas, señalamos; la falta de conocimiento teórico y familiaridad con el contexto de electrostática ha sido un obstáculo para muchos estudiantes. Así también la carencia en nuestra institución de laboratorios de electrostática para experimentación debilita nuestra propuesta. Recurrimos prototipos caseros y videos sobre electrostática para apoyarla (Suarez y Vachetta, 2017). El modelo se limita solamente a problemas elementales con condiciones de frontera numéricas (no generales), también no comparte algunos conceptos y procesos con el algebraico tradicional. El aprendizaje de contenidos de electrostática y adquisición de habilidades para el uso de GeoGebra constituyen un aumento de carga cognitiva del estudiante (queja común de este) Y para su incorporación y aplicabilidad exitosa en nuestro curso requiere realizar cambios o modificaciones en la trayectoria tradicional de su enseñanza.

Finalmente, recomendamos su experimentación, determinar sus potencialidades, limitaciones o conflictos didácticos que se generan. Sugerimos su uso reflexivo como herramienta complementaria a enfoques algebraicos tradicionales.

Referencias y bibliografía

Bu et al. (2011). Toward model-centered mathematics learning and instruction using GeoGebra. En L. Bu y R. Schoen (Eds.), *Model-centered learning: Modeling and simulations for learning and instruction* (Vol. 6, pp. 67-80). SensePublishers. https://doi.org/10.1007/978-94-6091-2_3.

Coffie, R. (2023). *2D Electrostatic Fields, A Complex Variable Approach*. CRC Press.

Flashman, M. (2022). *Mapping diagrams to visualize complex analysis* [Libro interactivo]. GeoGebra. https://www.geogebra.org/m/Ni69jyKs

Ganguli, S. (2008) *Conformal Mapping and its Applications*. Recuperado el 30 de diciembre de 2024, de https://sces.phys.utk.edu/~moreo/mm08/Ganguli.pdf.

Levi, M. (2023). Conformal Deformation of Conductors. *Newsjournal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 56*(3), [p. 4].

Levi, M. (2024). Electrical Resistance and Conformal Maps. *Newsjournal of the Society for Industrial and Applied Mathematics, 57*(3), [p. 7].

Schinzinger, R. y Laura, P. (2003). *Conformal Mapping, Methods and Applications*. Dover Publications.

Suarez, A. y Vachetta, M. (2017, 15 de diciembre). Visualizando líneas de campo [Video] Youtube. www.youtube.com/@electromagnetismocuanticay8051

Zill, D. y Shanahan, P. (2011). *Introducción al Análisis Complejo con Aplicaciones*. Cengage Learning.

Modelación matemática: Una estrategia de enseñanza-aprendizaje para el álgebra en estudiantes de educación media superior

Karen Gabriela **Tamayo** Pérez
Universidad Popular Autónoma del Estado de Puebla
México
karenga_35@hotmail.com

Introducción

La materia de álgebra pre-universitaria forma parte del currículo que los estudiantes de la preparatoria UPAEP plantel Angelópolis, ubicado en la ciudad de Puebla, México cursan en su formación media superior, conceptos como: variable dependiente, independiente, dominio, rango, son algunos que aprenden por la necesidad de aprobar la materia pero que su significado e importancia suelen ser irrelevantes para ellos, por la total desvinculación de estos en su vida diaria y porque sus significados no llegan a ser entendidos por los estudiantes. Esa es la principal motivación de la aplicación del aprendizaje basado en proyectos, específicamente, que los estudiantes desarrollen un modelo matemático vinculado con un tema que sea de su interés, originalmente la propuesta es que sea un modelo matemático que explique un fenómeno que podemos encontrar en alguna carrera universitaria que ellos hayan pensado en estudiar. En el presente trabajo se presentan los resultados de dicha implementación, además del trabajo que se ha realizado en desarrollo de evaluaciones, rúbricas de calificación y ejemplos de los modelos matemáticos que realizaron los estudiantes.

Presentación de la propuesta

El principal objetivo de este aprendizaje está basado en el constructivismo, es decir, que el estudiante sea capaz de planear, implementar y evaluar proyectos que no se limitan al aula sino que trascienden a problemas que se encuentran en la vida diaria, estos aprendizajes han sido motivo de gran estudio en el ámbito educativo debido a todas las ventajas que se han observado en el desarrollo de aprendizajes significativos (Rodríguez Carracedo, M. del C., & Vázquez Carro, E. 2013), además de todas las habilidades interdisciplinarias que se pueden desarrollar con este, tales como, aprendizaje colaborativo, diseño de experimentos, investigación de fuentes confiables, etc.

En el área de Matemáticas, la implementación de nuevas estrategias de enseñanza aprendizaje, es algo que los estudiantes demandan, conforme las generaciones van avanzando y el desarrollo tecnológico va en aumento, mostrarles la importancia de las Matemáticas en su vida son de suma importancia.

Desarrollo de la propuesta

Durante la realización de este proyecto se tomaron en cuenta dos tipos de evaluaciones, diagnóstica y formativa, además de incluir la evaluación heterogénea, coevaluación y autoevaluación. Para estas últimas evaluaciones se desarrollaron rúbricas, cuya finalidad es medir los aprendizajes y poder evaluar esta estrategia, contrastar con una enseñanza tradicional, y poder ver el impacto obtenido en los estudiantes (Díaz, F., & Hernández, G. 2002)).

Resultados

En el autodiagnóstico realizado por medio de una plataforma llamada LEXIUM se puede observar que los estudiantes tienen desarrolladas buenas habilidades matemáticas, sin embargo, en la dinámica de la clase se observa mucha dificultad para el aprendizaje de los temas de álgebra, la principal razón que comentan los estudiantes es que no le ven la importancia de estos temas además de que esos temas no los van a usar en su vida diaria.

Después de la aplicación de esta estrategia se concluye lo siguiente: Los estudiantes de media superior no tienen claro la diferencia entre trabajo en equipo y colaborativo, hubo demasiados conflictos para la organización y desarrollo del modelo, el cual se vio reflejado en la evaluación colaborativa. La estrategia de aprendizaje basado en proyectos es una estrategia que favorece a los chicos dado que son estrategias innovadoras en la materia de Matemáticas, ya que refieren que jamás había realizado una actividad parecida en específicamente esta materia, lo cual despertó su interés. La transversalidad de esta estrategia propició que los estudiantes reconozcan la importancia de las Matemáticas sin importar el área al que se van a dedicar. Por último, los significados de los conceptos abstractos como son variables, dominio, rango, etc. que inicialmente los estudiantes tenían una vaga noción de ellos, tomaron importancia gracias a este proyecto, integrando el uso de plataformas como GeoGebra, para el entendimiento de este proyecto.

Referencias y bibliografía

Díaz, F., & Hernández, G. (2002). *Estrategias docentes para un aprendizaje significativo* (Vol. 2). México: McGraw-Hill.

Rodríguez Carracedo, M. del C., & Vázquez Carro, E. (2013). Fortalecer estilos de aprendizaje para aprender. *Revista De Estilos De Aprendizaje*. https://doi.org/10.55777/rea.v6i11.969

Patrones numéricos: De la observación a la formalización con congruencias numéricas

Reiman Yitsak **Acuña** Chacón
Escuela de Matemática, Instituto Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
reiacuna@tec.ac.cr
Bolívar Alonso **Ramírez** Santamaría
Sección de Matemática, Sede Occidente, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
bolivar.ramirez@ucr.ac.cr

Resumen

Este taller propone una actividad colaborativa enfocada en la identificación y análisis de patrones numéricos, partiendo de la observación de patrones numéricos y su comportamiento en diferentes contextos. Los participantes explorarán cómo estos patrones pueden ser formalizados utilizando congruencias numéricas y principios de aritmética modular. A través de ejemplos prácticos y trabajo en equipo, se busca profundizar en la comprensión de conceptos matemáticos clave y fomentar habilidades de razonamiento lógico y crítico. Este taller está diseñado para responder a la necesidad de desarrollar habilidades de análisis y razonamiento matemático, y su metodología colaborativa fortalece tanto el aprendizaje de conceptos matemáticos como las competencias comunicativas en los participantes.

Palabras clave: Patrones numéricos, Congruencias numéricas, Aritmética modular, educación matemática, Trabajo colaborativo.

Introducción

Este taller está diseñado específicamente para docentes de Matemáticas, investigadores educativos y formadores que buscan nuevas estrategias para integrar conceptos abstractos como las congruencias numéricas y la aritmética modular en contextos prácticos de enseñanza. Con un enfoque centrado en el aprendizaje activo y colaborativo, el taller responde a los desafíos actuales en la Educación Matemática, como la necesidad de promover el razonamiento lógico y la capacidad de los estudiantes para identificar patrones numéricos en diferentes contextos.

La identificación de patrones numéricos es una habilidad esencial en Matemáticas que permite comprender y predecir comportamientos en distintos contextos numéricos. Las congruencias numéricas y la aritmética modular son herramientas fundamentales para formalizar y generalizar estos patrones, proporcionando una base sólida para el estudio de la teoría de números y sus aplicaciones.

En el ámbito educativo, es crucial promover metodologías que involucren a los estudiantes en procesos activos de descubrimiento y formalización matemática. Este taller responde a esa necesidad, ofreciendo una experiencia práctica que conecta la observación empírica con la formalización teórica, alineándose con las tendencias actuales en Educación Matemática que enfatizan el aprendizaje activo y colaborativo (NCTM, 2014).

Objetivo general

Desarrollar la habilidad de identificar y formalizar patrones numéricos mediante el uso de congruencias numéricas y aritmética modular, a través de actividades colaborativas y ejemplos prácticos.

Objetivos específicos

- Fomentar el análisis y la observación crítica de patrones en conjuntos numéricos.
- Introducir y aplicar conceptos de congruencias numéricas y aritmética modular.
- Promover el trabajo en equipo y el intercambio de ideas en la resolución de problemas matemáticos.
- Reflexionar sobre la importancia de la formalización teórica en la comprensión de estructuras numéricas.
- Desarrollar la capacidad para aplicar teoremas matemáticos en la resolución de problemas.
- Fomentar la habilidad de comunicar hallazgos matemáticos de manera efectiva en un entorno colaborativo.

Referencia teórica

La aritmética modular es una rama de la teoría de números que estudia las propiedades de los números enteros bajo la operación de congruencia. Dos números enteros a y b son congruentes módulo n si n divide a la diferencia $a - b$, lo cual se denota como:

$$a \equiv b \pmod{n}.$$

Este concepto es fundamental para el análisis de patrones en potencias y otros contextos numéricos. Teoremas como el Pequeño Teorema de Fermat y el Teorema de Euler proporcionan herramientas poderosas para comprender el comportamiento de las potencias en módulos específicos (Burton, 2011).

Pequeño Teorema de Fermat

Si p es un número primo y a es un entero no divisible por p, entonces:

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

En términos equivalentes, si p es un número primo y a es un entero cualquiera, se cumple

$$a^{p} \equiv a \pmod{p}.$$

El teorema afirma que si p es un número primo, las potencias de a en modulo p tienen un comportamiento cíclico. Esto es particularmente útil en criptografía y en el estudio de números porque permite simplificar cálculos y entender patrones en potencias elevadas.

Ejemplo 1: Uso del Teorema de Fermat

Considere los números $a = 2$ y $p = 5$ (el cual es un número primo). Note que

$$2^{5-1} = 2^4 = 16 \equiv 1 \pmod{5}.$$

Es decir,

$$2^4 \equiv 1 \pmod{5} \quad \text{o bien} \quad 2^5 \equiv 2 \pmod{5}.$$

Teorema de Euler

Para cualquier entero positivo n y entero a que sean coprimos, se cumple

$$a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

donde $\phi(n)$ es la función totiente de Euler, que cuenta la cantidad de enteros positivos menores que n que son coprimos con n.

Es importante recordar que dos números enteros n y a son coprimos (o primos relativos) si su máximo común divisor es igual a 1, es decir, $\text{mcd}(n, a) = 1$.

Para la función totiente de Euler $\phi(n)$ existe una fórmula para calcularla que depende de la factorización en primos de n, es decir, si n se descompone en factores primos como:

$$n = p_1^{e_1} \cdot p_2^{e_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{e_k},$$

donde $p_1, p_2, \ldots, p_k$ son los factores primos distintos de n, entonces:

$$\phi(n) = n \cdot \left(1 - \frac{1}{p_1}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

El Teorema de Euler es una generalización del Pequeño Teorema de Fermat y se aplica a cualquier entero positivo n, no necesariamente primo y es uno de los resultados fundamentales en la teoría de números. De hecho, si n fuera primo note que $\phi(n) = n - 1$, y por lo tanto y el Teorema de Euler se reduce al Pequeño Teorema de Fermat**:**

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Ejemplo 2: Uso del Teorema de Euler

Considere los números $n = 24$ y $a = 5$. Como $\mathrm{mcd}(24,5) = 1$ se puede usar el Teorema de Euler. Para ello note que $24 = 2^3 \cdot 3$, entonces

$$\phi(12) = 24 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 24 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = 8$$

Así, hay 8 números menores o iguales a 24 que son coprimos con 24: $\{1,5,7,11,13,17,19,23\}$.

Luego, observe que $5^{\phi(24)} = 5^8 = 390625 \equiv 1 \pmod{24}$, es decir,

$$5^{\phi(24)} \equiv 1 \pmod{24}$$

Ciclos modulares

Cuando se calculan potencias de un número bajo un módulo n, los resultados suelen repetirse siguiendo un patrón cíclico. Por ejemplo, si se considera $a = 3$ y $n = 7$ y se hacen cálculos con dichas congruencias se tiene:

$$\begin{gathered}
3^1 \equiv 3 \pmod{7}, \\
3^2 \equiv 2 \text{ mod } 7), \\
3^3 \equiv 6 \pmod{7}, \\
3^4 \equiv 4 \pmod{7}, \\
3^5 \equiv 5 \pmod{7}, \\
3^6 \equiv 1 \pmod{7}, \\
3^7 \equiv 3 \pmod{7}, \\
3^8 \equiv 2 \pmod{7}.
\end{gathered}$$

Note que después de $3^6 \equiv 1 \pmod{7}$, los resultados de las potencias de 3 $\pmod{7}$ comienzan a repetirse y son solo 6 números diferentes, que corresponde al orden del grupo multiplicativo reducido $\mathbb{Z}_7^* = \{1,2,3,4,5,6\}$, con la cual es una propiedad fundamental en grupos cíclicos y módulos primos (Silverman, 2006).

En general, al considerar $a^k \pmod{n}$**,** se observa que los valores posibles de las potencias de a en módulo n están determinados por el tamaño del grupo multiplicativo reducido $\mathbb{Z}_n^*$. Este grupo está compuesto por todos los números enteros entre 1 y $n - 1$ que son coprimos con n, y su tamaño u orden corresponde al valor de la función totiente de Euler $\phi(n)$. De hecho, este comportamiento está relacionado con el Teorema de Euler y el Pequeño Teorema de Fermat (Hardy & Wright, 2008).

Formalización Modular: importancia y trabajo cooperativo

La aritmética modular, introducida por Carl Friedrich Gauss en *Disquisitiones Arithmeticae* (1801), es una herramienta fundamental en la teoría de números y un recurso clave en la enseñanza de las matemáticas. En particular, los ciclos modulares proporcionan un enfoque intuitivo para analizar patrones numéricos, facilitando el desarrollo de habilidades analíticas esenciales en los estudiantes.

Desde una perspectiva educativa, los ciclos modulares son ideales para introducir conceptos como la periodicidad y la simetría mediante actividades prácticas. Como señala Burton (2011), estos patrones "fortalecen la comprensión de la estructura subyacente en los números enteros y sus operaciones bajo módulos" (p. 14). La representación visual de los ciclos modulares ayuda a los estudiantes a identificar regularidades, estableciendo conexiones entre conceptos abstractos y aplicaciones concretas en contextos diversos.

Además, los ciclos modulares enriquecen las experiencias en el aula al fomentar el aprendizaje profundo y colaborativo. Biggs (2002) destaca que "la interacción con problemas de patrones cíclicos promueve tanto la curiosidad matemática como la resolución cooperativa de problemas" (p. 100). Este enfoque refuerza no solo las habilidades matemáticas individuales, sino también la capacidad de los estudiantes para trabajar en equipo, un elemento esencial para la construcción de conocimiento compartido.

Desde la perspectiva pedagógica, el análisis de patrones en potencias modulares ofrece una oportunidad única para que los estudiantes colaboren, dividan tareas, validen cálculos y discutan sus hallazgos. Según Johnson y Johnson (1999), el trabajo en equipo fomenta la resolución de problemas complejos y desarrolla habilidades comunicativas fundamentales. En este contexto, los ciclos modulares se convierten en una herramienta poderosa para consolidar el aprendizaje matemático de manera significativa y colaborativa.

Ejemplo 3: Determinar un patrón y un ciclo para las unidades en las potencias de 2

1. Presentación y discusión de una pregunta generadora**:** se presenta a los partícipes una lista inicial de potencias de 2, como sigue:

$$2^1 = 2, \qquad 2^2 = 4, \qquad 2^3 = 8, \qquad 2^4 = 16, \qquad 2^5 = 32, \qquad 2^6 = 64, \ldots$$

En grupos, se plantea el siguiente problema: ¿Qué regla existe para las cifras de las unidades cuando se calculan potencias de 2?

Los partícipes discuten la naturaleza de la pregunta y verbalizan respuestas iniciales como:

- "Al calcular potencias de 2, las cifras de las unidades pueden ser 2,4,8, y 6."
- "El cálculo de potencias de 2 muestra que la cifra de las unidades sigue un patrón cíclico."
- "La cifra de las unidades nunca es un número impar."

A partir de estas observaciones, los estudiantes registran evidencias como las siguientes:

- $2^1 = 2$ (cifra de las unidades: 2)
- $2^2 = 4$ (cifra de las unidades: 4)
- $2^3 = 8$ (cifra de las unidades: 8)
- $2^4 = 16$ (cifra de las unidades: 6)
- $2^5 = 32$ (cifra de las unidades: 2)
- $2^6 = 64$ (cifra de las unidades: 4)
- $2^7 = 128$ (cifra de las unidades: 8)
- $2^8 = 256$ (cifra de las unidades: 6)

De esta manera, observan que las cifras de las unidades siguen un ciclo de longitud o periodicidad 4: $\{2,\ 4,\ 8,\ 6\}$.

2. Formalización del patrón: con la guía de los docentes, los partícipes exploran la relación de este patrón con el concepto de módulo. En este caso, se utiliza el módulo 10, ya que las cifras de las unidades están relacionadas con los residuos al dividir entre 10. Así, el patrón se puede expresar formalmente como:

$$2^n \equiv 2, 4, 8, 6 \ (\text{mod } 10).$$

Dado que este ciclo se repite cada 4 potencias, el patrón puede simplificarse aún más utilizando n (mod 4).

$$2^n \equiv 2^{n \ (\text{mod } 4)} \ (\text{mod } 10).$$

3. Profundización según el nivel del partícipe: dependiendo del nivel de los partícipes, se puede extender la actividad a:

a. Verificar el patrón con herramientas tecnológicas como Excel, GeoGebra o Python para realizar cálculos adicionales y explorar su repetición.
b. Demostrar el patrón mediante inducción matemática, verificando que los 4 casos del ciclo se cumplen:
   - Si $n = 4k$, entonces $2^n \equiv 6$ mod 10.
   - Si $n = 4k + 1$, entonces $2^n \equiv 2$ mod 10.
   - Si $n = 4k + 2$, entonces $2^n \equiv 4$ mod 10.
   - Si $n = 4k + 3$, entonces $2^n \equiv 8$ mod 10.

En este proceso, los participantes conectan la observación empírica con una explicación formal, fortaleciendo su comprensión de la periodicidad modular y la importancia del razonamiento inductivo.

Sobre la identificación de patrones numéricos

La identificación de patrones numéricos no solo desempeña un papel central en la enseñanza de la teoría de números, sino que también tiene aplicaciones prácticas fundamentales en campos como la criptografía y la teoría de códigos, donde las congruencias numéricas son herramientas clave. Asimismo, el desarrollo de habilidades para analizar patrones resulta esencial en diversos niveles educativos, ya que contribuye significativamente al fortalecimiento del pensamiento matemático abstracto (Rosen, 2012).

Metodología

Durante el taller, los participantes contarán con rúbricas de autoevaluación que les permitirán reflexionar sobre su comprensión de los conceptos presentados. Al finalizar, se aplicará una encuesta que evaluará tanto la efectividad del taller como las áreas de mejora. Estas herramientas permitirán optimizar futuras iteraciones del taller y garantizar que cumpla con las expectativas del público.

El taller se desarrollará mediante una combinación de exposiciones breves, actividades prácticas y discusiones en grupo. Las principales metodologías serán:

- Trabajo en grupos pequeños: los participantes se dividirán en grupos de entre 3 a 5 personas para fomentar la interacción y el intercambio de ideas.
- Resolución de problemas: se proporcionarán conjuntos de números y problemas para analizar y buscar patrones.
- Discusión guiada: el facilitador guiará debates y reflexiones sobre los hallazgos de los grupos.
- Presentaciones grupales: cada grupo presentará sus conclusiones al resto de los participantes. Cada actividad del taller se ha diseñado para desarrollar habilidades específicas:
  - En la actividad de observación de patrones, los grupos identificarán ciclos en potencias y explorarán estrategias de análisis como la agrupación de términos similares o el uso de divisores comunes.
  - En el trabajo en grupos, se asignarán roles como moderador, analista y presentador, facilitando la colaboración efectiva. Esta estructura busca no solo fomentar la comprensión matemática, sino también promover el liderazgo y la responsabilidad dentro del equipo.

Justificación de la Estrategia Seleccionada

El aprendizaje colaborativo no solo favorece una comprensión más profunda a nivel individual, sino que también promueve la construcción de un entendimiento colectivo de los conceptos matemáticos (Johnson y Johnson, 1999). Diversos estudios destacan que el trabajo en grupo permite a los estudiantes desarrollar habilidades analíticas, sociales y comunicativas, aspectos fundamentales en la Educación Matemática (Polya, 1957). Además, esta metodología fomenta la reflexión crítica y facilita el intercambio de conocimientos entre los participantes, enriqueciendo significativamente el proceso de aprendizaje.

Agenda General del Taller

Materiales necesarios: calculadoras básicas, pizarras, marcadores y material de papel para anotaciones. Cada fase está diseñada para optimizar el uso de estos materiales. La duración total será de una hora con 50 minutos, distribuido de la siguiente forma:

1. Introducción y Formación de Grupos (10 minutos).
    - Presentación del taller y objetivos. Organización de los participantes en grupos.
2. Actividad 1: Observación de Patrones Numéricos (20 minutos).
    - Se entregarán a los grupos conjuntos de números y potencias para analizar.
    - Un ejemplo: Analizar las unidades de potencias sucesivas de 5 $(5^1, 5^2, 5^3, \ldots)$.
3. Discusión Intermedia (10 minutos).
    - Cada grupo comparte sus observaciones iniciales.
    - El facilitador introduce conceptos básicos de congruencias.
4. Actividad 2: Formalización con Congruencias Numéricas (30 minutos).
    - Los grupos aplican congruencias para formalizar los patrones observados.
5. Actividad 3: Aplicación de Teoremas y Resolución de Problemas (25 minutos)
    - Se presentan problemas que requieren el uso del Pequeño Teorema de Fermat o el Teorema de Euler.
    - Problemas: Calcular $3^{50} \pmod{11}$ y $4^{25} \pmod{15}$.
6. Presentaciones Grupales (20 minutos).
    - Los grupos presentan sus soluciones y métodos al resto.
7. Conclusiones y Cierre (15 minutos).
    - Reflexión y discusión conjunta sobre lo aprendido. (Incluir la formalización)

Conclusiones

La importancia de este taller radica en su capacidad para dotar a los participantes de herramientas prácticas que puedan integrarse en diversos entornos educativos. Combinando la observación empírica con la formalización matemática, los conceptos explorados se presentan como aplicables tanto en la enseñanza secundaria como en la formación docente, promoviendo una comprensión más profunda de las congruencias numéricas y su papel en el análisis de patrones.

A través de una metodología colaborativa basada en el trabajo en equipo y la resolución de problemas, el taller fomenta el pensamiento crítico, el razonamiento lógico y la comunicación efectiva. Estas competencias transferibles no solo enriquecen la enseñanza de las matemáticas, sino que también preparan a los asistentes para abordar desafíos complejos en contextos académicos y profesionales, contribuyendo a un aprendizaje significativo y duradero.

Referencias y bibliografía

Biggs, N. L. (2002). *Discrete Mathematics*. Oxford University Press.
Burton, D. M. (2011). *Elementary Number Theory.* McGraw-Hill.
Gauss, C. F. (1801). *Disquisitiones Arithmeticae*. Fleischer. https://archive.org/details/disquisitionesa00gaus/page/XIV/mode/2up
Hardy, G. H., & Wright, E. M. (2008). *An Introduction to the Theory of Numbers* (6th ed.). Oxford University Press.
Johnson, D. W., & Johnson, R. T. (1999). Learning Together and Alone: Cooperative, Competitive, and Individualistic Learning Individualistic Learning. Allyn & Bacon.
National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2014). *Principles to Actions: Ensuring Mathematical Success for All. NCTM.*
Pólya, G. (1957). *How to Solve It.* Princeton University Press.
Rosen, K. H. (2012). *Discrete Mathematics and Its Applications.* McGraw-Hill.
Silverman, J. H. (2006). *A Friendly Introduction to Number Theory* (3rd ed.). Pearson.

Potenciando competencias matemáticas a través del enfoque Matemáticas en Tres Actos

Felix **De la Cruz Serrano**
Docente en Matemáticas e Investigador independiente
Perú
feldese@gmail.com

Resumen

Este taller está dirigido a docentes de secundaria que deseen implementar el enfoque de Matemáticas en Tres Actos, una metodología innovadora orientada a estimular la creatividad, la resolución de problemas y el desarrollo de habilidades metacognitivas en el alumnado. A partir de tres fases (formulación de preguntas, creación de problemas en contextos reales y resolución reflexiva), los participantes analizarán cómo integrar este enfoque en sus clases para fomentar aprendizajes activos y significativos. El objetivo principal es concienciar a los docentes sobre el potencial de este método para transformar las prácticas pedagógicas tradicionales, promoviendo entornos educativos dinámicos que motiven y comprometan a los estudiantes con las Matemáticas.

Palabras clave: Matemáticas en Tres Actos; Creatividad matemática; Resolución de problemas; Habilidades metacognitivas; Enseñanza de Matemáticas; Educación secundaria; Metodología innovadora.

Introducción

En la actualidad, la enseñanza de las Matemáticas en secundaria enfrenta grandes desafíos debido a la falta de motivación y a las percepciones negativas que muchos estudiantes desarrollan hacia la asignatura. Los métodos tradicionales, centrados en la memorización y en el uso mecánico de procedimientos, han limitado la capacidad de los alumnos para profundizar en los conceptos y aplicarlos en situaciones reales. Ante esta problemática, educadores e investigadores buscan enfoques pedagógicos innovadores que promuevan un aprendizaje participativo y significativo, capaz de estimular el pensamiento lógico, crítico y creativo, así como la metacognición (Boaler, 2016; Flavell, 1979; Polya, 1945; Possamai & Allevato, 2023).

El enfoque Matemáticas en Tres Actos, propuesto por Meyer (2011), se presenta como una metodología dinámica que integra tres fases narrativas para involucrar al estudiante en la creación y resolución de problemas matemáticos. A diferencia de los métodos convencionales, el proceso comienza con la exploración y formulación de preguntas (Acto 1), a partir de una situación visual que despierta la curiosidad y motiva la indagación. Luego, se crea un problema matemático basado en esas preguntas (Acto 2) y, por último, se resuelve y reflexiona sobre el proceso (Acto 3). Con ello, se propician la comprensión profunda de los conceptos y el desarrollo de la creatividad y el pensamiento crítico, fundamentales para la resolución de problemas y el fortalecimiento de competencias metacognitivas (Flavell, 1979; Meyer, 2011; Polya, 1945; Possamai & Allevato, 2023; Schoenfeld, 2016).

Este taller se ha diseñado especialmente para docentes de secundaria que buscan innovar en sus prácticas pedagógicas mediante el enfoque de Matemáticas en Tres Actos. Su principal propósito es capacitarlos en la aplicación de este método, brindándoles herramientas y estrategias para incentivar competencias esenciales en sus estudiantes, como la creatividad matemática, la resolución de problemas y la autorregulación del aprendizaje. A través de actividades prácticas y reflexiones colectivas, los docentes podrán experimentar las ventajas de esta metodología y familiarizarse con su implementación en contextos reales.

Al finalizar el taller, se espera que los participantes comprendan el valor de este enfoque tanto en la motivación de los estudiantes hacia las Matemáticas como en la transformación de la dinámica de aprendizaje. El uso de Matemáticas en Tres Actos fomenta entornos más atractivos, impulsa la confianza en las habilidades matemáticas del alumnado y los prepara para enfrentar desafíos tanto dentro como fuera del aula.

1. Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

El enfoque de Matemáticas en Tres Actos propone una metodología innovadora que redefine la forma en que los estudiantes de secundaria aprenden Matemáticas. Estructurado en tres fases o “actos”, este enfoque promueve la participación activa de los alumnos en la creación y resolución de problemas, y fortalece habilidades fundamentales como la creatividad, la resolución de problemas y la metacognición.

Fundamentos del Enfoque

a) Acto 1: Exploración y generación de preguntas

Esta primera fase presenta a los estudiantes una situación visual intrigante, diseñada para captar su atención e impulsar su curiosidad. A partir de la imagen o escena, los alumnos formulan preguntas y realizan observaciones que sirven como punto de partida para explorar conceptos matemáticos. Este proceso potencia la creatividad y estimula la capacidad de generar preguntas, rasgo esencial para desarrollar el pensamiento divergente en Matemáticas (Flavell, 1979; Possamai & Allevato, 2023). Asimismo, se establece un vínculo con el aprendizaje activo, ya que desde el principio los estudiantes participan en la construcción de conocimientos.

b) Acto 2: Creación del problema matemático

En esta segunda etapa, a partir de las preguntas generadas en el Acto 1, los estudiantes diseñan un problema coherente con la situación inicial. Este proceso fomenta la creatividad Matemática al exigir la adaptación de los conocimientos a nuevos contextos (Ayllón et al., 2016; Polya, 1945; Possamai & Allevato, 2023). Además, la toma de decisiones en torno a qué datos son necesarios y cómo plantear el problema fortalece la flexibilidad cognitiva y profundiza la capacidad de resolución de problemas.

c) Acto 3: Resolución y reflexión

En la última fase, los estudiantes se enfrentan al problema que ellos mismos han formulado. Una vez concluida la resolución, reflexionan sobre los procedimientos y estrategias utilizadas, discuten los hallazgos y comparan resultados con sus pares. Esta reflexión final desarrolla las habilidades metacognitivas, puesto que fomenta la autoevaluación y la revisión de métodos (Flavell, 1979; Schoenfeld, 2016). Con ello, el alumnado afianza su aprendizaje y desarrolla un pensamiento crítico que le permite regular su propio proceso de resolución de problemas.

Relevancia educativa del enfoque

En la educación secundaria, las metodologías tradicionales suelen centrarse en la transmisión de contenidos y la repetición de procedimientos. Por el contrario, el enfoque de Matemáticas en Tres Actos promueve la participación activa de los estudiantes, generando un ambiente de aprendizaje en el que ellos mismos se convierten en protagonistas y adquieren habilidades esenciales para el presente y futuro:

- **Creatividad Matemática**: Formular preguntas y problemas originales ayuda a comprender las Matemáticas como una herramienta flexible para interpretar y resolver situaciones de la vida cotidiana (Ayllón et al., 2016; Leikin & Sriraman, 2017; Polya, 1945; Possamai & Allevato, 2023).

- **Resolución de Problemas**: En lugar de aplicar fórmulas de forma mecánica, los estudiantes aprenden a evaluar diversas estrategias y su efectividad, algo imprescindible para abordar situaciones no estructuradas (Cai & Lester, 2010; Polya, 1945).

- **Desarrollo Metacognitivo**: Reflexionar sobre el proceso de resolución permite planificar, monitorear y evaluar las propias estrategias, incrementando la autonomía y la confianza para enfrentar nuevos desafíos (Flavell, 1979; Schneider & Artelt, 2010).

Además, el enfoque de tres actos suele mejorar la motivación de los estudiantes y reducir su ansiedad hacia la asignatura, al situar las Matemáticas en contextos reales y atractivos (Ayllón et al., 2016; Boaler, 2016). Esta experiencia positiva promueve una actitud más comprometida, lo que facilita la exploración de nuevos conceptos y refuerza la disposición a seguir aprendiendo.

Por último, la estructura colaborativa en el aula impulsa otras competencias clave, como la comunicación efectiva, la colaboración y la adaptación a la incertidumbre. Al trabajar en equipo, los estudiantes discuten estrategias, toman decisiones conjuntas y se apropian de un aprendizaje que va más allá de lo puramente procedimental (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2014; Possamai & Allevato, 2023). En suma, el enfoque de Matemáticas en Tres Actos ofrece una opción pedagógica que atiende tanto a la comprensión profunda de los contenidos matemáticos como al desarrollo de competencias indispensables para la vida y la sociedad contemporánea.

2. Referencial teórico

El enfoque de Matemáticas en Tres Actos se sustenta en teorías educativas y psicológicas que resaltan la relevancia de metodologías activas para lograr un aprendizaje profundo y significativo. Este taller reúne aportes de diversas investigaciones y autores que abordan la creatividad matemática, la resolución de problemas y la metacognición, demostrando la pertinencia de este enfoque en el contexto educativo actual.

Creatividad matemática

La creatividad matemática es esencial en la formación integral de los estudiantes y se define como la capacidad de formular y resolver problemas de manera original y eficaz. Este rasgo facilita la exploración y la generación de conocimiento matemático a través de la reinterpretación de conceptos y la formulación de preguntas innovadoras. Para Ayllón et al. (2016), la creatividad y las Matemáticas comparten características como la fluidez, la flexibilidad, la novedad y la elaboración, claves para la competencia matemática. Por su parte, Leikin & Sriraman (2017) subrayan que la creatividad en Matemáticas fomenta un pensamiento flexible y divergente, indispensable para la resolución de problemas complejos.

Resolución de problemas

La resolución de problemas se considera una competencia central en la enseñanza de las Matemáticas. Polya (1945) es pionero en este ámbito y enfatiza que resolver problemas es un pilar para desarrollar el pensamiento matemático. Cai & Lester (2010) coinciden en que la resolución de problemas debe ser el eje de la instrucción matemática para un aprendizaje sólido. Ayllón et al. (2016) subrayan que esta práctica fortalece el pensamiento crítico y creativo al exponer a los estudiantes a situaciones que desafían su razonamiento.

Habilidades metacognitivas

La metacognición, entendida como la capacidad de reflexionar sobre los procesos de pensamiento, es un componente fundamental del aprendizaje matemático. Flavell (1979) introduce el concepto y lo define como conocimiento y regulación de los procesos cognitivos. Schneider & Artelt (2010) destacan su papel en la planificación, el monitoreo y la evaluación. El enfoque de tres actos potencia estas habilidades al exigir que los estudiantes examinen y revisen sus estrategias de resolución (Meyer, 2011).

Motivación y percepción hacia las Matemáticas

La motivación y la actitud hacia las Matemáticas afectan directamente la implicación y el éxito de los estudiantes. Deci & Ryan (2000) señalan la importancia de la motivación intrínseca para el aprendizaje profundo. En el enfoque de tres actos, la fase inicial de exploración (Acto 1) capta la atención y el interés, fomentando una relación positiva con las Matemáticas. Hannula (2002) considera que las emociones y percepciones de los estudiantes influyen en su disposición a participar y aprender. La propuesta de Meyer (2011), basada en fundamentos teóricos como los de Bandura (1997), ofrece un punto de partida intrigante que reduce la ansiedad y potencia la confianza en las propias capacidades.

Fundamentación teórica del enfoque Matemáticas en Tres Actos

El enfoque de Matemáticas en Tres Actos se sustenta en la perspectiva constructivista, que concibe el aprendizaje como una actividad activa y contextual (Piaget, 1970). Según Boaler (2016), este enfoque sitúa a los estudiantes como constructores activos de conocimiento, donde su rol central es explorar, cuestionar y dar sentido a los conceptos matemáticos a través de problemas significativos.

Pese a su relativa novedad, las investigaciones en estrategias de enseñanza activa y aprendizaje basado en problemas apoyan los beneficios de este método. Por ejemplo, diversos estudios muestran que, al fomentar la formulación y resolución de problemas, el alumnado desarrolla habilidades creativas y críticas, además de reducir la ansiedad matemática (Hannula, 2002; Leikin & Pitta-Pantazi, 2013; Sriraman, 2005). Asimismo, metodologías que promueven la participación y el trabajo colaborativo refuerzan la motivación y mejoran la autoconfianza de los estudiantes (Deci & Ryan, 2000; Bandura, 1997).

3. Estrategia para desarrollar el taller

La estrategia metodológica propuesta para el taller consiste en la implementación práctica del enfoque Matemáticas en Tres Actos, que se divide en las tres fases esenciales:

a) Exploración y generación de preguntas.
b) Creación del problema matemático.
c) Resolución del problema y reflexión.

Los docentes participarán en actividades específicas, reflexiones grupales y discusiones colectivas, con el fin de profundizar en las características del enfoque y adaptarlas a sus clases. Este recorrido práctico les brindará la oportunidad de experimentar el método y comprender cómo favorece el desarrollo de competencias como el pensamiento crítico, la creatividad y la metacognición en estudiantes de secundaria.

En la primera fase (Acto 1), se busca motivar a los participantes a explorar situaciones problemáticas que los lleven a formular preguntas matemáticas. Esta etapa comienza con la presentación de una imagen o escenario intrigante que despierte la curiosidad y fomente la discusión. Un ejemplo de esto es la imagen que se muestra en la Figura 1, que actúa como un recurso visual diseñado para captar la atención e incentivar el pensamiento crítico.

En equipos, los docentes desarrollarán preguntas relacionadas con la situación planteada, destacando la importancia de crear un ambiente adecuado en el aula para que los estudiantes puedan generar sus propias preguntas de manera autónoma y significativa.

Figura 1. Ejemplo Visual de una situación problema a presentar en el Taller.
Fuente: OpenAI. (2025). Entrega de gas a domicilio

El Acto 2 se centra en la creación del problema matemático. A partir de la pregunta seleccionada, los docentes decidirán qué datos son necesarios para resolver el problema, incorporando información adicional si fuera imprescindible. Redactarán un enunciado que precise condiciones, datos y resultados esperados, y reflexionarán sobre la utilidad de este enfoque en la generación de problemas relevantes y atractivos. Ejemplos prácticos podrían incluir la distribución de recursos en una comunidad, para mostrar cómo trasladar preguntas iniciales a problemas matemáticos bien estructurados.

Finalmente, en el Acto 3, los docentes llevarán a cabo la resolución del problema y participarán en la reflexión conjunta sobre las estrategias aplicadas, destacando la relevancia de la diversidad de caminos para llegar a la solución. Este intercambio de ideas promueve la metacognición y el aprendizaje de los errores, al contemplar la posibilidad de ajustar métodos y procedimientos. Al concluir, se discutirán formas de trasladar esta experiencia al aula, incidiendo en el potencial de Matemáticas en Tres Actos para fortalecer la autonomía y el pensamiento independiente del alumnado.

El taller concluirá con un espacio de cierre y reflexión, donde se compartirán impresiones y se abordarán estrategias para adaptar la metodología a diferentes niveles y estilos de aprendizaje. Este momento final consolidará lo trabajado y permitirá a los docentes visualizar cómo ajustar la propuesta a la diversidad de sus aulas.

La propuesta de cronograma incluye:

- 20 minutos de introducción y explicación de la dinámica del taller.
- 60 minutos de trabajo grupal distribuido en las fases del enfoque.
- 20 minutos para la discusión final y clausura.

Referencias y bibliografía

Ayllón, M. F., Gómez, I. A., & Ballesta-Claver, J. (2016). Mathematical thinking and creativity through mathematical problem posing and solving. *Propósitos y Representaciones*, *4*(1), 169–218. https://files.eric.ed.gov/fulltext/EJ1126306.pdf

Bandura, A. (1997). *Self-efficacy: The exercise of control*. W. H. Freeman.

Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: Unleashing students' potential through creative math, inspiring messages and innovative teaching*. Jossey-Bass.

Cai, J., & Lester, F. (2010). *Why is teaching with problem solving important to student learning? Brief* (J. R. Quander, Ed.). National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). https://www.nctm.org/Research-and-Advocacy/Research-Brief-and-Clips/Problem-Solving/

Deci, E. L., & Ryan, R. M. (2000). The "what" and "why" of goal pursuits: Human needs and the self-determination of behavior. *Psychological Inquiry, 11*(4), 227–268. https://selfdeterminationtheory.org/SDT/documents/2000_DeciRyan_PIWhatWhy.pdf

Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: A new area of cognitive–developmental inquiry. *American Psychologist, 34*(10), 906–911. https://doi.org/10.1037/0003-066X.34.10.906

Hannula, M. S. (2002). Attitude towards mathematics: Emotions, expectations and values. *Educational Studies in Mathematics, 49*(1), 25–46. https://doi.org/10.1023/A:1016048823497

Leikin, R., & Pitta-Pantazi, D. (2013). Creativity and mathematics education: the state of the art . *ZDM Mathematics Education, 45*, 159–166. https://doi.org/10.1007/s11858-012-0459-1

Leikin, R., & Sriraman, B. (Eds.). (2017). *Creativity and giftedness: Interdisciplinary perspectives from mathematics and beyond*. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-38840-3

Meyer, D. (2011, May 11). The three acts of a mathematical story. *dy/dan*. https://blog.mrmeyer.com/2011/the-three-acts-of-a-mathematical-story/

National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. National Council of Teachers of Mathematics.

Piaget, J. (1970). *La construcción de lo real en el niño*. Siglo XXI Editores.

Polya, G. (1945). *How to solve it: A new aspect of mathematical method*. Princeton University Press.

Possamai, J. P., & Allevato, N. S. G. (2023). Problem posing: Images as a trigger element of the activity. *International Journal for Research in Mathematics Education, 13*(1), 1–15. https://doi.org/10.37001/ripem.v13i1.3274

Schneider, W., & Artelt, C. (2010). Metacognition and mathematics education. *ZDM Mathematics Education, 42*(2), 149–161. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0240-2

Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics (Reprint). *Journal of Education, 196*(2), 1–38. https://doi.org/10.1177/002205741619600202

Sriraman, B. (2005). Are giftedness and creativity synonyms in mathematics? *Journal of Secondary Gifted Education, 17*(1), 20–36. https://doi.org/10.4219/jsge-2005-389

Processos de raciocínio mobilizados por estudantes de CDI para compreensão da Integral de Riemann

Alex Sandro de **Castilho**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
alexs@utfp.edu.br
André Luis **Trevisan**
Departamento de Matemática, Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
andreluistrevisan@gmail.com
Tainá Taiza de **Araujo**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil
taina.taiza.araujo@gmail.com

Resumo

Este estudo investigou os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Engenharia de uma Universidade Pública do Brasil ao resolverem uma tarefa exploratória sobre Somas de Riemann. De abordagem qualitativa e interpretativa, a pesquisa analisou como esses processos contribuíram para a construção de camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann. Os estudantes formularam conjecturas, algumas das quais foram refutadas, exigindo reformulações e novas justificativas, e, posteriormente, elaboraram uma generalização para uma conjectura validada. Esses processos ativaram elementos fundamentais para a compreensão da estrutura da Integral de Riemann, destacando-se a Camada do Produto e a Camada da Soma.

Palavras-chave: Ensino de cálculo diferencial e integral; Integrais definidas; Integrais de Riemann; Processos de raciocínio Matemático.

Introdução

As dificuldades dos estudantes na compreensão dos conceitos de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) e sua relação com a forma como esses conceitos são ensinados têm sido objeto de pesquisas em Educação Matemática há décadas. Estudos apontam que ambientes de ensino baseados na resolução de tarefas exploratórias (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan et al., 2021) desempenham um papel fundamental no desenvolvimento do raciocínio matemático (Jeannotte & Kieran, 2017; Trevisan & Araman, 2021; Trevisan et al., 2024), envolvendo a formulação e testagem de conjecturas, e justificações (Lannin et al., 2011). No CDI, pesquisas destacam que muitos alunos apresentam dificuldades em aplicar o conceito de integração, tanto na Matemática quanto em cursos de ciências subsequentes. Nesse sentido, a compreensão da estrutura da soma de Riemann é essencial para um entendimento robusto da integração definida (Jones et al., 2017).

Diante desse cenário, torna-se necessário o uso de tarefas que estimulem o raciocínio matemático e evidenciem a relação entre conceitos, sua aplicabilidade na resolução de problemas e a lógica subjacente aos procedimentos matemáticos. Este trabalho, fruto de uma intervenção com estudantes de Engenharia cursando CDI, investiga o papel dessas tarefas na construção de conceitos da disciplina, com foco nas camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann (Sealey, 2006, 2014): produto, soma, limite e função. O objetivo é identificar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes ao resolverem uma tarefa e compreender como esses processos contribuem para a formulação dessas camadas de conhecimento. Na próxima seção, apresentamos a fundamentação teórica sobre a aprendizagem do conceito de integral definida e os processos do raciocínio matemático.

Fundamentação Teórica

Processos do raciocínio matemático

O raciocínio matemático é essencial na aprendizagem da matemática, especialmente no CDI. Estudos indicam que as ações do professor, como a escolha de tarefas e a comunicação em sala, têm papel central nesse desenvolvimento (Mata-Pereira & Ponte, 2017). Ellis et al. (2018) ressaltam que as discussões devem focar tanto em conceitos quanto na construção de significados por meio da comunicação.

Embora haja diversas definições de raciocínio matemático, há consenso de que ele envolve inferências justificadas (Jeannotte & Kieran, 2017; Ponte et al., 2020). A formulação de conjecturas e a identificação de padrões são processos cruciais para que os estudantes construam estratégias de resolução, mesmo antes de validá-las formalmente (Ponte et al., 2020).

Processos como generalização e comparação também são fundamentais. A generalização amplia propriedades para conjuntos maiores (Jeannotte & Kieran, 2017), enquanto a comparação analisa semelhanças e diferenças entre objetos matemáticos. A justificação visa garantir a validade das inferências feitas, utilizando métodos como coerência lógica, contraexemplos ou exaustão (Ponte et al., 2020).

Aprendizagem do conceito de integral definida

Muitos estudantes concluem o CDI sem compreender plenamente as Somas e Integrais de Riemann, tratando-as apenas como procedimentos de cálculo, sem reconhecer sua importância conceitual (Sealey, 2014). Estudos mostram que, embora os alunos desenvolvam habilidades procedimentais avançadas, apresentam dificuldades em conectar diferentes representações da integral e compreender seus diversos significados (Greefrath et al., 2021).

Para superar essas dificuldades, Greefrath et al. (2021) propõem quatro modelos mentais básicos da integral definida: o modelo de área, que a interpreta como a medida da região delimitada pelo gráfico da função; o modelo de reconstrução, que relaciona a integral à variação total de uma quantidade; o modelo de média, que associa a integral ao valor médio de uma função contínua; e o modelo de acumulação, que enfatiza a integral como um somatório de pequenas contribuições.

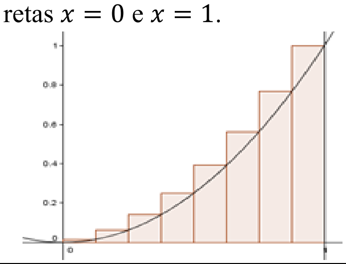
Além disso, Sealey (2014) sugere que a compreensão da Integral de Riemann envolve quatro camadas: Produto (multiplicação entre taxa e variação), Soma (aproximação por soma de Riemann), Limite (tendência da soma para um valor exato) e Função (interpretação da integral como uma função do limite superior de integração). A análise apresentada a seguir busca relacionar os processos de raciocínio matemático mobilizados pelos estudantes à construção dessas camadas conceituais.

Contexto da pesquisa e procedimentos metodológicos

Este estudo é uma pesquisa qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), baseada em dados de uma intervenção com estudantes ingressantes em um curso de Engenharia, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral 1 (CDI 1), ministrada pelo segundo autor. A pesquisa faz parte de uma investigação maior sobre a organização de tarefas de aprendizagem para o desenvolvimento do raciocínio matemático e a construção de conceitos de CDI (Trevisan & Araman, 2021). Durante a intervenção, os estudantes foram organizados em grupos (3 a 4 integrantes) para discutir e resolver tarefas, seguidas por uma plenária. A tarefa, apresentada no Quadro 1, é um problema matemático estruturado, que favorece o desenvolvimento da linguagem e da formalização matemática (Ponte, 2005).

Quadro 1
Tarefa: Área de um segmento parabólico

1. Considere a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, pelo eixo e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.
a) Suponha que a região seja preenchida por retângulos, como na figura ao lado, todos com a mesma base. Construa uma sequência em que cada termo represente a medida da área de um desses retângulos. Trabalhe com frações.
b) Represente em notação de somatório a soma desses termos e efetue seu cálculo.
c) Nesse contexto, construa uma figura que ilustre $\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{8} f(x_i)$.



Fonte: Adaptado de Trevisan et al. (2024).

A tarefa proposta enfatiza o modelo mental básico de área (Greefrath et al., 2021), promovendo a interpretação da integral definida como medida da área delimitada pelo gráfico da função e o eixo x. Além disso, busca explorar as camadas da Integral de Riemann (Sealey, 2014), conforme ilustrado no Quadro 2, permitindo que os alunos compreendam sua estrutura completa.

Quadro 2
Camadas da Integral de Riemann na Tarefa

Camada	**Representação simbólica**	**Tarefa: Área do segmento parabólico**
Camada 1: Produto	$[\frac{1}{c}.f(x_i)].[\triangle x]$	Representa a medida da área em um intervalo
Camada 2: Soma	$\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$	A medida da área aproximada acumulada em todos os intervalos
Camada 3: Limite	$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \triangle x$	A medida da área exata acumulada em todos os intervalos
Camada 4: Função	$f(b) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{b} f(x_i) \triangle x$	Medida de área acumulada conforme b varia

Fonte: Adaptado de Trevisan et al. (2024).

Foram coletados registros escritos e gravações das discussões dos estudantes, transcritos e analisados para compreender os processos de raciocínio envolvidos, com foco em grupos que apresentaram argumentação e negociação de significados (Rodrigues et al., 2018). Este artigo analisa um grupo de três estudantes, identificando os processos de raciocínio matemático e sua relação com as camadas de conhecimento das Integrais de Riemann, seguindo abordagens metodológicas de Carneiro et al. (2022).

Apresentação e Análise de Dados

Nos trechos a seguir, enquanto o grupo resolve o item (a) da tarefa, evidenciamos elementos das primeiras camadas da Integral de Riemman e os processos de raciocínio envolvidos:

Estudante 02: *Acho que [a altura] é zero dois, zero quatro né? É isso mesmo.*
Estudante 01: *O zero vírgula seis ele tá na mesma altura aqui?*
Estudante 02: *Então, foi o que eu falei, o zero quatro tá, o zero quatro tá certinho mas esse daqui eu acho que não tá não.*

Inicialmente, o grupo conjectura que os valores no eixo y representam a altura dos retângulos, mas percebe que essa relação não se mantém para todos. Assim, descartam essa hipótese e, na busca por outra abordagem, formulam a conjectura de que a altura dos retângulos pode ser determinada pela expressão algébrica da função:

Estudante 02: *Aqui ó, ele dá a fórmula [*$f(x) = x^2$*].*
Estudante 01: *O* x *a gente pode colocar tipo um oitavo, dois oitavos, três oitavos, quatro oitavos…*
Estudante 02: *Se você fizer a conta do [cinco] oitavo[s] aqui ó, a altura disso aqui vai dar zero vírgula trinta e quatro… [na verdade] trinta e nove, é bem aproximado, se você usar, isso daqui, aqui como cinco oitavos e esse daqui…*

O estudante 02 sugere usar $f(x) = x^2$ para calcular as alturas, substituindo os valores de x. Para validar os resultados, convertem frações em decimais e confirmam a proximidade com os valores do eixo y. Após essa generalização, a discussão passa para a determinação das bases:

Estudante 01: *A base seria cinco oitavos e a altura zero quatro, você vai ter que construir a sequência do retângulo.*
Estudante 02: *Essa daqui é a área do primeiro retângulo, que é altura é… não, tá errado, aqui é um oitavo, porque a base é um oitavo só.*
Estudante 01: *A base do retângulo né? É porque no caso dos retângulos ele ia pegar, aqui ó a base dele aqui ó seria esse valor, esse aqui.*
Estudante 02: *Aham, que é um oitavo.*

O grupo inicialmente conjectura que a base é $f(x)$, mas logo descarta essa ideia, reconhecendo que é a distância entre pontos consecutivos, sempre $\frac{1}{8}$. A discussão prossegue:

Estudante 02: *A altura do primeiro é zero, aí esse daqui seria dois oitavos. É elevado ao quadrado. Dá um dezesseis avos.*
Estudante 01: *Deixa eu anotar aqui.*
Estudante 02: *Altura do primeiro é zero, segundo é um dezesseis avos, do terceiro é quanto?*
Estudante 01: *Da nove [sobre] sessenta e quatro.*
Estudante 02: *Talvez tenha um retangulozinho aqui, mas é que a gente não tá vendo.*
Estudante 01: *Pode ser.*
Estudante 03: *Eu também acho que tem um retangulozinho aqui.*
Estudante 02: *Aqui tem um retângulo pequeno? Ou é zero mesmo?*
Estudante 01: *Tem, aqui não é zero.*
Estudante 02: *Aqui é um oitavo, não, calma. É um sobre oito ao quadrado. Aqui é um [sobre] sessenta e quatro.*
Estudante 01: *Isso aí, agora tá certo. Agora quatro oitavos que é esse daqui. Tem que dar maior que zero [vírgula] dois.*
Estudante 02: *Quatro vezes quatro é dezesseis. Fica então dezesseis sessenta e quatro que dá para simplificar, dá para simplificar por quatro dezesseis eu acho. Não, dá quatro dezesseis, é só simplificar, [fica] um quarto.*

O estudante 2 inicialmente conjectura que a altura do primeiro retângulo é zero, justificando empiricamente pela representação gráfica. No entanto, ele logo percebe o erro e reformula, concluindo que a altura é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$, validando com notação decimal. Além disso, o grupo simplifica frações, possivelmente por hábito, o que dificulta a percepção de um padrão na sequência de alturas. Após calcular todas as áreas, o estudante 2 identifica um padrão e inicia um processo de generalização.

Estudante 02: *Então eu acho que é esse daqui. Esse daqui é a altura de cada termo, e a largura é sempre um oitavo, então eu acho que a somatória vai ser... vai ser...* n *oitavo ao quadrado vezes um oitavo, vai ser cada termo.*

Nesse trecho, temos que o estudante 2 generaliza que $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ seria uma forma algébrica para representar as medidas das áreas, sendo $\left(\frac{n}{8}\right)^2$ a medida da altura, e $\frac{1}{8}$ a medida da base.

No item (b), o grupo deveria representar as áreas em notação de somatório e calcular sua soma, mas opta por somar termo a termo, ignorando a notação pedida. No último item, deveriam construir uma figura para a expressão $\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{8} f(x_i)$, *comparando-a com a soma* $[\sum_{i=1}^{8} \frac{1}{8} f(x_i)]$. A intenção era que reconhecessem a relação com soma superior e inferior, mas, em vez disso, discutem apenas o significado da notação e seu valor, sem construir a figura.

Estudante 01: *A somatória começa no zero. De zero até sete.*
Estudante 02: *É, vai um pouquinho antes.*
Estudante 01: *Vai ter que fazer a mesma coisa que a gente fez. Mas uma parte é diferente, porque i é igual a zero e vai até sete.*
Estudante 02: *O* i_2, i_3, i_4, *até o* i_8, *é a mesma coisa. O* i_1 *vai ser zero e o* i_8 *não tem. Do um ao sete a gente já tem.*
Estudante 01: *Será que é isso?*
Estudante 02: *Se substituir aqui vai ser a mesma coisa de substituir na nossa, mano. O número é igual. Ele vai começar no zero, então tem que fazer desde o zero.*

O grupo conjectura corretamente que a nova soma difere da anterior apenas pela ausência de i_8 e pela inclusão de i_0, reconhecendo a translação da partição. O estudante 2 estabelece comparações para justificar essa conclusão. No entanto, ao afirmar que os valores das somas seriam iguais, cometem um equívoco, pois a nova soma não inclui a área do último retângulo. Além disso, não elaboram conjecturas sobre a representação gráfica do somatório, indicando que nem todos os elementos da Camada da Soma da Integral de Riemann foram ativados.

Sintetizando esta análise destacamos que foram fundamentais as discussões entre os estudantes que possibilitaram a mobilização de diferentes processos de raciocínio organizados no Quadro 3.

Quadro 3
Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo.

Formular conjecturas	• Os valores representados no eixo y correspondem à medida da altura dos retângulos; • A medida da altura dos retângulos pode ser calculada a partir da expressão algébrica da função; • A medida da base do retângulo é igual ao valor da função do ponto de abscissa x; • A medida da base é a distância entre dois pontos consecutivos da partição;

	• A medida da altura do primeiro retângulo é zero; • A medida da área do primeiro retângulo é nula. • A medida da altura do primeiro retângulo é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$.
Justificar	• A expressão $f(x) = x^2$ pode ser usada para cálculo da medida da altura dos retângulos • Os valores em notação decimal podem ser comparados com valores indicados no eixo y na representação que estava junto ao enunciado da tarefa. • A representação gráfica, mostra um primeiro retângulo com medida de altura muito próxima de zero. • Os termos i2 até i7 serão os mesmos nas somas dos itens (a) e (c), mas i1 vai ser zero, e não vai existir i8.
Comparar	• A soma no item (c) é quase a mesma que do item (a). • O valor das somas dos itens (a) e (c) são os mesmos.
Generalizar	• Em qualquer um dos retângulos, a medida da base sempre será igual a um oitavo; • $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ é a expressão geral para representar as medidas das áreas.

Fonte: Adaptado de Trevisan et al. (2024).

Tais processos, por sua vez, foram fundamentais para compreensão da Camada do Produto, e de alguns elementos da Camada da Soma da estrutura da Integral de Riemann (Sealy, 2014), atreladas ao modelo mental básico de área (Greefrath et al*.,* 2021). Dentre os elementos da Camada do Produto, destacamos: o reconhecimento da existência de uma medida constante da base de cada retângulo; do valor variável da medida da altura de cada retângulo, correspondendo ao valor da função dada no ponto final de cada subintervalo da partição; da formulação da expressão $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$, que generaliza a medida da área de cada retângulo como o produto da medida da sua base pela medida da sua altura. Sobre a Camada da Soma, há uma compreensão da notação de somatório, em especial da participação envolvida; também, da ideia de medida de área subjacente à essa adição de base.

Considerações finais

Neste trabalho, investigamos os processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de CDI na resolução de uma tarefa exploratória (Trevisan & Mendes, 2018; Trevisan et al., 2021) e analisamos como esses processos contribuem para a construção das camadas de conhecimento associadas às Integrais de Riemann. Os resultados indicam que a tarefa estimulou o modelo mental de área (Greefrath et al., 2021) e ativou duas camadas fundamentais da estrutura da integral (Sealey, 2014): Produto e Soma. A Camada do Produto foi acessada quando os estudantes compreenderam como calcular a área de cada retângulo, identificando a base comum e associando a altura ao valor da função nos pontos específicos. Esse entendimento emergiu por meio de processos como formulação de conjecturas, justificativas baseadas em conceitos e representações visuais, estabelecimento de relações entre soma e notação de somatório, além da generalização da área dos retângulos de forma algébrica (Jeannotte & Kieran, 2017).

Já a Camada da Soma foi explorada por meio da notação de somatório, mas sua compreensão pelos estudantes foi limitada. O reconhecimento do padrão matemático envolvido na soma foi comprometido pela simplificação das frações que representavam as alturas dos retângulos, o que dificultou a identificação da estrutura subjacente. De maneira geral, a tarefa demonstrou potencial para introduzir intuitivamente o conceito de Integral de Riemann e familiarizar os alunos com seus elementos essenciais. Embora o professor tenha planejado a exploração das quatro camadas da integral, no grupo analisado, as camadas Limite e Função não foram ativadas espontaneamente. No entanto, durante a discussão coletiva com a turma, esses conceitos emergiram ao abordar a aproximação da área pelos valores obtidos nos itens da tarefa e ao compreender que o aumento do número de retângulos melhora a precisão dessa estimativa.

Referências e bibliografia

Bogdan, R. C., & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação* (M. J. Alvarez, S. B. dos Santos e T. M. Baptista, Trads.). Porto Editora.

Carneiro, L. F. G., Araman, E. M. O., & Trevisan, A. L. (2022). Procedimientos metodológicos en la investigación del razonamiento matemático de estudiantes cuando resuelven tareas exploratorias. *Paradigma (Maracay)*, *43*(2), 132–157.

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. *Mathematics Education Research Journal, 30*(2), 1–26. https://doi.org/10.1007/s13394-017-0217-3

Greefrath, G., Hertleif, C., Böer, C., Böhm, L., Borromeo Ferri, R., & Ulm, V. (2021). Basic mental models of integrals: Theoretical conception, development of test instrument, and first results. *ZDM – Mathematics Education, 53*, 649–661. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01244-8

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 1–16. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9769-0

Jones, S. R., Lim, Y. R., & Chandler, K. R. (2017). Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral. *International Journal of Science and Mathematics Education, 15*, 1075–1095. https://doi.org/10.1007/s10763-016-9714-5

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8*. National Council of Teachers of Mathematics.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. P. (2017). Enhancing students' mathematical reasoning in the classroom: Teacher actions facilitating generalization and justification. *Educational Studies in Mathematics, 96*, 169–186. https://doi.org/10.1007/s10649-017-9785-0

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. Em GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11–34). APM.

Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula? *Educação e Matemática, 156*, 7–11.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2018). Práticas de discussão em sala de aula de Matemática: Os casos de dois professores. *Bolema, 12*(61), 398–418.

Sealey, V. (2006). Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient? *Psychology of Mathematics Education, 2*, 46–53.

Sealey, V. (2014). A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals. *Journal of Mathematical Behavior, 33*, 230–245. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2013.12.002

Trevisan, A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de cálculo diferencial e integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: Uma proposta. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia, 11*, 209–227.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema, 35*(69), 158–178.

Trevisan, A. L., Alves, R. M. A., & Negrini, M. V. (2021). Ambiente de ensino e de aprendizagem de cálculo pautado em episódios de resolução de tarefas: Resultados e perspectivas futuras. Em M. T. Mendes e A. M. Justulin (Orgs.), *Produtos educacionais e resultados de pesquisas em Educação Matemática,* 1, 155–174. Livraria da Física.

Trevisan, A. L., Araman, E., da Silva, A. J., de Araujo, T. T., Souza, A. V. P., & de Castilho, A. S. (2024). Processos de raciocínio mobilizados por estudantes de CDI na construção do conceito da integral de Riemann. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, 17(1), 5.

Promoviendo el aprendizaje de conceptos de cálculo a través del infinito

José Antonio **Juárez**-López
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México
jajul@fcfm.buap.mx
Irving Aarón **Díaz**-Espinoza
Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México
zaidazonipse@hotmail.com

Resumen

Esta propuesta se originó de una investigación previa con actividades que abordan el concepto de infinito en profesores que imparten cálculo diferencial e integral en preparatoria. Estas actividades tenían el propósito de evidenciar en profundidad las concepciones que presentaron los profesores y sus posibles implicaciones en los cursos de cálculo. Los hallazgos sugieren que las dificultades al concebir el infinito influyen en las concepciones de otros conceptos, por ejemplo, el de la integral definida, límites al infinito o asíntotas de una función racional de variable real. Además, la literatura sugiere que es necesario trabajar el concepto de infinito, puesto que las concepciones presentes influyen en el tratamiento posterior de otros conceptos en cálculo. Así, el presente estudio propone diversas actividades que abordan el concepto de infinito y su relación con otros conceptos de cálculo diferencial e integral en profesores de preparatoria.

Palabras clave: Actividades de Aprendizaje, Infinito, Profesores, Cálculo, Preparatoria

Introducción

Esta revisión de literatura y resultados de investigación previa surge de una serie de investigaciones realizadas por los autores que fueron abordadas con profesores de Matemáticas en servicio que imparten cursos de cálculo diferencial e integral en preparatoria. Los participantes en dichos estudios fueron profesores que laboran en el estado de Tlaxcala, México tanto de servicio público como privado. El objetivo común de estas investigaciones fue explorar y cambiar las concepciones que tienen los profesores de Matemáticas en servicio de preparatoria acerca del infinito, tanto en contextos aritméticos como geométricos. Para lograrlo, primero se llevó a cabo entrevistas semiestructuradas con el fin de explorar las concepciones previas del infinito en los participantes. Después, se implementó de un taller a largo de un periodo de un año escolar con el propósito de cambiar dichas concepciones del infinito previamente identificadas (Diaz-Espinoza et al., 2023; Díaz-Espinoza et al., 2024; Díaz-Espinoza & Juárez-López, 2023). Los resultados de dichas investigaciones convergieron en la discusión que aquí se propone.

El tema de integración y derivada juega un papel importante en la mayoría de los cursos de cálculo en todo el mundo y estos dos conceptos son ingredientes primordiales del cálculo. Esto es reforzado en entrevistas con profesores que están por iniciar cursos de cálculo donde argumentan que un cierto dominio de estos tópicos son fundamentales para la comprensión del cálculo en los estudiantes (Sofronas et al., 2011).

Los infinitesimales están relacionados con lo que Manfreda Kolar & Hodnik Čadež (2012) denomina infinitamente cerca donde infinito es percibido como acercarse a un objeto determinado lo más cerca posible. Desde esta perspectiva el sujeto puede percibir como dos objetos iguales si están lo suficientemente cerca de tal manera que la diferencia tiende a cero.

Se sugiere que para comenzar un curso de cálculo primero es importante explorar las ideas que tiene el estudiante acerca de lo infinitamente cerca. Una forma que ayuda a explorar esas ideas son preguntas del tipo *¿Cuál es el número positivo más cercano a un número fijo (por ejemplo 5)?* Según diversas investigaciones se puede categorizar las respuestas de los estudiantes en dos tipos: *i*) números decimales finitos con diferente cantidad de cifras (por ejemplo, 4.999); *ii*) números decimales infinitos periódicos (por ejemplo, 4.999 ...). Particularmente, en una investigación donde se explora las respuestas de estudiantes a esta pregunta se encontró que casi tres cuartas partes de los entrevistados presentan respuestas del tipo *ii* (Manfreda Kolar & Hodnik Čadež, 2012).

Infinito en el concepto de límite

Excluir al infinito en el tratamiento de los límites o la integral definida trae consigo una mala imagen de dichos conceptos. Resultados como los mostrados en Ghedamsi y Lecorre (2021) revelan que los estudiantes tienen dificultades con la interpretación formal de enunciados de cálculos informales, por ejemplo, al acercarse al infinito, los números se acercan progresivamente. Explicaciones que pueden ser pobres en argumentación en las primeras clases de límites en cálculo diferencial como "*1/0=∞ porque al dividir un número entre otro muy pequeño resulta en un número muy grande*" induce al estudiante a pensar en el infinito como un número excesivamente grande con el cual puede operar. De hecho, eso mismo ocurre con profesores. Por ejemplo, en una investigación reciente de los autores de esta investigación se preguntó a docentes de bachillerato *¿qué es infinito para usted?* y entre las respuestas se encontraron ideas de un infinito conceptualizado como un número excesivamente grande, imposible de calcular o escribir y se utiliza el símbolo ∞ para expresar dicho número (Diaz-Espinoza et al., 2023).

Así, límites como el de la función $\frac{1}{x}$ cuando x tiende a 0 muchas veces es tratado como infinito pareciendo coherente en el estudiante, bajo el argumento anterior de que $\frac{1}{0}$ es igual a infinito como si se tratase de un número y, más aún, peligrosamente coherente para el profesor. Sin embargo, cualquier profesor debería tener muy claro que dicho límite no existe. Sólo considere los límites laterales por la izquierda y la derecha y note que tienen un valor diferente $-\infty$ y $+\infty$, respectivamente. El hecho de una concepción errónea del infinito como un número excesivamente grande desconocido y operable, que en la literatura se le conoce como infinito natural (Krátká et al., 2021), dificulta tratar el límite como inexistente.

A modo de resumen, la literatura habla de dos tipos de concepción del infinito: potencial y actual. Una concepción potencial está relacionada con el infinito como un proceso sin fin, mientras que una concepción actual vislumbra el infinito como un objeto. Son diversas las investigaciones a través de las últimas décadas que han escrudiñado en cómo son las concepciones del infinito tanto en profesores como estudiantes, concluyendo convergentemente en que el infinito actual no se puede conceptualizar solo a través del proceso del infinito potencial, sino que requiere la conceptualización de un punto final de ese proceso (Hannula et al., 2006; Manfreda & Hodnik, 2012; Tall, 2001).

Una sugerencia para tratar las concepciones naturales del infinito, son situaciones donde sea necesario una conceptualización del infinito potencial, es decir, el infinito como un proceso. Pocos investigadores han presentado resultados que muestren el pensamiento de los estudiantes sobre el infinito como punto de partida para una exploración de la comprensión de los límites. Un ejemplo de ello es la investigación de Jones (2015), donde las actividades involucran límites al infinito y límites infinitos, concluyendo que la falta de una concepción dinámica sólida del infinito a menudo llevó a los estudiantes a utilizar métodos inapropiados, como sustituir directamente el infinito por x, o pensar demasiado en lo que sucede en el infinito, en lugar de lo que sucede cuando x tiende a infinito.

Actividades donde aparecen límites al infinito o límites infinitos en contextos reales ayudan al estudiante a visualizar las variables involucradas. Así, el infinito potencial se revela como una longitud cada vez mayor, el tiempo que sigue indefinidamente o un objeto que se acelera cada vez más, en consecuencia, el uso de funciones con un contexto real durante la enseñanza de límites podría ayudar a los estudiantes a construir una concepción dinámica solida del límite (Jones, 2015).

De igual manera, algunos investigadores describen el concepto de límite como compuesto de tipos separados: límite como "proceso" y límite como "objeto", por ejemplo. Los investigadores que utilizan este marco conceptual señalan que existe una dificultad clave para ayudar a los estudiantes a ver que hay un objeto asociado con ese proceso. Es decir, los estudiantes a menudo ven el límite como algo que no se alcanza y por lo tanto es solo un proceso. No se dan cuenta de que $\lim_{x \to a} f(x)$ tiene un valor (siempre que exista) y, en consecuencia, también es un objeto. Además, los significados del lenguaje cotidiano de palabras como 'acercarse' o 'tiende a' pueden reforzar este proceso ya que estas palabras sugieren que el límite nunca se alcanza.

Como advierten Zolt et al. (2023), algunas de las creencias fundamentales de los estudiantes, como la distinción entre un límite que se acerca a un valor y un límite que es igual a un valor, no son fáciles de perturbar. Se tiene la hipótesis de que aliviar creencias alrededor del concepto del infinito puede consolidar la idea de un límite que es igual a un valor. Respecto a ello, esta tendencia del límite como un valor que nunca se alcanza también ha sido reportado en diferentes puntos de la literatura cuando se aborda lo infinitamente pequeño. Por ejemplo, en una investigación reciente con estudiantes de cálculo cuando resuelven una integral definida típica $\int \frac{1}{x^2} dx$ en el intervalo $[1, \infty)$ la mayoría de ellos considera que tiene un valor. Sin embargo, después de calcular una serie de valores en la sucesión de intervalos $[1,10], [1,100], \cdots, [1{,}1\,000\,000]$ obteniendo $0.9, 0.99, \cdots, 0.999999$, respectivamente, muchos de ellos obtuvieron respuestas del tipo “se acerca a uno” o “nunca llegara a uno” (Zolt et al., 2023).

Este mismo fenómeno de que $0.999999 \ldots$ y 1 son visualizadas como dos cantidades diferentes y no como dos representaciones del mismo número son reportadas en estudios del infinito presentando conclusiones convergentes en que una minoría de estudiantes puede aceptar que $0.999999 \ldots$ y 1 son iguales porque por naturaleza parecen diferentes, uno más pequeño que otro y no hay operación numérica que apoye lo contrario como sucede en comparación con $\frac{1}{3}$ y $0.333333 \ldots$ (Diaz-Espinoza et al., 2023; Juter, 2019; Kattou et al., 2010; Yopp et al., 2011).

Se tiene la hipótesis de que situaciones que ayuden a tratar la igualdad $0.999 \ldots = 1$ como verdadera en los estudiantes puede ayudar a construir una concepción del infinito actual y, en consecuencia, un significado más sólido del valor al que “tiende” un límite (sí existe) o el valor de una integral definida en un intervalo dado. En ese sentido, investigaciones han mostrado situaciones donde se aborda dicha igualdad con profesores o estudiantes (Ángeles-Navarro & Pérez-Carreras, 2010; Diaz-Espinoza et al., 2023; Díaz-Espinoza et al., 2024; Eisenmann, 2008; Wistedt & Martinsson, 1996; Yopp et al., 2011).

Por ejemplo, en una investigación de Díaz-Espinoza et al. (2024) con profesores de bachillerato que impartían cursos de cálculo se les planteó situaciones en diferentes sesiones sobre la igualdad de $0.999999 \ldots$ y 1. En la primera sesión se les preguntó su opinión sobre los números $0.999 \ldots$ y 1 categorizando sus respuestas en tres tipos: i) el número $0.999 \ldots$, donde el número de nueves después del punto es infinito, es igual a 1 ya que no hay números entre $0.999 \ldots$ y 1; ii) no hay números entre $0.999 \ldots$ y 1, pero $0.999 \ldots$ y 1 son números diferentes de todos modos; y iii) hay números entre $0.999 \ldots$ y 1, por lo que son números diferentes. La mayoría de los profesores estuvieron en la categoría ii) y iii) mostrando una concepción del infinito potencial.

En la segunda sesión, se abordó la misma igualdad con ayuda de un apoyo visual particularmente, la recta numérica. Se pedía que fuesen calculando el punto medio entre 0.9 y 1 colocando los puntos sobre la recta numérica. Después, se les cuestionó sobre que sucedía si continuaban este proceso indefinidamente y como se visualizaría en la recta numérica. En esta situación las respuestas ofrecidas por los profesores se categorizaron en dos: i) $0.999 \ldots$, donde el número de nueves después del punto es infinito, y en la recta el punto esta sobre el uno; ii) $0.999 \ldots$, donde el número de nueves después del punto es infinito, y en la recta el punto esta antes del uno. La mayoría de los profesores estuvieron en la categoría i) mostrando una concepción del infinito actual.

Finalmente, en la tercera sesión se abordó la suma de decimales periódicos infinitos a través de la igualdad $\frac{1}{9} = 0.111 \ldots$, donde los profesores calcularon la suma de $\frac{1}{9} + \frac{1}{9}$ y, por otro lado, la suma de su representación decimal periódica infinita $0.111 \ldots + 0.111 \ldots$ y argumentando si obtuvieron el mismo resultado. Como se esperaba los profesores argumentaron que eran equivalentes las dos expresiones. Después, se planteó la situación de sumar nueve veces $\frac{1}{9}$ y si fuese equivalente a su representación decimal periódica. Al final los profesores mostraron concepciones del infinito actual argumentando que $0.999999 \ldots$ y 1 son los mismos números porque $0.999999 \ldots$ es periódico y tiene una infinidad de nueves.

Se concluye en que situaciones donde se aborde al infinito potencial como un proceso y después se produzca un cambio conceptual por un infinito actual puede ayudar a una construcción del límite dinámica y que límites infinitos o límites al infinito puedan ser tratados con mayor profundidad por estudiantes. Además, que pueda ayudar a los estudiantes a cambiar su concepción de que un límite tiene un valor dado o que se aproxima a un valor dado.

Infinito y la derivada

Algunos investigadores informan que el conocimiento previo de una recta tangente a una circunferencia afecta la comprensión de la recta tangente a una curva en términos generales (Biza & Zachariades, 2010). Dada la poca presencia de la recta tangente en situaciones diversas que posibiliten la construcción de la derivada como interpretación geométrica de la recta tangente en un punto de la función, es importante que los profesores presenten a los estudiantes una amplia variedad de ejemplos de tangencia para tratar de prevenir algunos conceptos erróneos de los estudiantes a lo largo de su educación secundaria y preparatoria (Hogue & Scarcelli, 2022).

Una muestra de ello es la investigación de Villabona Millán et al. (2022) donde muestran dos problemas relacionados con la recta tangente a una curva, en el que se toman en consideración los aspectos dinámicos y estáticos del infinito. En uno de los problemas típicos de introducción a la derivada en cursos de cálculo se solicita al estudiante que encuentre la pendiente de la recta tangente a la curva f en el punto P (véase Figura 1). En dicha investigación concluyeron que el sujeto propone que la situación al límite del proceso que genera pendientes de rectas secantes está directamente relacionada con la pendiente de la recta tangente. Esclarecer esta relación es importante, ya que puede hacer la diferencia entre una estructura dinámica de infinito y una estática. Además, mencionan que "en los procesos infinitos que son analizados a través de una situación al límite, la comprensión que tenga el sujeto sobre este concepto hace la diferencia entre ver un proceso infinito como inacabado o verlo como un todo (infinito potencial e infinito actual)" (Villabona Millán et al., 2022, p. 193). Por tanto, las concepciones dinámicas y estáticas del límite se relacionan con las concepciones que tenga el individuo del conjunto infinito sobre el cual el límite se defina.

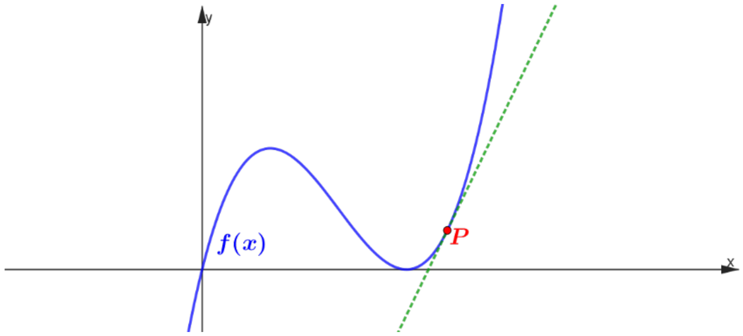


*Figura 1***.** Problema de la pendiente de la recta tangente en un punto *P* sobre la curva *f*.

Áreas, infinito e integral definida

Cuando se está en clase de cálculo integral un ejemplo común a analizar es $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ a través de las sumas de Riemann. El objetivo que se espera lograr es que los estudiantes desarrollen una comprensión profunda de las regiones limitadas que tienen área finita. Como menciona el Plan y Programa de Estudios en México, el estudiante debe "reconocer la importancia de la suma de la suma de Riemann para el cálculo de área bajo la curva como antecedente de la integral definida" (Dirección General de Bachillerato [DGB], 2018, p. 21). La Figura 2 muestra un escenario posible donde se aproxima la integral a partir de cinco rectángulos izquierdos de igual base. El estudiante deduce que a partir de rectángulos cada vez más pequeños puede calcular una mejor aproximación de la integral anterior. Después se motiva al estudiante a pensar en la situación si los rectángulos son infinitamente pequeños y ver qué sucede con el valor de la integral. En términos generales la suma de Riemann tomará el valor de la integral, es decir, que el límite de la suma de Riemann cuando el ancho del rectángulo tiende a cero es el valor de la integral misma.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(a + i\Delta x)\Delta x = \int_1^2 f(x)dx$$

Sin embargo, si se cambia un poco la integral anterior por $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx$, se ha evidenciado en investigaciones recientes que los estudiantes presentan dificultades para comprender que a pesar de que la integral está definida en una región ilimitada tiene área finita (Zolt et al., 2023): "el pensamiento inicial de los estudiantes sobre las integrales impropias sugiere incredulidad en que una región en un intervalo ilimitado pueda tener un área finita" (p. 513). Además, investigadores sugieren que los profesores pueden contribuir a la dificultad de los estudiantes para comprender integrales impropias prescindiendo del proceso límite y calculando las integrales mediante sustitución (González-Martin & Camacho, 2004).

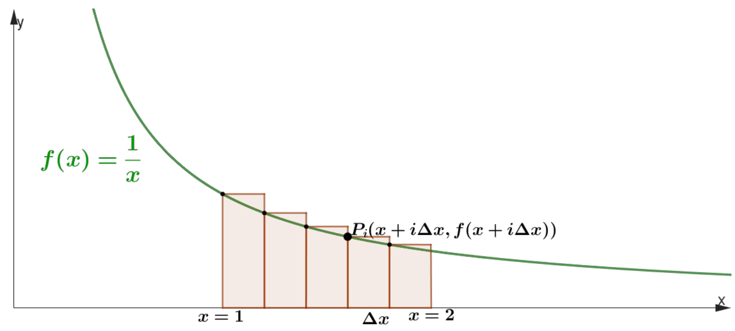


Figura 2. Rectángulos a la izquierda como aproximación a la integral $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Problemas como estos también han sido analizados en otras investigaciones desde la paradoja del pintor o el cuerno de Gabriel, matemáticamente hablando y sin extendernos demasiado, esta paradoja es el resultado de conceptos generalizados de área y volumen utilizando cálculo integral, ya que el cuerno de Gabriel tiene una serie convergente asociada con el volumen y una serie divergente asociada con el área de la superficie con la paradoja del pintor. Wijeratne & Zazkis (2015) estudiaron las soluciones de un grupo de estudiantes de Cálculo al trabajar con dichas paradojas concluyendo que las consideraciones contextuales dificultan la capacidad de los estudiantes para resolver matemáticamente la paradoja, sugieren que el enfoque convencional para introducir los conceptos de área y volumen en Cálculo presenta un obstáculo didáctico. Además, asociar un atributo finito con algo infinito, como en el caso del cuerno de Gabriel, es claramente un obstáculo epistemológico ya que la dificultad de los estudiantes replica el desarrollo del conocimiento matemático a lo largo de la historia como se mencionó al principio de este documento.

Comentarios finales

El propósito principal de esta contribución es proponer el estudio sistemático previo del concepto de infinito cuando se abordan algunos conceptos centrales en el cálculo diferencial e integral. Dicha propuesta se basa en la idea fundamental de que el concepto infinito debería ser tratado como un contenido central en el aprendizaje y la enseñanza de algunos conceptos matemáticos avanzados, sobre todo durante la formación inicial de profesores de Matemáticas.

Como se ha mostrado en investigaciones realizadas por los mismos autores, la comprensión del infinito no debe ser dada por sentada por el profesor en clase de cálculo. Por el contrario, debe ofrecer un tratamiento previo a las concepciones presentes en los estudiantes acerca del infinito. Esto ayudaría a comprender de mejor manera conceptos clave del cálculo, como los mencionados anteriormente.

En ese sentido, el concepto de infinito podría ser un punto de partida idóneo para comenzar una reflexión más profunda que lleve a los docentes en formación a consolidar la noción de infinito en sus diversos contextos y aplicaciones, así como al desarrollo de un pensamiento didáctico más profundo y duradero.

Referencias

Ángeles-Navarro, M., & Pérez-Carreras, P. (2010). A socratic methodological proposal for the study of the equality 0 . 999 . . . = 1. *The Teaching of Mathematics*, *XIII*(1), 17–34.

Biza, I., & Zachariades, T. (2010). First year mathematics undergraduates' settled images of tangent line. *The Journal of Mathematical Behavior*, *29*(4), 218–229. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2010.11.001

Díaz-Espinoza, I. A., & Juárez-López, J. A. (2023). Mathematics teachers' conceptions about infinity: A preliminary study at the secondary and high school level. *Union: Jurnal Ilmiah Pendidikan Matematika*, *11*(3), 426–435. https://doi.org/10.30738/union.v11i3.16006

Diaz-Espinoza, I. A., Juárez-López, J. A., & Juárez-Ruiz, E. (2023). Exploring a mathematics teacher's conceptions of infinity: The case of Louise. *Indonesian Journal of Mathematics Education*, *6*(1), 1–6. https://doi.org/10.31002/ijome.v6i1.560

Díaz-Espinoza, I. A., Juárez-López, J. A., & Miranda, I. (2024). Promoting conceptual change regarding infinity in high school mathematics teachers through a workshop. *Journal on Mathematics Education*, *15*(2), 473–494. https://doi.org/10.22342/jme.v15i2.pp473-494

Dirección General de Bachillerato. (2018). *Cálculo integral. Programa de EStudios. Sexto semestre*. https://dgb.sep.gob.mx/programas-de-estudio

Eisenmann, P. (2008). Why is it not true that 0.999 …< 1? *Teaching of Mathematics*, *11*(1), 35–40.

Ghedamsi, I., & Lecorre, T. (2021). Transition from high school to university calculus: a study of connection. *ZDM – Mathematics Education*, *53*(3), 563–575. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01262-1

Gonzalez-Martin, A. S., & Camacho, M. (2004). Legitimization of the graphic register in problem solving at the undergraduate level. The case of the improper integral. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, *2*, 479–486. https://eric.ed.gov/?id=ED489755

Hannula, M. S., Pehkonen, E., Maijala, H., & Soro, R. (2006). Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science*, *4*(2), 317–337. https://doi.org/10.5485/tmcs.2006.0129

Hogue, M., & Scarcelli, D. (2022). Nonequivalent definitions and student conceptions of tangent lines in calculus. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(9), 2391–2421. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1878302

Jones, S. R. (2015). Calculus limits involving infinity: the role of students' informal dynamic reasoning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *46*(1), 105–126. https://doi.org/10.1080/0020739X.2014.941427

Juter, K. (2019). University students' general and specific beliefs about infinity, division by zero and denseness of the number line. *Nordic Studies in Mathematics Education*, *24*(2), 69–88.

Kattou, M., Thanasia, M., Katerina, K., Constantinos, C., & George, P. (2010). Teachers' perceptions about infinity : a process or an object ? In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *Proceedings of the 6th Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1771–1780). www.inrp.fr/editions/cerme6

Krátká, M., Eisenmann, P., & Cihlář, J. (2021). Four conceptions of infinity. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *53*(10), 2661–2685. https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1897894

Manfreda Kolar, V., & Hodnik Čadež, T. (2012). Analysis of factors influencing the understanding of the concept of infinity. *Educational Studies in Mathematics*, *80*(3), 389–412. https://doi.org/10.1007/s10649-011-9357-7

Sofronas, K. S., DeFranco, T. C., Vinsonhaler, C., Gorgievski, N., Schroeder, L., & Hamelin, C. (2011). What does it mean for a student to understand the first-year calculus? Perspectives of 24 experts. *The Journal of Mathematical Behavior*, *30*(2), 131–148. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.02.001

Tall, D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics*, *48*(2–3), 199–238. https://doi.org/10.1023/A:1016000710038

Villabona Millán, D., Roa Fuentes, S., & Oktaç, A. (2022). Concepciones dinámicas y estáticas del infinito: procesos continuos y sus totalidades. *Enseñanza de Las Ciencias. Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, *40*(1), 179–197. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3277

Wijeratne, C., & Zazkis, R. (2015). On painter's paradox: Contextual and mathematical approaches to infinity. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, *1*(2), 163–186. https://doi.org/10.1007/s40753-015-0004-z

Wistedt, I., & Martinsson, M. (1996). Orchestrating a mathematical theme: Eleven-year olds discuss the problem of infinity. *Learning and Instruction*, *6*(2), 173–185. https://doi.org/10.1016/0959-4752(96)00001-1

Yopp, D. A., Burroughs, E. A., & Lindaman, B. J. (2011). Why it is important for in-service elementary mathematics teachers to understand the equality .999...=1. *Journal of Mathematical Behavior*, *30*(4), 304–318. https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2011.07.007

Zolt, H., Wrightsman, E., Ford, L., & Patterson, C. L. (2023). Believing in Infinity: Exploring Students' Conceptions of Improper Integrals. *PRIMUS*, *33*(5), 502–516. https://doi.org/10.1080/10511970.2022.2082615

Propuesta de investigación: Las prácticas docentes para la enseñanza de las Matemáticas a estudiantes AESI

Valerie Ann **Carrasquillo** Meléndez
Universidad de Puerto Rico. Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
valerie.carrasquillo1@upr.edu
Juan P. **Vázquez** Pérez
Universidad de Puerto Rico. Recinto de Río Piedras
Puerto Rico
juan.vazquez24@upr.edu

Resumen

En esta propuesta de investigación se exploran las estrategias de enseñanza que implementan los docentes de Matemáticas de nivel secundario para facilitar el aprendizaje en estudiantes aprendices del español como segundo idioma (AESI) en Puerto Rico. Mediante un estudio de caso con seis docentes de Matemáticas del Departamento de Educación de Puerto Rico, se indagará sobre sus experiencias, prácticas pedagógicas y los desafíos que enfrentan al enseñar en contextos multilingües. A partir de los hallazgos, se propondrá una guía para adaptar el currículo de Matemáticas que considere las necesidades lingüísticas y académicas de esta población estudiantil. La investigación se encuentra actualmente en curso, con recopilación de datos programada para los meses de marzo a junio de 2025.

Palabras clave: Adaptación curricular; Aprendices del español como segundo idioma; Enseñanza de las Matemáticas; Enseñanza diferenciada; Multilingüismo.

Definición y relevancia del problema

Los fenómenos sociopolíticos, socioeconómicos, de salud pública y ambientales han desencadenado una ola migratoria global que presenta desafíos significativos para los sistemas educativos de los países receptores. En el contexto del DEPR, la inmigración ha redefinido las características de la comunidad escolar, propiciando un panorama multicultural, multiétnico y multilingüe. Esta transformación ha modificado la concepción tradicional de la sala de clases, generándose espacios educativos en los que coexisten diversas lenguas maternas.

En Puerto Rico, el multilingüismo en las escuelas no es tan pronunciado como en otros contextos internacionales, dado que la mayoría de los estudiantes, incluidos los inmigrantes, son hispanohablantes. Aproximadamente el 80% de los inmigrantes proceden de la República Dominicana y Estados Unidos. Según las estadísticas del Departamento de Educación de Puerto Rico (2024), esta población ascendió a 1,154 estudiantes en el año académico 2022-2023. A pesar de representar una fracción relativamente pequeña del alumnado total, es crucial atender las necesidades académicas específicas de este grupo durante el proceso de enseñanza y aprendizaje. De hecho, en los resultados de la Prueba para la Medición y Evaluación para la Transformación Académica de Puerto Rico se encontró que el 78% de los estudiantes AESI no alcanzaron el nivel de competencia en las pruebas de Matemáticas. Con estos resultados quedó en evidencia la necesidad de optimizar las prácticas de enseñanza, pues las Matemáticas se perfilan como la materia con menor nivel de competencia en todas las regiones educativas del DEPR, sobre todo en los estudiantes AESI.

Este problema se complejiza por la existencia de una desconexión entre el marco curricular del Programa de Matemáticas y el manual de acomodos para estudiantes AEI. Las estrategias propuestas en el Programa de Matemáticas no convergen plenamente con las recomendadas en el Programa AEI. En adición, el enfoque curricular actual no contempla adecuadamente las necesidades específicas de los estudiantes AESI, particularmente en relación con las barreras culturales y lingüísticas inherentes. Es por esta razón que los propósitos de esta investigación son: (a) explorar las experiencias de los docentes que enseñan Matemáticas en contextos con estudiantes AESI; (b) profundizar en torno a las prácticas que utilizan para enseñar Matemáticas a estos estudiantes; (c) comparar la política pública vigente con las prácticas de enseñanza implementadas; y (d) proponer una guía para adaptar el currículo de Matemáticas que atienda las necesidades de esta población estudiantil.

Referencial teórico

El marco teórico de esta investigación integra tres perspectivas teóricas que permiten comprender la complejidad de la enseñanza Matemática en contextos multilingües. Por un lado, la teoría sociocultural proporciona la base para entender cómo el aprendizaje se desarrolla a través de las interacciones sociales y culturales. Desde otra perspectiva, la teoría de la actividad histórico-cultural (CHAT) ofrece un marco para analizar los sistemas de actividad en la sala de clases y sus interrelaciones. Por su parte, la teoría de la Educación Matemática Realista aporta principios específicos para la enseñanza de las Matemáticas desde contextos significativos para los estudiantes.

Teoría sociocultural

La teoría sociocultural de Vygotsky establece que el desarrollo cognitivo ocurre primero en el plano social y luego en el psicológico, en el individual, y está mediado por herramientas culturales como el lenguaje (Chaves Salas, 2001). En el contexto de la enseñanza de Matemáticas a estudiantes AESI, esta teoría es fundamental pues enfatiza el papel del lenguaje como instrumento mediador del pensamiento y el aprendizaje. Según Lantolf (2000), la actividad se define como la forma en que los individuos construyen su mundo y resuelven sus acciones tanto físicas como mentales. El concepto de zona de desarrollo próximo resulta particularmente relevante, ya que permite diseñar estrategias de enseñanza que consideren tanto el nivel actual de competencia lingüística como matemática del estudiante. Esta zona no es estática, pues a medida que el aprendiz domina una habilidad con apoyo, esta se convierte en parte de su repertorio independiente, y se modifica la zona de desarrollo próximo (Wertsch, 1995). Además, la teoría destaca la importancia de las interacciones sociales y el uso de recursos culturalmente significativos en el proceso de aprendizaje, elementos cruciales para estudiantes que están desarrollando simultáneamente competencias Matemáticas y lingüísticas.

Teoría de la actividad histórico-cultural

La teoría de la actividad histórico-cultural (CHAT) proporciona un modelo comprehensivo para analizar los sistemas de actividad en la sala de clases. Según Sannino y Engeström (2018), el modelo CHAT considera seis elementos interrelacionados: los sujetos (docentes y estudiantes), que utilizan instrumentos (recursos didácticos, lenguaje) para alcanzar objetivos (aprendizaje matemático y lingüístico), operando bajo reglas específicas (normas institucionales y culturales), dentro de una comunidad (contexto escolar), y con una clara división del trabajo (roles y responsabilidades).Los ejemplos que se mencionaron para cada elemento del sistema se contextualizaron al foco del estudio. Al-Alí (2020) señaló que estos elementos interactúan de manera dinámica, influenciándose mutuamente y generando tensiones que pueden facilitar u obstaculizar el aprendizaje. De acuerdo con Yamagata-Lynch y Haudenschild (2009), el análisis de estas interacciones y tensiones resulta fundamental para comprender e identificar las actividades conjuntas y los aspectos específicos que deben cambiarse o supervisarse para minimizar las tensiones que impiden el progreso de las actividades.

Figura 1. Interpretación de la autora sobre el modelo de la CHAT.
Nota. Adaptado de “Activity systems analysis: A maze worth exploring” (p. 84), por S. Al-Alí, 2020, *Studies in Technology Enhanced Learning, 1*(1).

Teoría Educación Matemática Realista

La teoría de la Educación Matemática Realista enfatiza la importancia de contextualizar el aprendizaje en situaciones significativas para los estudiantes. Según Freudenthal (1991), el aprendizaje matemático debe partir de contextos realistas que tengan sentido para los estudiantes, permitiéndoles desarrollar gradualmente modelos matemáticos más abstractos. Monsalve-López y Zapata-Cardona (2023) señalaron que lo realista es aquello que tiene sentido para los individuos y puede representarse mentalmente. Sus principios incluyen el (a) principio de la actividad, (b) principio de la realidad, (c) principio de niveles, (c) principio de reinvención guiada, (d) principio de la interacción y (e) principio de la interconexión (Bressan, 2016). En el contexto de estudiantes AESI, esta teoría resulta particularmente valiosa pues permite crear puentes entre las experiencias cotidianas de los estudiantes y los conceptos matemáticos formales, facilitando tanto la comprensión Matemática como el desarrollo lingüístico.

Método y desarrollo conceptual

En esta propuesta de investigación se adoptará un enfoque metodológico cualitativo con diseño de estudio de caso situacional de Lucca y Berríos (2009). Según estos autores, en esta modalidad se estudian eventos particulares desde la perspectiva de sujetos implicados o afectados. Se seleccionó este diseño por su capacidad para facilitar una comprensión profunda y contextualizada de las dinámicas de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas con estudiantes AESI. Además, se podrá profundizar acerca de las experiencias de los maestros, sus prácticas pedagógicas y los desafíos que enfrentan en el contexto específico de la Educación Matemática para estudiantes AESI.

La selección de participantes se realizará de manera intencional tipo homogénea, es decir, se identificarán seis maestros de Matemáticas del DEPR que cumplan con criterios específicos que aseguren su capacidad para proporcionar información rica y relevante para el estudio. Los criterios de selección incluyen: (1) ser maestro de Matemáticas de nivel secundario; (2) trabajar en una escuela del DEPR en la región educativa de Caguas, Humacao o San Juan; (3) contar con dos o más años de experiencia enseñando Matemáticas a estudiantes AESI; y (4) tener al momento del estudio al menos un estudiante AESI en alguno de los cursos que imparte. Estas regiones educativas se han seleccionado específicamente debido a su matrícula activa de estudiantes AESI.

En cuanto a la recopilación de información, esta se realizará mediante dos técnicas principales: entrevistas semiestructuradas y revisión de documentos. A través de las entrevistas semiestructuradas se podrán explorar las experiencias docentes, indagar sobre las prácticas pedagógicas implementadas e identificar los desafíos y estrategias utilizadas en la enseñanza. Las entrevistas se realizarán de forma presencial o virtual según la preferencia del participante, con una duración estimada de 60 minutos cada una. Las entrevistas se grabarán en audio o video, conforme a la autorización de los participantes; éstas se utilizarán para la transcripción y, posteriormente, el análisis. Por otro lado, la revisión de documentos incluirá el análisis de planificaciones de clase, material didáctico creado o utilizado por los maestros con estudiantes AESI, y documentos normativos del DEPR relacionados con la enseñanza de matemáticas y estrategias para estudiantes AESI. Esta combinación de técnicas facilitará la triangulación de la información y proporcionará una comprensión más completa del fenómeno estudiado.

Para el análisis de la información en esta propuesta de investigación, se utilizará el modelo de Creswell y Guetterman (2019), que se compone de seis pasos que se describirán a continuación. Primero, se preparará y organizará la información recopilada mediante transcripciones y digitalización de documentos. Segundo, se realizará una exploración inicial de los datos y se desarrollará un esquema preliminar de codificación o categorización. Tercero, se procederá con la codificación detallada para el desarrollo de descripciones y temas. Cuarto, se representarán los hallazgos mediante narrativas y tablas comparativas. Quinto, se interpretarán los resultados en el contexto del marco teórico y la literatura existente. Finalmente, se validará la precisión de los hallazgos mediante estrategias como la triangulación y la verificación con los participantes. El análisis se realizará utilizando el software NVivo para facilitar la codificación temática y el manejo de datos cualitativos.

Es importante señalar que esta propuesta corresponde a una investigación actualmente en desarrollo, encontrándose en la fase de recopilación de información. Con el propósito de precisar el estado actual del estudio, a continuación se presenta el cronograma de actividades que guía la ejecución de la investigación.

Tabla 1
Plan de ejecución de la propuesta de investigación.

Actividad	**Fecha estimada**
1. Obtención de permisos institucionales	Enero a febrero de 2025
2. Contacto inicial con directores escolares y docentes	Febrero a abril de 2025
3. Entrevistas	Marzo a junio de 2025
4. Transcripción y análisis preliminar de la información	Marzo a junio de 2025
5. Análisis de la información con el modelo de Creswell y Guetterman	Julio a agosto de 2025
6. Elaboración de la guía para la adaptación curricular	Septiembre a octubre 2025

Resultados esperados

Dado que es una propuesta de investigación, a partir de los hallazgos, se espera contribuir a la comprensión y mejora de la enseñanza de Matemáticas con estudiantes AESI en contextos multilingües. En primer lugar, se espera documentar un conjunto de prácticas efectivas de enseñanza que integren el desarrollo lingüístico y matemático. Estas prácticas incluirán estrategias para el uso efectivo de la lengua materna como recurso de aprendizaje, técnicas para desarrollar el registro matemático en español, y métodos para fomentar la comunicación matemática efectiva. Además, se anticipan hallazgos relacionados con el uso de representaciones múltiples, incluyendo recursos visuales, manipulativos y tecnología educativa adaptada, así como estrategias de diferenciación instruccional que contemplen la adaptación de materiales didácticos y prácticas de evaluación diferenciada.

Un segundo conjunto de resultados se centrará en la identificación y análisis de los desafíos y oportunidades que surgen en la enseñanza de Matemáticas en contextos multilingües. Se espera documentar las barreras lingüísticas y culturales que impactan la comprensión de problemas contextualizados y la comunicación matemática, así como los aspectos culturales que influyen en la contextualización de los contenidos. También se anticipan hallazgos relacionados con la disponibilidad y adaptación de recursos y materiales didácticos, incluyendo las necesidades específicas de desarrollo profesional de los docentes que trabajan con esta población estudiantil.

El tercer componente de los resultados consistirá en la elaboración de una guía comprehensiva para la adaptación curricular, que integrará los hallazgos de la investigación en un recurso práctico para docentes y administradores educativos. Esta guía abarcará estrategias pedagógicas específicas, incluyendo técnicas de andamiaje lingüístico y métodos de contextualización cultural, recomendaciones curriculares que alineen los estándares matemáticos con objetivos lingüísticos, y sugerencias para la secuenciación efectiva de contenidos. La guía también incluirá recomendaciones sobre recursos didácticos, abordando la necesidad de materiales bilingües, herramientas de evaluación adaptadas y recursos tecnológicos apropiados.

Referencias

Al-Alí, S. (2020). Activity systems analysis: A maze worth exploring. *Studies in Technology Enhanced Learning, 1*(1), 81-91.

Bressan, A. (2016). *Educación matemática realista: Bases teóricas*. GPDM.

Chaves Salas, A. L. (2001). Implicaciones educativas de la teoría sociocultural de Vygotsky. *Educación, 25*(2), 59-65.

Creswell, J. W., & Guetterman, T. C. (2019). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (6a ed.). Pearson.

Departamento de Educación de Puerto Rico. (2024). *Perfil escolar*. https://perfilescolar.dde.pr/

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting mathematics education: China lectures*. Kluwer Academic Publishers.

Lantolf, J. P. (2000). Introducing sociocultural theory. En J. P. Lantolf (Ed.), *Sociocultural theory and second language learning* (pp. 1-26). Oxford University Press.

Lucca, N., & Berríos, R. (2009). Investigación cualitativa: Fundamentos, diseños y estrategias (2nd ed.). Publicaciones SM.

Monsalve-López, D. L., & Zapata-Cardona, L. (2023). Procesos de matematización de estudiantes en la resolución de tareas matemáticas realistas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, (70), 228-259.

Sannino, A., & Engeström, Y. (2018). Cultural-historical activity theory: Founding insights and new challenges. *Cultural-Historical Psychology, 14*(3), 43-56.

Wertsch, J. V. (1995). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Ediciones Paidós.

Yamagata-Lynch, L. C., & Haudenschild, M. T. (2009). Using activity systems analysis to identify inner contradictions in teacher professional development. *Teaching and Teacher Education, 25*(3), 507-517.

Propuesta didáctica para el abordaje de la teoría de nudos: Su papel en las navegaciones atlánticas desde un enfoque interdisciplinar

María Alejandra **Pérez** Torres
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
maperezt@udistrital.edu.co
Juan Esteban **Gordillo** Niño
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
jegordillon@udistrital.edu.co

Resumen

Este taller interdisciplinario busca integrar la teoría de nudos y el pensamiento histórico en la educación secundaria, específicamente en el grado séptimo, siguiendo los lineamientos del currículo colombiano. La investigación se basa en la metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP), utilizando fuentes primarias como relatos de navegación de la época colonial y materiales tangibles como sogas. El objetivo es que los estudiantes, trabajando en grupos, resuelvan problemas que conecten los nudos marineros con la historia de la navegación durante la conquista y la colonia. Los principales hallazgos esperados incluyen el desarrollo de habilidades de pensamiento espacial y geométrico a través de la teoría de nudos, y la comprensión de la historia como un proceso dinámico y contextualizado, fomentando un aprendizaje significativo e interdisciplinario.

Palabras clave: Educación Matemática, Educación Secundaria, Enseñanza Presencial, implementación curricular, Teoría de nudos

Introducción

La teoría de nudos es una rama de la topología que estudia las propiedades Matemáticas de los nudos, es decir, de curvas cerradas en el espacio tridimensional. (Adams, C. C., 2004). Tradicionalmente, este tema ha sido abordado en niveles avanzados de la Educación Matemática, específicamente en cursos universitarios de topología y geometría diferencial. Sin embargo, en los últimos años, ha surgido un creciente interés por su inclusión en la educación secundaria y media, dado su potencial para fomentar el pensamiento geométrico, la modelización matemática y la resolución de problemas en contextos interdisciplinarios.

Uno de los principales retos para la enseñanza de la teoría de nudos en el colegio radica en la falta de materiales didácticos adecuados para su introducción a niveles básicos. La mayoría de los textos y recursos disponibles están diseñados para estudiantes universitarios, lo que dificulta su adaptación a contextos escolares. En este sentido, se hace importante el desarrollo de estrategias pedagógicas que permitan una enseñanza accesible y significativa de los conceptos fundamentales de la teoría de nudos, como la clasificación de nudos, los invariantes topológicos y sus aplicaciones en la vida cotidiana.

Otro aspecto clave es la articulación de la teoría de nudos con otras áreas del conocimiento. En la educación escolar, el aprendizaje interdisciplinario juega un papel fundamental en la construcción de saberes significativos. La teoría de nudos no solo es un campo de estudio matemático abstracto, sino que también tiene aplicaciones en diversas áreas, como la biología molecular, la física y la química. (Kauffman, L. H., 2012); y la historia, en el análisis de las técnicas de navegación y el uso de nudos en la exploración marítima, siendo esta última la opción que se toma para este trabajo.

Dicho esto, la enseñanza de la teoría de nudos en la escuela representa un desafío, pero también una oportunidad para enriquecer la Educación Matemática con enfoques innovadores y aplicaciones prácticas. Su integración en el currículo escolar puede contribuir al desarrollo del pensamiento abstracto y a la resolución de problemas en diversos contextos, fortaleciendo así el aprendizaje de los estudiantes.

La historia y las Matemáticas entrelazadas para generar experiencias de aprendizaje significativas

La enseñanza de las Matemáticas ha sido tradicionalmente presentada como un conjunto de reglas y procedimientos descontextualizados, lo que puede dificultar la comprensión y la motivación de los estudiantes. Sin embargo, la incorporación de la historia de las Matemáticas en los procesos de enseñanza-aprendizaje es una estrategia eficaz para mejorar la comprensión conceptual y fomentar el interés por la disciplina.

Por ejemplo, el estudio de los sistemas numéricos en las antiguas civilizaciones permite a los estudiantes explorar la diversidad de métodos de conteo y notación utilizados por diferentes culturas. Del mismo modo, la historia de la geometría puede ilustrarse a través de los aportes de Euclides, Arquímedes y otros matemáticos que contribuyeron al desarrollo de esta área del conocimiento.

Otro aspecto relevante es la conexión entre la historia de las Matemáticas y el desarrollo del pensamiento crítico. Al analizar los problemas y desafíos que enfrentaron los matemáticos en distintas épocas, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de razonamiento y argumentación, al tiempo que comprenden la importancia del error y la perseverancia en la construcción del conocimiento matemático. Teniendo estas dos ramas se puede hablar de relatos históricos y biografías de matemáticos para contextualizar los conceptos matemáticos y humanizar la disciplina. También pueden implementarse actividades basadas en la resolución de problemas históricos, en las que los estudiantes repliquen los métodos utilizados por matemáticos del pasado para resolver desafíos matemáticos.

El Pensamiento Histórico en el aula como motor para enriquecer estas visiones antes mencionadas

Como complemento de esta visión de la enseñanza de las Matemáticas, en donde la Historia toma lugar como derrotero e integrador dentro del contexto de enseñanza del objeto matemático es que podemos integrar el concepto de “Pensamiento histórico” para enriquecer este enfoque y trabajar de manera articulada con las Ciencias Sociales escolares.

De esta manera, debemos comprender que la generación del lazo entre las Matemáticas y las ciencias sociales desde la presentación de la historia de la matemática no debe ser entendida como una disciplina agregada a la temática, sino que debe funcionar como una dinamizadora de las discusiones de cada unidad didáctica donde sea planteada. Lo anterior permite, en el caso del proceso de enseñanza-aprendizaje, desarrollar aprendizajes que van más allá de conocimientos declarativos de primer orden (el qué, dónde, cuándo o quién, ha llevado a cabo las distintas acciones bajo un relato secuencial), puesto que su enfoque está dirigido a privilegiar procedimientos y aprendizajes de segundo orden, con el objetivo de dotar al alumnado de una serie de instrumentos de análisis, que le permita abordar el estudio de la historia como un conocimiento problematizado del pasado a partir de su nexo con el presente y futuro.

Para nuestra propuesta, esto permite pasar de la enunciación trivial de los hechos, personajes, fechas y lugares que hicieron uso del objeto matemático para realizar un trabajo donde se relacione su contexto de creación, su uso y causalidad en el tiempo específico, su importancia en el pasado, su repercusión en el futuro y sus usos en nuestro tiempo.

Estado de la cuestión

Las propuestas interdisciplinares para procesos de enseñanza - aprendizaje han venido tomando fuerza desde los últimos años con la proliferación de los desarrollos de las teorías de la complejidad, las integraciones curriculares y las propuestas que enlazan Ciencia, Sociedad y Cultura. Dentro de estas tendencias, las Matemáticas y las ciencias sociales han empezado a pensar cómo se pueden relacionar los planteamientos didácticas de cada disciplina y como la escuela puede propiciar nuevas maneras de entender las temáticas. Propuestas como la elaborada por Hurtado (2009) en la que expone la manera de integrar las Matemáticas y el análisis de datos con fenómenos sociales como la migración nos dan una muestra de cómo se puede pensar interdisciplinariamente.

En el caso específico desde el cual se construye este taller, en relación con la Matemática y la Historia, las propuestas para la enseñanza de la matemática con un eje en la Historia de las Matemáticas han venido emergiendo desde varias décadas atrás como recurso metodológico (Chaves, E y Salazar, 2003) como Recurso didáctico (Urbaneja 2004) y como propuesta didáctica de integración (Molina 2014). La literatura de este tópico da muestra de la importancia y ventajas que tiene este enfoque en las nuevas formas de enseñar y aprender las Matemáticas, Gómez (2011) así lo expone:

> Para observar su proceso de aprendizaje no hay más remedio que regresar a la historia para estudiar la evolución de las ideas Matemáticas, analizando los textos históricos, como cogniciones epistemológicas, de la misma manera que analizamos las cogniciones de los estudiantes (p, 10).

Se entiende así que es un elemento necesario al momento de pensar en el trabajo del docente conocer el contexto de producción del conocimiento y de las ideas con el fin de saber e integrar los usos funciones, cambios y continuidades hasta el día de hoy. Ahora bien, integrar dos disciplinas en esta tarea es un reto importante pero que permite acercarnos a las visiones antes mencionadas y que se hacen necesarias para avanzar en las discusiones didácticas.

Por tanto, la propuesta de este taller tiene como objetivo la presentación de una unidad didáctica donde la teoría de nudos y el pensamiento histórico permite trabajar las temáticas presentadas por los DBA en el grado 7mo de Bachillerato según la legislación colombiana. En donde ambas temáticas trabajen de manera interdisciplinar y articulada en línea con la resolución de problemas en grupo.

Referencial teórico

Teoría de nudos

La enseñanza de las Matemáticas en Colombia sigue los lineamientos establecidos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2016), los cuales enfatizan el desarrollo del pensamiento matemático a través de diversas competencias. En particular, en el grado séptimo, donde el currículo integra nociones de geometría, transformación y relaciones espaciales, la teoría de nudos ofrece un enfoque significativo para la enseñanza de estos temas, pues nos ofrece una oportunidad para desarrollar el pensamiento espacial y la intuición geométrica de los estudiantes. (National Council of Teachers of Mathematics, 2000). Aunque la teoría de nudos es un objeto de estudio matemático avanzado con un alto grado de abstracción (Adams, 2004), su aplicación en el aula es viable desde los primeros años escolares, ya que permite desarrollar nociones topológicas básicas como continuidad, conexión y transformación sin medidas rígidas (Cabrera Fermoso et al., s.f.).

Actividades prácticas como atar y desatar nudos facilitan la comprensión de relaciones espaciales, la equivalencia topológica y la clasificación de formas, fortaleciendo la intuición geométrica y el pensamiento espacial en los estudiantes (MEN, 2016). En séptimo grado, la teoría de nudos se integra con la geometría euclidiana, facilitando la exploración de isometrías, simetrías y transformaciones en el espacio (Stillwell, 1993). Además, introduce elementos de la teoría de grafos y fomenta el pensamiento variacional y la resolución de problemas mediante el análisis de patrones en secuencias de nudos (Devlin, 2000). Su incorporación en el currículo no solo enriquece la enseñanza matemática, sino que también permite conexiones interdisciplinarias que potencian un aprendizaje más significativo y estructurado.

Los nudos en la Historia de la navegación, conocimientos de primer y segundo orden

Dentro de la propuesta interdisciplinar del taller, los conocimientos de orden histórico seleccionados estarán enmarcados en los medios y vías de comunicación presentes durante la conquista y la colonia de América. Como es sabido, los DBA[1] para el grado Séptimo en el Bachillerato nos permite trabajar directamente con el periodo de tiempo en el que la Conquista y la Colonia de América tiene lugar, mencionando que "Evalúa las causas y consecuencias de los procesos de Conquista y colonización europea dados en América (MEN, 2015, p36)"

Como se mencionaba anteriormente, las nuevas propuestas para la enseñanza de la historia, en nuestro caso para la propuesta interdisciplinar entre Matemáticas e historia, debe tener clara la importancia de los conocimientos de primer orden y los conocimientos de segundo orden. Los primeros entendidos como "contenidos (...), que intentan responder a las preguntas ¿qué? quién? ¿cuándo? y ¿dónde? Estamos hablando de contenidos que hacen referencia tanto a conocimientos de conceptos o principios, como a fechas y acontecimientos históricos concretos (Carrasco, Molina, Puche, 2014, p 9) y los segundos definidos "por la posesión o despliegue de diferentes estrategias, capacidades o competencias para responder a cuestiones históricas y entender de una forma más compleja el pasado (Carrasco, Molina, Puche, 2014, p 9)

La temática específica dentro de este periodo de tiempo, y tomándose como conocimientos de primer orden, será el desarrollo de los medios de transporte navales usados por el imperio Español durante la expansión y conquista de las Américas. La intención con esta selección para el taller es lograr conocer las dinámicas propias del transporte en la época junto al conocimiento específico producido por los marineros, capitanes y tripulantes de la época, tomando estos elementos como conocimientos de segundo orden.

El enfoque interdisciplinar junto al ABP (Aprendizaje Basado en Problemas)

Como propuesta pedagógica y didáctica, el taller planteado tiene como enfoque pedagógico y metodológico el Aprendizaje Basado en Problemas definido y fundamentado como

> un método de aprendizaje basado en el principio de usar problemas como punto de partida para la adquisición e integración de los nuevos conocimientos (...) está orientado a la solución de problemas que son seleccionados o diseñados para lograr el aprendizaje de ciertos objetivos de conocimiento (Guamán, Espinoza, 2022, p 127).

Una propuesta que trabaja el ABP como derrotero metodológico permite que para la resolución de las problemáticas que plantea el docente encuentre en el diálogo entre distintas disciplinas las posibilidades para encontrar y presentar las respuestas que requiere cada situación, en tanto como metodología activa, requiere que cada estudiante ponga en discusión sus conocimientos y habilidades. apoyado en el "contenido de varias disciplinas académicas. En la solución del problema el alumno debe tener conocimientos y relacionar diferentes materias (Guamán, Espinoza, 2022, p127).

[1] Los Derechos Básicos de Aprendizaje son producidos por el Ministerio de Educación de Colombia como las herramientas para conocer cuales deben ser los aprendizajes mínimos que deben ser dados para los estudiantes según el grado en el que se encuentren. (MEN,2015).

Por tanto, anclar la propuesta de un taller que trabaja temáticas, habilidades y conocimientos de materias como la Historia y las Matemáticas en el ABP resulta conveniente desde las posibilidades de la interdisciplinariedad para integrar los conocimientos en una propuesta conjunta.

Estrategias para desarrollar el taller

Para el desarrollo del taller y en línea con lo mencionado anteriormente con el ABP y teniendo en cuenta que se encuentra indirectamente la Resolución de problemas (Charnay & Parra, 1994), el taller será trabajado por medio del trabajo en grupo donde el desarrollo pedagógico de estos estará guiado por distintos problemas que relacionen la teoría de nudos y la navegación durante la conquista y la colonia. Se plantea la resolución de problemas como enfoque pedagógico en tanto guía la participación, la comunicación e intercambio entre pares y la construcción de propuestas desde los mismos estudiantes; la organización en grupos cataliza estos.

Cada grupo de trabajo tendrá a su poder los siguientes elementos:3 Sogas de 20 x 30, una copia de un fragmento o relato de alguna embarcación participe en la colonia, extraída de los archivos digitales del Archivo General de Indias y similares, tres hojas en blanco, y guía de pistas.

Desde la teoría de nudos, cada nudo puede ser entendido como una estructura con propiedades topológicas que permiten distinguirlo de otros, y su colorimetría facilita la identificación de patrones y diferencias, promoviendo la observación y la clasificación. Al llevarlo al aula, los estudiantes no solo manipulan cuerdas, sino que también analizan secuencias, simetrías y transformaciones, habilidades clave para el razonamiento matemático. Además, contextualizar los nudos en la navegación durante la colonia les permite comprender su importancia en la vida real trabajando el concepto de Galera, tripulación, Indias, Encomiendas, Cartografías, Contrabando, conceptos que deben quedar claros para el buen desarrollo del taller, conectando la matemática con la historia y fortaleciendo su aprendizaje a través de la resolución de problemas.

Teniendo en cuenta lo anterior, la propuesta del taller para la puesta en práctica se estructura de la siguiente manera:

Tabla 1
Planificación de taller

Actividad	**Desarrollo**	**Tiempo**	**Recursos**
Presentación de los docentes orientadores	Los docentes orientadores realizan su presentación personal y dan las indicaciones generales del taller	5 minutos	Proyector

Introducción a los nudos marineros	Se hace la introducción a la teoría de nudos desde la exploración y acercamiento a nudos marineros previamente elaborados. Imagen 1	15 minutos	Proyector, infografías de apoyo, cuaderno para tomar notas
¿Qué es un nudo?	Reconocimiento del material (sogas) para que el asistente haga reconocimiento del recurso, así mismo que también se construya la idea de que es un nudo y cuáles son las características	15 minutos	Sogas, lectura y cuaderno para tomar apuntes
Lee, piensa y construye	Los asistentes leen una narrativa de los marineros y las colonias que al ir construyendo van encontrando los pasos para realizar el nudo.	40 minutos	Sogas, lectura y cuaderno para tomar apuntes
Deconstruye	Los asistentes pasan de realizar el nudo a deshacerlo, entendiendo que en él hay una colorimetría que nos muestra si uno es diferente a otro nudo	40 minutos	Sogas, lectura y cuaderno para tomar apuntes
Palabras finales y cierre	Se deja abierto a comentarios y preguntas	20 minutos	
Cierre del taller	Los docentes orientadores recogen las apreciaciones finales y dan cierre al taller	10 minutos	

Fuente: Propia

Asimismo, a continuación, se puede observar (Figura 1) la infografía que permite entender uno de los recursos base de la propuesta del taller:

Figura. Nudos Marineros y sus usos (MINEDUC, 2014, Nudos Marineros, recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-28878_recurso_jpg.pdf).

La anterior figura permite observar una infografía general con algunos de los nudos marineros que predominan en la navegación y que tienen un trasfondo histórico, son algunos de estos los que serán escogidos en el taller para poder aplicar la propuesta

Referencias

Adams, C. (2004). *The Knot Book: An Elementary Introduction to the Mathematical Theory of Knots*. AMS.

Cabrera Fermoso, Norma Leticia, González Vera, Rubén, Mendoza Mendoza, Herminia, & Arzate Robledo, Roberto. (s.f.). La Topología y la Geometría en la enseñanza educativa básica. *Revista Alternativas en Psicología.*

Carrasco, C. J. G., Molina, J. O., & Puche, S. M. (2014). Aprender a pensar históricamente. Retos para la historia en el siglo XXI [1]. *Revista Tempo e Argumento*, 6(11), 5-27.

Charnay, R., Saiz, I. & Parra, C. (1994). *Didáctica de matemáticas: Aportes y reflexiones* (5.a ed.). Editorial Paidós Educador.

Chaves, E y Salazar, J. (2003). "La Historia de la Matemática como recurso metodológico en los procesos de enseñanza aprendizaje: una experiencia en secundaria". *Uniciencia,* 2(2): 259-266.

Devlin, K. (2000). *The Math Gene*. Basic Books.

Gómez, B. (2011). Marco preliminar para contextualizar la investigación en historia y educación matemática. *Epsilon*, 28(1), 9-22.

Guamán Gómez, V. J., & Espinoza Freire, E. E. (2022). Aprendizaje basado en problemas para el proceso de enseñanza-aprendizaje. *Revista Universidad y Sociedad*, 14(2), 124-131.

Hurtado, L. (2019). *Contribuciones de las matemáticas a las ciencias sociales: caso de aplicación análisis de datos espaciales a la inmigración y segregación espacial*. Universidad del Valle.

Kauffman, L. H. (2012). *Knots and physics*. World Scientific.

MINEDUC, 2014*, Nudos Marineros*, recuperado de https://www.curriculumnacional.cl/614/articles-28878_recurso_jpg.pdf

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (2015.). *Derechos Básicos de Aprendizaje. Ciencias Sociales. Grado 7°.* Recuperado de: (https://www.colombiaaprende.edu.co/sites/default/files/files_public/2022-06/DBA_C.Sociales-V2.pdf).

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía.* Bogotá: MEN.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2016*). Estándares básicos de competencias en lenguaje, matemáticas, ciencias y ciudadanía.* Bogotá: MEN.

Molina González, A. M. (2014). *Diseño de una propuesta didáctica para la enseñanza de los números naturales utilizando la historia de las matemáticas y de las principales civilizaciones en la historia de los números como recurso metodológico en los procesos de enseñanza-aprendizaje en el grado 5° del Instituto Jorge Robledo*. Facultad de Ciencias.

National Council of Teachers of Mathematics. (2000*). Principles and standards for school mathematics*. NCTM.

Stillwell, J. (1993). *Geometry of Surfaces*. Springer.

Urbaneja, P. M. G. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *Suma*, 45, 17-28.

Razonamiento geométrico en estudiantes de educación media

Roberto **Torres** Peña
Universidad del Magdalena
Colombia
rtorres@unimagdalena.edu.co
Edwin David **Pertuz** Barón
Universidad del Magdalena
Colombia
epertuz@unimagdalena.edu.co
Darwin Dacier **Peña** González
Universidad del Magdalena
Colombia
ddpenag@unimagdalena.edu.co

Resumen

Este trabajo presenta un estudio a cerca del razonamiento matemático manifestado por estudiantes de los grados 9, 10 y 11 de educación secundaria y media en Colombia cuando se enfrentan a resolver un problema geométrico. Se analizaron los resultados obtenidos cinco de cada grado, al resolver una situación que involucra el teorema de Pitágoras. Para comprender los procesos de visualización, razonamiento y construcción, se examinaron las aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa en la solución y justificación del problema. Encontrando que la visualización es fundamental en la solución de tareas geométricas, destacando la importancia de fortalecer el razonamiento geométrico en los estudiantes para mejorar sus habilidades en la identificación y resolución de problemas. El estudio evidencia la necesidad de privilegiar la enseñanza de la geometría, enfocada en la resolución de problemas que promuevan procesos coordinados de aprensión para el desarrollo del razonamiento configural por encima de la enseñanza teórica.

Palabras clave: Pensamiento matemático, razonamiento geométrico, razonamiento configural, resolución de problemas y educación media.

Introducción

Definición y relevancia del problema

En el ámbito de la Educación Matemática, se ha identificado un desfase significativo entre las expectativas curriculares en geometría y las capacidades reales de los estudiantes para visualizar, razonar y argumentar a partir de representaciones geométricas. Esta brecha no solo obstaculiza el aprendizaje de conceptos fundamentales, sino que también limita el desarrollo del pensamiento matemático en niveles más complejos. A pesar de los avances en la inclusión de la visualización como práctica didáctica y objeto de estudio, persisten importantes desafíos en cuanto a su integración efectiva en las aulas escolares y en la formación de los estudiantes.

Dentro de este panorama, el razonamiento geométrico basado en representaciones visuales emerge como un campo de interés prioritario. Diversos estudios han señalado que la comprensión profunda de conceptos geométricos requiere no solo del uso de representaciones, sino también de la capacidad de establecer relaciones entre ellas y de realizar transformaciones cognitivas que permitan la aprehensión significativa de los objetos matemáticos.

Este trabajo se centra en el análisis de dichas capacidades a través de un caso concreto: la comprensión y argumentación en torno al teorema de Pitágoras, como contenido paradigmático en la enseñanza de la geometría en la educación básica y media.

Estado del arte

La literatura en Educación Matemática ha documentado ampliamente la importancia de la visualización en la enseñanza y aprendizaje de la geometría. Autores como Duval (1993, 2006) han señalado que la comprensión de objetos matemáticos no puede prescindir de la movilización de diferentes registros de representación, siendo el registro visual uno de los más relevantes en geometría.

Diversas investigaciones han resaltado que, aunque los estudiantes suelen usar imágenes, muchas veces estas no contribuyen a la construcción de significados matemáticos sólidos (Presmeg, 2006; Arzarello et al., 2008). Ello se debe, en parte, a la falta de trabajo sistemático sobre las formas de razonamiento que permiten "leer" y transformar representaciones visuales de modo significativo.

En este contexto, los estudios sobre el razonamiento configuracional (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2013) ofrecen una vía prometedora para comprender cómo los estudiantes construyen significados a partir de la organización de las figuras y relaciones espaciales en una tarea geométrica. El teorema de Pitágoras, por su riqueza visual y su presencia transversal en el currículo, se presenta como un contenido adecuado para explorar estas dimensiones.

Referentes teóricos

El marco teórico de este estudio se articula a partir de dos enfoques complementarios: la teoría de los registros de representación semiótica de Raymond Duval y el modelo de razonamiento configuracional propuesto por Torregrosa, Quesada y Penalva. Esta combinación permite abordar de manera integrada tanto los procesos cognitivos implicados en la visualización geométrica como la naturaleza del razonamiento que se genera a partir de las configuraciones visuales.

Según Duval (1993, 2006), comprender un objeto matemático requiere movilizar distintos registros de representación semiótica, entre ellos el visual, el verbal y el simbólico. La visualización, en este contexto, no es un simple apoyo didáctico, sino un proceso fundamental que permite acceder a aspectos del objeto que no serían evidentes en otros registros.

Un elemento central en esta teoría es la noción de aprehensión, entendida como la forma en que el sujeto construye sentido a partir de una representación. Duval distingue tres tipos principales de aprehensión:

Aprehensión perceptiva: ligada a la captación inmediata de las formas visuales.

Aprehensión discursiva: mediada por el lenguaje y las inferencias verbales.

Aprehensión operativa: relacionada con la manipulación mental de las figuras, como transformaciones, desplazamientos o reorganizaciones.

Estas aprehensiones se movilizan de manera interdependiente durante la resolución de tareas geométricas, y su adecuada articulación es clave para el desarrollo del pensamiento matemático visual.

El modelo de razonamiento configuracional (Torregrosa, Quesada y Penalva, 2013) aporta una perspectiva centrada en la manera en que los estudiantes establecen relaciones entre elementos visuales dentro de una figura para construir argumentos geométricos. Este modelo considera que: Las configuraciones visuales no son solo dibujos, sino estructuras organizadas que permiten deducir propiedades o relaciones. El razonamiento se produce a partir de la identificación, construcción y transformación de dichas configuraciones. Este tipo de razonamiento es especialmente relevante en contextos donde la demostración formal no es todavía accesible para los estudiantes, pero donde se espera de ellos una justificación argumentada.

La combinación de este modelo con la teoría de Duval permite enriquecer el análisis de las producciones estudiantiles, considerando tanto la naturaleza de las representaciones utilizadas como los procesos de razonamiento que estas desencadenan.

La visualización ha sido objeto de creciente interés en la investigación en didáctica de la Matemática. Estudios como los de Presmeg (2006) y Arcavi (2003) destacan la ambivalencia de la visualización: puede facilitar el acceso al significado, pero también inducir errores si no se vincula a procesos de verificación y argumentación. En esta línea, se ha propuesto trabajar con tareas que promuevan la exploración activa de configuraciones visuales, favoreciendo la transición desde una aprehensión perceptiva hacia formas más estructuradas de razonamiento.

El estudio subraya la importancia de la visualización en el desarrollo de actividades geométricas. Según investigaciones recientes, las experiencias prácticas y el uso de manipulativos concretos y virtuales pueden mejorar significativamente el rendimiento en la resolución de problemas geométricos al reducir la carga cognitiva y facilitar la comprensión (Shi et al., 2023; Ponte et al. 2023). La integración de estas herramientas en el aula puede promover una mejor comprensión de conceptos geométricos complejos y mejorar las habilidades de razonamiento geométrico.

Con este estudio busca dar respuesta a las siguientes preguntas:

¿Qué tipos de aprehensión y configuraciones visuales emergen en estudiantes al trabajar con tareas sobre el teorema de Pitágoras?

¿Qué características presentan los procesos de razonamiento configuracional desarrollados por los estudiantes en estas tareas?

Método y desarrollo

El estudio emplea un diseño comparativo cualitativo que se centra en el análisis de los niveles de razonamiento geométrico de estudiantes de los grados 9, 10 y 11. El objetivo principal es evaluar cómo estos estudiantes desarrollan y coordinan los procesos de visualización, razonamiento y construcción en la resolución de problemas geométricos, y cómo estas habilidades reflejan sus aprehensiones perceptiva, discursiva y operativa.

El estudio se realizó con quince estudiantes de una institución educativa, divididos equitativamente en tres grupos de cinco estudiantes cada uno, correspondientes a los grados 9, 10 y 11. La selección de los participantes se realizó de manera intencionada (Menéndez y Rodríguez, 2012) con el único criterio de haber cursado Geometría y tener voluntad para participar de la investigación.

Para la evaluación se aplicó un problema geométrico específico en el que el teorema de Pitágoras estaba implícitamente involucrado. El problema fue formulado de tal manera que los estudiantes debían identificar la configuración geométrica subyacente para poder resolverlo correctamente. Este problema fue seleccionado debido a su capacidad para involucrar los tres procesos cognitivos descritos por Duval (1998): visualización, construcción y razonamiento.

Para garantizar la validez del problema planteado, se llevó a cabo un proceso de validación cualitativa mediante juicio de expertos. Se consultaron cuatro docentes investigadores con experiencia en didáctica de las Matemáticas, quienes evaluaron: La pertinencia del diseño con relación al objetivo de evidenciar las aprehensiones cognitivas, la adecuación del nivel de dificultad al grado escolar, la claridad y coherencia del enunciado y el potencial de la tarea para fomentar razonamiento visual y argumentación. las observaciones de los expertos fueron integradas mediante ajustes en el lenguaje de los enunciados, la progresión de dificultad y la inclusión de representaciones más sugerentes en las configuraciones visuales.

Los estudiantes recibieron el problema en un ambiente controlado y tuvieron el tiempo necesario para resolverlo. Durante la resolución, se les permitió utilizar herramientas de dibujo y escribir sus procesos de razonamiento y soluciones de manera detallada. Luego, se recopilaron las soluciones escritas de los estudiantes, así como cualquier dibujo o esquema que hubieran realizado, adicionalmente, se realizaron entrevistas breves a algunos estudiantes seleccionados para obtener una comprensión más profunda de sus procesos de pensamiento y estrategias utilizadas.

Resuelve

Para construir un peldaño sobre una pared, una persona apoya un tronco de madera de 5 metros de longitud, haciendo que la distancia del pie del tronco a la pare sea de 4 metros

Después de un tiempo, el tronco se deslizó de su posición inicial 1 metro hacia abajo, como se muestra en la figura:

¿Cuántos metros se deslizó el pie del madero respecto a su posición inicial? Justifica tu respuesta

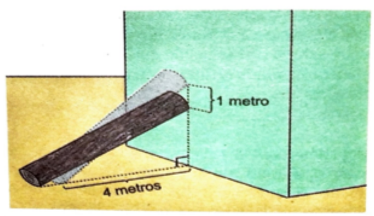


Figura 1 . Ilustración de la situación problema

Las soluciones escritas y los esquemas se analizan para identificar y categorizar los diferentes procesos de visualización, construcción y razonamiento empleados por los estudiantes en la solución del problema. Este análisis se basó en el modelo teórico de Duval (1998) y en los conceptos de aprehensión perceptiva, discursiva y operativa.

En cuanto a los procesos de aprehensión perceptiva, se evaluó cómo los estudiantes reconocieron y extrajeron información visual relevante de la configuración geométrica presentada en el problema. Para la aprehensión discursiva, se analizó la capacidad de los estudiantes para asociar la configuración geométrica identificada con afirmaciones matemáticas pertinentes, describiendo y justificando sus razonamientos. Por último, para los procesos de aprehensión operativa, se examinó la habilidad de los estudiantes para manipular mentalmente las figuras geométricas, realizar construcciones y transformaciones, y aplicar conceptos teóricos para resolver el problema.

Una vez analizados los procesos de aprehensión se compararon los resultados obtenidos por los estudiantes de los tres grados para identificar diferencias y similitudes en sus niveles de razonamiento geométrico y en su capacidad para coordinar los diferentes tipos de aprehensión. El análisis se sustentó en diferentes teorías y modelos educativos y cognitivos, principalmente en las aportaciones de Duval (1998) y las investigaciones de Torregrosa, Quesada y Penalva (2010).

Como parte del proceso de indagación sobre las aprehensiones y formas de razonamiento movilizadas por los estudiantes, se realizaron entrevistas breves de tipo semiestructurado a 9 de los 15 participantes luego de completar las tareas. Estas entrevistas se diseñaron con el propósito de explorar más a fondo los significados atribuidos por los estudiantes a las configuraciones visuales y las estrategias cognitivas utilizadas en su resolución.

Las entrevistas fueron transcritas y codificadas, utilizando las mismas categorías teóricas que guiaron el análisis de las producciones escritas. En particular, se buscaron indicios de: Aprehensión perceptiva, Aprehensión discursiva y Aprehensión operativa.

Estas entrevistas se integraron al análisis, contrastando los datos escritos y orales para enriquecer la comprensión de los procesos involucrados y validar las interpretaciones realizadas. En los resultados, se incorporan citas y fragmentos relevantes de las entrevistas para ilustrar patrones y matices identificados en las respuestas.

Resultados y discusión

Los resultados revelaron un desfase significativo entre las expectativas curriculares y las capacidades reales de los estudiantes para resolver problemas geométricos. La visualización emergió como un componente crítico en el desarrollo del razonamiento geométrico, destacando la necesidad de fortalecer esta habilidad en los estudiantes. Los análisis de aprehensión perceptiva, discursiva y operativa proporcionaron una visión detallada de los procesos cognitivos implicados y las áreas que requieren mayor atención y mejora en la enseñanza de la geometría.

A continuación, resultados obtenidos por los estudiantes

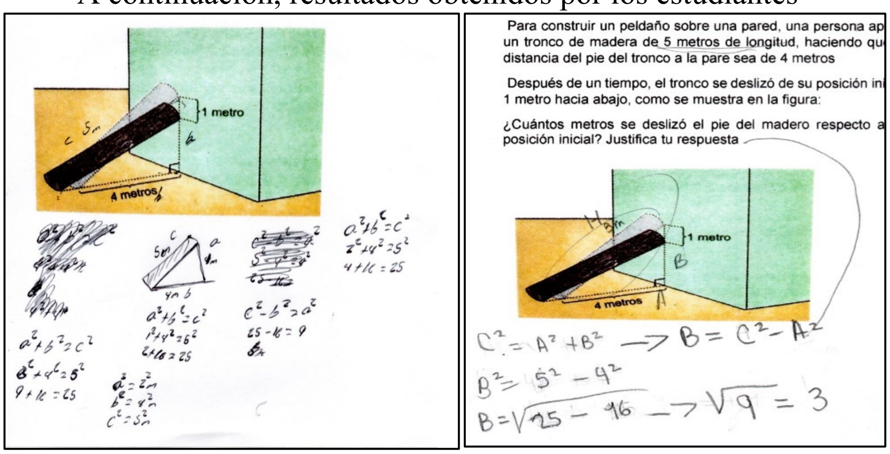


Figura 2: A manera de ejemplo, se muestran respuestas presentadas por algunos estudiantes.

En la primera imagen, el estudiante identifica correctamente el objeto geométrico inmerso en la situación (triángulo rectángulo), extrae la información relevante (longitudes de los catetos) y procede a realizar una representación gráfica. Relaciona este triángulo con el teorema de Pitágoras y realiza los cálculos pertinentes, demostrando la presencia de aprehensión perceptiva y discursiva. Sin embargo, el estudiante no logra reconfigurar la situación inicial para aplicar adecuadamente el teorema y resolver el problema, lo que indica una dificultad en la aprehensión operativa, en detalle:

El estudiante identifica el objeto geométrico inmerso en la situación planteada (Aprehensión Perceptiva): una escalera apoyada contra una pared formando un triángulo rectángulo. Este reconocimiento es un claro ejemplo de aprehensión perceptiva, donde el estudiante observa y extrae información visual relevante de la figura. La identificación del triángulo rectángulo y sus componentes (los catetos y la hipotenusa) demuestra que el estudiante puede percibir y conceptualizar figuras geométricas en un contexto práctico (Duval, 1998). El siguiente paso del estudiante es realizar una representación gráfica del triángulo rectángulo y relacionarlo con el teorema de Pitágoras. Este proceso implica la aprehensión discursiva, donde el estudiante asocia la configuración geométrica identificada con afirmaciones matemáticas pertinentes. El uso de la fórmula del teorema de Pitágoras $a^2 + b^2 = c^2$ para relacionar los lados del triángulo (donde a y b son los catetos y c es la hipotenusa) muestra que el estudiante puede articular y justificar matemáticamente la relación entre los elementos geométricos (Duval, 1998). A pesar de la correcta identificación y representación de la figura geométrica, el estudiante enfrenta dificultades al intentar aplicar operativamente el teorema de Pitágoras para resolver el problema (Aprehensión Operativa). Aunque realiza los cálculos algebraicos relacionados con $a^2 + b^2 = c^2$, los resultados indican que no puede llegar a una solución satisfactoria.

Este "bucle" descrito por Torregrosa y Quesada (2010) evidencia la necesidad de fortalecer la capacidad de los estudiantes para pasar de la comprensión discursiva a la operativa en la resolución de problemas geométricos. Las respuestas del estudiante indican un desfase entre lo que los estudiantes deberían resolver y lo que realmente pueden resolver, destacando la necesidad de fortalecer el razonamiento geométrico en los estudiantes. Esta brecha puede abordarse mediante el uso de estrategias pedagógicas que fomenten la visualización y la manipulación de objetos geométricos, así como la implementación de preguntas orientadoras que promuevan el uso apropiado del lenguaje matemático y la argumentación (Clements, 2020).

Los resultados refuerzan la idea de que la enseñanza de la geometría debe enfocarse no solo en la transmisión de conocimientos teóricos, sino también en el desarrollo de habilidades de visualización y argumentación matemática, como sugieren estudios recientes en el campo de la Educación Matemática (Shi et al., 2023). Además, destaca la importancia de proporcionar a los estudiantes experiencias de aprendizaje que les permitan coordinar de manera efectiva las diferentes aprehensiones necesarias para resolver problemas geométricos complejos.

A continuación, se presentan los hallazgos organizados en torno a tres ejes: (1) análisis comparativo entre niveles escolares; (2) dificultades comunes en la coordinación de aprehensiones; y (3) aportes de las entrevistas breves a la comprensión de los procesos cognitivos.

Grado	Aprehensión perceptiva	Aprehensión discursiva	Aprehensión operativa	Observaciones
9º	Realizan el proceso de visualización, asocian un concepto a la situación planteada	Identifican el teorema, pero no justifican.	No aplican correctamente el teorema	Dificultades en traducir representaciones a operaciones.
10º	logran visualizar la figura presente en la situación y la asocian a un concepto matemático	Enuncian el teorema, pero con errores en el uso algebraico	Inician el procedimiento, pero no lo finalizan con éxito	Mejora en identificación y representación, pero aún falta articulación.
11º	Realizan el proceso de visualización, asocian la situación planteada con una figura geométrica y esta a su vez con un concepto	Utiliza el teorema de Pitágoras dejando ver que identifican las variables que lo conforman y lo que se necesita para aplicarlo.	Aplican el teorema, pero cometen errores numéricos o de interpretación del contexto	Se observan avances, pero persisten vacíos en la articulación completa.

Esta tabla resume el proceso progresivo de mejora en la articulación entre aprehensiones a lo largo de los grados, aunque aún en 11º se identifican "bloqueos" operativos, como lo describen Torregrosa, Quesada y Penalva (2010), que limitan el paso efectivo de la aprehensión discursiva a la operativa.

Conclusiones

El estudio revela que, aunque los estudiantes de los grados 9, 10 y 11 tienen la capacidad de identificar elementos geométricos básicos y aplicar teorías como el teorema de Pitágoras, existen notables diferencias en su habilidad para coordinar aprehensiones perceptivas, discursivas y operativas. La visualización se destaca como un componente esencial en el desarrollo de habilidades geométricas, y se observó que los estudiantes con mayor capacidad de visualización tienden a tener un mejor desempeño en la resolución de problemas geométricos.

El desfase entre lo que los estudiantes deberían ser capaces de resolver y lo que realmente pueden resolver pone en evidencia la necesidad de fortalecer el razonamiento geométrico en la educación secundaria. Las habilidades de razonamiento configural, esenciales para la resolución de problemas geométricos complejos, aún no están completamente desarrolladas en muchos estudiantes, lo que sugiere una deficiencia en la metodología de enseñanza actual.

Fomentar el uso del lenguaje matemático y la argumentación en las aulas para mejorar la aprehensión discursiva y operativa de los estudiantes y adaptar las actividades educativas para atender las necesidades individuales de los estudiantes, reconociendo las diversas formas en las que perciben y comprenden los problemas geométricos.

Es importante reconocer que la muestra utilizada en este estudio es reducida, compuesta por 15 estudiantes de tres grados escolares distintos. Este tamaño limitado puede restringir la transferibilidad de los hallazgos a poblaciones más amplias o contextos educativos diferentes. Por tanto, si bien los resultados aportan un análisis detallado y valioso sobre los procesos de razonamiento geométrico y coordinación de aprehensiones, deben interpretarse con cautela. Se recomienda que futuras investigaciones amplíen la muestra y consideren una mayor diversidad de contextos para validar y generalizar las conclusiones obtenidas.

Referencias y bibliografía

Duval, R. Geometrical pictures: kinds of representation and specific processes. In: Sutherland, R.; Mason, J. (Ed.). *Exploiting Mental Imagery with Computers in Mathematical Education*. Berlin: Ed. Springer, 1995. p. 142-157.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view. In C. Mammana & V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Springer.

Duval, R. (1999). Representation, vision, and visualization: cognitive functions in mathematical thinking. In F. Hitt & M. Santos (Eds.), *Proceedings of the 21st Annual Meeting North American Chapter of the International Group of PME,* 3-26.

Menéndez, M., & Rodríguez, M. (2012). El análisis de contenido como técnica de investigación cualitativa. En M. Menéndez & M. Rodríguez (Eds.), *Metodología de la investigación cualitativa* (pp. 15-34). Madrid: McGraw-Hill.

Torregrosa, G., & Quesada, A. (2007). El razonamiento configural en geometría. *Uno: Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 44, 79-90.

Torregrosa, G., Quesada, A., & Penalva, A. (2010). Razonamiento configural y aprehensión operativa en geometría. *Educação Matemática Pesquisa*, 12(1), 9-26.

Ponte, R., Viseu, F., Neto, V, Aires, A., (2023). Revisiting manipulatives in the learning of geometric figures. *Frontiers in Education*.

Shi, Licheng & Dong, Linwei & Zhao, Weikun & Tan, Dingliang. (2023). Improving middle school students' geometry problem solving ability through hands-on experience: An fNIRS study. *Frontiers in Psychology*. 14. 1126047. 10.3389/fpsyg.2023.1126047.

Simulacros de exámenes de precálculo I: Una estrategia efectiva para estudiantes de primer semestre

Luis **Cáceres**
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez
Puerto Rico
luis.caceres1@upr.edu
Patrick **Gonzales**
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez
Puerto Rico
patrick.gonzales@upr.edu
Julián **Jiménez**
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez
Puerto Rico
julian.jimenez2@upr.edu
Yeison **Rodríguez**
Universidad de Puerto Rico, Recinto de Mayagüez
Puerto Rico
yeisonosvaldo.rodriguez@upr.edu

Resumen

La alta tasa de fracaso en los cursos de precálculo es un problema para las instituciones educativas de educación superior y especialmente para los mismos estudiantes. Se ha documentado que el desempeño en el primer examen de estos cursos es clave para que el estudiante termine el curso satisfactoriamente e inclusive para lograr terminar la carrera universitaria. Una estrategia efectiva de estudio y para bajar la ansiedad del estudiante es ofrecer exámenes de simulacro. La utilidad de estos exámenes se magnifica cuando se ofrecen para el primer examen del primer curso universitario de Matemáticas. En este trabajo se presentan los resultados del ofrecimiento de simulacros en el curso de Precálculo I de la Universidad de Puerto Rico en Mayagüez. Los estudiantes presentaron exámenes de simulacro, recibieron sus exámenes corregidos y a la misma vez recibieron las soluciones correctas. Todo esto sucede unos días antes de la fecha del examen real. Una encuesta de satisfacción y las notas de los estudiantes participantes y los no participantes fueron analizadas. Los resultados del análisis estadístico se presentan en este trabajo.

Palabras clave: Exámenes de simulacro; Práctica deliberada; Precálculo; Universidad de Puerto Rico.

Introducción

Este estudio está enmarcado en la teoría de la práctica deliberada que pretende introducir técnicas de aprendizaje que repitan y analicen una actividad con el propósito de mejorarla (Ericsson et al., 1993). La transición de la escuela superior a la vida universitaria representa un acontecimiento trascendental en la vida de los estudiantes, marcado por nuevos retos académicos y adaptaciones a un entorno académico más exigente (Manzano-Soto y Roldán-Morales, 2015). Por su parte, las matemáticas, se destacan como un área particularmente desafiante donde la lógica y resolución de problemas son competencias primordiales. La importancia de una base sólida en matemáticas es clave no sólo para pasar una clase sino para tener éxito en la vida universitaria. Los estudiantes que carecen de habilidades fundamentales en Matemáticas enfrentan mayores dificultades para adaptarse a este nuevo entorno.

El propósito central de este estudio alineado a lo que sugiere Patterson et al., (2019), es evaluar cómo los exámenes de simulacro pueden afectar las tasas de éxito en el curso de Precálculo I. Se investiga la correlación entre la participación en simulacros y las tasas de aprobación y reprobación, con la intención de identificar prácticas que puedan conducir a una mejora significativa en el rendimiento de los estudiantes. Esta práctica se ha estudiado en varias disciplinas (Ha et al., 2023) y es estudiada en la teoría de la práctica deliberada de Ericsson (2008). La relevancia de este estudio radica en su potencial para transformar las prácticas de enseñanza y evaluación en matemáticas. Al comprender la eficacia de los exámenes de simulacro, los educadores pueden desarrollar estrategias más informadas que no solo preparan a los estudiantes para los exámenes, sino que también fortalezcan su comprensión conceptual y habilidades de resolución de problemas.

La evaluación del aprendizaje estudiantil, especialmente en disciplinas estructuradas como las matemáticas, suele realizarse mediante exámenes escritos. No obstante, el carácter introvertido de muchos estudiantes, que tienden a no compartir abiertamente sus dudas, puede oscurecer una evaluación anticipada de su comprensión. Aquí es donde los exámenes de simulacro adquieren un valor inestimable, sirviendo como un barómetro pre-examen. Estos exámenes no solo son cruciales para practicar habilidades y conceptos matemáticos, sino que, como señala Shute (2008), también sirven para identificar brechas en el conocimiento matemático de los estudiantes, prever su rendimiento en exámenes futuros, motivarlos en sus estudios, darles una idea realista de cómo será el examen real y establecer expectativas basadas en pruebas concretas. Esta multifacética utilidad permite a los docentes abordar eficazmente las áreas de mejora en el aprendizaje, asegurando así una preparación integral para enfrentar los desafíos de los exámenes reales.

Justificación

El curso de Precálculo I está diseñado para proporcionar a los estudiantes universitarios las herramientas fundamentales en matemáticas que servirán como base para cursos más avanzados. Se centra en desarrollar la comprensión sólida de los conceptos básicos necesarios para el estudio posterior del cálculo y otras disciplinas matemáticas, se enseña como primer curso para estudiantes de la Universidad de Puerto Rico, Recinto Universitario de Mayagüez (UPRM) en la mayoría de sus programas subgraduados. En promedio 1200 estudiantes toman el curso el primer semestre, la mayoría de ellos son estudiantes de nuevo ingreso. En la UPRM, los índices de reprobación (D y F) y de estudiantes que se dan de baja de la clase (W) en los cursos de Precálculo I, para el primer semestre del año académico 2022-2023 son alarmantes pues se tiene una tasa de reprobación del 62% y para el segundo semestre del año académico 2022-2023 de igual manera son preocupantes pues tienen una tasa de reprobación del 67%. Estos porcentajes incluyen los estudiantes que obtuvieron D, F y W.

Una prueba simulada ayuda tanto al docente como al estudiante a identificar fortalezas y áreas específicas en las que se deben trabajar (Norris, 2021). Desde este punto de vista los simulacros de exámenes ayudan no solamente al estudiante a practicar las destrezas y conceptos (Alamo, 2019), sino que también ayudan al docente a identificar falencias en sus estudiantes y de esta manera puede reforzar estas debilidades antes del examen real. La actividad realizada de corregir el examen de simulacro y devolverlo al estudiante está perfectamente alineada con la teoría de la práctica deliberada de Ericsson (1993) que establece que el sujeto en estudio debe recibir evaluación formativa y retroalimentación de su desempeño.

Los hallazgos podrían proporcionar una base empírica para reformas educativas que integren los exámenes de simulacro como un componente regular de la preparación en matemáticas (Busch, 2015). Este enfoque no solo tiene el potencial de mejorar el rendimiento académico, sino también de enriquecer la experiencia de aprendizaje de los estudiantes, equipándose con las herramientas necesarias para enfrentar desafíos académicos futuros.

Metodología

El curso de Precálculo I es requisito para los estudiantes que van a tomar cursos de cálculo. El curso consta de 150 minutos de contacto directo en clase por semana. Los estudiantes participan en un laboratorio semanal de 50 minutos, donde practican y aplican los conceptos aprendidos a través de resolución de ejercicios. Los estudiantes toman tres exámenes parciales y un examen final. El curso es impartido mayormente por estudiantes graduados del Departamento de Ciencias Matemáticas de la UPRM, y todos usando el mismo libro (Cruz et al., 2014). Dado que el curso es departamental, todos los estudiantes matriculados en el curso, sin importar sección, toman el mismo examen el mismo día y a la misma hora. El examen consta de ejercicios abiertos y ejercicios de selección múltiple.

El proyecto tuvo dos etapas. Primero se realizó un proyecto piloto de simulacro para el primer examen del curso. En la segunda etapa se realizó el proyecto de simulacro en varios exámenes del curso.

Etapa 1: Proyecto piloto de simulacro

En el segundo semestre 2022-2023 fueron invitados 587 estudiantes a tomar el simulacro del primer examen parcial del curso de Precálculo I, con la participación de 251 estudiantes, como parte del proceso de evaluación. Durante esta sesión, se pusieron a prueba los conocimientos adquiridos y las habilidades de los participantes en un entorno simulado. El examen fue diseñado por el coordinador del curso, asegurando la calidad y objetivos del examen. Posteriormente, se procedió a corregir los exámenes simulacros por los mismos instructores de la clase y se proporcionó una retroalimentación detallada a los estudiantes, incluyendo la asignación de una nota que refleja su desempeño en cada uno de los ejercicios realizados. Además, se les facilitó una solución detallada del examen.

Una vez completados los simulacros y recopilados los resultados, se procedió a realizar un análisis estadístico, comenzando con un análisis descriptivo para examinar la distribución de las calificaciones y calcular medidas de resumen. Posteriormente, se evaluaron las calificaciones del examen de simulacro piloto y el primer examen real, validando los supuestos necesarios. Para algunos de estos supuestos, se utilizó el test de Anderson-Darling. Con los supuestos confirmados, se aplicó el test t para muestras dependientes, una prueba paramétrica, para comparar los promedios de ambas calificaciones. Este enfoque permitió identificar el impacto significativo del simulacro en el rendimiento académico, proporcionando información sobre su eficacia como herramienta de preparación y la comparación de las notas finales con años anteriores, obtenidas de la Oficina de Planificación, Investigación y Mejoramiento Institucional (OPIMI) de la UPRM.

Etapa 2: Proyecto de simulacro

Para los exámenes simulados del curso de Precálculo I en el primer semestre 2023-2024, se extendió una invitación a todos los estudiantes matriculados, lo que representaba un total de 1204 estudiantes invitados. De estos, 488 participaron en el simulacro para el primer examen y 424 participaron en el simulacro para el segundo examen, lo que proporcionó una muestra significativa para realizar un análisis detallado del proceso y sus resultados. Se analizaron los resultados obtenidos en ambos exámenes reales comparados con cada uno de los simulacros. Para las comparaciones, se utilizaron pruebas paramétricas y no paramétricas, dado que en algunos casos no se cumplían con los supuestos requeridos. Por último, se analizaron los resultados obtenidos en la nota final del curso, dando así un análisis abarcador de la eficacia de los simulacros. Se hizo un estudio estadístico de los resultados en los exámenes de los dos grupos de estudiantes: participantes y no participantes en los simulacros.

Se realizó una encuesta a los estudiantes del curso de Precálculo 1 para evaluar su percepción sobre los exámenes de simulacro. Se incluyeron 8 preguntas divididas en dos secciones: una para quienes participaron y otra para quienes no lo hicieron. Se analizaron la utilidad de los simulacros, el impacto en el aprendizaje y las razones de no participación.

Análisis de resultados

A continuación se presenta el análisis de los resultados de las dos etapas del proyecto. La etapa 1 corresponde al proyecto piloto de simulacro y la etapa 2 al proyecto de simulacro.

Resultados Etapa 1:

En primera instancia, se analizaron los resultados del simulacro piloto que se obtuvieron en el segundo semestre 2022-2023, para ello, se analizaron aquellos estudiantes que presentaron este simulacro y el examen real 1. Se aplicó una prueba t para muestras dependientes para verificar si el promedio de las calificaciones es mayor en el examen real 1 que en el simulacro para estos estudiantes. Se verificaron los supuestos de independencia, las medidas de un estudiante no afectan las de ningún otro; dependencia de las muestras, el mismo estudiante presentó ambas pruebas; varianza homogénea y normalidad.

La prueba realizada concluyó que (todas las pruebas fueron realizadas con un nivel de significancia de α=0.05), con un 95% de confianza las calificaciones del examen real 1 son significativamente mayores que las del simulacro. Este resultado era de esperarse dado que los estudiantes que asistieron al simulacro se beneficiaron de haber conocido el formato del examen, su dificultad, etc. Sin embargo, puede ser que esta mejora se deba a que las condiciones del examen real force a los estudiantes a un mejor desempeño. Por esta razón es necesario comparar el desempeño de los estudiantes que asistieron al simulacro con los que no asistieron al simulacro. A continuación, se presentan en la tabla, los resultados de esta comparación.

Tabla 1
Comparación de resultados simulacro piloto y examen real 1

Estudiantes invitados 587	Calificación en escala de 0 a 100			
	Frecuencia	%	Media simulacro	Media examen real 1
Asistentes simulacro piloto	244	41.6%	38.09	52.05
No asistentes al simulacro piloto	308	52.5%	no aplica	42.02
No asistentes al examen real 1	35	5.9%	no aplica	no aplica

Fuente: Datos obtenidos del curso de Precálculo I, segundo semestre 2022-2023.

La Tabla 1 muestra que los estudiantes que asistieron al simulacro obtuvieron en promedio, una mejor calificación en el examen real 1, comparado con los estudiantes que no asistieron al simulacro. Las notas de los exámenes se basan en una escala de 100 puntos.

Resultados Etapa 2:

En el primer semestre 2023-2024, se realizaron dos simulacros: el simulacro 1 antes del examen real 1 y el simulacro 2 antes del examen real 2. Esto se hizo tras observar un incremento en el promedio de las calificaciones de los exámenes después del simulacro piloto. Se analizaron las calificaciones de los estudiantes que presentaron el simulacro 1 y examen real 1, para las cuales se aplicó una prueba no paramétrica de Wilcoxon para muestras dependientes (esta prueba no paramétrica utiliza la mediana como medida de resumen en lugar de la media), dado que no se cumplió el supuesto de normalidad.

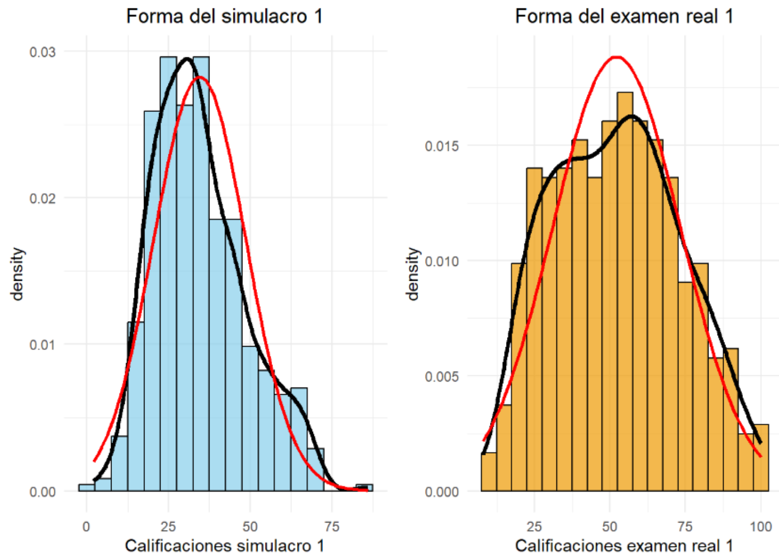


Figura 1. Histograma de las calificaciones del examen simulacro 1 y del examen real 1 (en color negro), junto con las curvas de densidad normal teóricas (en color rojo).

Sin embargo, los otros supuestos de independencia, dependencia de las muestras y varianza homogénea si se cumplieron. Para las calificaciones de los estudiantes que presentaron el simulacro 2 y examen real 2, se realizó una prueba t para muestras dependientes, ya que estas calificaciones cumplieron con el supuesto de normalidad, junto con los demás supuestos mencionados. Los resultados de las pruebas mostraron que las calificaciones del examen 1 fueron significativamente mayores que las del simulacro 1, de manera similar, las calificaciones del examen 2 fueron significativamente mayores que las del simulacro 2. Hacemos a continuación un comparativo entre los resultados de los exámenes reales de los participantes en simulacros versus los estudiantes que no participaron en los simulacros.

Tabla 2
Comparación de resultados simulacro 1-2 y examen real 1-2

Estudiantes invitados 1204	Calificación en escala de 0 a 100			
	Frecuencia	%	Media simulacro	Media examen real 1
Asistentes simulacro 1 y examen real 1	486	40.4%	35.52	52.14
No asistentes simulacro 1 y asistencia ex. real 1	691	57.3%	no aplica	40.76
Asistentes simulacro 2 y examen real 2	423	35.1%	37.69	65.98
No asistentes simulacro 2 y asistencia ex. real 2	739	61.4%	No aplica	49.59

Fuente: Datos obtenidos del curso de Precálculo I, segundo semestre 2022-2023.

La Tabla 2 muestra que los estudiantes que asistieron a los simulacros obtuvieron en promedio, una mejor calificación en el examen real respectivo.

Analizando las notas finales del curso, el 43.7% aprobó el curso (obtuvo A, B o C); esto representa una cantidad mayor a los dos semestres del año anterior, en donde las tasas de aprobación fueron del 38% y 33% respectivamente. El 66.3% de los estudiantes que aprobaron el curso asistió a al menos uno de los dos simulacros ofrecidos.

Resultados generales de la encuesta

Un total de 358 estudiantes, de los 1204 del curso, participaron en la encuesta. De esta población, el 80.4% participó en al menos un simulacro. El 64.9% tomó ambos simulacros disponibles. El 59% calificó los simulacros con la máxima puntuación de utilidad (5), y un 21.5% con (4) y el 87.2% está dispuesto a participar en simulacros de otras materias.

Los principales beneficios identificados fueron: Familiarizarse con el formato del examen (94.1%). Identificar temas de mejora (85.4%). Reconocer los temas más frecuentes (73.6%). Disminuir el estrés al practicar en un entorno realista (64.6%). Mejor comprensión de los temas (55.9%). Manejo del tiempo durante el examen (63.2%). Estos resultados se alinean con la teoría de la práctica deliberada, que propone que la mejora en cualquier habilidad requiere de actividades específicamente diseñadas para identificar y corregir áreas débiles mediante una práctica consciente y enfocada (Ericsson et al., 1993).

Por otro lado, los principales impedimentos reportados para la no participación en simulacros, incluyen principalmente: Conflictos de horario con otras actividades (77.1%). Sobrecarga académica (54.3%). Ansiedad o miedo al fracaso (27.1%). Falta de información sobre los simulacros (15.7%). Según Ericsson (2008), estos impedimentos pueden limitar significativamente la efectividad de la práctica deliberada al restringir la posibilidad de realizar actividades de manera constante y enfocada.

Conclusiones

Los simulacros son altamente valorados y efectivos como herramienta de preparación para los exámenes reales. Alineado a la teoría de la práctica deliberada (Ericsson, 2008), vemos que las actividades específicamente diseñadas, como los simulacros, permiten una mejora significativa al proporcionar retroalimentación inmediata, identificar áreas de mejora y reducir la ansiedad relacionada con la ejecución real. Se recomienda: Ofrecer simulacros en más materias, optimizar horarios para reducir conflictos con otras actividades, alinear la dificultad de los simulacros con los exámenes reales, brindar retroalimentación detallada, lo cual es fundamental según Ericsson (1993) para asegurar una práctica efectiva y mejorar la experiencia de aprendizaje.

La alta participación y la disposición a tomar más simulacros justifica su importancia como herramienta pedagógica. Mejorar su diseño y accesibilidad podría potenciar aún más su impacto en el desempeño académico. La alta disposición de los estudiantes para participar en simulacros en otras materias refleja los principios de la práctica deliberada en cuanto al interés y motivación por mejorar en diversas habilidades (Ericsson, 2004). Los simulacros ofrecen una práctica realista alineada con esta teoría, ayudando a reducir la ansiedad mediante la familiarización con el formato del examen y la práctica en condiciones similares a las reales (Ericsson, 2006), permitiéndoles gestionar mejor sus expectativas y rendimiento bajo presión.

La promoción temprana y efectiva de los simulacros es crucial. Informar a los estudiantes con anticipación sobre la programación de los simulacros permite una mejor organización personal y académica. Esto no solo aumentaría la participación, sino que también ayudaría a los estudiantes a balancear sus horarios y compromisos, asegurándose de que puedan beneficiarse de la experiencia completa de los simulacros sin comprometer otras responsabilidades académicas.

En general, hay un gran beneficio en ofrecer simulacros, pero hay que tener en cuenta el costo que implica su ofrecimiento tanto en recursos humanos, materiales, etc. que se necesitan, como el tiempo de los estudiantes, que usualmente está comprometido con una larga lista de compromisos.

Referencias y bibliografía

Alamo J. (2019). Los exámenes como herramienta de aprendizaje. https://evidenciaenlaescuela.wordpress.com/2018/08/02/los-examenes-como-herramienta-de-aprendizaje/

Busch. B. (2015). Practice makes perfect: why mock exams are great for students' brains. *The Guardian*, 3 December, 2015. https://www.theguardian.com/teacher-network/2015/dec/03/practice-makes-perfect-why-mock-exams-students-brains

Cruz E., Martínez R., Toro N. y Vásquez P. (2014). *Precálculo 1*. Universidad de Puerto Rico en Mayagüez.

Ha C., Ahmed U., Khasminsky M., Salib M. y Andrey T. (2023). Correlative and Comparative Study Assessing Use of a Mock Examination in a Pharmaceutical Calculations Course. *American Journal of Pharmaceutical Education,* 87(1), 57-63.

Ericsson, K. A., Krampe, R. T., & Tesch-Römer, C. (1993). The role of deliberate practice in the acquisition of expert performance. *Psychological Review*, 100(3), 363-406.

Ericsson, K. A. (2004). Deliberate practice and the acquisition and maintenance of expert performance in medicine and related domains. *Academic Medicine*, 79(10), S70–S81.

Ericsson, K. A. (2006). The influence of experience and deliberate practice on the development of superior expert performance. The Cambridge handbook of expertise and expert performance. Camb. Univ. Press, 685-705.

Ericsson, K. A. (2008). Deliberate practice and acquisition of expert performance: A general overview. *Academic Emergency Medicine*, 15(11), 988-994.

Manzano-Soto y Roldán-Morales (2015). Análisis de necesidades de orientación del estudiante de primer año en la Universidad Autónoma de Occidente. REOP. *Revista Española de Orientación y Psicopedagogía*, 26(3), 121-140. https://revistas.uned.es/index.php/reop/article/view/16404

Norris R. (2021). How to help your learners feel prepared for exam day. https://www.cambridgeenglish.org/blog/prepare-action-feedback-getting-the-most-out-of-mock-tests/

Patterson D., Maletsky L., Clark G. y McVey M. (2019). Practice Exam Program Impact on Student Academic Performance and Student Retention. 126th Annual Conference & Exposition.

Shute V.J., (2008). Focus on Formative Feedback. *Review of Educational Research*, vol. 78, No.1, pp. 153-189.

STEAM integrado desde una perspectiva de la didáctica de las Matemáticas[1]

Fernando **Hitt**
Université du Québec à Montréal (UQAM), y Universidad de La Laguna
Canadá
ferhitt@yahoo.com

Resumen

En este documento, analizamos el marco conceptual para el STEM integrado propuesto por Kelley & Knowles (2016), así como la relevancia de la modelización matemática según Maaß et al. (2016). Nuestra propuesta se basa en un enfoque conceptual del STEAM integrado, que incorpora las artes en consonancia con la UNESCO (2017). Este acercamiento está fundamentado en la didáctica de las matemáticas y la sostenibilidad. Además, presentamos los resultados de un estudio sobre la formación de profesores de matemáticas, con un énfasis en los procesos de modelización dentro de nuestra propuesta de enseñanza del STEAM integrado y la sostenibilidad.

Palabras clave: STEAM integrado; Matematización horizontal y vertical; Habilidades matemáticas; Competencias; Sostenibilidad; Artes; Situaciones de Investigación; Método de enseñanza ACODESA.

I. Introducción

A finales del siglo pasado, emergió un paradigma ligado a la integración de las ciencias, el proyecto STEM (Science, Technology, Engineering & Mathematics). En este siglo, ha quedado confirmada la complejidad de esa tarea, poniendo en evidencia factores ligados a los docentes como a las instituciones, que impiden un desarrollo correcto del programa STEM, tales como: carencia de parte de los docentes de conceptos fundamentales que unifican las disciplinas, falta de estrategias pedagógicas adaptadas a la enseñanza STEM, resistencia al cambio de prácticas habituales, falta de actividades ad hoc para ser utilizadas en el aula, falta de materiales dado el

[1] El autor agradece la financiación suministrada por el proyecto de investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE.

poco apoyo institucional (p. ex., Kelley & Knowles, 2016; Chalmers et al., 2017). Esta problemática ha dado lugar a otra sobre cómo implementar la integración del programa STEM. Para centrar nuestro acercamiento a la problemática, mencionemos tres proposiciones:

1. Proposición centrada en una enseñanza que combina conceptos de las diferentes ramas científicas en la resolución de problemas del mundo real. Promoción del aprendizaje en el aula (vista como comunidad de práctica) basado en proyectos que involucren conocimientos interdisciplinarios en contexto (Kelley & Knowles, 2016).
2. Promover grandes ideas transversales que involucren conceptos de diferentes disciplinas STEM, poniendo énfasis en conceptos fundamentales en una disciplina que sea relevante en las otras (Chalmers et al., 2017).
3. Desarrollo de competencias ligadas a un pensamiento crítico, resolución de problemas y situaciones del mundo real, y desarrollo de habilidades en la modelización matemática. Utilizar las matemáticas para comprender problemas sociales y científicos para una formación ciudadana informada y responsable (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013).

Dado que la 3a proposición emana de la didáctica de las matemáticas, nuestra propuesta se centra fundamentalmente en la 1a y la 3a. Iniciamos nuestra discusión abordando el proyecto europeo PRIMAS (Promoting Inquiry in Mathematics and Science Education), que promovía la integración de las didácticas de distintas ramas científicas bajo el enfoque de un aprendizaje basado en la indagación (Inquiry-Based Learning, IBL) (Maaß & Reitz-Koncebovski, 2013). El objetivo de este proyecto era fomentar un aprendizaje centrado en la exploración activa, en el que los estudiantes participaran en la formulación de preguntas, la investigación y la construcción del conocimiento, en lugar de limitarse a la memorización o a la resolución mecánica de problemas. En este contexto, la modelización matemática adquiere un papel fundamental como herramienta para alcanzar estos objetivos. Con el tiempo, este enfoque fue evolucionando hacia una propuesta al STEM integrado (Maaß et al., 2016).

Maaß et al. (2016), proponen su ejecución bajo la perspectiva de las matemáticas, bajo tres acercamientos interdisciplinarios: *(1) habilidades del siglo XXI; (2) modelización matemática y (3) educación para una ciudadanía responsable*. Estos autores señalan la importancia del reporte sobre Evaluación y Enseñanza de Habilidades del Siglo XXI (ATC21S 2009), el cual se basa en cuatro grandes categorías: *1. Formas de pensar: Creatividad, pensamiento crítico, resolución de problemas, toma de decisiones y aprendizaje; 2. Formas de trabajar: comunicación y colaboración; 3. Herramientas para trabajar: tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y alfabetización informacional; 4. Habilidades para vivir en el mundo: ciudadanía, vida y carrera y responsabilidad personal y social.*

La nueva propuesta resulta más interesante y compleja, ya que la literatura sugiere que las matemáticas suelen quedar opacadas por otras disciplinas científicas dentro del marco general del STEM (English, 2015, 2016; Hitt et al., 2022). A partir de esta perspectiva, surge una pregunta fundamental: ¿Cómo llevar esta propuesta a la práctica en el aula?

II. Marco conceptual y preguntas de investigación

Para implementar en el aula un STEAM integrado como señalado por Kelley & Knowles (2016) y Maaß et al. (2016), y considerando una comunidad de práctica y procesos de modelización, nos interesa apoyarnos en las nociones de la matematización horizontal y vertical de Freudenthal (1991); que consiste en el desarrollo de habilidades y conceptos tales como: Identificación de patrones y relaciones en contextos reales; procesos de conversión del contexto a un acercamiento matemático; uso de representaciones; formulación de preguntas dentro del contexto matemático y estimaciones y aproximaciones. Con respecto a la matematización vertical, él propone: la generalización y abstracción; la reformulación de problemas en términos avanzados; uso de propiedades avanzadas, conexión entre diferentes conceptos matemáticos, justificación y demostración.

Concerniente a los procesos de la matematización horizontal de los alumnos, estamos interesados en incluir procesos de visualización e intuición (Zimmermann & Cunningham, 1991; Fischbein, 1987). Ello, dada la emergencia natural de representaciones no necesariamente institucionalizadas, relacionadas con la creatividad, la anticipación, la predicción, y validación empírica (ver Figura 1). Con respecto a la matematización vertical, nos interesa vincularla al pensamiento crítico, sensibilidad a la contradicción, la validación y la prueba, y la posibilidad de ir más lejos en la investigación. Puesto que, la noción de modelo matemático en el aprendizaje STEAM, tiene que ver con ciencias sociales y artes, por lo tanto, el modelo debe construirse ligado al fenómeno en estudio, proporcionando una respuesta ética, artística y social. Dicha propuesta, nos interesa ponerla en práctica bajo una perspectiva sociocultural del aprendizaje.

De acuerdo a la UNESCO (2017) sobre la sostenibilidad, sería importante considerar el desarrollo de competencias como las señaladas por Brundiers, et al., (2021) y Wiek, et al., (2011) que son: Pensamiento sistémico y relacional, Anticipación (capacidad de prever escenarios futuros y consecuencias); Pensamiento normativo y ético; Estrategia; Trabajo en equipo e interdisciplinariedad; Autoconciencia. Estas competencias, nos llevó a plantearnos cómo a partir de habilidades ligadas a la matematización horizontal y vertical podríamos dichas competencias.

La complejidad de desarrollar habilidades que soporten las competencias arriba citadas, como comunidad de práctica, es otro problema que se debe enfrentar con herramientas *ad hoc*. En nuestro caso, precisamente considerando las ideas de Freudenthal (1991) sobre el descubrimiento guiado e impulsando en los estudiantes procesos de matematización en contexto, proponemos un método de enseñanza: **A**prendizaje en Colaboración, Debate científico, Autorreflexión e institucionalización (Hitt, 2007; Hitt & Quiroz, 2019).

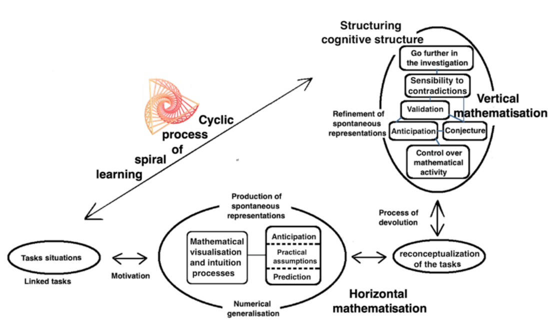


Figura 1. Matematización horizontal y vertical y proceso cíclico de un aprendizaje en espiral

Este método, fundamentado en el descubrimiento guiado (Freudenthal, 1991) y el aprendizaje en espiral (Mason, 1996), ha demostrado en experimentaciones previas su eficacia en el desarrollo de habilidades que sirven como base sólida para el fortalecimiento de competencias (ver Figura 1). En la siguiente sección, presentaremos en detalle el método ACODESA, enmarcado dentro de un enfoque sociocultural del aprendizaje.

Nuestra hipótesis de investigación plantea que, a través de una instrucción basada en el descubrimiento guiado, dentro de un enfoque sociocultural del aprendizaje, la modelización matemática funciona como un catalizador en el desarrollo de habilidades, tanto desde la perspectiva de la matematización horizontal como de la vertical, fortaleciendo así las competencias vinculadas a la sostenibilidad.

III. Método y desarrollo conceptual

Nuestra propuesta sigue características del STEAM integrado promoviendo el desarrollo de habilidades en el aula proporcionando un soporte a las competencias bajo una perspectiva de la sostenibilidad. Proponemos un método de enseñanza específico, ACODESA en cual se proponen cinco etapas bien definidas (Hitt, 2007; Hitt & Quiroz, 2019) para desarrollar en el aula: 1. Trabajo individual; 2. Trabajo en equipo; 3. Debate en gran grupo; 4. Autorreflexión (retorno al trabajo individual); 5. Institucionalización. El método ha funcionado en diferentes medios educativos en diferentes países (Cortés et al., 2016; Demir & Zengin, 2024; Hitt, 2007; Hitt & Dufour, 2021; Hitt & González-Martín, 2015; Hitt & Quiroz, 2019; Hitt et al., 2017; Hitt et al., 2023; Zengin, 2018) y recientemente bajo un acercamiento de STEAM integrado, bajo una perspectiva de la sostenibilidad (Camacho-Machín et al., 2024).

En el presente estudio, la muestra es de 19 estudiantes de un máster interesados en enseñar matemáticas a nivel secundaria y bachillerato en España. Los estudiantes han finalizado una licenciatura en matemáticas que incluye un solo curso de didáctica de las matemáticas. La experimentación se realizó en 28 horas durante un curso de didáctica de las matemáticas en el máster. Se dividió el grupo en 4 equipos de 4 personas y uno de 3.

Antes de cada actividad, el profesor introducía un contenido. Tomemos por ejemplo la 4ª actividad ligada a las artes. Se discutió el rectángulo y espiral áurea, reconstrucción de templos griegos y uso de *GeoGebra*. Bajo esta perspectiva, se analizó la obra de Botticelli "El nacimiento de venus" y el "Triángulo negro" de Kandinsky. También se presentó un proyecto comunitario sobre la preparación y ejecución de un mural en la ciudad de Montreal. Inmediatamente después se solicita a los alumnos el análisis de una obra desde un punto de vista matemático y uso de *GeoGebra*.

Cada actividad fue elaborada con preguntas eslabonadas para encausar un descubrimiento guiado (Freudenthal, 1991), promoviendo primeramente un proceso de matematización horizontal (visualización e intuición para inducir una anticipación, una predicción, una conjetura, y una validación empírica) y posteriormente bajo una matematización vertical (sensibilidad a la contradicción, prueba, planteamiento de problemas o ir más lejos en la investigación). En resumen, las cinco actividades son:

1. Tres euros que se tocan dos a dos. Calcular el área entre las tres monedas y proponer una actividad más compleja. Se solicita el uso de *GeoGebra*.
2. Encontrar los valores de x tal que $(x^2 - 5x + 5)^{x^2-9x+20} = 1$ (NCTM, 1988) y proponer una actividad más compleja para generar soluciones enteras de una ecuación similar.
3. El Oro azul. Problema de la humanidad sobre el agua potable. Una vez respondida una pregunta, se solicitó la posibilidad de proponer otra pregunta importante dentro del contexto de la sostenibilidad (adaptación del enunciado de Boucher et al., 2007, p. 77).
4. Analizar la pintura de *Theo van Doesburg intitulada "Composición aritmética"* desde una perspectiva matemática. Se solicitó una reproducción *robusta* (elementos integrados en una sola figura) utilizando *GeoGebra*.
5. Elaboración de un video y su análisis utilizando las herramientas tecnológicas de *Tracker* y *GeoGebra*. La elección del fenómeno de la vida real era libre.

IV. Resultados / conclusiones

Como ha sido señalado al final de la sección II y en la III, nos interesa analizar, primeramente, los procesos de matematización horizontal desarrollada por los estudiantes de la muestra, sobre los procesos de visualización e intuición que son el motor para la anticipación, predicción, conjetura y validación empírica; en seguida, los procesos de matematización vertical. Dado que seguimos el método de enseñanza ACODESA, la cantidad de datos es muy grande, producción individual, producción en equipo, producción en gran grupo, autorreflexión (regreso al trabajo individual), e institucionalización. En este documento, nos restringiremos a presentar un análisis descriptivo.

Con respecto a la lª actividad, todos los equipos visualizaron un triángulo equilátero utilizando los centros de las monedas como vértices. Calcularon correctamente el área y realizaron un archivo *GeoGebra*. La producción difirió en la pregunta de generalización en donde se solicitaba un problema más complejo (planteamiento de problemas y/o ir más lejos en la investigación). Los equipos 1 y 2 propusieron 4 euros tangentes dos a dos de manera a obtener un cuadrado (siendo *un ejercicio* una vez resuelto el problema con 3 monedas). El equipo 3 propuso 10 monedas en forma piramidal y cálculo del volumen entre las 10 monedas (*ejercicio más elaborado*). El equipo 4 propuso 4 monedas diferentes; el enunciado propone un *problema más complejo*. El equipo 5, propuso el ir añadiendo euros tangentes e ir calculando el área para n-euros, *enunciado de un problema complejo* (triángulo equilátero, cuadrado, pentágono, etc.) Todos los equipos solamente propusieron el nuevo enunciado sin resolverlo ya sea *ejercicio* y/o *problema*.

Respecto a la resolución de la ecuación $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5})^{\boldsymbol{x^2-9x+20}} = \mathbf{1}$, utilizando *GeoGebra*, visualmente solo se pueden observar tres soluciones {1, 4, 5} y no las soluciones aisladas {2, 3}. Nos interesaba conocer el acercamiento visual y su resolución algebraica ligadas a la sensibilidad a la contradicción. Los equipos 1, 2 y 4, encontraron las raíces {1, 4, 5}, resolviendo algebraicamente $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5}) = \mathbf{1}$ y $\boldsymbol{x^2 - 9x + 20 = 0}$, cuando $(\boldsymbol{x^2 - 5x + 5}) \neq \mathbf{1}$ y su representación gráfica. El equipo 3, resolvió gráficamente considerando los polinomios cuadráticos; visualmente mostraron las intersecciones de los polinomios, cometiendo un error al proponer las soluciones {4, 4.5, 5}, no se percataron su contradicción con su proceso algebraico. El equipo 5, obtuvo {1, 2, 3, 4, 5}, mencionando que *GeoGebra* no muestra las soluciones {2, 3}.

La respuesta a la pregunta sobre la generalización de la 2ª actividad, el equipo 1 y 2 propusieron considerar $f(x)^{g(x)} = 1$ y visualizar las soluciones a $f(x) - 1 = 0$ y $g(x) = 0$ (no propusieron $f(x) = -1$ y $g(x) = número\ par$). El equipo 3, menciona que partiendo de $p(x)^{q(x)} = 1$, donde p y q son polinomios de cualquier grado, se deben presentar los polinomios siguiendo la estrategia de factorizar con respecto a las raíces; este equipo tiene ideas para ir más lejos en su investigación, sin embargo, recordemos que ellos propusieron las soluciones {4, 4.5, 5}, sin percatarse de la contradicción; además, no consideraron $f(x) = -1$ y $g(x) = número\ par$. El equipo 4 presentó la generalización siguiente: "$p(x)^{q(x)} = 1 \Leftrightarrow p(x) = 1 \vee q(x) = 0$; mencionan que para garantizar las soluciones enteras bastaría que $q(x)$ se anule sólo en valores enteros, es decir, que sea de la forma $q(x) = a(x - b)(x - c),\ b, c\ \in \mathbb{Z}$, y que $p(x)$ pase por unos puntos de la forma $(a, 1), (b, 1), a, b \in \mathbb{Z}$". Hay errores en su formulación; además no consideran el caso $f(x) = -1$ y $g(x) = número\ par$. Sólo el equipo 5 propuso los polinomios factorizados y dividir la búsqueda en tres condiciones.

La situación del "Oro azul" (agua potable) era más compleja en el sentido de que no es explícito el modelo algebraico a utilizar. Por ejemplo, una situación de emergencia para la humanidad con un modelo lineal se obtiene con una población de 11.4 miles de millones de habitantes, o de 15.57 (exponencial) o de 27.27 (de variación inversa). Nos interesaba medir si los estudiantes, serían capaces de plantearse la pregunta: ¿Cuándo la población mundial llegará a esa cantidad de habitantes? En Internet se pueden encontrar datos sobre el crecimiento poblacional y utilizar la función logística para predecir una fecha crítica. Para cada modelo, se obtiene: 2039 como año crítico (lineal); 2055 (exponencial); 2077 (de variación inversa). El equipo 1 presentó dos soluciones contradictorias sin justificar el año crítico (2043 y 2263). El equipo 2, propuso un único resultado: 27.27 miles de millones. Una persona del equipo 3, mencionó que en Internet encontró que la crisis de agua potable sería en el 2376 sin justificación. En esta pregunta abierta sobre el agua potable, la dispersión fue muy grande entre los equipos y no funcionaron como comunidad de práctica (Kelley & Knowles, 2016; Wegner, 1998); solamente uno de los cinco equipos proporcionó una respuesta única como consenso (27.27 miles de millones), pero no fue más lejos. El resto de los miembros de los otros equipos no pareció afectarles la contradicción al proporcionar diferentes respuestas. La competencia sobre prever escenarios futuros (Brundiers et al., 2021; Weik et al., 2011) es muy débil en la muestra.

La reproducción de la obra "Composición aritmética", visualmente sugiere la proporcionalidad y la homotecia con el uso de *GeoGebra*. Hubo 15 construcciones correctas, tres incorrectas y una persona que no entregó trabajo. Entre las 15 construcciones correctas, 14 utilizaron proporcionalidad simple y solamente una propuso homotecia. De entre las 15 construcciones correctas, 9 realizaron una figura robusta (que se pudiera mover como una sola pieza). De entre las respuestas correctas, solo 2 respetaron los colores originales de la obra. La construcción de las 18 personas participantes en esta actividad (una no entregó la tarea), oscila entre 15 pasos mínimo en la construcción con *GeoGebra* hasta 118. Solamente 7 producciones se realizaron en menos de 40 pasos. La mayoría no realizó una optimización del número de pasos en la construcción. En esta actividad, la visualización e intuición jugaron un buen papel desde el punto de vista matemático, pero no estético. La población en general no fue sensible (salvo dos estudiantes) a los colores utilizados por el artista.

La 5ª actividad era la producción libre de un video ligado a un fenómeno de la vida real, y analizarlo con *Tracker* (toma de datos) y con *GeoGebra* (para su tratamiento). El equipo 1 propuso un video de caída libre y tomaron datos incluyendo el rebote de un objeto; ello los llevó a proponer en *GeoGebra* un polinomio de 3er grado y no el modelo de caída libre en física. El equipo 2, tomó un video de Internet sobre la cicloide, analizando con profundidad las propiedades de la Braquistócrona y Tautócrona. El equipo 3 realizó un video muy simple sobre un péndulo, pero realizó un análisis profundo sobre el péndulo de Foucault y el movimiento de la Tierra, analizando con detalle la simulación de este fenómeno en diferentes museos en España. El equipo 4 realizó su propio video en un gimnasio sobre el levantamiento de pesas. El equipo 5 buscó en Internet un video sobre dos bolas colgando y chocando; analizan una de las bolas considerando la variable tiempo contra altura. Podemos decir que el equipo que analizó la Braquistócrona consideró un proyecto a la manera que la señalan Kelley & Knowles (2016) y trabajaron como una comunidad de práctica. El equipo que realizó su propio video levantando pesas muestra una actividad ligada a un deporte y promoción de salud física. Este equipo desarrolló un pensamiento normativo en el sentido de Wiek et al., (2011).

Analizando las características de una comunidad de práctica bajo el STEM integrado (Kelley & Knowles, 2016; Wegner, 1998) en cada equipo, podemos decir que no fueron muy sólidas. Los procesos de modelización matemática (según Maaß et al., 2016) fueron en general más o menos eficientes; sin embargo, bajo una perspectiva de la sostenibilidad, hubo menos progreso en lo general. Con más detalle, podemos decir que el líder del grupo 1, tenía demasiada influencia en sus otros dos miembros. En el equipo 2, dos lideres se perfilaron complementándose uno al otro e influyendo armónicamente en las decisiones de grupo. En el equipo 3, hubo dos líderes, sin mucha comunicación entre ellos, provocando ruptura más que adhesión. En el equipo 4 no había líder, y había más dispersión que adhesión. En el equipo 5 la intervención de sus miembros era regular, sobre todo dos de entre ellos, la comunicación era fluida en este equipo.

Los resultados de la 3ª actividad sobre el agua potable (Oro azul), trajo consigo mucha diversidad de respuestas (salvo en un equipo), representando un problema desde el punto de vista de la contradicción. En este caso, no se trata de una contradicción lógica ligada a las matemáticas, sino que la búsqueda de un modelo más adecuado a la situación no fue concebida por los cuatro equipos señalados. Estos resultados nos muestran la importancia de entender esta noción que la hemos nombrado “contradicción cognitiva”, bajo una perspectiva de la sostenibilidad.

Referencias y bibliografía

Boucher, C., Marotte, L., & Coupal, M. (2007). Intersection mathématique. 2e cycle (1re année). Montréal Chenelière éducation.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. 1970-1990, In Balacheff, N., Cooper, M., Sutherland, R. And Warfield, V. (Eds. and Trans.) Dordrecht: Kluwer.

Brundiers, K., Barth, M., Cebrián, G., Cohen, M., Díaz, L., Doucette-Remington, S., Dripps, W., Habron, G., Harré, N., Jarchow, M., Losch, K., Michel, J., Mochizuki, Y., Rieckmann, M., Parnell, R., Walker, P., & Zint, M. (2021). Key competencies in sustainability in higher education—toward an agreed-upon reference framework. *Sustain Sci*, 16, 13–29. https://doi.org/10.1007/s11625-020-00838-2

Camacho-Machín, M., Hitt, F., & Hernández, A. (2024). El rol de la modelización matemática y el uso de la tecnología en la formulación de problemas en una perspectiva de integración STEM en la formación de profesores de educación secundaria. *Formación del Profesorado e Investigación en Educación Matemática*, XVI, 11-40.

Cortés, C., Hitt, F., & Saboya, M. (2016). Pensamiento aritmético-algebraico a través de un espacio de trabajo matemático en un ambiente de papel, lápiz y tecnología en la escuela secundaria. *Bolema Río Claro (SP)*, 30(54), 240-264.

Chalmers, Ch., Carter, M-L., Cooper, T., & Nason, R. (2017). Implementing big ideas to advance the teaching and learning of science, technology, engineering and mathematics (STEM). *International Journal of STEM Education*.

Demir, M., & Zengin, Y. (2024). How do structural and process aspects of mathematical reasoning support each other through the integration of *GeoGebra* and the ACODESA Method? *Digital Experiences in Mathematics Education*, 10, 514-542.

English, L. (2015). STEM: challenges and opportunities for mathematics education. In K. Beswick, T. Muir & J. Welles (eds.), *Proceedings of PME39*, v. 1, 3-18. July 2015, Hobart, Australia.

English, L. (2016). STEM education K-12: perspectives on integration. *International Journal of STEM Education*. DOI 10.1186/s40594-016-0036-1.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics. An educational approach.* D. Reidel Publishing Company. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group.

Freudenthal, H. (1991). *Revisiting Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer.

Hitt, F. (2007). Utilisation de calculatrices symboliques dans le cadre d'une méthode d'apprentissage collaboratif, de débat scientifique et d'auto-réflexion. In M. Baron, D. Guin et L. Trouche (Éds.), *Environnements informatisés et ressources numériques pour l'apprentissage. Conception et usages, regards croisés* (pp. 65-88). Paris : Hermès.

Hitt, F., & Dufour, S. (2021). Introduction to calculus through an open-ended task in the context of speed: Representations and actions by students in action. *ZDM – Mathematics Education*. 53, 635-647. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01258-x

Hitt, F., & González-Martín, A.S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (Collaborative learning, Scientific debate and Self-reflexion) method. *Educational Studies in Mathematics*, *88*(2), 201-219.

Hitt, F., Saboya, M., & Cortés, C. (2017). Rupture or continuity: the arithmetico-algebraic thinking as an alternative in a modelling process in a paper and pencil and technology environment. *Educational Studies in Mathematics*, *94*(1), 97-116.

Hitt, F., Soto, J-L, Romero-Felix, C-F., & Dávila-Araiza, M-T. (2022). Reflection on the STEM integration between concepts of kinematics and calculus. *Far East Journal of Mathematical Mathematics Education*, 23, 57-96.

Hitt, F., Quiroz, S., Saboya, M., & Lupiáñez, J-L. (2023). Une approche socioculturelle pour la construction d'habiletés de généralisation arithmético-algébriques dans les écoles québécoises et mexicaines. *Educación Matemática*, 35(3), 112-150.

Kelley, T.R., & Knowles, J.G. (2016). A conceptual framework for integrated STEM education. *International Journal of STEM Education*, 3, 1-11. Open access.

Maaß, K., & Reitz-Koncebovski K. (Eds). (2013). PRIMAS. Promoting inquiry in mathematics and science education across Europe. Freiburg: European Union and Seventh Framework Programme.

Maaß, K., Geiger, V., Romero-Ariza M., & Goos M. (2016). *ZDM-Mathematics Education*, 51, 869-884.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. In N. Bernarz, C. Kieran, & L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrech: Kluwer Academic Publishers.

National Council of Teachers of Mathematics. (1988). Can your students of algebra solve this? In *The ideas of algebra, K-12, Yearbook 1998*, NCTM, Reston, VA, USA.

Poincaré, H. (1902). La science et l'hypothèse. Paris : Flammarion.

Poincaré, H. (1905). La valeur de la science. Paris : Flammarion.

Prusak, N., Hershkowits R., & Schwarz, B. (2013). Conceptual learning in a principled design problem solving environment. *Research in Mathematics Education*, 15(3), pp. 266-285.

UNESCO. (2017). Education for Sustainable Development Goals: Learning Objectives, 1st ed.; UNESCO: Paris, France.

Wenger, E. (1998). *Communities of practice. Learning, meaning, and identity*. Cambridge: Cambridge University Press.

Wiek, A., Withycombe, L., & Redman, CL. (2011) Key competencies in sustainability: a reference framework for academic program development. *Sustainability Science*, 6, 203–218. https://link.springer.com/article/10.1007/s11625-011-0132-6

Zengin, Y. (2018). Examination of the constructed dynamic bridge between the concepts of differential and derivative with the integration of GeoGebra and the ACODESA method. *Educational Studies in Mathematics*, 99(3), 311–333. https:// doi. org/ 10. 1007/ s10649- 018- 9832-5

Zimmermann, W., & Cunningham, S. (Eds). (1991). *Visualization in Teaching and Learning Mathematics*. *19*, USA : MAA Series.

Superando obstáculos matemáticos: La naturaleza abstracta de los números irracionales y el concepto de infinito

Andrea **Serna** Rivera
Universidad del Valle, Facultad de Educación y Pedagogía
Colombia
andrea.serna@correounivalle.edu.co

Introducción

Esta investigación aborda las dificultades de los estudiantes con números irracionales y el concepto de infinito en matemáticas, proponiendo estrategias como el uso del contexto histórico, para mejorar su comprensión. Se propuso emplear la Teoría de los Obstáculos Cognitivos (Brousseau, 1983) para identificar concepciones previas erróneas como barreras que bloquean el aprendizaje de los irracionales y el infinito. Entre estas barreras, se pudo identificar: la confusión entre un número irracional y su aproximación decimal, la concepción de que los irracionales "no están completos" por tener infinitas cifras y la dificultad para reconocer irracionales más allá de los comúnmente enseñados, cómo π y $\sqrt{2}$. Se sugiere una propuesta didáctica que incluya el infinito, la historia de los números irracionales, y fomente el pensamiento crítico, con el docente como guía para facilitar un aprendizaje colaborativo y profundo.

Antecedentes

Este estudio se aborda de acuerdo con las dificultades identificadas de los estudiantes de octavo grado para comprender los números irracionales y el concepto de infinito, atribuidas a su naturaleza abstracta y la falta de una base conceptual sólida. Se fundamenta en la Teoría de los Obstáculos Cognitivos de Brousseau (1983), que identifica concepciones erróneas previas como barreras para el aprendizaje. Ejemplo de ello y lo experimentado en esta intervención lo encontramos en los documentos de Crespo (2009) y Sánchez y Valdivé (2011), donde se encontró que los estudiantes de secundaria no comprenden plenamente los irracionales y presentan errores como confundir los irracionales y su aproximación, dados por los esquemas conceptuales erróneos que a lo largo de la evolución histórica del concepto de irracional y su enseñanza didáctica ha generado estos obstáculos. Por otro lado, Herrera (2010) describe cómo los conflictos cognitivos en el aprendizaje de los alumnos al introducir los irracionales pueden estar mediados por las prácticas del modo en que se introducen y trabajan los irracionales en el aula, más que de una simple ignorancia del estudiante. Por lo tanto, estas investigaciones resaltan la importancia de un enfoque histórico-contextual en lugar de aprender fórmulas de memoria, se busca que los estudiantes entiendan la lógica subyacente.

Metodología

La metodología de enseñanza de la intervención fue de tipo experimental en un aula de 12 estudiantes de octavo grado (13– 14 años), en un contexto de clase regular. Su diseño partió del enfoque histórico donde gradualmente se introdujeron los conceptos, integrando aspectos en su mayoría geométricos, pero sin dejar al lado otros aspectos que pudieron surgir en el camino. Por ejemplo, se exploró la raíz cuadrada de 2 mediante un triángulo isósceles de lados 1 y se representaron irracionales en la recta numérica, tal como sugiere el análisis de Crespo (2009) sobre las dificultades en el concepto de irracional. Además, se emplearon recursos didácticos visuales como videos educativos que narran la historia de los irracionales y animaciones sobre expansiones decimales infinitas, vinculándolos con problemas elementales de medida. Por último, se llevaron a cabo actividades interactivas que incluyeron debates guiados, donde se buscaba construir un ambiente de discusión y reflexión, que evidenciara una comprensión de lo visto en las anteriores clases, además, se retomaron aspectos de explicación y ejercicios que llevaron a una retroalimentación de los conceptos. Se buscó crear un ambiente de aprendizaje dinámico y participativo, fomentando la exploración, reflexión y diálogo entre estudiantes, con el acompañamiento del docente para promover un aprendizaje significativo.

Resultados

La implementación de la estrategia didáctica propuesta ha mostrado impactos positivos y específicos en el aprendizaje de los estudiantes. En primer lugar, la discusión histórica y visual del origen de los irracionales permitió que los estudiantes identificaran la diferencia entre un número irracional real y su aproximación decimal, tal como lo señalan Sánchez y Valdivé (2011) al encontrar que los alumnos a veces confunden irracionales con aproximaciones cercanas. Además, las intervenciones grupales mostraron que los alumnos ahora argumentan lógicamente, esto de acuerdo con que por ejemplo, explicaron que no es correcto “detener” los decimales de π o $\sqrt{2}$ en un punto arbitrario, reconociendo la necesidad de procesos infinitos. Estos avances confirman que la estrategia histórica y contextual ayuda a reducir errores conceptuales comunes y a superar obstáculos cognitivos en estos temas.

Conclusiones

En conclusión, la estrategia didáctica implementada, que combina la contextualización histórica de los números irracionales con la clarificación del concepto de infinito, ha demostrado ser efectiva para superar obstáculos cognitivos en los estudiantes. Dado que los resultados sugieren que introducir el origen histórico de los irracionales y estimular la reflexión crítica sobre el infinito enriquece el aprendizaje, en línea con lo indicado por estudios previos. Asimismo, el ambiente dinámico y participativo ha permitido a los estudiantes construir su conocimiento de manera activa, mejorando su entendimiento de las matemáticas y desarrollando habilidades cognitivas. En conclusión, esta intervención ha facilitado la comprensión de estos conceptos, evitando malentendidos comunes y fomentado el pensamiento crítico, logrando un aprendizaje más profundo y significativo

Referencias y bibliografía

Brousseau, G. (1983). *Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 165-198. Traducción al español: César Delgado G.

Crespo, C. (2009). Acerca de la comprensión y significado de los números irracionales en el aula de matemática. *Premisa*, 41, 21–30.

Herrera, M. L. (2010). Obstáculos, dificultades y errores en el aprendizaje de los números irracionales. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (pp. 247–255). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Sánchez, J., & Valdivé, C. (2011). El número irracional: Un punto de vista epistemológico con interés didáctico. *Premisa*, 16(62), 36–48.

Talleres para el desarrollo de habilidades matemáticas en alumnos de bachillerato

Tania Azucena **Chicalote**-Jiménez
Facultad de Ciencias, Universidad Nacional Autónoma de México
México
tazjimenez@ciencias.unam.mx

Resumen

El éxito o fracaso de los estudiantes en la transición del bachillerato al nivel superior en Matemáticas está estrechamente relacionado con la calidad de aprendizajes, experiencias y habilidades matemáticas desarrollados en el nivel medio superior. Con el propósito de promover la incorporación de ambientes de aprendizaje activos que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas, esta investigación exploratoria busca contribuir al diseño e implementación de metodologías de enseñanza activa, como los talleres para el desarrollo de habilidades matemáticas. Los resultados sugieren que la incorporación de estrategias y actividades didácticas como las propuestas, fomenta en los estudiantes una actitud de confianza ante la resolución de problemas matemáticos. Asimismo, se favorece el desarrollo de habilidades como el razonamiento matemático, la representación y construcción de modelos y patrones, y la comunicación de ideas y resultados matemáticos. Estas habilidades, en conjunto, les permitirán construir conocimientos matemáticos de manera significativa.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación preuniversitaria; Enseñanza participativa; Enseñanza virtual sincrónica; Investigación exploratoria; Matemáticas; Mediación pedagógica; México; Zoom.

Definición y relevancia del problema

La transición del bachillerato a la licenciatura en Matemáticas representa un cambio importante que conlleva una serie de conflictos y una crisis inevitable para los estudiantes (Clark y Lovric, 2010). Durante este periodo, los estudiantes deben adaptarse en periodos relativamente cortos a diferentes formas de razonar y actuar con respecto de las rutinas que aprendieron y desarrollaron en bachillerato. Diversas investigaciones, muestran que un factor, que contribuye al éxito o fracaso durante esta transición, concierne a la calidad de aprendizajes y experiencias desarrolladas en el nivel medio superior (Adelman, 2006; Di Martino y Gregorio, 2019).

Al respecto, las estadísticas de la OCDE muestran que los jóvenes mexicanos de 15 años de edad tienen un rezago de por lo menos dos años en el área de Matemáticas con respecto de sus pares de otros países que obtuvieron el puntaje promedio en las pruebas PISA (OECD, 2019). Por otra parte, en las pruebas diagnósticas de ingreso a la licenciatura se aprecia que los alumnos que ingresan al área de las Ciencias físico-matemáticas y de las ingenierías muestran un bajo rendimiento en el área de las Matemáticas (CODEIC-UNAM, 2020, p.56).

Dichas deficiencias no se dan únicamente por la mala adquisición de los conceptos matemáticos en uno u otro nivel educativo, sino también por la integración de metodologías de enseñanza basadas en la exposición y la presentación de contenidos rígidos y segmentados que dejan de lado el desarrollo de habilidades matemáticas como: argumentación, razonamiento lógico matemático, pensamiento deductivo, la representación y resolución de problemas, y la habilidad de comunicación en Matemáticas, entre otras. Esto no sólo genera un rezago escolar en el nivel medio superior, sino que dificulta de sobremanera el ingreso al nivel superior, pues los estudiantes ingresan con pocas habilidades matemáticas (OECD, 2019; CODEIC-UNAM, 2020).

Dado esto, es imprescindible promover medios y actividades que permitan a los estudiantes desarrollar estrategias y habilidades matemáticas dentro de su formación académica y que favorezcan la creación de puentes entre la educación de uno y otro nivel. Al desarrollar habilidades matemáticas como razonamiento matemático, el cuestionamiento inquisitivo, la exploración, la argumentación, la representación y la comunicación en Matemáticas, los estudiantes tendrán un mejor desempeño en los diferentes niveles académicos y en diversos contextos científicos y personales, con lo cual generarán una actitud de mayor confianza ante la resolución de problemas y su autopercepción como futuros profesionales.

Esta investigación exploratoria pretende contribuir, por medio de una propuesta didáctica que busca incorporar nuevas metodologías y actividades de enseñanza en modalidad virtual, en la resolución de las siguientes problemáticas: 1) Deficiencias en habilidades matemáticas por parte de los alumnos de bachillerato, lo cual tiene impacto tanto en el aspecto actitudinal (falta de motivación y de sentido ante lo que se aprende) como en el académico; 2) Falta de vinculación entre el tipo de contenidos estudiados y las habilidades desarrolladas dentro del bachillerato y aquellos aspectos formativos que son básicos para continuar con una formación superior.

Referencial teórico

El desarrollo de la propuesta presentada toma como marco conceptual, por un lado, estudios relacionados con la definición del término habilidad matemática o competencia matemática, cuando se les considera como sinónimos dentro de la literatura, con el fin de establecer los objetivos de enseñanza-aprendizaje que se tuvieron para y dentro de los talleres propuestos. Además, se recuperan propuestas pedagógicas que consideran al taller como una metodología de enseñanza, con el fin de establecer los aspectos metodológicos a considerar para el diseño de los talleres de esta propuesta.

Considerando las acepciones brindadas por el diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, se define un taller como un lugar o escuela en la que se trabaja una obra relativa a las ciencias o las artes de forma colaborativa y en conjunto de un maestro.

Gutiérez (2009) establece que en el ámbito pedagógico el taller es una forma de enseñar y sobre todo de aprender, mediante la realización de actividades que en gran medida se llevan a cabo conjuntamente y con la guía de un maestro. La autora afirma que esta metodología activa puede desarrollar la habilidad de pensar de manera responsable y de emitir juicios apropiados acerca de lo que se ve o se oye, pues interactúan los procesos de comunicación como parte de un proceso centrado en la argumentación. En el mismo sentido, Uriarte (2014) establece que los talleres favorecen la integración en el proceso de aprendizaje de la práctica y la teoría sin priorizar alguna en particular pues ambas son valiosas para la construcción de conocimientos.

Por otra parte, Karsenty (2020) afirma que el término habilidad matemática dentro de la Educación Matemática adquiere diversos matices. Krutetskii (1976) sugirió que la habilidad Matemática está compuesta por habilidades como: usar lenguaje formal y operar dentro de estructuras formales, generalizar, pensar de manera lógico-secuencial, realizar simplificaciones (atajos) al resolver problemas, cambiar de dirección en el pensamiento, mostrar flexibilidad entre procesos mentales y recordar conceptos y generalizaciones previamente adquiridos.

Vilkomir y O'Donoghue (2009, tomado de Karsenty, 2020) sugieren, a partir del trabajo de Krutetskii, que es necesario propiciar un entorno e instrucción adecuados para que los estudiantes desarrollen las componentes de la habilidad matemática, y con ello una mentalidad matemática (Krutetskii, 1976), en la que se integren una percepción del entorno a través de relaciones matemáticas y lógicas, el interés por resolver problemas matemáticos desafiantes y una buena concentración durante las actividades matemáticas.

De acuerdo con Karsenty (2020), las principales características que se presentan al tener un bajo dominio de habilidades matemáticas son dificultades para establecer conexiones entre los elementos matemáticos de un problema; incapacidad para generalizar a partir de atributos matemáticos esenciales, aún cuando se recibe ayuda o después de realizar una serie de ejercicios; la falta de capacidad para deducir algo a partir de otras cosas o de encontrar el principio común de una serie de números; evitar el uso simbólico de notaciones matemáticas; y la memoria a corto plazo de los procedimientos matemáticos.

Niss (2003, tomado de Kilpatrick, 2020) presenta un marco de competencias matemáticas en el que se establecen ocho tipos de competencias a desarrollar: 1) Pensar matemáticamente, 2) Plantear y resolver problemas matemáticos, 3) modelar matemáticamente, 4) Razonamiento matemático, 5) Representar entidades matemáticas, 6) Manejar símbolos y formalismos matemáticos, 7) Comunicarse en, con y sobre las Matemáticas, 8) Utilizar ayudas y herramientas. Las cuatro primeras se refieren a la habilidad (capacidad) de plantear y responder preguntas en y con las Matemáticas, las últimas cuatro se refieren a la habilidad (capacidad) de afrontar y utilizar el lenguaje y las herramientas matemáticas. Niss (2003, tomado de Kilpatrick, 2020) establece que cada una de estas competencias tiene un lado analítico (referente a la comprensión e indagación de las Matemáticas) y otro productivo (referente a aplicar las Matemáticas).

Desde el marco teórico de la Resolución de Problemas, Polya establece que la resolución de problemas es una habilidad matemática que los estudiantes desarrollan o aprenden a través de la observación o imitación de cómo otros (incluyendo profesores y pares) resuelven problemas y por medio de la práctica de resolver problemas. Desde este marco, se enfatiza la necesidad de que los estudiantes desarrollen estrategias como identificar conceptos claves, buscar patrones, considerar casos especiales, examinar el significado de procedimientos y operaciones, establecer conexiones, interpretar soluciones, examinar diferentes enfoques para resolver problemas y generalizar soluciones, entre otras (Santos-Trigo, 2020).

Así, considerando estos marcos de referencia se establecieron como habilidades a ser desarrolladas por parte de los estudiantes durante la realización de los talleres las siguientes:

Tabla 1
Habilidades por desarrollar dentro de los talleres

Habilidad a desarollar	Estrategias a desarrollar
Resolución de problemas	Identificar conceptos claves Buscar patrones Considerar casos especiales
Razonamiento matemático	Establecer conexiones Interpretar soluciones Generalizar soluciones
Flexibilidad de pensamiento	Examinar diferentes enfoques para resolver problemas
Manejar símbolos matemáticos	Usar notación matemática
Comunicarse en, con y sobre las Matemáticas	Explicar el significado de procedimientos Describir las soluciones y los procesos de solución

Fuente: elaboración propia. 2025.

Con esto en mente, partimos de que el diseño e implementación de los talleres propuestos brindará a los estudiantes la oportunidad de explorar y desarrollar sus habilidades matemáticas al mismo tiempo que construye métodos de resolución y conocimientos en conjunto de sus pares y con la guía del facilitador (profesor).

Método y desarrollo conceptual

Considerando los aspectos teóricos antes mencionados se diseñó una serie de talleres con el objetivo general de promover el desarrollo e implementación de metodologías de enseñanza, diferentes a la expositiva o tradicional, como estrategia didáctica que favorezcan el desarrollo de habilidades matemáticas en estudiantes de bachillerato.

Aspectos metodológicos para el diseño de los talleres

El diseño de cada uno de los talleres considera los siguientes aspectos:

- Problema inicial: Se plantea un problema abierto que involucre una situación recreativa o interesante para los participantes.

- Con el fin de que los participantes resuelvan el problema se proponen actividades que fomentan la construcción colaborativa de soluciones, el intercambio oral de ideas y la comunicación escrita de resultados y procedimientos matemáticos.
- Cada taller se organiza en tres fases: 1) Apertura: se presentan la dinámica del taller, facilitadores y participantes para promover un ambiente de apertura y confianza, de igual forma se presenta la actividad o problema detonante; 2) Desarrollo: se trabajan habilidades como la formulación de conjeturas, la resolución de problemas, la generación de argumentos, la comunicación matemática escrita y oral, y la construcción de modelos y representaciones matemáticos. Se refuerzan conocimientos a través de preguntas guía y realimentación; 3) Cierre: se realiza conclusión el trabajo realizado por las y los estudiantes, para ello se proponen actividades de reflexión o extensión sobre lo realizado antes.
- Se enfatiza el rol del profesor como guía y facilitador de recursos, cuestionamientos y realimentación para el estudiante, minimizando su papel como expositor.
- Para cada uno de los talleres diseñados se planteó una trayectoría hipotética de cuestionamientos para orientar a los estudiantes en sus razonamientos, evaluar estrategias de solución y analizar soluciones.
- El diseño se realizó de manera colaborativa con estudiantes de la licenciatura en Matemáticas que participaron en el Seminario sobre enseñanza de las Matemáticas impartido por la autora.
- Cada taller tiene una duración de dos horas. Cabe destacar que en el diseño del primer ciclo de implementación se consideró una modalidad de trabajo presencial, mientras que para el segundo ciclo se adaptaron para una modalidad virtual sincrónica.

Con el fin de ejemplificar los aspectos anteriores y debido al espacio disponible se describe y analiza únicamente el taller titulado πt-Goras (Pit-Goras). Dicho taller se implementó en modalidad virtual sincrónica.

Objetivo general del taller: Las y los participantes construirán ternas pitagóricas por medio de triángulos rectángulos y relacionarán este concepto con el teorema de Pitágoras.

Objetivos específicos del taller: Las y los participantes identificarán el concepto de ternas pitagóricas por medio de la manipulación de triángulos rectángulos; construirán ternas pitagóricas por medio de la construcción y verificación interactiva; y relacionarán el concepto de ternas pitagóricas con el teorema de Pitágoras por medio del armado de un rompecabezas.

Habilidades por desarrollar: Razonamiento matemático, Identificación de patrones, Comunicación oral y escrita.

En la siguiente figura se muestran las actividades a desarrollar durante el taller:

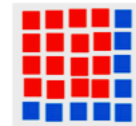
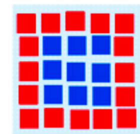
Taller: Pit-Goras		
Actividad	**Algunas preguntas que guian la actividad**	**Posibles respuestas**
A1. Los participantes tienen 25 fichas, 16 de color rojo y 9 azules, con dichas fichas los participantes tienen que construir un cuadrado considerando las reglas: ➢ Deben utilizar las 25 fichas. ➢ Las fichas de color rojo deben permanecer en contacto y compartir al menos uno de sus lados con otra ficha roja. ➢ Al menos ocho fichas azules deben compartir un lado con alguna ficha roja. ➢ Al menos siete fichas azules deben compartir dos de sus lados con otras fichas azules.	**¿Cuántos cuadrados se pueden formar cumpliendo las reglas presentadas?** ● Considerando únicamente las fichas rojas, ¿se puede formar un cuadrado? ● Considerando únicamente las fichas azules, ¿se puede formar un cuadrado ● A partir del cuadrado rojo, ¿cómo colocarían las otras fichas para tener un cuadrado? ● A partir del cuadrado azul, ¿cómo colocarían las demás fichas para tener un cuadrado?	 
A2. Se solicita a las y los participantes escribir la cantidad de fichas que conforman al cuadrado a través de una expresión aritmética, es decir, una suma.	**¿Cómo podemos representar la cantidad de fichas que conforman el cuadrado a través de una expresión aritmética?** ● ¿Cuál es el área del cuadrado construido? ¿Por medio de qué operación se puede representar dicha área? ● ¿Cómo podemos expresar la cantidad de fichas que conforman al cuadrado rojo? ● ¿Cuántas fichas hay que no sean de color rojo? **Con las medidas 3 cm, 4 cm y 5 cm ¿se puede construir un triángulo?** En caso afirmativo dibújenlo y especifiquen las medidas de cada uno de sus lados. ¿Qué tipo de triángulo es?	
A3. Las y los participantes deben construir triángulos rectángulos de forma tal que las longitudes de sus lados sean tres números enteros distintos. Posteriormente deberán verificar si esos valores forman una terna pitagórica.	**¿Pueden construir triángulos rectángulos donde la medida de sus lados sean números enteros?** Applet:*Construyendo triángulos rectángulos:* https://www.geogebra.org/m/bdmnfpwm ● ¿Cómo obtuviste los valores para construir los triángulos? ¿Qué relación hay entre los triángulos (valores) obtenidos? Applet: *Comprobando ternas:* https://www.geogebra.org/m/swpseabb	
A4. Se proporciona un applet de GeoGebra en el cual los alumnos deben armar un cuadrado con las piezas proporcionadas. Posteriormente se hace un discusión y reflexión guiada relativa al armado del cuadrado, las ternas pitagóricas y el teorema de Pitágoras	**¿Se pueden acomodar estas piezas de tal forma que se construya un cuadrado?** ● ¿Cuál es la figura que tomarían como base para formar el cuadrado que se les pide? ¿Cuál sería el lado de dicha figura que también sería lado del cuadrado a construir? ● ¿Por qué se puede formar el cuadrado grande a partir de los otros dos cuadrados más pequeños? ● Si construyeramos dos cuadrados usando las ternas que obtuviste, ¿se puede formar el cuadrado grande? **¿Para cualesquiera tres valores se puede construir el cuadrado grande?** ● ¿Por qué no es posible construir el cuadrado más grande? ● ¿Existe alguna relación entre los lados de los cuadrados y los triángulos rectángulos? ¿Cuál? ● ¿Recuerdas algún resultado matemático que relacione triángulos rectángulos con sus medidas? ● ¿Recuerdas qué establece el Teorema de Pitágoras?	
Cierre: Los facilitadores hacen una conclusión a partir del trabajo de los estudiantes y los contenidos revisados.	Después de la conclusión grupal, los facilitadores proporcionan el link del video *Pit-goras*: https://youtu.be/k36Ftsc3H0k	

Figura 1. Actividades que conforman el taller Pit-Goras.

Aspectos metodológicos para la implementación de los talleres:

La plataforma utilizada y recomendada para llevar a cabo los talleres es Zoom, debido a que se trabaja en grupos de tres integrantes cada uno, pues el trabajo dentro de las actividades se realiza en todo momento de manera colaborativa.

Las actividades y enlaces que conforman los materiales se presentan en un cuadernillo generado con diapositivas digitales. Esto permite trabajar de manera colaborativa y simultánea.

Se solicita a cada equipo que siempre haya algún estudiante compartiendo pantalla, de forma que todos puedan observar el avance grupal. Dado esto, es deseable que los participantes ingresen a los talleres utilizando computadora o laptop en lugar de teléfono móvil.

Para cada uno de los talleres se cuenta con tres o cuatro facilitadores, cuyo rol es ser un guía que plantea preguntas respecto a las ideas y soluciones brindadas por los participantes o bien para esclarecer dudas y brindar retroalimentación. Se sugiere que al inicio del taller, cada facilitador sea asignado a una sala o equipo de estudiantes para proporcionarles los materiales necesarios.

Resultados y Conclusiones

Durante la implementación del taller *Pit-Goras*, participaron 22 estudiantes de bachillerato. El análisis de los datos obtenidos muestra que la mayoría de los participantes (18 de 22) comprendieron y aplicaron correctamente el enunciado del Teorema de Pitágoras. En particular, identificaron con precisión que la relación entre los catetos y la hipotenusa se expresa mediante la ecuación $a^2 + b^2 = c^2$ (con hipotenusa c). Además, argumentaron que el significado geométrico de esta expresión radica en la comparación de las áreas de los cuadrados construidos sobre los catetos con la del cuadrado construido sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Por otra parte, 54% de los estudiantes reconoció que a partir de las ternas pitagóricas es posible construir triángulos rectángulos y por lo tanto cumplen con la relación del teorema de Pitágoras.

Por otra parte, la mayoría de los estudiantes afirmaron haber desarrollado habilidades matemáticas útiles para su formación académica. Las respuestas del cuestionario aplicado destacan que el taller les ayudó a recordar conceptos básicos, fortalecer el razonamiento geométrico y mejorar la resolución de problemas. Sin embargo, algunos participantes (3 de 22) indicaron que no percibieron un beneficio significativo o útil para su formación.

El análisis de las percepciones de los estudiantes durante el taller muestra que, si bien muchos se sintieron asombrados y motivados, también hubo quienes experimentaron confusión, aburrimiento y frustración. Estos sentimientos negativos podrían estar relacionados con el nivel de dificultad de las actividades propuestas y el tiempo limitado para realizar las actividades.

El taller fue valorado positivamente en términos de dinamismo, interactividad y relevancia. La mayoría de los estudiantes lo calificaron como entretenido, interesante y útil. Los materiales visuales y la manipulación de figuras fueron bien recibidos, ya que facilitaron la comprensión de las actividades y la expresión de ideas entre compañeros de equipo.

Los comentarios vertidos por los participantes muestran que es complejo o difícil para ellos integrarse a dinámicas en las que el profesor no explicite inicialmente el tema y procedimientos a realizar durante la actividad, esto sugiere que los estudiantes están acostumbrados a métodos de enseñanza basados en la exposición y la repetición de procedimientos algorítmicos brindados por el profesor, lo cual reafirma la necesidad de incorporar más experiencias de aprendizaje activo.

Por otra parte, también se observa que es crucial que el o la facilitadora se exprese de manera clara al brindar retroalimentación o guía a los estudiantes para evitar generar confusiones. De igual manera, se sugiere incorporar más ejemplos prácticos y aplicaciones reales. Así como, mejorar la distribución del tiempo en el taller para asegurar la realización adecuada de todas las actividades, evitando la frustración por la limitación del tiempo y favorecer un aprendizaje significativo.

Concluimos que al incorporar metodologías activas enfocadas en el desarrollo de habilidades matemáticas, los alumnos generarán una actitud de mayor confianza ante la resolución de problemas y habilidades de razonamiento, argumentación, representación y comunicación que les permitirán construir de manera significativa conocimientos matemáticos, pues se promueven espacios para vivenciar de forma activa la labor matemática.

Agradecimientos: La realización de esta investigación contó con el apoyo económico y de infraestructura por parte del programa UNAM-DGAPA-PAPIME con número de proyecto PE103321. El diseño del taller Pit-Goras fue idea original de Sergei Giovannni Quintero Villeda, participante del proyecto, y contó con la colaboración de Amayrani Ramírez Moreno para su adaptación en la modalidad virtual. La planeación de los talleres puede ser consultada aquí.

Referencias y bibliografía

Adelman, C. (2006). *The Toolbox Revisited: Paths to Degree Completion From High School Through College.* U.S. Department of Education.

Clark, M., Lovric, M. (2010). Suggestion for a theoretical model for secondary-tertiary transition in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*, 25–37 (2008). https://doi.org/10.1007/BF03217475

CODEIC-UNAM. (2020). *Exámenes para el diagnóstico de conocimientos. Resultados de los alumnos que ingresan a nivel licenciatura 2020*, CODEIC-UNAM, México. https://cuaed.unam.mx/descargas/evaluacion/Publicacion-licenciatura-generacion-2020-version-F.pdf

Di Martino, P. y Gregorio, F. (2019). The Mathematical Crisis in Secondary–Tertiary Transition. International *Journal of Science and Mathematics Education*, *17*, 825–843. https://doi.org/10.1007/s10763-018-9894-y

Gutiérez, D. (2009). El taller como estrategia didáctica. *Razón y Palabra*, *66(14)*. http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=199520908023

Karsenty, R. (2020). Mathematical Ability. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2^{nd} ed., 494-497). Springer.

Kilpatrick, J. (2020). Competency Frameworks in Mathematics Education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2^{nd} ed., 110-113). Springer.

Krutetskii, V. (1976). *The psychology of mathematical abilities in school children.* University of Chicago Press.

OECD. (2019). *México-Nota País, PISA 2018-Resultados,* PISA, Dirección de Educación y Competencias, México. https://www.oecd.org/pisa/publications/PISA2018_CN_MEX_Spanish.pdf

Santos Trigo, M. (2020). Problem solving in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (2^{nd} ed., 686-693). Springer.

Uriarte, F. (2014). *Seminario de Pedagogía universitaria*. Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Perú.

Uma análise de erros dos alunos em resoluções de questão sobre otimização em uma prova de cálculo

Felipe Leite **Granato**
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
lipegranato@gmail.com
Juliana da Silva Porto **Mendonça**
Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
porto_j@yahoo.com.br
Carlos Antonio **Oliveira**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
carlosroot4@gmail.com
Márcia Maria Fusaro **Pinto**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
marcia@im.ufrj.br
Marianna Del' Secchi **Sypnievski**
Departamento de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro
Brasil
mariannadsypi@gmail.com

Resumen

Este artigo traz resultados de uma análise de erros de alunos em resoluções de um problema de otimização. A questão foi proposta em uma prova aplicada em disciplina regular unificada de cálculo no primeiro semestre de 2024, oferecida em cursos de Ciências Exatas em uma universidade pública. Adotamos a metodologia em Bardin (1979) para analisar o uso do teorema de máximos e mínimos em intervalos fechados pelos alunos, contrastando as argumentações em suas soluções. Resultados destacam a frequência de respostas em branco, a ausência de argumentos justificando os procedimentos utilizados, e indícios de compreensão mais ampla da questão em abordagens alternativas ao uso de procedimentos retomando o teorema.

Palavras-chave: Brasil; Educação Matemática; Ensino de Cálculo; Análise de Erros.

Introdução

A transição do Ensino Médio para o Ensino Superior é estudada internacionalmente como um processo delicado, tanto para os alunos quanto para os professores. Especificamente, para os cursos na área das Ciências Exatas, o ensino e aprendizagem das disciplinas introdutórias do Cálculo nos semestres iniciais revela-se como um grande desafio. As altas taxas de reprovação em tais disciplinas em instituições de ensino superior do Brasil foi pauta de debate acalorado na Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ), contexto da pesquisa aqui relatada. Ao mesmo tempo em que os docentes do Departamento de Matemática (DM) constituíam um grupo de estudos sobre a disciplina de Cálculo I buscando abordagens alternativas para o período pós pandemia, a diretora da Escola Politécnica da mesma instituição reconhecia, em encontro com estudantes, a anormalidade de taxas de reprovação alcançando 70%, com o agravante de que, em alguns cursos, esse índice se tornara regular ao longo de anos.

Para melhor entender o contexto desse estudo, tal índice de 70% de reprovação refere-se a resultados finais de uma disciplina de Cálculo I unificado, oferecida a cursos das engenharias que a incluem em seus currículos. Esse formato unificado da disciplina propõe programa e cronograma comuns a todos os cursos que a oferecem, e provas únicas em horário extra classe. O índice de reprovação, portanto, corresponde a uma média geral que pode mascarar variações significativas entre os diferentes perfis de cursos e de estudantes. Vale mencionar que a universidade contexto da pesquisa atende a políticas de inclusão do governo federal, oferecendo cotas para estudantes da escola pública e adotando o Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM) como forma de ingresso na universidade. Ao perfil então transformado dos ingressantes em seus cursos (quando comparados a modos anteriores de ingresso dos estudantes na mesma universidade) acrescentam-se os efeitos decorrentes do período da pandemia na formação dos estudantes no ensino fundamental. Esse novo indivíduo, que sobretudo tem acesso a uma miríade de fontes digitais de informação, é centro do desafio enfrentado pelos professores de cálculo. Respondendo institucionalmente, o DM propõe intervenções pedagógicas e estruturais para mudar o cenário revelado, buscando melhores condições de aprendizado e redução da evasão. O projeto Análise de Erros em Provas Unificadas de Cálculo I é parte deste movimento.

Esta comunicação traz resultados de uma análise de erros cometidos por alunos em uma questão sobre otimização, proposta na segunda prova de Cálculo I. Em uma primeira seção elaboramos a perspectiva adotada para o entendimento do erro e da análise das respostas dos alunos. A apresentação do projeto e aportes metodológicos da pesquisa que se segue precedem a apresentação e análise do material produzido. Encerramos com uma discussão dos resultados.

A pesquisa sobre análise de erros

A análise de erros na Educação Matemática é abordada sob diferentes perspectivas. Borasi (1987), por exemplo, enfatiza que os erros cometidos pelos alunos não devem ser vistos apenas como sinais de falhas no aprendizado que necessitam de correção. Em vez disso, a autora propõe que os erros sejam utilizados como "trampolins" para a exploração matemática, servindo como pontos de partida para atividades criativas de resolução de problemas e como oportunidades para uma compreensão mais profunda do conteúdo matemático e da própria natureza da Matemática. Para a autora, os erros podem promover reflexões e descobertas conceituais, estimulando um aprendizado mais ativo e investigativo. Este entendimento é compartilhado em Cury (2006) e também em Cury e Bisognin (2009), ao propor a realização de atividades a partir dos erros como possibilidade para os alunos refletirem sobre suas dificuldades e para o professor detectar necessidades individuais, para depois elaborar as aulas para o grande grupo. Cury e Cassol (2004) discutem três tipos distintos de pesquisa sobre análise de erros em Educação Matemática: (i) o primeiro, focado apenas na detecção e classificação dos erros cometidos sem uma teoria pedagógica explícita, resultando, muitas vezes, em críticas ao ensino ou aos estudantes, sem explorar causas ou possibilidades de mudança; (ii) o segundo tem como base a análise e classificação dos erros com a finalidade de compreender as causas dos erros, considerando os obstáculos conceituais e processos de ensino-aprendizagem; (iii) e um terceiro tipo desloca a ênfase para atividades propostas aos alunos analisando seus erros à luz de uma teoria específica e proporcionando uma discussão sobre os erros, em si.

A análise de erros nesta pesquisa fundamenta-se na compreensão de que os erros cometidos por estudantes em avaliações revelam dificuldades de aprendizagem, mas também podem orientar mudanças na metodologia de ensino como em (ii) e (iii). Essa abordagem vai além da mera identificação dos erros e sua classificação. Buscamos identificar padrões de erros no contexto ou situação em que emergem, e investigar as origens e os seus significados compreendendo-os como orientadores potenciais para aprimorar o processo de aprendizagem.

Referências metodológicas

Essa pesquisa busca identificar e analisar erros dos alunos em provas de Cálculo I para fundamentar discussões sobre a retenção na disciplina bem como para sugerir alternativas de ensino. Tal projeto, proposto pelo chefe em exercício do Departamento de Matemática do Instituto de Matemática da UFRJ, foi desenvolvido no primeiro semestre de 2024. A equipe de pesquisadores envolvidos são os autores deste texto.

A primeira etapa iniciou em agosto de 2024, com a definição dos registros escritos a serem considerados em provas aplicadas para em torno de 900 alunos naquele primeiro semestre, arquivadas, para compor o corpus da pesquisa. Trazemos aqui resultados da análise de respostas a uma questão sobre otimização. Tal escolha deve-se a importância e ao número de questões em branco nas resoluções em uma das três provas aplicadas excepcionalmente no semestre em que iniciamos a pesquisa. Em decorrência de uma greve de funcionários no segundo semestre de 2024, optamos por realizar as provas do curso de Cálculo unificado em três turnos de aulas, ao invés de concentrá-las em um único horário vespertino extra turno.

Aportes metodológicos

A análise documental proposta em Bardin (1979), adotada em pesquisas de natureza qualitativa, quantitativa e mista (quali-quanti), contempla um conjunto de técnicas para analisar um conjunto de dados. Nesta pesquisa, de cunho qualitativo, usamos a metodologia ao explorar os registros escritos pelos alunos nas provas aplicadas e analisar os erros nas resoluções de uma questão específica de otimização. A análise de conteúdo adotada como metodologia oferece instrumentos claros, transparentes e adequados de constituição de dados e de análise, para revelar o que está enunciado no texto. As respostas escritas dos alunos foram organizadas em unidades para posteriormente identificar eixos temáticos e, por fim, categorias para análise das respostas a questão escolhida. A seguir, as etapas metodológicas que em Bardin (1979) são denominadas Leitura Flutuante, Regras de escolha, Temas, Eixos Temáticos, Categorização dos Dados:

Leitura Flutuante

A análise inicial é conduzida por uma leitura flexível do corpo do trabalho, em nosso caso, as respostas dos alunos em uma prova de Cálculo 1, sendo instrumento para escolhas e produção do material empírico a ser analisado. Em nossa pesquisa, foi nessa etapa que identificamos um grande número de respostas em branco a uma questão de otimização na prova aplicada em um dos turnos. Isto influenciou a escolha da questão para iniciarmos nossa análise.

Regras de escolha

Bardin (1979) propõe modos para sistematizar e organizar dados, possibilitando inferências sobre os textos em análise. Inclui três regras básicas, que passamos a discutir. Regras de exaustividade potencializam a leitura de todas as respostas dos alunos na questão escolhida, esgotando singularidades. A regra de representatividade permite identificar respostas segundo uma perspectiva particular. A regra de homogeneidade propõe a escolha de unidades de registro para sintetizar as respostas dos alunos.

Unidades de Registro - Temas

As múltiplas características das respostas dos alunos determinam diferentes Temas a serem analisados. O Quadro 1 apresenta os resultados da nossa pesquisa nesta etapa.

Eixos Temáticos

Um ou mais temas podem compor um eixo temático, revelando um “pano de fundo” para possibilitar a análise. Em nossa pesquisa, os eixos constituídos a partir dos temas anteriores são expressos segundo três características principais: a *Modelagem Matemática*, o *Desenvolvimento da resolução* e a *Justificativa e argumentação matemática*.

Categorização dos dados

Regras de homogeneidade dos dados utilizadas nos diversos eixos temáticos têm o intuito de qualificar significados das respostas dos alunos. Novas categorias reagrupam os eixos temáticos da etapa anterior, potencializando discussão teórica em torno de categorias principais. No caso dessa pesquisa, os eixos temáticos convergem para a *Linguagem algébrica e discurso matemático* e *Argumentação matemática e uso de instrumentos.*

O material empírico produzido em análise

Neste artigo discutimos os resultados da análise das resoluções da questão a seguir:

Os proprietários de uma locadora de automóveis determinaram que, se cobrarem dos clientes x reais por dia para alugar um carro, onde $50 \leq x \leq 200$, o número de carros que eles alugam pode ser modelado pela função linear $n(x) = 100 - 5x$. Supondo que os proprietários planejam cobrar dos clientes entre R$50 por dia e R$200 por dia para alugar um carro, quanto eles deveriam cobrar para maximizar sua receita? (Nota: Receita = Quantidade ×Preço)

A matematização envolvida na questão consiste em fazer o produto entre a função número de carros $n(x) = 100 - 5x$ e o preço x, escrevendo a função receita $r(x) = x(100 - 5x)$ ou seja, $r(x) = 100x - 5x^2$, onde $50 \leq x \leq 200$. Esta última é a expressão algébrica da função a ser otimizada. Os Quadros 1 e 2 a seguir trazem as respostas dos alunos organizadas em Unidades de registro (Quadro 1), posteriormente reagrupados em Eixos Temáticos (Quadro 2). O uso alternado do itálico na identificação dos Temas é apoio para inferirmos os Eixos Temáticos.

Quadro 1
Unidades de Registro - Temas Iniciais da questão 6

Temas (identificação)	**Observações sobre os temas**
Não resolveu a questão	Solução deixada em branco, ou restrita a um enunciado do procedimento, ou sem sentido aparente.
Erro na modelagem (para determinar a função a ser trabalhada)	Usou a função número de carros e não a função receita
Erro na escrita algébrica (ao determinar a função a ser trabalhada)	Não usou a propriedade distributiva do produto em relação a soma ao escrever a função receita algebricamente.
Função incorreta, desenvolvimento correto.	Determinou o ponto crítico da função, derivando e igualando a zero a função receita errada.
Função correta, desenvolvimento errado, sem justificativa	Função receita correta, procedimento correto, erro na derivada, ponto encontrado assumido como máximo sem justificar
Função correta, desenvolvimento correto, sem justificativa	Função correta, procedimento correto, desenvolvimento correto, ponto encontrado assumido como máximo sem justificativa
Função correta, desenvolvimento correto, justificativa gráfica	Esboço do gráfico da função ancorando a justificativa de que o ponto determinado é de máximo
Função correta, desenvolvimento correto, justificativa usando derivada segunda	Uso do teste da derivada segunda como critério.
Função correta, desenvolvimento correto, justificativa usando derivada primeira	Determinação de regiões de crescimento e decrescimento a partir do sinal da derivada primeira da função receita.
Função correta, desenvolvimento correto, justificativa analisando valores nos extremos do intervalo	Comparação entre valores da função nos extremos do intervalo e no ponto crítico, usando Teorema de Máximos e Mínimos em intervalos fechados como critério, sem enunciá-lo ou mencioná-lo.
Função correta, exploração de valores no intervalo.	Tentativa e erro para localizar o ponto do intervalo onde a função assume maior valor, comparando valores com valores da função receita nos extremos do intervalo.
Função correta, desenvolvimento correto, justificativa "incorreta" ou parcial.	Justificativa gráfica, mesclando conhecimentos do cálculo e do ensino médio (funções do segundo grau)
Não usou instrumentos do Cálculo.	Usou conhecimentos do ensino médio sobre funções do segundo grau.

Fonte: consulta privada. 2024.

Ressaltamos aqui o fato de a Modelagem Matemática na resolução do problema poder estar errada (ou correta), mas os procedimentos (ou passo a passo) usando os instrumentos do cálculo (ou não) da resolução poderem estar corretos (ou não). Indo além, a justificativa e argumentação matemática podem ou não atender ao rigor formal/algébrico usual. Tais evidências sugerem como eixos potenciais para análise a Modelagem Matemática, Desenvolvimento da Resolução, e por fim Justificativa e argumentação matemática que pode ou não estar registrada na resolução escrita pelo aluno. O Quadro 2 contempla estas relações.

Quadro 2
Eixos Temáticos da questão 6

<table>
<tr><th colspan="4">Eixos Temáticos</th><th>Temas iniciais</th></tr>
<tr><td></td><td rowspan="11">Desenvolvimento da Resolução</td><td colspan="2">Solução em branco</td><td>Não resolveu a questão</td></tr>
<tr><td rowspan="10">Modelagem Matemática</td><td rowspan="12">Justificativa e argumentação matemática</td><td rowspan="3">Erro na modelagem matemática da questão</td><td>Erro ao determinar a função a ser trabalhada</td></tr>
<tr><td>Erro na escrita algébrica</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento correto.</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Modelagem correta, desenvolvimento sem justificativa, ou com justificativa incorreta.</td><td>Desenvolvimento errado sem justificativa</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento correto, sem justificar</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento correto, justificativa incorreta.</td></tr>
<tr><td rowspan="4">Modelagem correta, desenvolvimento com justificativa correta ou parcialmente correta.</td><td>Desenvolvimento usa derivada segunda</td></tr>
<tr><td>Desenvolvimento usa derivada primeira</td></tr>
<tr><td>Justificativa analisando valores nos extremos do intervalo</td></tr>
<tr><td>Justificativa gráfica</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="2"></td><td rowspan="2">Não usou o Cálculo</td><td>Função correta, exploração de valores no intervalo.</td></tr>
<tr><td>Não usou o Cálculo.</td></tr>
</table>

Fonte: consulta privada. 2024.

Discussão

Discurso matemático e linguagem algébrica

A modelagem matemática de um problema apresentado como uma narrativa – como é o caso na questão objeto desta análise, demanda matematizar uma situação formulada em termos não totalmente matemáticos, ou seja, demanda adotar um novo discurso e reescrever a narrativa inicial em um outro contexto. São inúmeras as pesquisas que sugerem esta reescrita como uma prática a ser desenvolvida, uma vez que é importante e não é imediata. Tais práticas são investigadas desde a década de 70 por um grupo de pesquisa holandês que as denomina Educação Matemática Realística (RME). Abordagens desse grupo, que tem grande influência no Programme for International Student Assessment (PISA) e repercução internacional, se fazem sentir em nosso país nas orientações curriculares e avaliações do Exame Nacional do Ensino Médio (ENEM). Vale mencionar que mesmo tendo os estudantes do ensino médio trabalhado com os conhecidos "problemas com palavras", registramos resoluções em branco e a modelagem incorreta do problema restrita apenas à equação correspondente à quantidade $n(x) = 100 - 5x$ sem multiplicar a expressão pelo preço x para obter a função a ser maximizada. Respostas como estas são com frequência relacionadas à leitura do problema e sua escrita em linguagem matemática. São discutidas em Cury (2004), por exemplo, como fontes de dificuldades, principalmente as matematizações, que exigem a tradução da linguagem natural para a linguagem matemática. Casos como esses representam uma mudança no discurso e tais mudanças não ocorrem tão suavemente quanto (talvez) esperamos que ocorram.

Por fim, alguns (poucos) alunos multiplicaram $n(x) = 100 - 5x$ pelo preço x mas usam incorretamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. Ribeiro e Cury (2015) mencionam tal erro e destacam que [...] o conhecimento da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, se não entendida no ensino fundamental, pode trazer dificuldades no Cálculo Diferencial, quando o estudante precisa saber simplificar frações algébricas, entre outros itens. (ibid, p. 83). Inferimos assim que a dificuldade não se restringe ao discurso matemático e mudanças no discurso, podendo incluir a não familiaridade com regras operatórias e linguagem algébrica, e generalizações de regras aprendidas para naturais e inteiros, em Cury e Kozen (2005, 2006). O que remete à Matemática desenvolvida na Educação Básica.

Argumentação matemática e uso de instrumentos

Para avaliar a argumentação matemática presente nas provas analisadas, utilizamos o modelo estrutural de argumentação proposto por Toulmin (2003). O autor define que um argumento é uma afirmativa elaborada com base em uma justificativa. Uma simples conclusão, sem quaisquer dados produzidos em seu apoio, não é um argumento (Toulmin, 2003, p. 114).

Na análise das respostas, destacamos o número de questão em branco ou que apresentam resoluções sem justificativas. Entre aqueles que chegaram à resposta correta, muitos recorreram ao teorema de máximos e mínimos em intervalos fechados, sem enunciá-lo ou verificar suas hipóteses. O que nos levou a a inferir que, embora o aluno seja capaz de registrar uma solução desenvolvida em etapas corretas, a resolução pode corresponder a um processo mecânico.

O modelo de Toulmin permite uma análise em detalhes de fenômenos como este na argumentação, evidenciando a tendência em omitir ou subutilizar elementos essenciais como o respaldo, a qualificação e a refutação. Essa abordagem predominantemente procedimental impõe desafios pedagógicos significativos, pois, ao utilizar teoremas como métodos práticos, sem considerar hipóteses e significados, os alunos reduzem o Cálculo à aplicação de regras, como se teoremas correspondessem a mais um conjunto de procedimentos mecânicos a serem usados, sem internalizar os princípios matemáticos subjacentes. As soluções consideradas corretas usavam o teorema de máximos e mínimos em intervalos fechados, sem comentar suas hipóteses ou até mesmo enunciá-lo. Os testes da derivada primeira e da derivada segunda foram utilizados corretamente, verificando e comparando (não em todas as resoluções analisadas) o valor crítico encontrado com o valor da função nos extremos do intevalos. Esse ritual na argumentação foi independente da função a ser otimizada estar ou não escrita corretamente. Por outro lado, há registros de soluções que não utilizavam os instrumentos do Cálculo e decorriam do uso de visualização e/ou de testes de valores pertencentes ao intervalo considerado. Os fatos da função a ser maximizada ser de segundo grau e o formato do seu gráfico ser conhecido – a parábola, foram utilizados elaborando justificativas a partir do conhecimento construído no ensino médio.

Nossas reflexões sobre esses incidentes tornaram-nos sensíveis ao uso de teoremas e à relação entre a compreensão puramente técnica dos procedimentos para solução do problema de otimização e a compreensão conceitual da solução apresentada. A possibilidade de uso de teoremas como estratégias de modo procedimental, mecânico e técnico levou-nos a refletir sobre alternativas que incentivem a argumentação matemática, promovendo atividades que estimulem não apenas o "como", mas também o "por quê" das técnicas utilizadas.

Considerações finais

Muitas pesquisas sobre erros dos alunos em provas de Cálculo identificam a falta de conhecimentos anteriores da Educação Básica. Em nossa pesquisa argumentamos em favor de uma análise menos técnica concordando que “...uma vez detectado o erro, uma análise do mesmo deveria levar a uma revisão dos procedimentos didáticos que o originaram.” (Moren, David e Machado, 1992, p.2). Por este motivo questionamos suas origens e seus significados com a intenção de entendê-los como orientadores do ensino e aprendizagem.

Referências e bibliografia

Bardin, L. (1979). *Análise de conteúdo.* Lisboa: Edições 70.

Borasi, R. (1987) Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the Learning of Mathematics*, 7 (3), 2-8.

Cury, H.N. (2004). *Análise de erros em Educação Matemática*. Veritati (UCSAL) 3(4). 95-107.

Cury, H., Cassol, M. (2004) Análise de Erros em Cálculo:uma pesquisa para embasar mudanças. *Acta Scientiae* 6(1). 27-36.

Cury, H.N. (2006). Análise de Erros e Formação de professores: Sugestões para Ensino e Pesquisa em cursos de Licenciatura em Matemática. *Contexto e Educação, n.76.* Editora Unijuí.

Cury, H.N., Bisognin, E. (2009). Análise de Soluções de um problema representado por um sistema de equações. *Bolema*, 33, 1-22. Rio Claro. SP.

Cury, H. N., Konzen, B. (2005, 2006) Análise de resoluções de questões em Matemática: as etapas do processo. *Educação Matemática em Revista-RS,* 7(7), 33-41.

Ribeiro, A., Cury, H.N. (2015). Álgebra para a formação do professor. Belo Horizonte: Editora Autêntica.

Moren, E. B., David, M.M.M, Machado, M.P.L (1992). Diagnóstico e análise de erros em matemática: subsídios para o processo de ensino e aprendizagem. *Cadernos de Pesquisa*, *83*, 43-51.

Toulmin, S. E. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.

Un marco conceptual complementario para el desarrollo del pensamiento variacional en estudiantes de educación secundaria

José Ramón **Jiménez** Rodríguez
Doctorado en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
México
joseramon.jimenez@unison.mx
José Manuel **Castillo** Sedano
Doctorado en Matemática Educativa, Departamento de Matemáticas, Universidad de Sonora
México
a215290112@unison.mx

Resumen

Se presentan avances[1] de un proyecto de intervención didáctica, consistentes en el diseño de un marco conceptual complementario para describir el desarrollo del pensamiento variacional, denominado Nivel Cero (N0), que a la vez fundamente orientaciones didácticas en educación básica. Se plantea la tesis de que el estudio matemático exhaustivo del comportamiento de una sola magnitud variable según Jiménez (2020), constituye, por sí mismo, toda una estructura cognitiva (en el sentido piagetiano) que subyace al desarrollo del pensamiento variacional, y que dicha estructura puede y debería ser formada de manera completa en la educación secundaria, durante y en paralelo con el estudio de la representación de números y cantidades en la recta numérica (una magnitud variable–un eje numérico). Esto permitiría desarrollar en el alumno una serie de imágenes conceptuales (cualitativas) y herramientas matemáticas cuantitativas básicas que permiten identificar, describir y denominar los tipos básicos de comportamiento variacional de una magnitud variable.

Palabras clave: Educación media inferior; Magnitud variable; Pensamiento variacional; Razonamiento covariacional; Razonamiento variacional; Variación.

[1] Al momento de la redacción de este reporte el trabajo se encuentra en desarrollo. Actualmente se ubica en la fase de planeación, fundamentación y diseño preliminar de intervención didáctica.

Definición y relevancia del problema

El currículo de educación secundaria propone desarrollar el pensamiento variacional en los estudiantes. Sin embargo, en la abrumadora mayoría de las investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional se presentan distintas perspectivas e interpretaciones del concepto en sí. Para nosotros, éste consiste en el estudio de la variación continua de las magnitudes variables involucradas en los fenómenos de cambio en progreso. Asimismo, en las orientaciones didácticas curriculares, el alumno es involucrado, desde el mismo primer momento, con tareas matemáticas propias del razonamiento covariacional. Estas tareas son complejas, debido a que requieren de la habilidad para coordinar la variación simultánea de dos cantidades, algo que para muchos estudiantes resulta difícil, y más aún cuando dicho contenido matemático se aborda como parte del tema de funciones, con un enfoque didáctico discreto y para nada variacional. Dada la ausencia de un marco conceptual apropiado para interpretar y conducir el desarrollo del pensamiento variacional en una etapa de escolarización temprana, hemos considerado necesario desarrollar uno propio, recuperando algunos planteamientos previos. La elaboración de tal marco conceptual complementario constituye una aportación teórica a la educación matemática.

Aunque sabemos que en los fenómenos del mundo en el que vivimos nunca se presentan las magnitudes variables por separado, aislar las magnitudes variables y estudiarlas de esa manera nos parece una decisión didáctica justificada, debido a que es una tarea cognitiva relativamente más simple, por cuanto no requiere de la coordinación explícita de dos cantidades variables. Un planteamiento cardinal del presente trabajo es la tesis de que *el estudio matemático exhaustivo del comportamiento de una sola magnitud variable* (E1MV) constituye, por sí mismo, toda una estructura cognitiva (parafraseando a Piaget, 1968) sobre la que reposa el ulterior desarrollo del razonamiento covariacional. La comprensión profunda del comportamiento de una sola magnitud variable[2], su descripción en términos matemáticos y su representación gráfica dinámica en la recta numérica es relevante y estructural para la formación y el desarrollo del pensamiento variacional, tanto desde el punto de vista matemático, como del cognitivo. En particular, es fundamental para la comprensión, interpretación, dotación de sentido y construcción de las gráficas cartesianas en el plano. Es la roca firme sobre la que se construye el edificio del pensamiento variacional.

Marco teórico y explicativo

Nuestro marco teórico y explicativo se fundamenta en la concepción de Harel (2008), quien afirma que el propósito principal de la educación matemática es desarrollar el pensamiento matemático, el cual se compone de *maneras de entender* y *maneras de pensar*. Además, se considera el aporte teórico de Amador y Jiménez (2023), el cual propone una adaptación del enfoque de Harel, extendiendo algunos términos. Es decir, conciben que, para desarrollar el pensamiento variacional, es pertinente diseñar estrategias didácticas que permitan generar *Maneras Variacionales de Entender* (MVdE) y *Maneras Variacionales de Pensar* (MVdP).

Definen a las MVdE como el producto cognitivo particular del acto mental de producir imágenes dinámicas relacionadas con las características esenciales de las magnitudes variables, presentes en los fenómenos de cambio en progreso, y las MVdP como las características

[2] Dado el nivel educativo en el que se ubica este proyecto, nos referimos exclusivamente a las magnitudes escalares.

cognitivas del acto mental de producir imágenes dinámicas por el estudiante, reveladas de las realizaciones repetidas de sus maneras variacionales de entender. Estos autores sostienen que es pertinente que en educación secundaria se desarrolle el pensamiento variacional a partir de un enfoque didáctico que tome en cuenta a las MVdE, con el propósito de construir y/o reconstruir conceptos matemáticos que soporten el desarrollo de este tipo de pensamiento matemático. Por ejemplo, dentro de las MVdE se concibe a las variables algebraicas no como objetos matemáticos abstractos sin significado, sino como símbolos elegidos convenientemente para representar aspectos cuantitativos esenciales de la realidad. La magnitud variable no representa un único valor numérico, ésta toma infinitos valores numéricos. La variación no consiste en cambios que ocurren “a saltos” en los fenómenos, más bien implica cambios cuantitativos continuos y suaves en los valores numéricos de la magnitud variable. La literal no representa solo un valor numérico, al contrario, representa todos y cada uno de los valores numéricos de la magnitud variable, asociados con una unidad de medida, entre otras.

Por otro lado, consideramos también el marco conceptual del *Razonamiento Covariacional* de Carlson y cols. (2003) y el del *Razonamiento Variacional* de Thompson y Carlson (2017). El Razonamiento Covariacional describe una serie de acciones mentales complejas implicadas en la coordinación de dos cantidades variables, en términos de cinco niveles de desarrollo, que van desde el Nivel 1 (el más elemental) hasta el Nivel 5 (el más desarrollado). Cada nivel queda descrito por lo que se denomina *acción mental*, que consiste en la manifestación de ciertos razonamientos sobre los fenómenos de covariación. El desarrollo de cada nivel está en función de la acción mental asociada a ese nivel, y todas aquellas que la preceden. Por su parte, Ramos y Jiménez (2014) señalan dos limitaciones de este enfoque: a) se centra solamente en el Cálculo Diferencial, y b) no considera todas las representaciones semióticas deseables para abordar el pensamiento variacional. En su trabajo proponen de manera complementaria el uso de representaciones tabular, gráfica, algebraica, verbal, y digital.

Por su parte, el Razonamiento Variacional señala que éste consta de dos momentos críticos. El primero consiste en comprender que las magnitudes variables varían, es decir, que sus valores numéricos cambian. Se caracteriza por el hecho de ser una manera dinámica de pensar. Es decir, percibir en una situación de cambio la intervención de una o más magnitudes variables (una de las cuales puede ser el tiempo), indagar de qué manera cambian, formarse imágenes mentales dinámicas sobre estas, crear herramientas matemáticas para representar y cuantificar tales cambios, y desarrollar un lenguaje apropiado para describirlos. Hay un aspecto importante en la conceptualización de una magnitud variable que tiene una connotación intuitiva. Se trata del hecho de que el valor numérico que la magnitud variable toma en cada momento es único (no es posible que una magnitud variable tome dos o más valores numéricos diferentes en un mismo instante). Esta característica esencial es conocida como el *principio de unicidad*. El segundo momento es una apreciación de carácter estético: cuando una magnitud variable cambia, lo hace suavemente (el tiempo transcurre suavemente de un instante a otro en un intervalo, un atleta al correr se desplaza suavemente de un punto a otro de la trayectoria). Todo el proceso es continuo, no omite ningún estado en su devenir. El cambio es suave de un estado al siguiente, esta característica corresponde al *principio de continuidad*.

Consideramos que esta manera variacional de pensar es tanto *cualitativa* (implica la construcción de imágenes dinámicas de la variación y el razonamiento sobre ellas, al igual que el desarrollo de un lenguaje que refleje dicho dinamismo), como *cuantitativa* (tiene que ver con cálculos numéricos, técnicas y expresiones algebraicas). La manera de pensar que exige el estudio matemático del cambio en progreso es un ente complejo que podemos concebir como constituido por dos componentes complementarios, a los que Thompson y Carlson (2017) han denominado respectivamente *razonamiento variacional* y *razonamiento covariacional*.

Se enfatizan en el presente trabajo las limitaciones de ambos marcos conceptuales, dado que el razonamiento covariacional es cognitiva y matemáticamente mucho más complejo que el razonamiento variacional, ya que para desarrollar en el alumno la capacidad de razonar de forma covariacional, no solo es deseable sino además y ante todo es *necesario* desarrollar previamente su capacidad más elemental para razonar de manera variacional, esto es, razonar sobre una sola magnitud variable. Esto es precisamente lo que constituye la esencia del Nivel Cero (N0)[3]. Es importante considerar que, para comprender de manera dinámica cómo ocurren los cambios en las magnitudes variables del fenómeno, es esencial utilizar adecuadamente el término "cambio". Según Thompson et al. (2019), su uso adecuado implica percibir que las magnitudes variables están experimentando un cambio en curso en ese momento, es decir, conlleva la noción dinámica de "cambio en progreso" (en cierto lugar y en un marco temporal). Las magnitudes variables son intrínsecamente objetos dinámicos, poseen un trasfondo temporal y espacial.

Conceptualizamos como magnitud variable a cierta cualidad perceptible y cuantificable de un proceso en desarrollo, misma que en cada momento, en una progresión temporal inexorable, toma un valor numérico distinto. Como resultado de una cuantificación, cada valor numérico está asociado a una unidad de medida. Las magnitudes variables son temporales en el sentido expuesto, y son dimensionales en el sentido de que se les asocia una unidad de medición. La magnitud variable toma progresivamente distintos valores en distintos momentos, a medida que va desarrollándose el fenómeno o proceso en el que ella interviene. Esta imagen del concepto de variable es dinámica (*significado variacional)*, según Jiménez et al. (2022). Por lo tanto, es importante tener en cuenta que, al estudiar fenómenos de variación, están presentes ciertas características cambiantes y cuantificables, que dan lugar a imaginarnos que el cambio está ocurriendo, esto es, siempre está presente un cambio en progreso (Thompson et al., 2019; Jiménez et al., 2022). El cambio en progreso es fundamental para abordar y comprender una variedad de fenómenos de variación en el ámbito de las ciencias naturales y sociales. Este concepto postula que los fenómenos, ya sean naturales o sociales, no son estáticos, sino que por su naturaleza intrínseca son dinámicos, y están en constante evolución a lo largo del tiempo.

Propuesta de un marco conceptual complementario: el Nivel Cero (N0) del pensamiento variacional

Se decidió denominar *Nivel Cero* (N0)[4] a la etapa inicial correspondiente a la formación y desarrollo del razonamiento variacional. Es un marco conceptual complementario al Razonamiento Covariacional de Carlson et al. (2003) y Razonamiento Variacional de Thompson y Carlson (2017), y se enfoca en caracterizar el razonamiento variacional relacionado con la conceptualización matemática de la variación continua de una sola magnitud variable, teniendo ésta un trasfondo temporal. A continuación, en la Tabla 1 se enlistan y describen de manera sucinta las etapas que en su conjunto tienen lugar en el nivel cero del razonamiento, al adentrarse al análisis de una situación variacional, y que son requeridos para en un segundo momento, dicho

[3] El marco conceptual del Nivel Cero (N0) y su conjunto de acciones mentales se describen en la Tabla 1.
[4] Tomando en cuenta la terminología propuesta por Carlson et al. (2003).

tipo de pensamiento pueda transitar desde el trabajo matemático en la recta numérica hacia el trabajo matemático en el plano cartesiano. En esta línea de trabajo de Jiménez et al. (2022), la propuesta para abordar el *Nivel Cero (N0)* se desarrolla mediante las acciones mentales, sus *Evidencias de Manifestación* (EDM) y la *Calidad De la Ejecución* (CDE) de estas.

Tabla 1
Las Acciones Mentales del Nivel Cero del Pensamiento Variacional.

Primera Acción Mental del Nivel Cero (AM1-N0). Consiste n identificar las magnitudes variables y las magnitudes constantes en el fenómeno (identificación de las magnitudes de interés relevantes). La EDM es un listado nominal de magnitudes constantes y variables percibidas en el fenómeno dinámico. La CDE se determina por: 1) el carácter de las magnitudes (variables y constantes) identificadas por el estudiante para la comprensión y posterior matematización del fenómeno; y 2) la pertinencia de las magnitudes variables percibidas, con respecto a la realidad intrínseca del fenómeno de cambio.
Segunda Acción Mental del Nivel Cero (AM2-N0). Tiene que ver con la cuantificación de cada una de las magnitudes de interés identificadas. Utilizar un método y un instrumento que permita cuantificar (con medición directa o indirecta) las propiedades involucradas en el fenómeno, o al menos imaginárselo e informarse. La EDM es un listado de valores numéricos consecutivos (ordenado de acuerdo con la progresión en que fueron registrados u obtenidos a medida que el proceso variacional sucedió) y que representan el comportamiento de la magnitud variable en el fenómeno de cambio cuantitativamente. La CDE consiste en si el estudiante percibe el carácter discreto de este listado de valores numéricos y lo confronta o no, con la realidad observada, que lo lleva a tomar conciencia de que solamente unos cuantos (realmente, muy pocos) valores numéricos han sido registrados, y de la dificultad o imposibilidad de registrarlos todos.
Tercera Acción Mental del Nivel Cero (AM3-N0). Se relaciona con la capacidad de comparar los valores numéricos de la magnitud variable que aparecen en el listado, establecer relaciones entre ellos, realizar mentalmente ciertas estimaciones aritméticas elementales (sentido numérico), para que a partir de la visualización completa del listado (progresivo) discreto de los valores numéricos consecutivos de la magnitud variable, se analice la dirección del cambio de la magnitud variable, y por ende el comportamiento de ésta. La EDM consiste en si el alumno es capaz o no, de analizar dos aspectos importantes de los valores numéricos: 1) el signo de los valores numéricos, para entender si los valores numéricos que consecutivamente toma la magnitud variable son positivos, negativos o incluso de ambos signos; 2) una comparación (inicialmente mental y aproximada) de los valores numéricos consecutivos que dicha magnitud variable toma de forma progresiva, para entender si dichos valores numéricos consecutivos van aumentando, disminuyendo, aumentan primero y luego disminuyen o viceversa. La CDE consiste en si el estudiante es o no capaz de describir de forma cualitativa y adecuada el cambio, ya sea mediante los términos “aumenta” o “disminuye”, o mejor aún, “crece” o “decrece”.
Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM4-N0). Se refiere a la conceptualización de la variación continua. Requiere concebir que el cambio de la magnitud variable sucede de forma fluida y suave (sin brincos), es decir, a medida que el fenómeno se desarrolla, todo el proceso es continuo desde el inicio hasta su fin. Se fundamenta en lo que respecta al *principio de continuidad* presente en los fenómenos de cambio en progreso. La EDM y la CDE se vincula con si el estudiante es o no capaz de comprender que la variación de la magnitud variable no ocurre de forma caótica (o por partes), sino que sucede de manera natural con “suavidad”, y que a cualquier escala o amplificación del continuo de valores numéricos que toma la magnitud variable no omite ningún estado en su devenir. El estudiante debe comprender que los procesos de cambio son continuos en el sentido de que cambian suavemente de un estado al siguiente, es decir, si el proceso se encuentra en un estado en cierto momento, y en otro estado en un momento diferente, entonces asume todos los estados posibles entre estos dos momentos.
Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM4-N0). Se refiere a la conceptualización de la variación continua. Requiere concebir que el cambio de la magnitud variable sucede de forma fluida y suave (sin brincos), es decir, a medida que el fenómeno se desarrolla, todo el proceso es continuo desde el inicio hasta su fin. Se fundamenta en lo que respecta al *principio de continuidad* presente en los fenómenos de cambio en progreso. La EDM y la CDE se vincula con si el estudiante es o no capaz de comprender que la variación de la magnitud variable no ocurre de forma caótica (o por partes), sino que sucede de manera natural con “suavidad”, y que a cualquier escala o amplificación del continuo de valores numéricos que toma la magnitud variable no omite ningún estado en su devenir. El estudiante debe comprender que los procesos de cambio son continuos en el sentido de que cambian suavemente de un estado al siguiente, es decir, si el proceso se encuentra en un estado en cierto momento, y en otro estado en un momento diferente, entonces asume todos los estados posibles entre estos dos momentos.

Quinta Acción Mental del Nivel Cero (AM5-N0). La representación algebraica de la magnitud variable identificada cumple una doble función e implica transitar del uso simbólico de la literal como incógnita (valor numérico generalizado), a utilizar el simbolismo de la literal para referirse a un objeto matemático que no representa un valor numérico fijo, al contrario, dicho valor numérico cambia suavemente. Esto corresponde con un proceso crucial en el desarrollo del pensamiento algebraico en el alumno, en el sentido variacional. Se trata de una acción mental a la que no se presta la atención debida en el proceso de enseñanza-aprendizaje del álgebra. La EDM y la CDE es que el estudiante comprenda dicha doble función de la representación algebraica, la literal simboliza tanto a la magnitud variable identificada, y también (contrario al significado de incógnita) representa a todos y cada uno de los (infinitos) valores numéricos, ordenados en una progresión temporal continua (valores numéricos consecutivos) que toma la magnitud variable en cada instante del fenómeno, y este(os) está(n) cambiando en cada momento. Es decir, se utiliza la representación simbólica de la literal como variable, conceptualizada con su debida connotación dinámica, no simboliza un solo valor fijo.
Sexta Acción Mental del Nivel Cero (AM6-N0). Tiene que ver con la representación gráfica o geométrica de una magnitud constante en la recta numérica y la localización de un punto fijo en ella, que corresponda con la representación del valor numérico de la magnitud constante. La EDM consiste en el proceso de construcción de la recta numérica, lo cual se desglosa en el trazo de una recta arbitraria, elegir un punto arbitrario como origen sobre este, escoger una dirección positiva y escoger un segmento unitario para que a partir de este graduar la recta, la localización sobre esta del punto A, cuya abscisa corresponde con el valor numérico de la magnitud constante. La CDE queda determinada por la capacidad del estudiante para utilizar sus conocimientos previos para construir la recta numérica e identificar al único punto fijo sobre ella que representa adecuadamente a la magnitud constante. La comprensión de las características esenciales de dicho punto: a) se trata de un punto fijo, estático, inamovible; b) la abscisa de este punto es exactamente igual al valor numérico de la magnitud constante.
Séptima Acción Mental del Nivel Cero (AM7-N0). Tiene que ver con la representación gráfica o geométrica de una magnitud variable en la recta numérica, mediante un punto móvil sobre esta. La EDM consiste en obtener una imagen dinámica de la variación de la magnitud variable que represente a todos y cada uno de los valores numéricos de esta, en donde la abscisa de dicho punto móvil es igual al valor numérico que toma la magnitud variable en ese momento, por lo tanto, en cada instante, la ubicación del punto móvil está determinado por el valor numérico que la magnitud variable toma en ese momento. La CDE se determina por la capacidad del estudiante para apoyarse de forma creativa en la acción mental previa, y proponer una manera adecuada de representar a la magnitud variable mediante un punto móvil en la recta numérica, describiendo las características esenciales de dicho punto móvil al llevar a cabo un análisis de este.
Octava Acción Mental del Nivel Cero (AM8-N0). La conceptualización de la variación continua de la magnitud variable en la representación gráfica. La EDM y CDE que el punto móvil que representa a la magnitud variable se desplaza siempre en la recta numérica, sin salirse de ella, sin brincos o saltos, pasando de una posición a la siguiente sin omitir ninguna, de manera suave y fluida, sin dejar “huecos” en el segmento de recta numérica, entre el valor inicial y el valor final de dicha magnitud variable que toma en el fenómeno de cambio.
Novena Acción Mental del Nivel Cero (AM9-N0). La dirección del desplazamiento del punto móvil en la representación geométrica o gráfica de la magnitud variable. La EDM consiste en si el alumno es capaz o no de detectar la dirección en la que ocurre el cambio de las magnitudes de interés, mediante su representación gráfica con ayuda del punto móvil en la recta numérica, y comprender que su movimiento representa el comportamiento de la magnitud variable. La CDE se basa en la capacidad del estudiante para comprender que, si el punto móvil se desplaza en dirección positiva, se puede decir que la magnitud variable crece, y si ocurre en dirección negativa, se infiere que la magnitud variable decrece; si no ocurre ningún desplazamiento del punto móvil (permanece fijo, sin movimiento), se argumenta que la magnitud identificada es una constante (esta no presenta variación ni cambio).
Décima Acción Mental del Nivel Cero (AM10-N0). La discriminación del carácter del cambio con base en la representación geométrica de la magnitud variable. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de detectar, en el desplazamiento del punto móvil, que la distancia entre los pares de posiciones consecutivas de dicho punto puede manifestarse de tres maneras, que sea: igual o diferente (cada vez más separada y/o más junta).
Undécima Acción Mental del Nivel Cero (AM11-N0). La discriminación del carácter de cambio irregular con base en la representación geométrica. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no, de detectar que el desplazamiento del punto móvil ocurre de manera irregular o caótica, dado que se manifiesta de forma aleatoria.
Duodécima Acción Mental del Nivel Cero (AM12-N0). La cuantificación del cambio en grueso o macroscópico en la representación gráfica o geométrica de la magnitud variable. La EDM y CDE consiste en si el alumno es capaz o no, de comprender que a partir de la determinación de la distancia entre pares de posiciones consecutivos del punto móvil que representa a la magnitud variable, es posible determinar si ésta crece o decrece cada vez lo mismo, cada vez más o cada vez menos.

Décimo Tercera Acción Mental del Nivel Cero (AM13-N0). La cuantificación numérica del cambio que experimenta la magnitud variable. La CDE está determinada por la capacidad y/o creatividad del estudiante para utilizar sus conocimientos previos y proponer una manera adecuada para cuantificar el cambio experimentado por una magnitud variable, mediante una resta (diferencia) de dos de sus valores numéricos consecutivos en la lista, señalando el orden en que dicha operación de sustracción debe realizarse. Esta cuantificación, a diferencia de lo que habitualmente se practica en la enseñanza bajo otros enfoques, no es puntual sino global (se realiza sobre todo el listado de valores numéricos) y dinámica (se van tomando de manera progresiva parejas consecutivas de valores numéricos de la magnitud variable, hasta agotar todas las parejas).
Décimo Cuarta Acción Mental del Nivel Cero (AM14-N0). La determinación del carácter y la magnitud del cambio a partir del signo y el valor absoluto de las diferencias. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de realizar el cálculo de las diferencias de los valores numéricos consecutivos de la magnitud variable que interviene en el fenómeno. En esta etapa hay que prestar mucha atención no solo al tamaño de lo que cambia, es decir, al valor absoluto de dichas diferencias, sino sobre todo al signo que arroja dicho cálculo, debido a que éste expresa si la magnitud variable crece o decrece.
Décimo Quinta Acción Mental del Nivel Cero (AM15-N0). La discriminación fina de los tipos elementales de variación a partir del empleo repetido del cálculo de diferencias. La EDM consiste en la aplicación repetida del cálculo de diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable. La CDE se refleja por la capacidad y/o creatividad del estudiante para utilizar sus conocimientos y acciones mentales previamente asimiladas, y proponer el cálculo repetido (por segunda vez, por tercera vez, etc.) de las diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable, como herramienta para explorar e investigar, dentro de cada tipo elemental de comportamiento variacional, las subclases posibles (teóricamente), y determinar el comportamiento de la magnitud variable (creciente o decreciente) como: uniforme, acelerado y/o desacelerado.
Décimo Sexta Acción Mental del Nivel Cero (AM16-N0). La suma acumulada de los cambios absolutos. La EDM es la conceptualización de la suma de todas las diferencias entre pares de valores numéricos consecutivos de la magnitud variable como el cambio total o acumulado que dicha magnitud ha experimentado. La CDE se refleja en la capacidad del estudiante para proponer sumar los cambios progresivos de la magnitud variable para obtener el cambio neto o total que dicha magnitud variable experimenta.
Décimo Séptima Acción Mental del Nivel Cero (AM17-N0). La reversibilidad de los cambios absolutos (acercamiento intuitivo al Teorema Fundamental del Cálculo). La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de comprender que el valor actual de una magnitud variable se puede obtener a partir de los valores numéricos de sus cambios absolutos. Es decir, el valor numérico actual de una magnitud variable es igual al valor numérico que dicha magnitud tenía al inicio del proceso en el que ella interviene (valor inicial), más el cambio acumulado que experimentó al momento actual.
Décimo Octava Acción Mental del Nivel Cero (AM18-N0). La independencia del comportamiento de la magnitud variable en relación con el sistema de referencia elegido para cuantificarla. La EDM y la CDE consiste en si el alumno es capaz o no de comprender que, si se modifica el sistema de referencia para la obtención de los valores numéricos de la magnitud variable, éstos se ven afectados por la ubicación del origen de coordenadas, sin embargo, no se altera la esencia del fenómeno analizado, ya que se refieren a una misma realidad, simplemente contemplada desde diferentes ubicaciones.

Fuente: Elaboración propia. 2025

Aclaramos que, aunque sin duda se trata de una acción mental importante para el desarrollo del pensamiento variacional, el establecimiento de relaciones (cualitativas, y sobre todo cuantitativas) entre las magnitudes variables, constantes y parámetros percibidas que intervienen en el fenómeno, no se incluye en el marco conceptual del Nivel Cero, dado que dichas ideas están directamente relacionadas con el razonamiento covariacional.

Discusión

La investigación educativa parece asumir como un hecho incuestionable y obvio que el razonamiento variacional es simple, natural y espontáneo, y que no deberíamos preocuparnos por su desarrollo. Sin embargo, al realizar el esfuerzo de identificar, describir y caracterizar de forma preliminar las acciones mentales del trabajo matemático requerido en el análisis de una sola magnitud variable (aislada de las demás) percibida en un fenómeno de cambio en progreso, nos percatamos con asombro de dos hallazgos significativos: a) existe un gran número de acciones mentales del *Nivel Cero* (dieciocho hasta el momento), y b) las acciones mentales no son elementales, estas presentan cierto grado de abstracción y complejidad matemática. El marco conceptual propuesto exhibe que hay una problemática por atender, a la que hasta el momento no se le ha prestado la atención debida. Ciertamente, en el currículo escolar está contemplado el estudio de la recta numérica, pero lamentablemente no desde el punto de vista variacional, para desarrollar en ella imágenes gráficas dinámicas asociadas a los distintos comportamientos variacionales elementales, o a desarrollar y utilizar herramientas matemáticas que le permitan profundizar en el análisis del comportamiento de las magnitudes variables.

Por otra parte, nuestro marco conceptual también es adecuado como guía metodológica para estructurar de forma coherente el diseño de las actividades didácticas, materiales y recursos manipulables digitales tomando en cuenta varios registros de representación, y el trabajo matemático que debieran desarrollar los estudiantes a partir de las acciones mentales descritas para el Nivel Cero del Razonamiento Variacional. El uso de tecnología digital facilita la cuestión de cuantificar las magnitudes variables que intervienen en el fenómeno, al obtener los valores numéricos de éstas, con los cuales es posible matematizar el fenómeno. A su vez, ayuda en la visualización dinámica del comportamiento de las magnitudes variables analizadas de forma artificial por separado en la representación geométrica, mediante un punto móvil que se desplaza sobre la recta numérica, esto favorece la comprensión de ideas variacionales potentes, dado que enfrenta la conceptualización errónea presente en el currículo acerca del análisis de procesos variacionales “por porciones o por partes”, los cuales conceptualizan a los procesos de variación y cambio como si este sucediera por brincos o saltos. Sin embargo, con el uso del applet de geometría dinámica se logra apreciar claramente la representación gráfica y dinámica del comportamiento de una magnitud variable, en donde un punto móvil P se desplaza de forma continua desde el valor numérico inicial hasta el valor numérico actual de la magnitud variable.

Cabe reconocer que, para validar el desarrollo teórico que aquí se presenta, es necesaria su ulterior investigación y puesta en escena en el aula.

Referencias y bibliografía

Amador S. L. M., Jiménez R. J. R. (2023). *Diseño didáctico de la covariación exponencial bajo el enfoque del pensamiento variacional*. Memorias del XVI Congreso Interamericano de Educación Matemática https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/view/1338/694.

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica en Educación Matemática. Bogotá. Grupo Editorial Iberoamérica S.A. de C.V., pp. 33-59.

Carlson, M., Jacob, S., Coe, E., Larsen, S., y Hsu, E. (2003). Razonamiento Covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA, VOL. 8* N°2, pp. 121-156**.**

Harel, G. (2008). *What is mathematics? A pedagogical answer to a philosophical question*. En B. Gold & R. Simons (Eds.), Proof and other dilemmas: Mathematics and philosophy, Washington, DC: Mathematical Association of America, pp. 265 – 290. https://mathweb.ucsd.edu/~harel/What%20Is%20Mathematics.pdf.

Jiménez R. J. R., Grijalva, M. A., Milner, F. A., Dávila-Araiza, M. T. & Romero, F. C. F. (2022). Reconceptualización didáctica del Cálculo. Colección Textos Académicos No. 156. Editorial de la Universidad de Sonora. ISBN: 978-607-518-508 8. https://doi.org/10.47807/UNISON.201

Jiménez-Rodríguez, J. R. (2020). *Level-zero covariational reasoning in secondary school mathematics / El nivel cero del razonamiento covariacional en la educación secundaria*. Memorias de PME NA 2020. https://pmena2020.cinvestav.mx/Portals/pmena2020/Proceedings/PMENA42-BRR-1655990-Jimenez.pdf

Piaget, J. (1968:1970). *Estructuralismo*. New York: Basic Books, Inc.

Ramos, L. I., Jiménez, J. R. (2014). Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *El cálculo y su enseñanza*, No. 5(1), pp. 111-130. https://doi.org/10.61174/recacym.v5i1.119

Thompson, P. W., Ashbrook, M., y Milner, F. (2019). *Calculus: Newton, Leibniz, and Robinson meet technology.* Retrieved from http://patthompson.net/ThompsonCalc/

Thompson, P. y Carlson, M. (2017). Variation, covariation, and functions: Foundational ways of thinking mathematically. In J. Cai (Ed.), *Compendium for research in mathematics education* (pp. 421-456). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Una estrategia didáctica STEAM+H con enfoque humanista y ético para la enseñanza de la Matemática

Rosa María **Almonte** Batista
Escuela de Matemática, Universidad Autónoma de Santo Domingo
República Dominicana
ralmonte49@uasd.edu.do
Reina Altagracia **Taveras**
Escuela de Matemática, Universidad Autónoma de Santo Domingo
República Dominicana
rtaveras22@uasd.edu.do
Nancy Lucia **Chacón** Arteaga
Universidad de Ciencias Pedagógicas Enrique José Varona
Cuba
nchaconarteaga@gmail.com

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo propiciar la reflexión sobre la importancia de una formación interdisciplinaria para el desarrollo de competencias en los estudiantes de Matemática Básica (MAT-0140) de la UASD. Se aplicó una estrategia didáctica STEAM+H con enfoque humanista y ético para la enseñanza de la Matemática, sustentado en investigaciones realizadas por Chacón 2014, Taveras 2018 y Almonte y Núñez 2024. La metodología desarrollada fue acción, participación, transformación con 120 estudiantes de dos secciones en el semestre 2024-02. En el desarrollo de proyectos sostenibles. Los resultados demostraron que la estrategia didáctica fomenta la autorregulación moral, aprendizaje significativo, desarrollo de competencias interdisciplinarias, así como el pensamiento crítico, resolución de problemas, colaboración, creatividad y alfabetización tecnológica, además de promover una mayor conciencia social y ética en los estudiantes, alineándose con los Objetivos de Desarrollo Sostenible 2030.

Palabras clave: Enfoque humanista y ético; Enfoque STEAM+H; Estrategia didáctica; Interdisciplinariedad; Matemática Básica; Proyecto

Introducción

Las condiciones socioeconómicas y políticas del mundo actual exigen que las instituciones de educación superior fortalezcan y transformen sus sistemas educativos. Este perfeccionamiento es esencial para formar egresados más humanos, íntegros y competentes, capaces de enfrentar los desafíos de su entorno, transformar la realidad individual y social en la que viven e integrarse de manera efectiva en las dinámicas complejas de los procesos productivos y de servicios.

Hoy día en el escenario internacional existe la imperante preocupación por mejorar la calidad de la educación. Esto se evidencia en la Agenda 2030 de Desarrollo Sostenible y sus 17 Objetivos (ODS), en particular, E2030: "Educación y habilidades para el siglo XXI", específicamente en el ODS 4 "Garantizar una educación de calidad, inclusiva y equitativa, y promover las oportunidades de aprendizaje permanente para todos" (Naciones Unidas. Agenda 2030, 2016:15). La Educación Superior dominicana no escapa a este reto, en particular, la Universidad Autónoma de Santo Domingo, donde se impone la necesidad de formar graduados con calidad y con un compromiso ético que garanticen el desarrollo sostenible de la sociedad, como se expresa en su Misión.

En la actualidad, la educación enfrenta el desafío de preparar a los estudiantes no solo para un mundo laboral en constante transformación, sino también para desempeñarse como ciudadanos comprometidos con los retos sociales y ambientales del siglo XXI. Este panorama requiere enfoques pedagógicos que integren competencias técnicas, ingenieriles, artísticas, tecnológicas y científicas, junto con una formación ética y humanista.

La presente investigación aborda el desarrollo y la aplicación una estrategia didáctica STEAM+H con enfoque humanista y ético para la enseñanza de la Matemática Básica con el propósito de promover un aprendizaje significativo y el desarrollo de competencias interdisciplinarias. El trabajo se llevó a cabo en la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD), en el centro de Nagua y el Recinto Santiago, con estudiantes de Matemática Básica.

La estrategia propuesta fue diseñada bajo principios de flexibilidad, dinamismo, contextualización y carácter de sistema, permitiendo adaptarse a las necesidades específicas de los estudiantes y del entorno. Consta de cuatro fases principales: diagnóstico-sensibilización, planificación-familiarización, y ejecución y evaluación. Cada una de estas fases incluye objetivos claros y acciones dirigidas a fomentar competencias como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la colaboración y la creatividad, alineándose con los Objetivos de Desarrollo Sostenible 2030.

Los resultados obtenidos destacan la eficacia de esta estrategia para promover la autorregulación moral, el desarrollo de valores éticos y una mayor conciencia social, aspectos esenciales para el desarrollo integral de los estudiantes en un mundo cada vez más interconectado y desafiante.

Marco Teórico

El marco teórico de esta investigación establece las bases conceptuales y sustentación teórico-metodológicas necesarias para comprender y fundamentar el diseño de una estrategia didáctica basada en los enfoques STEAM+H y el enfoque humanista y ético. En un escenario global influenciado por la Agenda 2030, particularmente el ODS 4, se resalta la importancia de la educación superior como un agente de cambio para formar egresados capaces de enfrentar los desafíos sociales, ambientales y productivos del siglo XXI.

A partir de estos fundamentos, se analizan los principales enfoques pedagógicos y metodológicos que respaldan las competencias interdisciplinarias. Se destacan los principios del aprendizaje significativo, el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la colaboración, como elementos clave para una formación integral. Además, se examinan las características del enfoque STEAM+H y su contribución al desarrollo de habilidades técnicas, ingenieriles, científicas y artísticas, junto con la promoción de valores éticos y humanistas.

Enfoques pedagógicos y metodológicos

A continuación, se asumen los planteamientos que fundamentan el trabajo de investigación. Chacón (2014) define el enfoque ético, axiológico y humanista como: el sistema de conocimientos que aporta la ética sobre la moral y los valores, consustanciales a los seres humanos, que fundamentan y orientan la praxis y las exigencias ético-morales del trabajo y/o la vida cotidiana de las personas en sus relaciones, comunicación y actitud ante el mundo en que viven, transformándose en un importante instrumento para la dirección de los procesos sociales, dentro de ello la educación y la actividad científico-investigativa

Ramírez y Quintana (2024) en su escrito, se focalizan en el ser humano, sus necesidades e intereses, y la formación en valores como elementos orientadores y reguladores del comportamiento. Se expresen en función de explicar y argumentar los componentes y estructura que conforman la concepción didáctica para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la asignatura Didáctica de la Matemática con enfoque ético, axiológico y humanista en la licenciatura en Educación Mención Matemática en la Universidad Autónoma de Santo Domingo (UASD).

El enfoque STEAM+H, íntegra Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte, Matemáticas y Humanidades para ofrecer una educación interdisciplinaria y holística (Almonte y Núñez, 2024; Santos y López, 2021; García, Santos y López, 2023; Pérez y Martínez, 2022) destacan la implementación de este enfoque en diversas instituciones educativas, subrayando beneficios como el desarrollo de competencias éticas, humanistas y técnicas que permiten abordar problemas complejos desde una perspectiva integral. Este modelo no solo busca desarrollar competencias técnicas y científicas, sino también fomentar la creatividad, la sensibilidad cultural y el pensamiento ético.

La adición de Humanidades al enfoque STEAM permite conectar el conocimiento técnico con el contexto humano, promoviendo una visión más integral de los problemas del mundo real.

Esta estrategia didáctica también fortalece competencias como la comunicación, la colaboración y la comprensión empática desde diversas perspectivas.

Se asume el planteamiento de (Pérez y Martínez, 2022; García, Santos y López, 2023) sobre concepto de aprendizaje significativo, introducido por David Ausubel, que sostiene el aprendizaje ocurre de manera efectiva cuando el estudiante conecta el nuevo conocimiento con sus experiencias y conocimientos previos.

López y Martínez (2021) y Ramírez (2023) definen el pensamiento crítico como la capacidad de analizar, evaluar e interpretar información de manera reflexiva y razonada que conjuntamente a la resolución de problemas son esenciales en la implementación de estrategias STEAM+H para abordar problemáticas interdisciplinarias.

Las metodologías activas, como el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y el Design Thinking, sitúan al estudiante en el centro del aprendizaje, promoviendo su participación activa y significativa (García y Pérez, 2021; Johnson et al., 2023). El ABP involucra a los estudiantes en la investigación y resolución de problemas complejos para crear productos concretos, integrando conocimientos interdisciplinarios y competencias aplicadas en contextos reales (García & Pérez, 2021). Por su parte, el Design Thinking, basado en cinco fases (empatizar, definir, idear, prototipar y probar), desarrolla competencias como la creatividad, la colaboración y la resolución efectiva de problemas centrados en necesidades reales. Ambas metodologías potencian el aprendizaje significativo y preparan a los estudiantes con habilidades fundamentales para el siglo XXI y son esenciales en la integración del enfoque STEAM+H al enfoque ético, axiológico y humanista.

Por lo antes expuesto es oportuno declarar que la integración de Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte, Matemáticas y Humanidades (STEAM+H) promueve el desarrollo de competencias interdisciplinarias al unir conocimientos y habilidades de diversas áreas para enfrentar retos complejos. Además, permite a los estudiantes analizar problemas desde múltiples perspectivas, utilizando tanto el pensamiento lógico como la creatividad para proponer soluciones innovadoras. Al conectarse con problemas del mundo real, como el cambio climático, la inequidad social o los avances tecnológicos, fomenta el aprendizaje significativo y el compromiso social, preparando a los estudiantes para ser ciudadanos críticos y activos que contribuyan a un futuro sostenible y equitativo.

Elementos coincidentes entre los enfoques ético, axiológico, humanista y STEAM+H

Los enfoques ético, axiológico, humanista y STEAM+H comparten un compromiso común con la formación integral del ser humano, desarrollando competencias que trascienden lo académico e incluyen dimensiones éticas, moral, de los valores, emocionales y culturales, propias de los seres humanos, que transversalizan todos los procesos formativos – educativos, así como están en la base de la profesionalidad pedagógica de los docentes orientando sus modos de actuación.

Entre los valores fundamentales que promueven estos enfoques se encuentran la dignidad humana, la equidad, la justicia, la responsabilidad, la solidaridad, el compañerismo y colaboración, la convivencia de paz y respeto al medio ambiente, fomentando ciudadanos conscientes de su papel en la sociedad. El enfoque ético y axiológico humanista, se centra en la toma de decisiones responsables basadas en principios morales, prioriza la dignidad y el potencial individual. Por su parte, STEAM+H íntegra ciencia, tecnología, arte y humanidades para enriquecer la perspectiva y sensibilidad del estudiante.

Además, estos enfoques buscan el desarrollo del pensamiento crítico y creativo, incentivando la resolución de problemas contextualizados y promoviendo la innovación desde una perspectiva multidisciplinaria. También destacan la importancia de la colaboración y la responsabilidad social, abordando problemas globales mediante proyectos que fortalecen tanto competencias técnicas como habilidades sociales. En conjunto, estos enfoques comparten el compromiso de construir una sociedad más justa y sostenible, donde los individuos estén preparados para adaptarse al cambio, participar activamente y promover el bienestar colectivo.

Competencias y resultados de aprendizaje de la asignatura Matemática Básica

La asignatura Matemática Básica (MAT-0140) se estructura en torno al desarrollo de un conjunto de competencias que permiten a los estudiantes enfrentar, con pensamiento lógico y reflexivo, situaciones del contexto nacional y global. En este sentido, se promueve el uso del razonamiento lógico, creativo y crítico como herramienta esencial para el análisis de la realidad, con el fin de contribuir activamente a la solución de problemáticas sociales, económicas y ambientales, lo cual responde a la formación de ciudadanos comprometidos y transformadores. Además, se fomenta el uso efectivo de las tecnologías de la información y la comunicación como recurso estratégico para abordar desafíos propios del quehacer profesional, optimizar procesos y contribuir al desarrollo sostenible desde las distintas áreas del saber.

Desde el punto de vista específico, la asignatura orienta a los estudiantes a utilizar el razonamiento matemático para abstraer y estructurar problemas, construir modelos que representen fenómenos de la vida diaria o de otras disciplinas, y aplicar conceptos y procedimientos matemáticos en contextos reales con creatividad, precisión y sentido crítico. Asimismo, se incentiva el trabajo colaborativo interdisciplinario, de manera que los estudiantes puedan integrar y aplicar conocimientos de diferentes campos, comunicando sus hallazgos con claridad y rigurosidad.

Resultados de Aprendizajes Esperados (RAE)

Al finalizar la asignatura, el estudiante será capaz de: RAE–1.1. Identifica y resuelve de manera individual o grupal problemas de la vida diaria donde se aplican los conocimientos construidos en la asignatura. RAE–1.2 Comunica de forma precisa los procedimientos utilizando un lenguaje matemático apropiado, en la resolución de problemas y justifica los resultados obtenidos. RAE–2. Construye e interpreta modelos matemáticos simples, utilizando software, mediante la aplicación de los conocimientos construidos. RAE–3.1. Integra conocimientos de diferentes áreas del saber utilizando conceptos matemáticos. RAE–3.2. Explica la relación de las Matemáticas en diversas disciplinas académicas y aplica conceptos matemáticos en contextos multidisciplinarios.

Experiencias de Implementación de la Estrategia Didáctica

La estrategia didáctica fue implementada con una población de 65 estudiantes seleccionados por conveniencia, distribuidos en dos secciones de la asignatura Matemática Básica (MAT-0140), en el Centro UASD Nagua y el Recinto UASD Santiago. Basada en los enfoques STEAM+H y el enfoque humanista y ético, esta propuesta permitió transformar la enseñanza de la Matemática en la Universidad Autónoma de Santo Domingo, promoviendo una visión integral, contextualizada y significativa del aprendizaje.

Para evaluar el impacto de la estrategia, se utilizaron instrumentos cualitativos y formativos que permitieron valorar tanto el desarrollo de competencias interdisciplinarias como la formación ética y social. Entre los recursos empleados se incluyen: rúbricas de evaluación con criterios como pensamiento crítico, creatividad, resolución de problemas y conciencia ética; portafolios reflexivos; cuestionarios de autoevaluación; observación participativa y entrevistas semiestructuradas aplicadas a los estudiantes objeto de estudio.

Los criterios de evaluación se centraron en evidenciar el aprendizaje significativo, la integración de saberes, la toma de decisiones fundamentadas en principios éticos, el compromiso con los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) y la autorregulación moral. La metodología de acción, participación y transformación propició una experiencia formativa integral donde los estudiantes fueron protagonistas activos en el diseño y ejecución de proyectos sostenibles.

Esta experiencia se sustentó teóricamente en los aportes de Chacón (2014), Taveras (2018), y Almonte y Núñez (2024), quienes defienden una pedagogía crítica, interdisciplinaria y centrada en valores. A través de este proceso, los estudiantes desarrollaron habilidades para abordar problemas reales desde una perspectiva ética, creativa y socialmente comprometida. A continuación, se presentan algunas experiencias significativas derivadas de esta implementación.

Tabla 1

Proyectos integración de los enfoques STEAM+H y Enfoque, Humanista y ético

Proyectos	**Descripción**	**Competencias**	**Matemática aplicada**	**Integración de los enfoques**		**Resultado final**
				STEAM+H	Humanista y ético,	
Presupuestos sostenibles para una comunidad	Los estudiantes diseñan un presupuesto para implementar un sistema de reciclaje en su comunidad.	Aplica operaciones matemáticas para resolver problemas reales. RAE 1 Y RAE 3	Operaciones básicas, porcentajes, y representación gráfica de datos.	Uso de herramientas tecnológicas y diseño creativo para soluciones sostenibles	Responsabilidad social y gestión eficiente de los recursos.	Presupuesto detallado del sistema de reciclaje, análisis de viabilidad económica y ambiental, presentación de propuestas de implementación ante la comunidad
Diseño de una ciudad sustentable	Equipos de estudiantes diseñan una maqueta o modelo	Modelar fenómenos del mundo real utilizando herramientas	Geometría, proporciones, cálculos de área y volumen.	Uso de modelado 3D y análisis de datos para	Reflexión sobre equidad en el acceso a recursos y	Maqueta física o modelo digital de la ciudad sustentable, análisis de impacto ecológico y económico, informe con

	digital de una ciudad sustentable.	matemáticas y tecnológicas RAE 2 y RAE 4		optimizar diseños urbanos.	sustentabilidad ambiental.	recomendaciones para la planificación urbana sostenible
Análisis de datos sociales	Los estudiantes analizan datos sobre problemática s sociales como pobreza o desigualdad de género	Interpretar datos estadísticos para fundamentar propuestas de intervención social.RAE 2 y RAE 5	Estadísticas, gráficos y análisis de porcentajes	Uso de software de análisis de datos como Excel y Python	Fomento de la empatía y justicia social	Base de datos con información analizada, informe con hallazgos y propuestas de intervención, presentación visual con gráficos explicativos.
Resolviendo problemas éticos con Matemática	Los estudiantes abordarán dilemas éticos reales, como la distribución justa de recursos en comunidades con necesidades diversas.	Emplear modelos matemáticos para la toma de decisiones responsables (RAE 3 y RAE 4), integrando el análisis crítico y el juicio ético en la resolución de problemas.	Álgebra básica, análisis de datos y lógica.	Uso de herramientas digitales para simular escenarios	Reflexión sobre la toma de decisiones responsables	Modelos matemáticos de distribución equitativa, análisis de impacto social y económico de las decisiones tomadas, presentación de conclusiones con gráficos y propuestas de mejora.
Creación de un producto educativo	Diseño de una aplicación o recurso digital para enseñar Matemática Básica	Diseñar recursos digitales para la enseñanza de la Matemática RAE 4 y RAE 6	Resolución de problemas y pensamiento secuencial.	Uso de herramientas digitales como Scratch o Canva.	Fomento de la accesibilidad educativa y el trabajo en equipo.	Aplicación o recurso interactivo desarrollado, evaluación del impacto en la enseñanza de Matemática Básica, presentación del producto a la comunidad educativa.
Proyecto océano limpio: Matemáticas y acción por un mar sin plásticos	Análisis y mitigación de la contaminació n marina mediante el estudio de biobardas en ríos.	Analizar y proponer soluciones a problemas ambientales mediante el uso de herramientas matemáticas y tecnológicas RAE 1, RAE 2 y RAE 5	Cálculo de volúmenes de residuos, estadísticas y análisis de datos ambientales.	Uso de tecnología para análisis de datos y diseño de soluciones visuales.	Conciencia ambiental y responsabilidad social.	Informe con gráficos y datos reales sobre la efectividad de las biobardas, publicaciones de sensibilización en redes sociales como Instagram y Facebook, propuesta de expansión del proyecto a nivel nacional.
Eco matemática: Un árbol a la vez por un país más verde	Diseño de un plan de reforestación basado en análisis de datos ambientales en Santiago, Puerto Plata y La Vega.	Aplicar métodos estadísticos para evaluar y planificar acciones de reforestación RAE 2 y RAE 5	Cálculo de tasas de deforestación, absorción de carbono y análisis estadístico.	Uso de tecnología para mapear y analizar datos ambientales	Promoción de la responsabilidad social y el respeto por los recursos naturales.	Siembra de árboles en zonas clave y creación de un mapa actualizado, publicaciones en redes sociales con análisis del impacto ambiental, informe con cálculos y reflexiones sobre la experiencia interdisciplinaria.

La tabla evidencia cómo cada proyecto, diseñado bajo el enfoque STEAM+H, se articula con las competencias y resultados de aprendizaje de la asignatura Matemática Básica (MAT-0140), integrando saberes matemáticos con la reflexión ética y la acción social. En el contexto de Nagua, Puerto Plata, La Vega y Santiago, estas propuestas responden a problemáticas reales de las comunidades, como la distribución justa de recursos, la planificación urbana sostenible, la reforestación y la reducción de la contaminación. De este modo, el aprendizaje de la Matemática se vincula directamente con el entorno, permitiendo que los estudiantes desarrollen soluciones creativas y técnicamente fundamentadas que beneficien a su región.

La riqueza de los proyectos radica en su capacidad para unir el rigor de contenidos como el álgebra, la estadística y la geometría, con el uso de herramientas tecnológicas y el trabajo interdisciplinario. En ciudades como Santiago y La Vega, donde los retos urbanos y ambientales requieren planificación estratégica, los estudiantes aplican modelado 3D, análisis de datos y proyecciones estadísticas para proponer mejoras sostenibles. En Nagua y Puerto Plata, la proximidad al mar y la actividad turística hacen que iniciativas como Proyecto océano limpio adquieran relevancia especial, contribuyendo a la preservación de los ecosistemas costeros y al fortalecimiento de la conciencia ambiental en la comunidad educativa.

Más allá de la formación académica, la integración de estos proyectos promueve la participación ciudadana y el compromiso social, incentivando a los estudiantes a ser protagonistas del cambio en sus localidades. Las competencias desarrolladas, como la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la comunicación efectiva y la colaboración, se convierten en herramientas para incidir de manera positiva en la vida de las personas. Así, la enseñanza de la Matemática Básica trasciende el aula y se convierte en un medio para impulsar el desarrollo sostenible y la justicia social en Nagua, Puerto Plata, La Vega y Santiago, alineándose con los Objetivos de Desarrollo Sostenible y con la misión de formar ciudadanos íntegros y comprometidos.

Conclusiones

La implementación de la estrategia didáctica con enfoques, humanista y ético y el STEAM+H en la asignatura Matemática Básica (MAT-0140) ha demostrado ser un medio eficaz para alcanzar los objetivos formulados al inicio de esta investigación porque favorece el aprendizaje significativo, desarrollar competencias interdisciplinarias y fortalecer el compromiso social y ético de los estudiantes. Tal como plantean Chacón (2014) y Ramírez y Quintana (2024), la educación universitaria requiere de marcos formativos que integren la dimensión moral y axiológica con el dominio técnico y científico; en este sentido, la estrategia propuesta responde a esa necesidad al articular los saberes matemáticos con valores y actitudes orientadas al bien común.

Los proyectos desarrollados evidencian que, en coherencia con el enfoque STEAM+H (Almonte & Núñez, 2024; Santos & López, 2021), es posible conectar la Matemática con problemáticas reales de Nagua, Puerto Plata, La Vega y Santiago, logrando que el aprendizaje trascienda la teoría y se sitúe en contextos auténticos. El uso de metodologías activas como el Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP) y el Design Thinking, referidas en el marco teórico, permitió que los estudiantes se convirtieran en protagonistas de su aprendizaje, diseñando soluciones creativas y técnicamente fundamentadas a desafíos sociales y ambientales. Ello se alinea con el planteamiento de Ausubel sobre la importancia de anclar el nuevo conocimiento a las experiencias previas para lograr un aprendizaje significativo.

Asimismo, los resultados confirman que la estrategia promueve el desarrollo de competencias, tales como el pensamiento crítico (López & Martínez, 2021), la resolución de problemas, la colaboración y la alfabetización tecnológica. Estas competencias no solo potencian el rendimiento académico, sino que fortalecen la capacidad de los estudiantes para analizar, evaluar y proponer soluciones a problemas complejos con una perspectiva ética y sostenible.

Por todo lo expuesto, la experiencia evidencia que integrar los enfoques STEAM+H y humanista-ético en la enseñanza de la Matemática Básica representa una estrategia educativa pertinente y transformadora. Al articular la formación académica con la responsabilidad social, se promueve una educación superior orientada al desarrollo humano, capaz de formar profesionales comprometidos con la transformación de sus comunidades mediante acciones innovadoras, técnicamente fundamentadas y éticamente responsables.

Referencias y bibliografía

Almonte Batista, RM, y Núñez Lazala, GR (2024). Experiencia de formación con docentes del Nivel Secundario en la República Dominicana. *Revista de Innovación en Enseñanza de las Ciencias*, 7(1), 100–109. https://doi.org/10.5027/reinnec.V7.I1.153

Chacón, N. (2014). *Enfoque ético, axiológico y humanista en la educación y la actividad científico-investigativa*. Editorial Académica Española.

García, P., Santos, M. y López, R. (2023). STEAM+H y el aprendizaje interdisciplinario: Beneficios y desafíos en la educación actual. *Revista de Innovación Educativa*, 29(3), 45-62.

García, P. y Pérez, C. (2021). Aprendizaje Basado en Proyectos y su impacto en la formación interdisciplinaria. *Educación y Tecnología*, 15(2), 87-102.

Johnson, R., Smith, L. y Taylor, M. (2023). Design Thinking en la educación superior: Un enfoque centrado en el aprendizaje innovador. *Revista de Estrategias Educativas*, 10(1), 23-39.

López, R. y Martínez, L. (2021). Pensamiento crítico y resolución de problemas en la enseñanza STEAM. *Revista de Educación Científica*, 18(4), 112-130.

Naciones Unidas. (2016). *Agenda 2030 y los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS)*. ONU.

Pérez, C. y Martínez, L. (2022). STEAM+H y la integración de las Humanidades en la enseñanza de las ciencias. *Avances en Educación*, 27(5), 65-80.

Ramírez, G. (2023). Desarrollo del pensamiento crítico en la educación interdisciplinaria. *Revista de Pedagogía*, 20(2), 56-74.

Ramírez, G. y Quintana, A. (2024). Formación en valores y la educación humanista: Un análisis didáctico. *Revista Internacional de Educación Ética*, 14(1), 35-51.

Santos, M. y López, R. (2021). Implementación del enfoque STEAM+H en la educación universitaria: Retos y oportunidades. *Ciencia y Educación*, 25(3), 98-115.

Taveras, M. (2018). La importancia del aprendizaje interdisciplinario en la educación superior. *Educación y Sociedad,* 22(1), 78-93.

Volumen y visualización: Una mirada práctica al aprendizaje de la geometría en el aula

Catalina **Molano** Carranza
Institución Educativa Escuela Normal Superior María Auxiliadora
Colombia
ebenezercata@hotmail.com
Osvaldo Jesús **Rojas** Velasco
Universidad Antonio Nariño
Colombia
orojasv69@uan.edu.co
Hildebrando **Díaz** Soler
Institución Educativa Gustavo Romero Hernández
Colombia
hildebrandodiaz@hotmail.com

Resumen

El presente estudio muestra los resultados de una investigación sobre la enseñanza del concepto de volumen mediante algunas tareas manipulativas para fortalecer la visualización espacial y la comprensión del volumen en estudiantes de grado noveno. A través de actividades que involucran la construcción, descomposición y recomposición de objetos tridimensionales, se buscó mejorar las habilidades de visualización y análisis geométrico. Se empleó un enfoque cualitativo con observaciones directas. Los resultados muestran que los estudiantes que participaron en estas tareas lograron una mejor interpretación de las estructuras tridimensionales, así como una mayor capacidad para justificar sus razonamientos sobre el volumen. Se destaca la importancia de incluir metodologías activas que favorezcan la experimentación y el razonamiento matemático en contextos escolares.

Palabras clave: Habilidades de visualización; Pensamiento espacial; Tareas de aprendizaje; Volumen.

Definición y relevancia del problema

La enseñanza del volumen en la Educación Matemática es un desafío que requiere estrategias didácticas innovadoras para fortalecer la comprensión y el pensamiento espacial de los estudiantes. De acuerdo con el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 1998), el desarrollo del pensamiento geométrico en los niveles escolares iniciales es fundamental para la construcción del conocimiento matemático, ya que permite a los estudiantes interpretar y manipular información visual y espacial de su entorno.

Desde esta perspectiva, la visualización matemática se considera una habilidad clave en el aprendizaje del volumen, ya que facilita la comprensión de las propiedades geométricas y su relación con el espacio tridimensional (Torres, 2009). Esta habilidad es esencial para la representación mental de figuras y la solución de problemas geométricos, lo que incide directamente en la adquisición de conceptos matemáticos básicos.

La presente investigación se fundamenta en la necesidad de fortalecer las habilidades de visualización a través de tareas manipulativas que permitan a los estudiantes interactuar de manera concreta con objetos tridimensionales. Diversos estudios han demostrado que la manipulación de materiales físicos y la exploración de diferentes perspectivas espaciales mejoran la comprensión del volumen y otros conceptos geométricos (Zazkis, Dubinsky & Dautermann, 1996).

En este contexto, se plantea la importancia de diseñar tareas de aprendizaje que involucren la construcción, descomposición y recomposición de objetos tridimensionales, permitiendo a los estudiantes experimentar con estructuras geométricas y desarrollar una comprensión más profunda del volumen. Asimismo, se busca promover el razonamiento matemático a partir del análisis de representaciones planas y tridimensionales, favoreciendo la transición entre distintas formas de representación espacial.

Referencial teórico

La visualización matemática es un proceso cognitivo esencial en el aprendizaje geométrico (Presmeg, 2006). Se define como la capacidad de generar, interpretar y transformar representaciones espaciales de objetos matemáticos (Suárez & León, 2016). Diversos autores han identificado habilidades de visualización como la interpretación de perspectivas, la rotación mental y la construcción de modelos tridimensionales (Gonzato et al., 2013).

Adicionalmente, Gonzato & et ál., (2013) mencionan que:

> (…) la interpretación y la comunicación de la información de manera figural (con descripciones gráficas y modelos de hechos y relaciones espaciales) o verbal (vocabulario específico utilizado en geometría, expresiones y términos deícticos) son importantes habilidades relacionadas con la visualización y la orientación espacial. (p.100)

Inclusive, la visualización permite al ser humano ejecutar acciones de transformación de diversas representaciones externas de su contexto, ya sea en imágenes mentales, de información verbal, diagramas, imágenes visuales, gráficos, dibujos, esquemas, movimientos, figuras geométricas, entre otras. Además, es una herramienta en la elaboración de razonamientos y argumentos, que permiten explicar los fenómenos del contexto; estas herramientas hacen parte de la formación del pensamiento espacial y visual del individuo.

En tal sentido, la visualización proporciona diversas habilidades a los individuos para reflexionar y comunicar a otros, o a sí mismo, la información que observa de su contexto. Y a su vez, le otorga la capacidad para interpretarla mediante el uso de representaciones materiales (dibujos, planos, fotos, esquemas, maquetas, entre otros) y mentales (objetos imaginarios) aportando a la construcción de su conocimiento y el de otros.

Cabe resaltar, a Gonzato, Godino y Fernández (2013) quienes proponen varias tareas para el desarrollo de la visualización espacial basada en actividades que impliquen la interpretación de objetos tridimensionales desde diferentes perspectivas. La manipulación de figuras y la exploración de sus propiedades espaciales, las cuales permiten fortalecer la comprensión geométrica y fomentar el aprendizaje significativo en los estudiantes.

Teniendo en cuenta el párrafo anterior, a continuación, se presenta un tipo de tarea propuesta por estos autores, dónde se realiza una descripción de las actividades, acciones y respuestas que los estudiantes ponen en juego cuando se enfrentan a diferentes tareas de aprendizaje con el fin de abordar la enseñanza de la visualización y el desarrollo de habilidades en el contexto de la geometría espacial.

Tabla 1
Tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales.

Tipo de tarea: interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales	
Descripción de la actividad	Requieren reconocer y cambiar puntos de vista (cambio de perspectivas), interpretar perspectivas de objetos, rotar mentalmente objetos, interpretar diferentes representaciones planas de objetos tridimensional (perspectivas, vistas, entre otras), convertir una representación plana en otra, construir objetos a partir de una o más representaciones planas. Estas tareas construyen técnicas para representar un objeto o un espacio, y al mismo tiempo se aprende a leer diferentes tipos de representaciones planas y los códigos respectivos.
Acciones	**De manera general**: Reconocer, describir, fabricar o transformar objetos. **Componer y descomponer en partes:** dadas dos o más piezas componerlas para formar un sólido, o viceversa, dado el sólido descomponerlo en dos o más partes. **Contar elementos:** dado un sólido contar los elementos que lo componen (unidades de volumen, caras, aristas, vértices, etc.).
Respuestas	**Construcción:** si se requiere la construcción del objeto tridimensional. **Dibujo:** si se requiere una representación plana del objeto tridimensional. **Identificación:** si se requiere identificar la repuesta correcta entre más opciones. **Verbal:** si se requiere una respuesta verbal /numérica (que no exija ninguno de los anteriores tipos de repuestas).

Fuente: *aportes de Gonzato & et al., 2013*

Por otro lado, la propuesta metodológica de Anwandter-Cuellar (2012) enfatiza que la comprensión del volumen puede abordarse desde tres enfoques: (a) como magnitud medible, (b) a través de la representación de volúmenes con unidades de medida y (c) mediante la comparación de volúmenes a partir de transformaciones geométricas. Estos enfoques proporcionan un marco teórico para diseñar tareas que permitan desarrollar el pensamiento geométrico de los estudiantes.

Método y desarrollo conceptual

Esta investigación adopta un enfoque cualitativo con diseño fenomenológico interpretativo (Hernández & Mendoza, 2018), basado en la observación y análisis de tareas de aprendizaje en el aula. Participaron 24 estudiantes de grado noveno, organizados en grupos de tres integrantes. Se emplearon estrategias didácticas que involucraban la manipulación de objetos concretos (galletas, cartas de póker) para la construcción y comparación de volúmenes.

Además, Hernández & Mendoza (2018) manifiestan que los "(…) diseños fenomenológicos interpretativos tienen como propósito principal explorar, describir y comprender las experiencias de las personas respecto a un fenómeno y descubrir los elementos en común de tales vivencias" (p.548).

Vale la pena decir, que este enfoque propone analizar y comprender las descripciones que los estudiantes hacen de manera individual y colectiva desde su experiencia en el aula, partiendo de una tarea de aprendizaje, que permite obtener resultados, acciones y respuestas para evaluar de manera integral el desarrollo de habilidades de visualización, proporcionando evidencias que respalden la efectividad de las tareas manipulativas en la enseñanza del volumen.

1° Diseño de la tarea de aprendizaje

La tarea de aprendizaje diseñada consistió en actividades manipulativas donde los estudiantes debían construir diferentes estructuras con materiales simples, como galletas y cartas de póker, para estimar su volumen. Se promovieron acciones como la descomposición y recomposición de figuras tridimensionales, la comparación de volúmenes mediante conteo de unidades y la interpretación de proyecciones en dos dimensiones. Además, se propusieron problemas abiertos que requerían justificar verbalmente las estrategias utilizadas para determinar el volumen de distintos cuerpos geométricos. A continuación, se presenta la tarea de aprendizaje propuesta: Actividad 1. Reto 1. (A1-R1). Comparando Construcciones.

Pregunta 1 (P1). Construyan torres diferentes utilizando todas las galletas rectangulares o circulares asignadas. ¿De todas las torres construidas, cuál ocupa mayor y menor espacio? ¿Por qué?

Pregunta 2 (P2). Ahora, elijan una de sus torres y con las demás torres reacomoden las galletas de tal forma que sean semejantes a la torre que eligieron. ¿Qué pueden decir acerca del espacio ocupado?

Pregunta 3 (P3). Tome 2 barajas de cartas de póker y póngalas una sobre la otra en su pupitre, ubique las barajas en las diferentes posiciones que se muestran en la imagen, responda las siguientes preguntas: a) El volumen de la Fig. 1., y la Fig. 4. ¿es igual o diferente? ¿Por qué?; b) ¿Cómo es el espacio ocupado por las barajas de póker en cada uno de los casos? justifique sus respuestas.

Imagen 1. Diferentes posiciones baraja de cartas de póker.

Pregunta 4 (P4). El sólido A se ha formado a partir de galletas iguales. Su volumen es $148{,}003\ cm^3$, su área lateral es $107{,}16\ cm^2$ y su área total es $170{,}14\ cm^2$ ¿Qué se puede decir del volumen, del área lateral y del área total de los sólidos B y C construidos a partir de A?

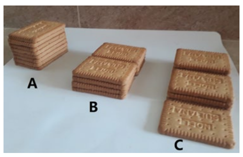


Imagen 2. Galletas sultana.

Pregunta 5 (P5). He comprado cuatro tacos de galletas Saltín, un taco contiene 17 galletas que colocadas una encima de la otra forman una altura de $8{,}5\ cm$. Una galleta mide $9{,}5\ cm$ de largo y $6\ cm$ de ancho. a) ¿Necesito saber cuánto espacio ocuparan los 4 tacos de galletas en el mueble de mi cocina? ¿Expliqué como hago para calcular este espacio? b) ¿Cómo debería acomodar las galletas de tal manera que el espacio ocupado sea menor?

Imagen 3. Galletas Saltín.

Pregunta 6 (P65). Coloca 12 galletas circulares una encima de la otra como harían para calcular el espacio ocupado por estas galletas. Justifique su respuesta.

2° Procedimiento de aplicación.

La implementación de las tareas se llevó a cabo en sesiones de clase de dos horas, donde los estudiantes trabajaron en grupos de tres. Durante el desarrollo de la actividad, los docentes desempeñaron un rol de mediación, realizando preguntas orientadoras y promoviendo la discusión grupal para fortalecer la argumentación matemática. Se fomentó el aprendizaje colaborativo, permitiendo que los estudiantes compartieran sus estrategias y reflexionaran sobre sus propios procesos de resolución.

Resultados

Los resultados obtenidos reflejan un impacto positivo en el desarrollo de habilidades de visualización y en la comprensión del concepto de volumen. Los estudiantes que participaron en las tareas manipulativas mostraron una mejor capacidad para interpretar estructuras tridimensionales y justificar sus razonamientos sobre el volumen. Sin embargo, algunos grupos mostraron dificultades al transferir los aprendizajes a representaciones abstractas.

Se observó que los estudiantes utilizaron diversas estrategias para determinar el volumen de los sólidos, como el conteo de elementos, la aritmetización y la composición y descomposición de partes. Además, se evidenció que el uso de materiales concretos facilitó la construcción del conocimiento geométrico y permitió a los estudiantes explorar diversas representaciones espaciales.

A continuación, se muestra una descripción general sobre el tipo de tareas de aprendizaje volumen, habilidades de visualización, acciones y respuestas puestas en juego por los estudiantes en el desarrollo de actividad propuesta.

Tareas de aprendizaje y habilidades de visualización A1-R1

Este reto se enmarca en las tareas de aprendizaje desde el punto de vista de comparación, medida y geométrica- numérica; de *comparación* (volúmenes) porque busca reconocer diferencias y semejanzas para deducir relaciones entre sí. De *medida* enfocada a la relación con el número, tamaño o cantidad de algo y desde la perspectiva *geométrica-numérica*, en este sentido se tiene en cuenta al volumen como un tamaño, Anwandter-Cuellar (2013) cita a Moreira-Baltar (1994-1995) resaltando que el área se puede comparar desde el punto del tamaño y esto aplica para el volumen por ser una magnitud que permite encontrar relaciones de equivalencia entre sólidos definiendo estructuras de orden, suma, resta y división sin recurrir a medidas.

El propósito de estas tareas consistió en acercar a los estudiantes hacia la construcción del objeto matemático volumen mediante diferentes actividades prácticas. También que ellos adquirieran la noción de volumen a través de la composición y descomposición de cuerpos con la manipulación de objetos concretos de diferentes formas, tamaños y texturas.

1° Tareas de aprendizaje de volumen R1

Para **P1** y **P2., desde** la perspectiva *geométrica-numérica*, cinco grupos hacen una relación de equivalencia de orden utilizando la acción del conteo de galletas, sin importar la posición en que se ubiquen las galletas si en cada torre elaborada hay igual cantidad de galletas el volumen es el mismo luego el espacio ocupado también. Tres grupos consideran que el volumen es diferente cuando se colocan todas las galletas cubriendo un plano aquí el espacio ocupado es mayor que cuando está en forma de torre.

En **P3a y P3b,** la relación de equivalencia la realizan por el número de barajas utilizadas, cuatro grupos dudaron en decir que el volumen era igual por la posición de las cartas en la fig. 4., cabe resaltar que la tarea desde el punto de vista es de tipo geométrico ya que se debe identificar si existe variación del volumen cuando se realiza una transformación geométrica. La concepción del tamaño del volumen en este caso está relacionada con la siguiente propiedad relacionada con la medición: “El volumen es invariable por isometría, en otras palabras, si aplicamos una isometría a un sólido, su volumen se conserva”. Aquí interviene la docente haciendo preguntas a los grupos utilizando ejemplos de su contexto y al final ellos deducen que pasa lo mismo con las galletas sin importar la forma en que estén posicionados se mantiene el mismo volumen.

P4 y **P5,** Aquí cinco grupos de estudiantes siguen utilizando relaciones de equivalencia teniendo en cuenta el patrón de medida elegido y hacen uso de la aritmetización, a pesar de que se habían realizado experiencias relacionadas en los puntos anteriores en la **P5b** un grupo concluye que los 4 tacos de galletas se deben ubicar uno detrás del otro para que ocupen menos espacio.

En cuanto a la tarea de *medida* hacen la elección de un patrón de medida en este caso la galleta es el patrón elegido por todos los grupos y determinar el volumen de las torres por el número total de galletas, número de barajas, número de tacos.

En la tarea de *comparación* todos los grupos la asumen a través del conteo de las galletas y de las barajas de póker. Por otro lado, el G6 y el G1 también hacen uso de la tarea de *aritmetización* haciendo uso de la fórmula, teniendo en cuenta las dimensiones de las galletas, taco de galletas, y de las barajas de póker y realizando el producto entre sus dimensiones cuando eran rectangulares.

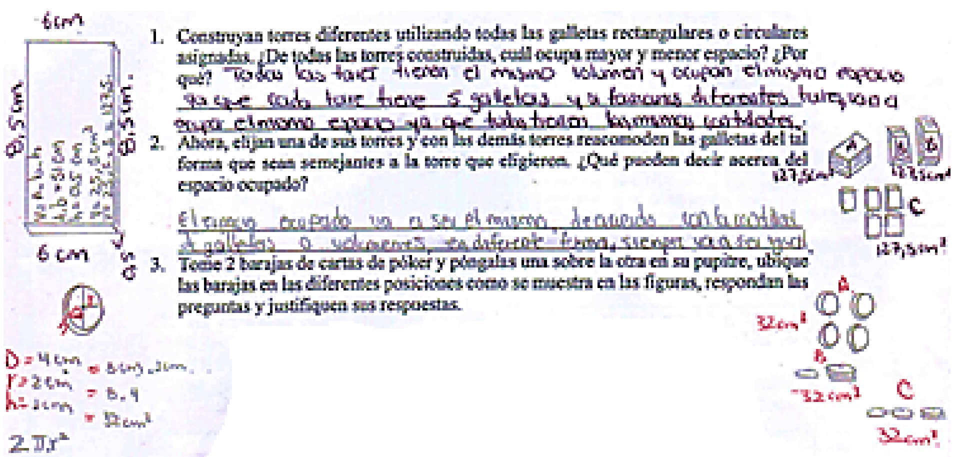


Imagen 4. Tareas de aprendizaje volumen. Actividad 1- Reto 1- Pregunta 1 y 2. *A1-R1- P (1-2)*

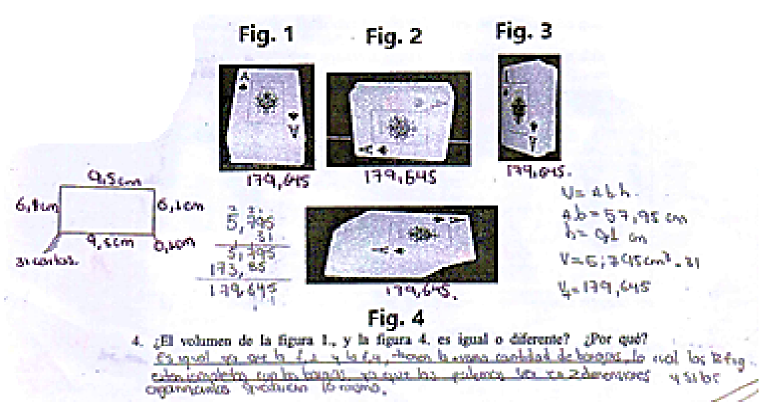


Imagen 5. Tareas de aprendizaje volumen A1-R1- P (3-4)

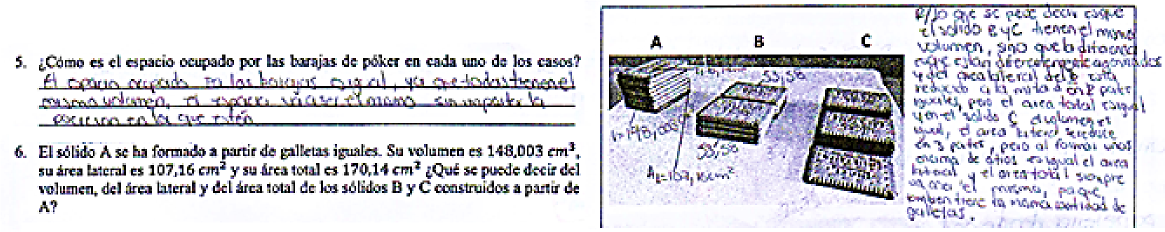


Imagen 6. A1-R1- P (4) Tareas de aprendizaje volumen involucradas

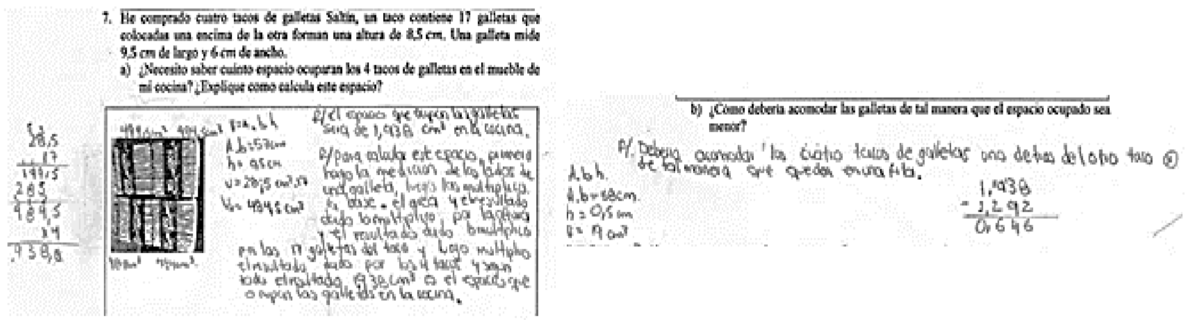


Imagen 7. A1-R1- P (5) Tareas de aprendizaje volumen involucradas

P6, Esta pregunta demostró dificultades y errores de tipo cognitivo seis grupos coinciden de una u otra forma que para determinar el espacio ocupado por las galletas de forma circular es necesario calcular el ancho largo de una galleta y lego se multiplica por la cantidad de galletas que conforman la torre. Es decir, asocian fórmulas del cálculo de áreas de algunas figuras planas para determinar el volumen.

2° Habilidades de visualización puestas en juego por los estudiantes de grado noveno A1.

En esta sección se muestran las habilidades de visualización, acciones y respuestas que los estudiantes utilizan en los diferentes retos. Cabe resaltar que la A1 se enmarcan en el tipo de tarea para el desarrollo de habilidades espaciales propuesto por Gonzato & et al. (2013) clasificada en la interpretación de perspectivas de objetos tridimensionales. Es decir que este tipo de tarea permite al estudiante convertir un sólido en otro por medio de la composición y descomposición de sus partes, construir sólidos partiendo de unidades de patrón elegidas (conteo de elementos).

Habilidades de Comunicación. Esta habilidad requiere identificar relaciones entre distintas unidades de medida, unidades de la misma magnitud y determinar su pertenencia. Las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A1 en esta habilidad fueron a manera general:

- La mayoría de los grupos identificaron el cálculo de volúmenes utilizando la unidad de medida apropiada (uso de galletas, tacos y cubos) relacionándola en las situaciones planteadas en los retos.
- Reconocieron que pueden utilizar diferentes unidades de medidas es decir tomando un patrón de medida como referencia y a partir de allí obtener el volumen de un sólido.
- Por otro lado, cuatro grupos solo reconocen esa magnitud como única unidad de medida y un grupo no reconoce la unidad de medida para la experiencia realizada, expresa solo cantidades numéricas.

- Algunos grupos presentaron dificultades en decir que los volúmenes no son los mismos, a sí se utilicen la misma cantidad de galletas, ellos perciben que si se cubre por pavimentación (usando galletas) una región esta ocupa mayor volumen y espacio que si se hacen torres de galletas.
- El tipo de respuesta utilizado por los grupos de trabajo son de tipo verbal/ numérica y de construcción.

Habilidades de Razonamiento. Esta habilidad está relacionada con generalizar procedimientos de cálculo para encontrar el volumen de algunos sólidos esta habilidad se evidencia en las acciones que los estudiantes usaron para resolver la A1 fue:

G1, G6, G5, G3 y G7 justificaron la validez de sus procedimientos realizando representaciones, dibujos y construcciones con los sólidos, también de forma verbal, la obtención del volumen sus sólidos, aunque en algunos ítems tenían dudas en el transcurso de la sesión se fueron aclarando por el docente o por compañeros de otros grupos, en el momento de realizar la justificación de las respuestas de cada grupo (estilo tertulio) muchos de ellos lograron aclarar sus inquietudes.

Habilidades de Resolución. Esta habilidad concierne a establecer y utilizar diferentes procedimientos de cálculo para hallar medidas de volumen. Además, involucra tareas de medición utilizando de manera pertinente unidades de medidas. Las acciones puestas en juego por los estudiantes para resolver la A1 fueron:

- Algunos grupos hacen uso de propiedades geométricas de manera implícita en el desarrollo de sus retos.
- Reconocen que no existe un único patrón en unidades de medición, en este caso para el volumen.
- Usaron de manera pertinente los materiales utilizados en estos retos para determinar el volumen de los sólidos creados por ellos.
- Usaron varias estrategias para determinar el volumen de los sólidos, por medio de contar elementos, a través de las fórmulas es decir utilizan la aritmetización para obtener sus respuestas, componen y descomponen en partes los sólidos, entre otras.

Conclusiones

Las observaciones en el aula evidenciaron que los estudiantes que participaron activamente en la manipulación de materiales y en discusiones grupales desarrollaron una mejor comprensión del volumen. Sin embargo, algunos grupos mostraron dificultades al transferir los aprendizajes a representaciones abstractas.

Estos hallazgos destacan la importancia de integrar tareas manipulativas en la enseñanza del volumen y sugieren la necesidad de incorporar tecnologías digitales y actividades que refuercen la transición entre lo concreto y lo abstracto.

Se observa que a lo largo de la actividad se presentaron las habilidades de visualización, las tareas de aprendizaje del volumen que se relacionan con la actividad desarrolladas por los estudiantes junto con las acciones y respuestas puestas en juego por parte de los grupos de trabajo.

Los hallazgos de esta investigación resaltan la importancia de integrar estrategias didácticas basadas en tareas manipulativas para fortalecer la comprensión del volumen y el desarrollo de habilidades de visualización. Se evidencia que el uso de materiales concretos facilita la construcción del conocimiento geométrico y permite a los estudiantes explorar diversas representaciones espaciales.

Asimismo, se destaca el papel del docente como mediador en el proceso de aprendizaje, promoviendo la argumentación matemática y la reflexión sobre las propiedades del volumen. Sin embargo, se identificó la necesidad de fortalecer la articulación entre la manipulación concreta y la representación simbólica para mejorar la generalización de estrategias de cálculo.

Se recomienda continuar explorando estrategias complementarias, como el uso de tecnologías digitales y simulaciones interactivas, para reforzar la transición entre lo concreto y lo abstracto en el aprendizaje del volumen.

Referencias y bibliografía

Anwandter-Cuellar, N. (2013). *Conceptions d'élèves de collège sur la notion de volume*. Petit x(93), 53-75.

Beltrán, L. & Suárez, W. (2014). *Proceso de visualización en geometría, perspectiva de género*. Comunicación presentada en Encuentro Distrital de Educación Matemática. EDEME1 (pp. 198-217). Bogotá, Colombia: Prácticas y propuestas innovadoras en el aula de matemáticas: realidades y desafíos. MEMORIAS.

Olmo Romero, M.A., Moreno, M.F. & Gil, F. (1993). *Superficie y volumen. ¿Algo más qué el trabajo con fórmulas?* Madrid: Síntesis, S.A.

Fernández, T. (2013, Septiembre 5,6 y 7). *La investigación en visualización y razonamiento espacial. Pasado, presente y futuro*. Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM), 19-42.

Fernández, T. (2014). *Atendiendo habilidades de visualización en la enseñanza de la geometría*. Memorias IX Festival Internacional de Matemática, 21-33.

Gonzato, Margherita., Godino, Juan D., Contreras, Ángel y Fernández, Teresa. (2013, Septiembre 5, 6 y 7). *Conocimiento especializado de futuros maestros de primaria sobre la visualización de objetos tridimensionales.* Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática. (SEIEM) , 311- 318.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, P. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL.

MEN. (1998, Junio 7). Serie lineamientos curriculares Matemáticas. Lineamientos curriculares- Ministerio de Educación de Colombia. Santa Fe de Bogotá, D.C., Bogotá, Colombia: Magisterio. Retrieved Junio 27, 2018, from https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-89869_archivo_pdf9.pdf

MEN, Matriz de Referencia Matemáticas. Siempre día E. (2016). Retrieved from http://aprende.colombiaaprende.edu.co/es/node/88958: http://aprende.colombiaaprende.edu.co/ckfinder/userfiles/files/articles-352712_matriz_m.pdf

Suarez Moya, W. A., León Corredor, O. L. (2016, Julio- diciembre). El aprendizaje de la visualización espacial en niños y en niñas. Revista Horizontes Pedagógicos, 18(2), 110-119.

Torres Ponjuán, D. (2009,, Diciembre). Aproximaciones a la visualización como disciplina científica. ACIMED, 20(6), 161-174. Retrieved 02 28, 2019, from http://scielo.sld.cu/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1024-94352009001200005&lng=es&tlng=es.

Índice alfabético de autores

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

ISBN: 978-9945-30-207-3

www.redumate.org