

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

Formación inicial de profesores



Volumen 2. *Memorias IV CEMACYC*
República Dominicana, 2025

Patrick Scott, Yuri Morales y Angel Ruiz
Editores



© 2025

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE)

www.redumate.org

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025

[Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz. Colaboradora: Sarah González

Volumen 2: Formación inicial de Profesores

ISBN Obra Completa: 978-9945-30-168-7

ISBN Volumen: 978-9945-30-193-9

Todos los materiales incluidos en esta publicación pertenecen a la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe.

Estos materiales están bajo una [licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

En la reproducción de cualquier parte de este libro se deben consignar: los créditos a los autores y a la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera a REDUMATE y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no ha sido publicado previamente y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Para citar la obra completa

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc>

Ejemplo para citar un volumen

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC*. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1>

Ejemplo para citar un artículo

Artigue, M. (2025). La enseñanza de las Matemáticas frente a los retos del mundo actual. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC* (pp. 18-29). Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1>

Contenidos

<u>Presentación</u>	i
<u>A Matemática dos anos iniciais do Ensino Fundamental: O pedagogo sabe?</u> Maria José Costa dos Santos, Vladiana Costa dos Santos, Gilberto Santos Cerqueira	1
<u>A relevância do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência na formação inicial e continuada de professores de Matemática para a educação básica</u> Thaís Rodrigues Ferreira Machado, Martha Lima Soares Martins	9
<u>Análisis de las Aprehensiones Cognitivas en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática</u> Domingo Felipe Aráuz Chévez, Hilario Ernesto Gallo Cajina	19
<u>Características del aprendizaje de la práctica profesional específica de planificar lecciones: El caso de la razón y proporción</u> Jonathan Espinoza González, Ángela Buforn, Salvador Llinares	29
<u>Conocimiento conceptual y procedimental en futuros profesores. El caso de las fracciones</u> Ivette Anel Delgado Valdez, Luis Manuel Aguayo Rendón, Lorena Alejandra Medina Hernández	37
<u>Conocimiento especializado del profesor de Matemática en formación inicial: Argumentos matemáticos de la demostración</u> Jennifer Fonseca Castro, Christian Alfaro Carvajal	46
<u>Conocimiento matemático de los profesores en formación inicial: Procedimientos relacionados al tema de polígonos</u> Jennifer Fonseca Castro, Helen Guillén Oviedo	54
<u>Creatividad en la Enseñanza de las Matemáticas. Percepción de Profesores en Formación Inicial</u> Eulalia Calle, Marco Jácome, Ruth Coronel	63
<u>Desenvolvimento profissional e o conhecimento matemático para o ensino em Estudos de Aula: Uma revisão da literatura</u> Wilbertt José de Oliveira Moura, Maria Madalena Dullius	71
<u>Do passado ao presente: contribuições do PROTAD para formação inicial de professores em Trigonometria</u> Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues, Maria Alice Veiga Ferreira de Souza	79
<u>Educação de jovens e adultos: Um relato de experiência sobre o programa residência pedagógica em Matemática</u> Pedro Luiz Alves Gomes, Rui Seimetz, Igor dos Santos Lima	87

<u>El Análisis Didáctico en la formación y ejercicio docente: Percepciones de profesores en contextos escolares auténticos</u>	89
Claudia Matus-Zúñiga, Andrea Pinto-Vergara	
<u>El Diseño Universal para el Aprendizaje en la enseñanza matemática en la Licenciatura en Educación Preescolar</u>	98
José Armando Ortiz Ruiz, Luis Adrián Miranda Pérez, Héctor Alonso Rosas Álvarez	
<u>El fenómeno de Redención Matemática en docentes en formación de Educación Primaria: Primeros hallazgos</u>	107
Alma Soto Castillo, José Antonio Juárez López	
<u>El número como cantidad de magnitud en la enseñanza de los números enteros con modelos concretos</u>	117
Alberto Zapatera, Àngela Buforn, Eduardo Quevedo, Rubén Lijó	
<u>El razonamiento geométrico de docentes de Matemáticas en pre-servicio caracterizado según el modelo Van Hiele</u>	125
Miguel Picado Alfaro, José Romilio Loría Fernández	
<u>Estructuras de lecciones diseñadas según los principios de la enseñanza exploratoria por futuros profesores de Matemáticas</u>	134
Paloma Santonja Serrano, Mar Moreno Moreno, Salvador Llinares Ciscar	
<u>Experiencias de futuros docentes aprendiendo Matemáticas en educación primaria rural</u>	143
Reina San Martín	
<u>Explorando la ecuación cuadrática: Un diseño de clase centrado en representaciones y el método babilónico</u>	152
José David Vargas, Karla Contreras, Helen Alfaro	
<u>Explorar el Universo a través de la Geometría</u>	161
Julián Félix, Magdalena Waleska Aldana Segura	
<u>Intervención de recursos digitales para la comprensión de nociones geométricas en el profesorado de educación primaria</u>	165
Noelia Saleme, Soraya Eugenia Pol	
<u>La preparación académica de futuras y futuros docentes de Matemática del nivel elemental en Puerto Rico</u>	168
Dannael Carrero Pellicier	
<u>Modelos TPACK y CCDM: Algunas claves para promover la reflexión docente</u>	176
Yuri Morales-López, Adriana Breda, Vicenç Font	

<u>Pensamiento matemático estructural con problemas retadores de la teoría de números y la Matemática recreativa</u>	185
Leonardo Favio Trujillo Diaz, Alexander Paredes Martínez	
<u>Praticando a construção e o desenvolvimento de uma tarefa matemática exploratória na formação inicial de professores</u>	192
Raquel Carneiro Dörr, Regina da Silva Pina Neves, Luciana Maria Dias Ávila, Fernanda Drummond Pequeno Valadão, Mikael Christopher Souza de Barros, Milena de Souza Mangueira	
<u>Profesores de Matemáticas: Una mirada desde la investigación narrativa</u>	201
Elizabeth Torres Puentes	
<u>Promoción de la argumentación en geometría: Un análisis de las intervenciones de futuros docentes de Matemática</u>	209
Andrea Araya, Rebeca M. Ventura	
<u>Proyectos STEAM en Preescolar, experiencias documentadas en las Jornadas de Práctica Docente</u>	218
Blanca Esthela Ledezma Durán, Juan Víctor Alejandro Meléndez Gómez, Mayela Vargas Ramos	
<u>Reforzar el sentido de la demostración en un curso de Análisis matemático vía el teorema del valor intermedio</u>	227
Analía Bergé, Alexandra Fregueiro	
<u>Significados atribuidos a las variables aleatorias. Un estudio con futuros profesores</u>	233
Federico De Olivera Lamas, Luciana Olesker Pérez, Daniela Pagés Rostán	
<u>Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) na formação inicial de professores de Matemática no Brasil</u>	242
Regina da Silva Pina Neves, Raquel Carneiro Dörr, Juliana França Viol Paulin, Lemerton Matos Nogueira, Alessandro Jacques Ribeiro	
<u>Trabajo formativo-colaborativo entre formadores y futuros profesores de Matemática en el desarrollo de un Estudio de Clase (Lesson Study)</u>	250
Guillermo Ramírez-Montes, Yuriko Yamamoto-Baldin, Regina Pina-Neves, Fabián Gutiérrez-Fallas	
<u>Un análisis cuasiexperimental del desempeño académico en Geometría con futuros maestros: Estudio de revisión.</u>	258
Vienbenida Igualada Cortez, Tatiana María Portugal, Rodrigo Yoel Combe, Olmedo Aparicio Batista	

<u>Un camino alternativo para presentar la propiedad de completitud del sistema de los números reales</u>	267
Alexandra Fregueiro, Analía Bergé	
<u>Una propuesta queer con enfoque interseccional para la formación inicial de profesores de Matemáticas</u>	273
Mateo Pinillos-Zapata, Sara Milena Soto Vanegas, Zaida Margot Santa-Ramírez	
<u>Índice alfabético de autores</u>	281

Presentación

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 es el título de las *Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (IV CEMACYC) que se llevó a cabo en Santo Domingo, República Dominicana, del 2 al 7 de noviembre de 2025.

Este congreso fue organizado por la [Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe](#) (REDUMATE) y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM). Este cuarto congreso tuvo un gran éxito con más de 300 ponencias con ponentes de 29 países que decidieron venir a esta región. Esto duplica la cantidad de ponencias que se suelen presentar en los CEMACYC. Es ahora un congreso consolidado, con mucho prestigio. La comunidad internacional decidió integrarse a este evento. El impacto regional es impresionante.

El congreso tuvo casi 800 participantes. Más de 400 docentes de la República Dominicana se beneficiaron directamente de conferencias, talleres, comunicaciones, carteles, sesiones informativas, reuniones de grupo, exposiciones de libros.

Varias instituciones dominicanas, con lucidez, apoyaron a sus maestros (incluso de lugares alejados del país) y aprovecharon esta valiosa oportunidad. Esto constituye un impacto formidable para la educación local.

En 2013 REDUMATE y la PUCMM organizaron el I CEMACYC. Muchos docentes aún recuerdan con orgullo el primer congreso y agradecen haber estado también en este. Hay una relación estratégica entre REDUMATE y PUCMM. República Dominicana es un foco clave para apoyar los esfuerzos regionales.

Esos días de noviembre completaron un proceso de tres años de preparación internacional y local, con autores, revisores, coordinadores de temas, equipos de plataforma (casi 200 personas), que ha apoyado cuidadosamente el fortalecimiento de capacidades en esta región.

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de los CEMACYC es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, los CEMACYC piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden leerse y descargarse en nuestras plataformas varios meses antes del congreso).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Científico Internacional* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, y a los casi 200 *Revisores científicos*.

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y

articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencia con base en *Open Journal Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

Agradecemos el valioso patrocinio de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). Debe recordarse que REDUMATE nació en Costa Rica, en el año 2012, dentro del *Capacity and Networking Project* (CANP) de ICMI. Con ya cuatro congresos exitosos y múltiples acciones educativas en la región, de impacto internacional, esta Red CANP es un ejemplo y un modelo.

En el IV CEMACYC fueron esenciales los apoyos del [*Comité Interamericano de Educación Matemática*](#) y del [*Proyecto Reforma Matemática*](#) en Costa Rica en la organización científica y en la logística tecnológica del congreso.

El *Comité Organizador Local* en la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente humano muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de este congreso, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.



Foto de grupo del IV CEMACYC

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 tiene 11 volúmenes con base en los temas del congreso:

1. Trabajos invitados del IV CEMACYC
2. Formación inicial de profesores
3. Formación continua y desarrollo profesional
4. Dimensiones culturales, políticas, económicas, y ambientales, de las Matemáticas y de la Educación Matemática
5. Currículo y evaluación
6. Historia y filosofía de las Matemáticas y de la Educación Matemática
7. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática
8. Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática
9. Investigación en Educación Matemática.
10. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar y Primaria
11. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, mesa redonda, minicursos, homenaje a Eduardo Mancera) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, pósteres en papel y digitales), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes. *REDUMATE* desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en el IV CEMACYC.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos), con el apoyo de Yuri Morales (Costa Rica). Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el respaldo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las página web oficial de REDUMATE: <https://redumate.org/>.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la Educación Matemática en América Central y El Caribe.

Saludos afectuosos



Ángel Ruiz

Presidente

Consejo Internacional

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe

16 diciembre 2025



A Matemática dos anos Iniciais do Ensino Fundamental: O Pedagogo Sabe?

Maria José Costa dos **Santos**
Faculdade de Educação, Universidade Federal do Ceará
Brasil

mazzesantos@ufc.br

Vladiana Costa dos **Santos**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

vladyanasantos@gmail.com

Gilberto Santos Cerqueira
Faculdade de Medicina, Universidade Federal do Ceará
Brasil

cerqueira@ufc.br

Resumo

Objetiva-se com esse estudo apresentar os saberes relevantes para o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, no curso de Pedagogia de uma Instituição de Ensino Superior (IES), no Brasil. Para o atendimento desse objetivo, trabalhou-se com depoimentos, entrevistas, observações na sala de aula das aulas da disciplina de ensino de Matemática. A disciplina Ensino de Matemática tem 96h para o aprofundamento de todos os conteúdos matemáticos trabalhados do 1º ao 5º ano, conforme a Base Nacional Comum Curricular (BNCC). As reflexões apontam que o estudante de Pedagogia, tem consciência que não domina os conteúdos matemáticos elementares necessários para lecionar nos anos iniciais do ensino fundamental, e que, portanto, necessita de formação continuada. Considera-se as análises relevantes, propõe-se uma ampliação da formação inicial desses profissionais no que se refere aos conteúdos de Matemática.

Palavras-chave: Saber matemático; Formação inicial; Pedagogia; Ensino-aprendizagem; Formação continuada.

Introdução

Os estudantes de Pedagogia, para a docência dos conteúdos matemáticos, enfrentam desafios na formação inicial. De natureza formativa, porque as disciplinas presentes na Matriz Curricular do Curso, dedicadas à Matemática, são insuficientes para trabalhar os conteúdos de Matemática. De tipo operacional, pois a carga horária destinada ao estudo dos conteúdos matemáticos, é insuficiente, apontam Lima; Santos; Borges Neto (2010). Como consequência, esse profissional apresenta muitas lacunas conceituais.

Um exemplo, dessas lacunas, advindas ainda da escola básica, encontra-se no conteúdo das operações fundamentais, especificamente, na subtração, quando ao invés de trabalhar com os fundamentos do Sistema de Numeração Decimal (SND), ampliando conceitos, consolidando vocábulos, como ordem, posição, campo aditivo, agrupamentos, desagrupamentos, reagrupamentos, alguns professores, nos anos iniciais "ensinam" o estudante a "pedir emprestado", ou ainda na adição, dizem ao estudante quando a soma for maior que dez, realizar o "vai um", reforça Santos(2007).

Sendo ele, o profissional que vai lecionar Matemática nos anos iniciais do ensino fundamental, questiona-se: O pedagogo sabe a Matemática que vai ensinar? Como preparar o pedagogo para que ele exerça com competência a docência de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental? Para responder esses questionamentos, a seguir, evidencia-se o tipo de estudo e o objetivo.

Este estudo é qualitativo, do tipo estudo de caso, com fins exploratórios, e objetiva, apresentar os saberes relevantes do pedagogo para o ensino de Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (do 1º ao 5º ano), no curso de Pedagogia de uma Instituição de Ensino Superior (IES), no Brasil. Trata de um curso de pedagogia, que tem apenas uma disciplina de Matemática de 96h. A qual é responsável pela formação desse profissional que vai lecionar Matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental (do 1º ao 5º ano),

Quadro teórico

A formação do pedagogo para o ensino de Matemática, ainda passa por muitas dificuldades e desafios. Mas, embora a literatura, no século XXI, aponte alguns caminhos, ainda, não é possível apresentar soluções, portanto, o debate continua sendo necessário e atual. Inclui-se nesse debate os estudos de Machado (1994), D'Ambrosio (1996), Perraudeau (1996), Moreira (1999), Santos (2022), Ponte (2023) e Radford(2024).

O ensino de Matemática, ou "...a falta de clareza com relação ao papel que a Matemática deve desempenhar no corpo de conhecimentos sistematizados pode ser o principal responsável pelas dificuldades crônicas de que padece seu ensino", relata Machado (1994, p. 8), e, alerta que a Matemática, por sua complexidade e formalismo, exige um pouco mais de atenção.

As dificuldades em aprender Matemática são enormes, mas não são vistas com a mesma seriedade como são as dificuldades com a linguagem, diz Perraudeau (1996), ele ainda destaca que falhar em Matemática não é nenhuma fatalidade, muito pelo contrário, o insucesso

Comunicación; Superior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

nessa disciplina deve ser interpretado como uma disfunção passageira processual, que é sempre possível remodelar, a partir de ações formativas e reflexivas sobre os fatores que impedem o seu sucesso.

Sobre os saberes do pedagogo, no que se refere à Matemática, exige-se algumas características relevantes para esse profissional que vai atuar no século XXI, ele deve saber o que venha ser a Matemática, sobre como se constitui a atividade Matemática, do que se constitui o processo de ensino-aprendizagem Matemática, e, ainda, sobre do que constitui um ambiente propício ao processo de ensino-aprendizagem Matemática, conforme D'Ambrosio (1996).

A formação do pedagogo para o ensino-aprendizagem de Matemática de acordo com Moreira (1999), precisa fazer relação do conhecimento acadêmico (científico) com o conhecimento escolar (saberes). Esses saberes, sustentam uma nova concepção de formação do pedagogo, e, apontam para mudanças fundamentais, que contemplam: resolução de problemas, tendências da Educação Matemática, recursos didáticos (digitais e analógicos), práticas inovadoras a partir das metodologias ativas, visão do cotidiano comum de um cidadão ético reflexivo.

A Base Nacional Comum Curricular-BNCC (Brasil, 2017), é um documento oficial de caráter normativo que propõe mudanças nas diretrizes curriculares, às quais afetam o processo de ensino-aprendizagem na educação básica do país, provocando reflexões sobre a formação dos professores, em destaque a formação inicial do pedagogo. Pode-se dizer que, de modo geral, esse documento trouxe impactos ao processo formativo dos professores, pois, para se adaptar às mudanças, as secretarias de educação tiveram que reformular também seus referenciais curriculares. Mas as universidades públicas do Brasil, num contexto geral, resistem a esse documento e às mudanças que ele produz, e assim, a formação do pedagogo, sob à perspectiva curricular, é a mesma (Santos, 2022).

Recentes estudos, como de Ponte (2023) apontam que estudantes sentem necessidade de novas práticas, de atividades que lhes tragam algum significado, interesse. Para o autor, existe a necessidade de inovação na prática pedagógica, pois os alunos são curiosos o suficiente para iniciar um processo investigativo, basta que o professor oriente as atividades de forma significativa, fundamentados na heurística e não na repetição.

É possível, ainda, encontrar cursos de formação de professores que partem do automatismo para a compreensão, colocando esses pedagogos diante de regras e fórmulas sem significados, sem fazer relação alguma com a realidade do ambiente da sala de aula, que é o lócus que eles atuarão. Percebe-se que esses cursos, atingem somente a parte superficial do processo de ensino-aprendizagem, e, como resultado tem-se um processo educacional imediatista, com pouca compreensão, pautados em saberes alienantes, conforme aponta Radford (2024).

Metodologia

Para o desenvolvimento desta investigação, apropria-se da pesquisa participante numa abordagem qualitativa, segundo Yin (2015). Após algumas leituras, escolhe-se a pesquisa participante por entender que atende aos pressupostos das pesquisas educacionais e, por se

considerar que a pesquisa em tela necessitava de vivências e mediações, por meio da elaboração de um plano de ação que viabilizasse o engajamento e a visão dos pesquisados.

No que se refere a esse tipo de abordagem, apoia-se em Yin (2015), pois permite a análise mais profunda de um fenômeno, situação ou problema, buscando respostas para os questionamentos “por que” e “como”, visando a compreensão contextual. Assim, participaram do estudo 40 estudantes, no semestre de 2023.2, matriculados regularmente na disciplina de Ensino de Matemática, no Curso de Pedagogia, de uma Instituição de Ensino Superior (IES), na cidade de Fortaleza-Ceará-Brasil.

Os dados foram colhidos durante as aulas, por meio de entrevistas, diálogos, observação direta, conversas informais, mediações, sessões didáticas. As sessões didáticas de Matemática foram fundamentadas na metodologia de ensino Sequência Fedathi, uma metodologia que organiza o trabalho do professor, em sala de aula, em quatro etapas: tomada de posição(apresentação do problema); maturação(alunos em ação); solução(discussão das respostas); e, por fim, a prova(a formalização matemática do resultado esperado), Santos (2007).

Foi possível na tomada de posição, o uso de materiais concretos, como ábaco, tangram, geoplano, além de *softwares* e plataformas interativas, como o Kahoot.it, possibilitando múltiplas visões da situação problema, conforme destaca (Santos, 2007).

Foram utilizados recursos documentais, como o diário de campo, e recursos audiovisuais, permitindo que os resultados fossem analisados mais amplamente, à luz dos pressupostos da pesquisa qualitativa. As ações objetivavam a superação do paradigma de que alguns estudantes procuram os cursos de Pedagogia, porque sentem desprazer em aprender Matemática, pois trazem embutida a concepção de que essa disciplina é para “mentes brilhantes”, é uma disciplina elitizada, Lima, Santos e Borges Neto (2010).

Resultados e discussão

Os resultados da observação e da vivência formativa apontaram que o professor de Matemática deve assumir a postura de mediador e não de um mero transmissor de conhecimento. Que o desenvolvimento de projetos educacionais para a melhoria da formação dos estudantes de pedagogia se faz necessário. Que o uso de materiais concretos e digitais fez a diferença nas aulas. Assim, para apoiar essa reflexão, apresenta-se dados das entrevistas realizadas com 4 dos 40 alunos de pedagogia observados em 2023.2.

Os depoimentos são analisados à luz das categorias: saber matemático, formação inicial, ensino criativo e raciocínio lógico. Tais categorias são fundamentadas na tríade: professor, aluno e saber. Sobre isso, Santos (2022) destaca que o pedagogo é um profissional multidisciplinar e que, portanto, sua formação exige um olhar mais ampliado sobre seus saberes matemáticos.

Saber matemático – professor

Aliar o **conhecimento instrucional** com a realidade vivenciada buscando despertar a criticidade por parte dos educandos (aluno A).

Por tal problemática, provoca-se, com base em Morin (2011), a reflexão: mais vale uma cabeça cheia ou uma cabeça bem-feita? Com isso, espera-se que o pedagogo, independente do modelo de formação inicial que tenha passado, defina que papel quer exercer diante do processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

Formação inicial – professor

Mesmo com todas as mudanças que ocorreram ao longo dos anos dentro da educação, é fato que a Matemática ainda é vista de forma bastante tradicional, sem muito dinamismo, pela grande maioria dos alunos e até mesmo dos professores. Vale ressaltar que alguns casos se destacam no avanço desta disciplina, procurando alinhar o conhecimento do aluno a fim de que ele possa investigar e assim resolver as situações problemas de maneira útil. Um exemplo é o Enem, que em suas questões é notório o envolvimento da Matemática nas questões como um **desafio** para o aluno proporcionando uma visão matemática. No meu ponto de vista percebo que em nossa formação como futuros pedagogos, precisamos aprender a ter esse olhar da **visão matemática**. Um olhar que nos possibilite reconstruir os conceitos matemáticos (aluno B).

Encontra-se a partir desse estudo que, no que diz respeito às aulas de Matemática, os conhecimentos dos estudantes de pedagogia são polarizados por um modelo de ensino que de um lado se apresenta conteudista e de outro engessado na ideia tradicionalista. Nesse modelo de ensino-aprendizagem, o professor mostra aos alunos vários exemplos do conteúdo, define o conceito, insere vários exercícios de fixação, para depois, por meio de uma “avaliação objetiva somativa”, verificar se os alunos aprenderam, reforça (Santos, 2007).

Criatividade e curiosidade – aluno

Eu penso que um dos grandes entraves enfrentados ainda no ensino da Matemática sejam os métodos anacrônicos, que findam por tornar enfadonho o seu aprendizado. De nada adiantará o uso das TIC ou qualquer outra ferramenta, sem a proporcionalidade de uma aula diferenciada, e aqui, refiro-me a uma aula que possa contemplar dinâmicas que explorem a **curiosidade dos alunos**, que possa captar a atenção desse aluno na aula de Matemática, sem margem para o típico: "cansei dessa matéria chata!" (Aluno C).

Para enfatizar essa concepção de escola, de modelo de prática Mendes (2001), destaca necessário apresentar sugestões de alternativas para a superação das dificuldades encontradas por professores e alunos em relação ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, e deve-se enfatizar o caráter investigatório desse processo, a fim de levar se propor elaboração, testagem e avaliação de atividades de ensino-aprendizagem a partir da utilização de informações sócio-históricas sobre as temáticas que se pretende trabalhar.

Raciocínio lógico – saber

Temos um grande problema ainda hoje no ensino de Matemática no Brasil. A maioria dos educadores trabalham com a metodologia tradicional e não fazem os alunos a pensar a Matemática de forma a mexer com o seu **raciocínio lógico e mental**. O trabalho é realizado com fórmulas e conteúdo para decorar. Isso torna a disciplina um terror para grande parte dos alunos que sentem dificuldade e não gostam. Existe um desafio tanto dos licenciados em Matemática como dos pedagogos em desenvolver metodologias para uma Matemática que mexa com o imaginário e a mente dos estudantes tornando a Matemática uma **ciência criativa e produtiva**. Só que nas universidades a formação do matemático é baseada no método tradicional e não valoriza novas forma de ensino e didática e alguns professores fogem essa regra. E na pedagogia o ensino de Matemática é insuficiente para uma educação de qualidade de fato. O desafio é que dentro dessas limitações os educadores encontrem formas eficazes para melhorar o ensino de Matemática (Aluno D).

Dos depoimentos dos estudantes acima, destaca-se para as categorias de análises, de um lado, a visão de uma ciência desafiadora, difícil, pautada em fórmulas, a partir de conhecimento instrucional. De outro lado, os estudantes revelam pensar um ensino de Matemática para aguçar a curiosidade dos alunos, melhorar seu raciocínio lógico e mental, além de uma ciência criativa e produtiva, para uma tomada de consciência que esses dois modelos de ensino, um engessa o saber e o outro amplia o conhecimento, conforme Santos (2022).

É importante nesse delinear que o conteúdo faça sentido em sua vida, que faça parte de suas vivências e não de uma situação alheia à sua realidade, seja útil aos estudantes para a compreensão, explicação e/ou organização da sua realidade, conforme corrobora D'Ambrosio (1996). Isso modifica a relação do aluno com a Matemática, tornando o processo mais atrativo.

Diante dos depoimentos dos estudantes de pedagogia, vale ressaltar que o entendimento dos conhecimentos matemáticos, precisa ser melhor trabalhado nas aulas de Matemática, enfatizando não só os conteúdos, que são fundamentais, mas também despertar os alunos para o desenvolvimento de suas fundamentações teórico-práticas. Um depoimento muito forte da relação do estudante de Pedagogia com a Matemática tem destaque no estudo de Santos (2007, p. 66), quando um dos sujeitos da pesquisa declara seus sentimentos sobre a Matemática, dizendo: “Não gosto. Acho inútil...”.

Os índices de programas avaliadores de Matemática, como o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes-PISA, edição 2022, apontam que de 81 países, o Brasil assumiu uma das últimas posições em Matemática, apresentando um resultado bastante preocupante. Pois no Brasil, apenas 27% dos estudantes alcançaram pelo menos o Nível 2 de proficiência em Matemática, significativamente menor do que a média nos países da OCDE (média da OCDE: 69%). Também, destaca-se que esse nível é considerado pela OCDE o padrão mínimo para que os jovens possam exercer plenamente sua cidadania, fato que incomoda muito, pois esses jovens chegam à universidade sem a superação dessas dificuldades cognitivas.

O Brasil também divulgou resultados da primeira participação no Timss, 2023, estudo internacional (feito em ciclos de 4 em 4 anos) que apresenta dados de desempenho de estudantes em ciências e Matemática no 4º ano e no 8º ano. A avaliação Timss contou com a participação de 44.900 estudantes de escolas públicas e privadas em todo o país. Desses, 22.130 estavam matriculados no 4º ano do ensino fundamental. A escala de proficiência do Timss é dividida em quatro níveis e pontos de corte: avançado (625), alto (550), intermediário (475) e baixo (400). Esses níveis são usados para categorizar os resultados dos alunos, refletindo sua capacidade nas áreas de Matemática e ciências. O Brasil, em Matemática, ficou no nível baixo, atingindo apenas 400 pontos.

Esses índices refletem os problemas dos estudantes no processo de ensino-aprendizagem em Matemática, principalmente, porque a Matemática é uma das áreas do conhecimento que exige maior compreensão por ser baseada em raciocínio lógico, contudo ela não é uma disciplina de resultados estéreis, mais sim de resultados híbridos entre a lógica, a realidade e o senso crítico, conforme distinguem os estudos de Santos (2022).

Conclusões

As reflexões apontam para uma urgência na mudança de formação dos pedagogos, saindo do automatismo para a compreensão. Tais dificuldades advêm da Educação Básica em que o professor dá muita ênfase à parte instrumentalista e não se preocupa muito com o raciocínio matemático. Por conta destas falhas detectadas na Educação Básica, os pedagogos chegam ao curso de Pedagogia apenas com noções da Aritmética elementar.

Propõe-se, nesse sentido, que o pedagogo possa desenvolver seus saberes para a docência compreendendo a relevância da prática investigativa sobre os fenômenos ocorridos em seu contexto de atuação, proporcionando-lhe uma ação reflexiva, fazendo uma triangulação entre os elementos importantes no processo de ensino-aprendizagem, conforme figura 1, a seguir.

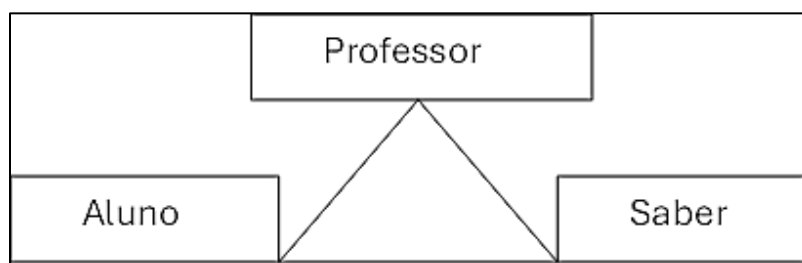


Figura 1. Elementos didáticos

Fonte: pesquisa direta

Portanto, considera-se que a formação do pedagogo deve desenvolver-se na raiz epistemológica da Pedagogia da Matemática, e fundar-se na premissa de que é essa a ciência que deve organizar a concretização dos processos educativos por meio da investigação, constituindo-se, assim, as bases epistemológicas das diretrizes orientadoras da *práxis* educativa.

No que se refere as mudanças, faz-se necessário, repensar a formação do pedagogo, a partir de um currículo multidisciplinar e vivo, refletindo sobre a BNCC (Brasil, 2017), problematizando o processo de ensino-aprendizagem, a partir de políticas públicas educacionais que favoreçam o avanço da educação e de professores no século XXI, por meio do desenvolvimento de projetos educacionais, conforme os estudos de Santos (2022).

Conclui-se que a formação matemática do pedagogo deve permear o desenvolvimento e aperfeiçoamento dos saberes da docência e suas epistemologias, cabendo a ele transformar o saber do senso comum, em saber científico, sob a interpretação do letramento matemático, para lecionar com excelência essa ciência.

Referências e bibliografia

- Brasil. (2017). Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC/SEF.
- Carvalho, D. L. (1994). *Metodologia do ensino Matemática* (2ª Edição). São Paulo: Cortez.
- D'Ambrosio, U. (1996). Educação matemática: Da teoria a prática. Campinas-SP: Papirus Editora (Coleção *Perspectivas em Educação Matemática*).

A matemática dos anos iniciais do ensino fundamental: o pedagogo sabe?

- Lima, I. P.; Santos, M. J. C. D.; Borges Neto, H. Matemático, o licenciado em matemática e o pedagogo: três concepções diferentes na abordagem matemática. (2010). *REMATEC - Revista de Matemática, Ensino e Cultura*, 5(6), 42-52.
- Machado, N. J. (1994). *Matemática e realidade* (3ª ed.). São Paulo-SP: Cortez.
- Machado, O, S. D. A. (1999). “Engenharia Didática”. In A. Franchi, et al, *Educação Matemática: Uma introdução* (1ª ed.). São Paulo-SP. EDUC.
- Morin, Edgar. A cabeça bem feita. Rio de Janeiro: Bertrand Brasil, 2011.
- Moreira, M. A. (1999). *Aprendizagem significativa*. Brasília-DF: Universidade de Brasília.
- Mendes, I. A. (2001). *O uso da História da Matemática: reflexões teóricas e experiências*. EDUEPA. Belém.
- Perraud, M. (1996). *Aprender de Outra Forma na Escola* (Tradução de Joana Chaves, 1ª ed.). Lisboa-Portugal: Armand Colin Éditeur.
- Ponte, J. P. (2023). Formação de professores que ensinam Matemática: um campo de estudo de realizações e desafios. *REVEDUC - Revista Eletrônica de Educação*, 17, 1-24.
- Radford, L. (2024). Sensed objects, sensing subjects: Embodiment from a dialectical materialist perspective. In L. Edwards & C. Krause (Eds.), *The Body in Mathematics* (pp. 75-104).
- Santos, M. J. C. D. S. (2022). *Ensino de matemática: discussões teóricas e experiências formativas exitosas para professores do Ensino Fundamental* / Curitiba: CRV. 148 p. (Coleção Publicações GTERCOA, v. 3).
- Santos, M. J. C. D. S. (2007). *Reaprender frações por meio de oficinas pedagógicas: desafio para a formação inicial*. Editora Agbook.
- Yin, R. K. (2015). *O Estudo de caso. Planejamentos e métodos* (5. ed). Porto Alegre: Bookman.



A Relevância do PIBID na Formação de Professores de Matemática para a Educação Básica

Thaís Rodrigues Ferreira **Machado**

Universidade de Brasília

Brasil

thaisrfm013@gmail.com

Martha Lima Soares **Martins**

Universidade de Brasília

Brasil

martalimas12@gmail.com

Resumo

O Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID) tem se destacado como uma ferramenta fundamental na formação inicial de professores de Matemática, ao promover uma articulação concreta entre teoria e prática. Este artigo analisa os impactos do PIBID/UnB na trajetória formativa dos licenciandos, partindo de uma breve apresentação do programa e, em seguida, trazendo relatos de experiência de ex-bolsistas e atuais participantes, todos estudantes da Universidade de Brasília. A proposta é enfatizar a importância do programa no desenvolvimento das competências e habilidades docentes, com foco no ensino prático e nas estratégias metodológicas inovadoras do ensino

Palavras-Chaves: Educação Matemática; Ensino superior; Ensino presencial; Treinamento pedagógico inicial; Formação continuada de professores; Desenvolvimento profissional; Matemática; Brasília; Brasil.

Introdução

A consolidação e regulamentação da exigência de formação superior para o exercício da docência no Brasil foram estabelecidas pela Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), em 1996. Essa medida visou aprimorar a qualidade do ensino básico por meio da padronização e do fortalecimento da capacitação docente. Desde então, a relação entre a formação inicial no magistério e o desempenho profissional tem sido amplamente investigada na literatura

educacional, com ênfase na qualificação do ensino e na preparação dos futuros professores, refletindo uma preocupação contínua da comunidade acadêmica.

A precariedade do ensino de Matemática no Brasil está enraizada em problemas estruturais que remontam a modelos educacionais ultrapassados. Antes da década de 1980, conforme descrito no Currículo em Movimento do Distrito Federal, o ensino era caracterizado por uma abordagem rígida, centrada na memorização e na transmissão mecânica de conteúdos, sem foco na construção do pensamento crítico e na aplicação prática do conhecimento. Esse modelo persiste em muitas escolas até hoje, agravado pela baixa qualificação docente e pela ausência de metodologias inovadoras. Além disso, a falta de infraestrutura adequada contribui para a ampliação das desigualdades educacionais. Para transformar esse cenário, é essencial investir na formação continuada de professores, reformular práticas pedagógicas e implementar políticas públicas que promovam um ensino mais dinâmico e inclusivo, preparando os estudantes para os desafios acadêmicos e profissionais do século XXI.

Os impactos dessa deficiência são evidenciados por diversas avaliações nacionais e internacionais. No Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) 2018, o Brasil ficou entre os últimos colocados, demonstrando dificuldades no raciocínio lógico e na resolução de problemas. O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) também revela que a maioria dos alunos conclui o ensino médio sem atingir a proficiência esperada, enquanto o Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes (ENADE) aponta fragilidades na formação de licenciandos em Matemática, perpetuando um ciclo de ensino ineficiente. Além disso, a elevada taxa de analfabetismo matemático na população adulta reflete falhas estruturais na educação básica, dificultando a aplicação de conceitos matemáticos no cotidiano e limitando o desenvolvimento social e econômico do país.

Nesse contexto, evidencia-se que a formação superior proporciona ao licenciando uma ampla base teórica e metodológica em sua área de atuação. No entanto, a eficácia das disciplinas pedagógicas teóricas ofertadas na graduação tem sido objeto de questionamentos, especialmente no que tange à sua aplicabilidade prática no contexto escolar. Diversos estudos indicam que essas disciplinas, em muitos casos, apresentam-se dissociadas das demandas concretas da sala de aula, limitando sua contribuição para a formação profissional. Ainda que os currículos contemplem atividades práticas, como o estágio supervisionado, tais experiências frequentemente assumem um caráter predominantemente passivo e observacional, restringindo-se, em grande parte, à participação dos graduandos. Essa limitação compromete a efetividade do processo formativo, reduzindo sua capacidade de preparar o futuro docente para os desafios inerentes à prática pedagógica.

Nossa abordagem enfatiza a importância de uma formação acadêmica integral, respaldada por instrumentos que promovam o desenvolvimento profissional. Para tanto, é essencial que o licenciando esteja inserido em ambientes que contribuam significativamente para a construção e consolidação do saber pedagógico. Nesse sentido, as diversas reformas educacionais – tais como a LDB, as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN), o Plano Nacional de Educação (PNE) e, por fim, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) – juntamente com os questionamentos relativos à qualidade na formação de professores, que visam uma educação menos expositiva e conteudista e um aprendizado efetivo, possuem implicações importantes. Para tanto, foi

instituído o Decreto nº 6755/2009, fundamentado na Política Nacional de Formação de Professores, por meio do qual o governo brasileiro, em conjunto com a União, buscou aprimorar a qualidade dos profissionais do ensino básico. Por conseguinte, a expansão do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (Pibid), criado em 2007, representa uma iniciativa destinada a valorizar o magistério público, promovendo políticas que incentivem a formação de docentes para a educação básica e fomentem a integração entre esta e o ensino superior.

Referencial Teórico

O referencial teórico deste trabalho se baseia na articulação entre a formação teórica e prática dos professores de Matemática, abordando a importância de vincular as metodologias pedagógicas às realidades da sala de aula. A formação docente precisa ser entendida como um processo contínuo, que vai além da aquisição de conteúdos, envolvendo o desenvolvimento da identidade profissional e a reflexão sobre a prática.

Autores como Lee Shulman (1986), Selma Garrido Pimenta (2004), Bernardete Angelina Gatti (2013) e Paulo Freire (1974) ressaltam a importância do conhecimento pedagógico do conteúdo e da práxis na formação do educador, o que requer que os professores sejam capazes de transformar o conhecimento científico em saber escolar. As contribuições de Vygotsky também são fundamentais para compreender a importância da mediação e da interação social na aprendizagem, especialmente em contextos que envolvem diversidade.

Este trabalho considera ainda os princípios da equidade e da inclusão, conforme preconizado nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCNs) e na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), ao entender que a formação do professor de Matemática deve preparar o profissional para lidar com múltiplos contextos sociais e culturais. Assim, é necessário que o professor em formação aprenda a reconhecer e valorizar as diferenças, desenvolvendo práticas pedagógicas sensíveis às questões de raça, gênero, classe e neurodiversidade.

A Essência do Programa

As transformações contemporâneas na educação evidenciam a necessidade de repensar práticas pedagógicas, com especial atenção à formação docente e à inovação metodológica. Em resposta a essas demandas, o Ministério da Educação (MEC) instituiu, em 2007, o Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), gerido pela CAPES. Após superar desafios iniciais, o programa foi normatizado pelo Art. 1º do Decreto nº 7.219, de junho de 2010, o que consolidou seu papel na valorização do magistério público e na promoção da formação continuada dos professores da educação básica, além de incentivar a articulação entre o ensino superior e a prática escolar.

O PIBID desempenha um papel essencial na formação de educadores ao qualificar e adaptar os licenciandos às necessidades das escolas públicas. Por meio de projetos e subprojetos realizados em parceria com instituições de ensino superior, o programa facilita o primeiro contato com a realidade escolar, possibilitando aos participantes a vivência de diversos contextos educacionais. Essa articulação entre teoria e prática evita que a formação se reduza a um mero exercício teórico ou a um ativismo desprovido de fundamentação acadêmica. Conforme Paulo

Freire (1974, p. 126), "a teoria sem a prática vira verbalismo, assim como a prática sem teoria vira ativismo. No entanto, quando se une a prática com a teoria tem-se a práxis, a ação criadora e modificadora da realidade."

Além de ter como objetivo a inserção de acadêmicos no meio escolar, o PIBID tem de acordo com o art. 3º do Decreto n. 7219, de 24 de junho de 2010 o objetivo de:

I – incentivar a formação de docentes em nível superior para a educação básica;

II – contribuir para a valorização do magistério;

III – elevar a qualidade da formação inicial de professores nos cursos de licenciatura, promovendo a integração entre educação superior e educação básica;

IV – inserir os licenciandos no cotidiano de escolas da rede pública de educação, proporcionando-lhes oportunidades de criação e participação em experiências metodológicas, tecnológicas e práticas docentes de caráter inovador e interdisciplinar que busquem a superação de problemas identificados no processo de ensino-aprendizagem;

V – incentivar escolas públicas de educação básica, mobilizando seus professores como conformadores dos futuros docentes e tornando-as protagonistas nos processos de formação inicial para o magistério;

VI – contribuir para a articulação entre teoria e prática necessárias à formação dos docentes, elevando a qualidade das ações acadêmicas nos cursos de licenciatura.

Tendo em vista que esses resultados demandam ser atingidos por meio do programa, o PIBID oferece uma experiência completa aos seus participantes, proporcionando um contato constante com o ambiente escolar por meio de observações, atividades de regência supervisionadas e participação em reuniões pedagógicas e de planejamento. Essa imersão na realidade escolar permite que os estudantes desenvolvam uma formação abrangente, que inclui não apenas a experiência em sala de aula, mas também a gestão escolar e políticas educacionais, além das discussões atuais no contexto educacional (aspectos políticos, éticos e reformas). Além disso, a agenda do programa inclui atividades de leitura e discussão de artigos, textos e livros relevantes para o crescimento profissional, bem como seminários sobre documentos normativos oficiais (Currículo em Movimento, Currículo em Movimento do Novo Ensino Médio e a BNCC). A confecção de oficinas também é uma parte importante do programa, permitindo que os participantes pratiquem competências específicas e habilidades, com ênfase no uso de metodologias ativas estudadas ao longo dos módulos e que estimulem o . Ao final do programa, espera-se que os participantes estejam preparados para atuar de maneira coletiva e interdisciplinar, seja em outros subprojetos ou nas escolas parceiras.

As atividades de extensão e os eventos acadêmicos proporcionam aos estudantes de magistério um ambiente propício ao desenvolvimento profissional e à ampliação de perspectivas críticas sobre as práticas pedagógicas contemporâneas. Por meio de encontros – como rodas de conversa, seminários e congressos – os licenciandos atualizam seu perfil profissional e constroem uma identidade docente robusta, especialmente no campo da Matemática, em sintonia com as demandas emergentes da educação.

Paralelamente, o processo formativo é estruturado para oferecer experiências práticas que viabilizam a interação com alunos com diferentes neurodivergências, tais como Altas Habilidades, Superdotação, Transtorno do Espectro Autista (TEA) e Deficiência Intelectual (DI).

As parcerias com instituições escolares facilitam o contato direto com contextos reais, permitindo aos futuros professores desenvolver competências essenciais para a implementação de práticas pedagógicas inclusivas e reflexivas.

Nesse mesmo sentido, o programa formativo integra o aprimoramento de estratégias docentes para o manejo de temáticas contemporâneas e sensíveis – como violência escolar, questões de raça e etnia, gênero, bullying e cyberbullying – à utilização de recursos lúdicos, tanto físicos quanto digitais. Essa integração entre teoria, prática e inovação metodológica constitui um eixo central na preparação dos futuros educadores, promovendo uma aprendizagem efetiva e contribuindo para a inclusão no ambiente escolar.

Outrossim, a vivência escolar ultrapassa parâmetros de pura análise pelo estudante, na medida que ele também é responsável por acompanhar reuniões como conselho de classe, reunião de pais e mestres, fichas de frequência e planejamento de aula. Portanto, oferecendo uma experiência completa, na qual o docente em formação lida com situações problema que terá de lidar futuramente, fortificando a capacitação pedagógica.

Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência na UnB

Na Universidade de Brasília, o PIBID iniciou-se em 2009, a partir do Edital 001/2007 da CAPES, com a participação de quatro licenciaturas: Biologia, Física, Matemática e Química, sob coordenação institucional da Profa. Maria de Fátima Makiuchi, do Instituto de Física. Desde então, participa de todas as iniciativas da CAPES de iniciação à docência.

No curso de Licenciatura em Matemática da Universidade de Brasília (UnB), têm sido adotadas diversas estratégias com o objetivo de aprimorar o processo de ensino-aprendizagem. Entre elas, destaca-se a promoção de debates e reflexões acerca das diferentes abordagens pedagógicas aplicáveis ao ensino da matemática, valorizando a diversidade de métodos e práticas. Os licenciandos participam de experiências formativas que abrangem desde a observação de aulas — com atenção especial às metodologias utilizadas e à dinâmica em sala — até a atuação como professores em oficinas e práticas supervisionadas, o que lhes proporciona contato direto com os desafios e possibilidades do fazer docente.

Além dessas vivências, são realizadas reuniões semanais, em conjunto com a respectiva coordenação, que funcionam como espaços de diálogo, alinhamento pedagógico e aprofundamento teórico. No contexto do edital vigente (2025/2026), foram promovidas apresentações e discussões a respeito de documentos curriculares fundamentais, como a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e o Currículo em Movimento do Distrito Federal, com ênfase nos anos finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio.

Adicionalmente, foram ofertadas palestras que abordam práticas pedagógicas contemporâneas, centradas no protagonismo do estudante no processo de aprendizagem. Entre elas, destacam-se o Ensino Exploratório, as Metodologias Ativas e as abordagens Cognitivistas. Tais iniciativas contribuem significativamente para a formação de professores mais sensíveis, criativos e preparados para romper com modelos tradicionais de ensino — frequentemente

associados à mera repetição de conteúdos — e construir práticas mais significativas e envolventes, especialmente no contexto do ensino de matemática.

Tendo como objetivo central a capacitação profissional pedagógica, o departamento adota parâmetros que contemplam não apenas a atuação em sala de aula, mas também etapas preparatórias fundamentais. Entre elas, destacam-se as aulas-testes: breves exposições em que os licenciandos são convidados a demonstrar suas habilidades didáticas, capacidade de organização e clareza na comunicação, seja ela oral ou corporal.

Essa prática, comum em processos seletivos da Secretaria de Educação e em admissões de escolas da rede privada, é incorporada à formação como um instrumento valioso de preparação. Com base nisso, coordenadores e supervisores elaboram e organizam essas miniaulas, proporcionando aos bolsistas oportunidades concretas para desenvolverem suas competências pedagógicas, ao mesmo tempo em que enfrentam e superam desafios como a timidez e o nervosismo diante da exposição docente.

De igual modo, outro elemento imprescindível para a formação docente é o desenvolvimento da competência de planejar e escrever planos de aula. Essa prática não se limita a orientar a atuação do professor em sala, mas também atende às exigências do cotidiano escolar, no qual frequentemente a equipe gestora solicita planejamentos anuais, trimestrais ou mensais como forma de garantir o alinhamento pedagógico entre os docentes e a proposta curricular da instituição. Assim, a elaboração consciente e estruturada de planos de aula torna-se uma ferramenta fundamental tanto para a organização do trabalho docente quanto para a consolidação de práticas pedagógicas intencionais, coerentes e adaptadas às necessidades dos estudantes.

Portanto, no que se refere ao Departamento de Licenciatura em Matemática da UnB, observa-se que as ações desenvolvidas no âmbito do PIBID têm representado um componente enriquecedor da formação inicial. Ao longo da vigência do programa, foi possível proporcionar aos licenciandos uma experiência formativa mais plena, ancorada na articulação entre teoria e prática e orientada por princípios de uma educação plural e assertiva. Com o encerramento do ciclo vigente, permanecem como legado o fortalecimento da identidade docente, o aprofundamento das competências pedagógicas e o compromisso com uma atuação sensível às realidades da escola pública.

Alguns Relatos de Experiência

Os benefícios do PIBID já se encontram previamente explicitados, sendo os desdobramentos de sua atuação variados e diretamente relacionados às experiências individuais de cada participante. Cada aluno estabelece uma relação única com o projeto, influenciada por suas trajetórias acadêmicas, interesses e contextos. Nesse sentido, o impacto do programa transcende o ambiente acadêmico, promovendo não apenas o desenvolvimento de competências pedagógicas, mas também o fortalecimento de uma identidade docente mais sólida e reflexiva.

Para compreender melhor as implicações e os reflexos do PIBID na formação de futuros professores, foram coletados depoimentos de diferentes participantes, incluindo ex participantes e estudantes que ingressaram recentemente no programa, todos graduados ou em formação pela

Universidade de Brasília em Licenciatura em Matemática. Esses relatos, apresentados a seguir, oferecem um panorama rico e diversificado sobre o papel do PIBID no fortalecimento das práticas pedagógicas, na superação de desafios encontrados durante a formação inicial e na construção de uma visão crítica sobre a realidade educacional brasileira. Além disso, as respostas fornecidas por esses colaboradores reforçam o caráter transformador do projeto, evidenciando sua relevância na formação de profissionais mais engajados e preparados para atuar no contexto escolar atual.

Aluno(a) 1 (em sua primeira participação no edital de 2022): “Ao início do programa, minhas expectativas eram de que eu pudesse auxiliar os alunos em seu aprendizado e absorver de perto técnicas e experiências de um professor já formado em ação. Consegui atender à essas expectativas com êxito e aprendi ainda mais do que imaginei que fosse. Com auxílio e oportunidade dada pelo meu professor orientador, pude lecionar algumas aulas para diferentes turmas e ser testada em diferentes situações com alunos de personalidades diferentes. Aprendi quais os meus pontos fortes e fracos e busquei minha evolução em cada nova oportunidade que foi concedida. Certamente ao início era algo muito mais desafiador a interação com os alunos e a demonstração de autoridade nos momentos necessários, mesmo sendo alunos não complicados de ligar a atenção e o respeito em sala era algo que me apavorava por medo de não conseguir conquistá-los. Porém, após um certo tempo, muitos conselhos e consertos, me vejo hoje em uma posição de tranquilidade com essas questões. Tive um ótimo professor orientando para guiar meus passos para a posição de confiança na qual me encontro hoje. Como professora, me vejo como alguém que adquiriu certo domínio de sala, especialmente após a participação do projeto, que sabe chamar a atenção dos alunos e trazer certo interesse para o que está sendo apresentado e que traz consigo uma visão muito otimista do futuro dos jovens no país no mundo, o que acredito ser sempre um traço positivo para um professor. A vontade de seguir carreira em licenciatura foi despertada em mim logo cedo por ter uma mãe que também já é professora. Eu sempre fui encantada pela profissão e é de fato a oportunidade de realizar um sonho estar cada dia mais perto de isso se tornar realidade pois é um prazer gigantesco saber que posso vir a fazer algo que vai impactar tanto na vida de tanta gente. A ideia que tenho da carreira na licenciatura acredito ser a mais positiva possível, é uma profissão nobre e que não pode ser reconhecida o suficiente. Todos aqueles os que genuinamente se interessam e tem vontade de fazer isso todos os dias, são grandes responsáveis por todos os resultados positivos de tudo aquilo que seus alunos conseguirem alcançar.”

Aluno(a) 2 (ex-pibidiano): “O curioso é que já participei de diversos outros projetos, oficinas e atividades que abordavam o ensino da matemática. No entanto, a metodologia consistia em um breve contato com os alunos e ocorria fora do ambiente escolar. Com o PIBID foi diferente: pude ter uma abordagem completa e me deparar com situações fora da minha zona de conforto, tendo que lidar com elas, pois fazem parte da realidade de um professor. Vejo esse programa como algo completo, que te capacita e fortalece muito mais, não apenas em relação à sala de aula, mas também ao conjunto da obra como um todo.”

Supervisor(a) Escolar 1 (ex-“pibidiano”, já graduado): “Sou professora de Matemática da Secretaria de Educação há 12 anos, fui aluna da UnB e fiz minha graduação da metade de 2007 até o final de 2010 e depois fiz meu mestrado. Durante a minha graduação, tive a oportunidade de participar da primeira turma do PIBID em 2009, fui orientada pela professora Maria

Terezinha Gaspar e pelo professor Guy, tive outros professores maravilhosos também no projeto e eram aulas “super” interessantes, foi minha primeira experiência em escola como professora, e no PIBID era muito legal, fazíamos alguns cadernos de matemática “super” diferentes, tínhamos o da matemática na arte, Matemática nos truques nos jogos com carta, nas mágicas de carta, a matemática das simetrias, a matemática do espelho, a matemática dos padrões, na razão áurea, e era super interessante. Lembro-me bem de alguns cadernos que ficaram marcados, algumas aulas que dei em 2009, ou seja à 15 anos, e foi muito legada para mim, enriqueceu muito minha formação, até hoje ainda uso essas aulas com alguns alunos meus. Particularmente nesse ano, com alunos atendidos pela sala de recursos, logo alunos TEAs(Transtorno do Espectro Autista) ou DIIs(Deficiência Intelectual), autistas níveis 1 e 2 de suporte e deficientes intelectuais ou físicas, respectivamente. Foram 11 anos de sala de aula regular e o PIBID foi “super” enriquecedor para minha formação e por gostar tanto de dar aula.”

Observa-se, a partir dos relatos de bolsistas ativos e egressos, uma percepção recorrente sobre a relevância do PIBID no aprimoramento da formação docente. São mencionados avanços significativos em competências como a comunicação em sala de aula, o planejamento didático e a compreensão das dinâmicas escolares cotidianas. Além disso, o envolvimento com a prática pedagógica contribui para a permanência dos estudantes no programa, ao resgatar o sentido original de sua escolha profissional e reforçar o compromisso com a docência.

Aluno(a) 1 (em sua segunda participação, expectativas em comparação ao primeiro): “Foi uma ótima experiência o meu primeiro PIBID, tive a oportunidade de ministrar uma aula em turma de 30+ alunos e pude aprender bastante com isso. a proximidade com o meu professor, Cícero, também ajudou bastante para que eu aprendesse mais sobre a rotina de trabalhar na SEEDF. Minhas expectativas para a próxima participação as melhores possíveis, agora no ensino médio, espero adquirir uma experiência ainda mais abrangente que me prepare para o futuro na docência.”

Aluno(a) 4: “Nas aulas da licenciatura eu não sentia motivação alguma para ler os artigos ou ir atrás de realmente aprender aquilo, mas no PIBID eu realmente senti prazer em ler o currículo em movimento, enxergar sua aplicabilidade, planejar de forma coesa como colocar aquilo em prática, dá muito mais sentido pra o que a gente tá lendo. Meio que depois de um semestre tenebroso me fez lembrar do porquê eu escolhi esse curso.”

Aluno(a) 5: “Eu não esperava estar em uma sala de aula de maneira tão precoce, antes mesmo de completar 2 anos de curso estar ministrando uma aula torna tudo mais apaixonante. Sou amante da educação e poder participar do PIBID é uma oportunidade incrível, poder levar miniaulas e oficinas para que a matemática deixe de ser estigmatizada, em algo divertido e relevante para o olhar de cada aluno é a razão da minha escolha de curso.”

É imprescindível destacar que, no contexto da formação inicial e continuada de professores, o PIBID se configura como um modelo exemplar de educação superior nas licenciaturas, abrangendo cursos dos mais diversos campos do conhecimento. Apesar da heterogeneidade entre as áreas, há uma convergência que contribui para a consolidação da qualidade do ensino. Para concluir esta subseção, apresenta-se a fala de um dos coordenadores do programa no curso de Matemática:

Coordenador 1: “A formação dos estudantes de Licenciatura em Matemática, em sua maioria, ainda carece de vivências práticas do cotidiano escolar. Muitos alunos não têm a oportunidade de experienciar atividades como o planejamento e a execução de aulas ou oficinas, o uso de Metodologias Ativas, nem a apresentação de seminários com Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDICs). Esses aspectos são essenciais para a construção de uma prática docente sólida. O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) surge como uma oportunidade crucial para que esses estudantes, mesmo sem experiências anteriores, possam aprimorar suas habilidades didáticas. Com uma carga horária bem estruturada, o PIBID permite aos alunos observar aulas, planejar intervenções e aplicar o que aprendem, sempre em conjunto com a qualificação teórica adquirida em outras atividades acadêmicas. Nas escolas parceiras, a presença dos supervisores é fundamental para o processo, pois eles compartilham suas próprias experiências com os estudantes do PIBID, formando uma rede de aprendizado colaborativa. Esse ciclo positivo de interação entre teoria e prática contribui significativamente para a formação inicial dos futuros professores, preparando-os de forma mais completa para os desafios da sala de aula.”

O coordenador ressaltou um dos princípios fundamentais do programa: a inserção dos estudantes em sala de aula desde o início da graduação. Esse processo permite um aprimoramento contínuo, possibilitando o desenvolvimento de diversas competências e a superação de práticas tradicionalmente associadas à educação. Dessa forma, o programa visa reformular o modelo educacional, tornando-o mais acessível e alinhado aos novos paradigmas exigidos pelas gerações futuras.

Considerações Finais

O ensino de matemática contemporâneo valoriza a construção ativa do conhecimento pelos alunos, mediante experiências que permitem a aplicação de conceitos no cotidiano. Da mesma forma, os futuros professores moldam sua profissão por meio da vivência em sala de aula, desenvolvendo habilidades pedagógicas ao enfrentar desafios reais no processo de ensino. Portanto, é fundamental que, durante a formação inicial, os futuros docentes tenham oportunidades concretas de interação com os alunos em ambientes escolares, o que facilita o desenvolvimento de habilidades pedagógicas e prepara os futuros professores para lidar com as complexidades da prática educativa.

Ademais, as políticas educacionais anteriores eram desvinculadas de vivências e possuíam um impacto limitado na eficácia das práticas pedagógicas dos educadores, ao mesmo tempo em que redefiniram as competências vigentes e criaram um hiato significativo entre a formação teórica e a prática docente.

Em contrapartida, no atual cenário educacional que exige mudanças significativas, a implementação de projetos como o PIBID é um passo importante para transformar a formação docente no Brasil. Ajudando a superar as lacunas do sistema educacional vigente, contribuindo para a construção de uma educação de qualidade e para a formação de professores mais bem preparados para atender às demandas da sociedade, se mostrando crucial para o desenvolvimento de educadores eficazes. Ao experimentar situações reais de ensino, os bolsistas podem redefinir sua compreensão sobre o ensino de matemática e cultivar uma perspectiva crítica e criativa sobre

suas próprias práticas pedagógicas. O programa oferece uma abordagem holística, promovendo não apenas a formação acadêmica, mas também o crescimento profissional contínuo dos docentes, por meio da exposição a novas metodologias e abordagens inovadoras. Neste contexto, o PIBID emerge como uma iniciativa estratégica para renovar a formação docente no Brasil, abordando as deficiências existentes no sistema educacional e contribuindo para a construção de uma educação de qualidade, capaz de atender às demandas de uma sociedade em constante evolução.

Embora, inicialmente, apenas um número reduzido de estudantes de cursos de licenciatura estivesse vinculado ao programa, atualmente diversos centros acadêmicos já contribuem significativamente para uma formação plena e de qualidade. Na Universidade de Brasília, o curso de Licenciatura em Matemática participa desde o primeiro edital do programa. Com cada novo edital, um número crescente de estudantes tem a oportunidade de se integrar às atividades propostas. No edital de 2024, foram disponibilizadas 48 vagas para bolsistas, todas preenchidas, o que evidencia a ampliação do alcance do programa e seu impacto positivo na qualificação do currículo de formação docente, reforçando o importante instrumento de fortalecimento dos processos educacionais brasileiros.

Referências e bibliografia

- Canan, S. R.; Corsetti, B. (2012). O professor em formação: O PIBID no contexto da política nacional de formação de professores. Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões (URI). <http://www.capes.gov.br/>. Acesso em: 12 abr. 2025.
- Freire, P. (1968). Pedagogia do oprimido. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- Freire, P. (1974). Educação como prática da liberdade. Rio de Janeiro: Paz e Terra.
- Gatti, B. A. (2013). Avaliação e valorização docente: questões para debate. In Gatti, B. A. (org.). O trabalho docente: avaliação, valorização, controvérsias (p. 11-30). Campinas, SP: Autores Associados.
- Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). (2023). Divulgados os resultados do Pisa 2022. Brasília: Inep. <https://www.gov.br/inep/pt-br/assuntos/noticias/acoes-internacionais/divulgados-os-resultados-do-pisa-2022>. Acesso em: 12 abr. 2025.
- Ministério da Educação. (2017). Base Nacional Comum Curricular (BNCC). <https://www.gov.br/mec/pt-br/assuntos/bncc>. Acesso em: 12 abr. 2025.
- Ministério da Educação. (2018). Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID). Brasília: MEC.
- Pimenta, S. G. (2004). Estágio e docência (6. Ed.). São Paulo: Cortez.
- Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. (2014). Currículo em Movimento: Ensino Fundamental. Recuperado de <https://www.educacao.df.gov.br/pedagogico-curriculo-em-movimento/>. Acesso em: 12 abr. 2025.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
- Silveira, H. E. (2017). Memórias sobre o Pibid: concepções, criação e dinâmica de funcionamento. *Crítica Educativa* (Sorocaba/SP). <http://dx.doi.org/10.22476/revcted.v3i2.215>. Acesso em: 12 abr. 2025.



Análisis de las Aprehensiones Cognitivas en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática

Domingo Felipe **Aráuz** Chévez
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León
Nicaragua

domingo.arauz@fh.unanleon.edu.ni

Hilario Ernesto **Gallo** Cajina
Universidad Nacional Autónoma de Nicaragua-León
Nicaragua

ernesto.gallo@fh.unanleon.edu.ni

Resumen

Las investigaciones previas han mostrado que el acto de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una Aprehensión Cognitiva. Por tanto, el objetivo de esta investigación es analizar las Aprehensiones Cognitivas presentes en estudiantes para profesor de matemáticas de secundaria (EPS) al graficar una función cuadrática. Para ello adaptamos el marco teórico de Duval (1995) sobre Aprehensiones Cognitivas (perceptiva, secuencial, discursiva y operacional). En este estudio participaron 40 estudiantes para profesor de Matemáticas que cursaban en 2024 su segundo año, en una universidad pública de Nicaragua. El instrumento utilizado para este estudio es una actividad que contiene orientaciones para trabajar sobre la configuración de una función cuadrática. Para el análisis de los datos se identificaron subconfiguraciones que los EPS podían realizar sobre la función dada, las que sirvieron como evidencia de cada una de las cuatro Aprehensiones. Los resultados muestran cuatro grupos de EPS con diferentes evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas. Estos grupos evidencian la necesidad de incidir en los programas formativos con estrategias que permitan a los EPS lograr las Aprehensiones Cognitivas sobre la función cuadrática. El modelo teórico parece ser una herramienta útil para analizar las Aprehensiones Cognitivas sobre el objeto matemático en estudio.

Palabras clave: Aprehensiones Cognitivas; estudiante para profesor de matemáticas de secundaria; función cuadrática.

Introducción

La forma en que se obtiene el conocimiento matemático ha sido preocupación de investigadores educativos; particularmente sobre las configuraciones y subconfiguraciones que realizan los estudiantes como consecuencia del estímulo visual del objeto matemático y de las relaciones que se realizan con este. Las investigaciones han estado enfocadas en analizar distintos objetos matemáticos y los sujetos investigados pueden ser de educación primaria, secundaria o futuros profesores de matemáticas (e.g. Bernabeu et al., 2022; Campos y Rodríguez, 2020; García-Reche et al., 2015; González, 2011).

En relación con las investigaciones donde los sujetos investigados son estudiantes de educación primaria encontramos a García-Reche et al. (2015) quienes propusieron a estudiantes de 5° y 6° grado dos problemas de generalización lineal y encontraron que los estudiantes muestran dificultad para usar y hacer un cambio en el tipo de aprehensión, como causa de la configuración de las figuras del objeto matemático estudiado, es decir, que perciben algunos patrones cuando el objeto es simple, pero no describen dichos patrones cuando la figura tiene alguna variante. Por su parte, Bernabeu et al. (2022) analizaron niveles de sofisticación en el desarrollo del pensamiento geométrico sobre los polígonos, caracterizando cómo los estudiantes de 9 años dotan de sentido matemático a las partes de las figuras, para determinar la pertenencia de un polígono a una clase. Los autores concluyen que, identificar atributos en los polígonos como concavidad/convexidad, es un primer paso para que los estudiantes empiecen a razonar con ello e identificar como un atributo común a un grupo de figuras permite identificar la clase, a través de las propiedades de exclusión e inclusión.

En relación con investigaciones donde los sujetos son estudiantes de secundaria, González (2011) analiza el tratamiento de las representaciones semióticas realizado por los estudiantes de noveno grado sobre el objeto matemático función cuadrática, en los registros algebraico, gráfico y verbal. González concluye que los estudiantes generalmente acuden a las representaciones algebraicas o auxiliares, antes que, al propio gráfico o explicación verbal, para dar cuenta de las posibles transformaciones realizadas sobre el objeto matemático.

En el caso que los sujetos investigados son estudiantes para profesor de matemáticas, hemos encontrado el estudio de Campos y Rodríguez (2020), quienes analizaron los registros de representación semiótica que estudiantes de primer año de la carrera para ser profesor ponen en juego al resolver inecuaciones y al expresar su conjunto solución y, además, describen el grado de aprehensión conceptual alcanzado luego de la enseñanza recibida. Los autores enfatizan la importancia de prestar atención a los tipos de tareas que se les proponen a los estudiantes, ya que de ello depende el aprendizaje del concepto matemático. Por ejemplo, si el estudiante propone una resolución algebraica exitosa de la inecuación, esto no podría entenderse como una señal de que comprende el concepto de inecuación, ya que el registro algebraico no es evidencia suficiente para tomar esa decisión, considerando que, el registro gráfico podría dar mejores alternativas para tomar decisiones sobre el aprendizaje y es donde hay pocas evidencias en los sujetos.

Si bien, se han realizado varias investigaciones sobre el aprendizaje de los estudiantes de primaria y secundaria sobre diferentes objetos matemáticos, no hemos encontrado investigaciones sobre Aprehensiones Cognitivas cuando los sujetos son estudiantes para profesor de educación secundaria. Creemos que tener información del aprendizaje de los estudiantes para profesor sobre este objeto matemático, a través de las configuraciones y subconfiguraciones que usan, ayudaría a comprender de qué manera se están logrando las competencias necesarias para su función docente, dado que este objeto matemático pertenece al currículo nacional y lo deberá enseñar una vez que sea profesor en servicio. Esta información se vuelve útil para tener en cuenta en los programas formativos. Por tanto, el objetivo de esta investigación es analizar las Aprehensiones Cognitivas presentes en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática.

Aprehensión Cognitiva

Duval (1995), establece que el uso de sistemas de representaciones semióticas para el pensamiento matemático es esencial, dado que no existen otras maneras de tener acceso a los objetos matemáticos, sino a través de la producción de representaciones semióticas. Para este autor, la acción de realizar una acción sobre un dibujo o cualquier otro estímulo visual, produce en el sujeto una aprehensión cognitiva.

En este sentido, Duval (1995, p.145-147), ha distinguido cuatro formas de Aprehensión Cognitiva, las que a continuación se describen:

- Aprehensión perceptiva: se caracteriza por la identificación de una configuración, en el plano o en el espacio, sin asociarle ninguna afirmación matemática. Es decir, en esta forma de aprehensión se puede percibir varias sub-configuraciones.
- Aprehensión secuencial: se produce cuando hay que construir una configuración o describir su construcción. En este caso, las diferentes sub-configuraciones emergen en un orden que están en relación con las propiedades matemáticas.
- Aprehensión discursiva: se produce una asociación de las configuraciones con afirmaciones matemáticas (definiciones, propiedades.) que determinan el objeto representado.
- Aprehensión operativa: se caracteriza por la realización de alguna modificación en la configuración inicial, añadiendo o suprimiendo elementos o reorganizándolos.

Aprehensiones cognitivas sobre una función cuadrática

Creemos que las Aprehensiones Cognitivas que propone Duval, es posible evidenciarse sobre el objeto matemático función cuadrática, en la medida que a los EPS se les propongan actividades matemáticas para tal fin. Al graficar una función cuadrática, esto permite generar representaciones semióticas, dado que el sujeto puede realizar una acción sobre dicho objeto y producir en él estímulos visuales. Por ejemplo: Al proponerles a los EPS la siguiente actividad (Figura 1), se espera que muestren evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas en estudio, es decir, que la actividad pueda provocar en ellos acciones sobre el objeto matemático y que produzca estímulos visuales, con los que pueda ser capaz de realizar modificaciones de dicho objeto, con ayuda de las representaciones semióticas del mismo. Estamos de acuerdo que, es

posible evidenciar en los sujetos las Aprehensiones Cognitivas si estos tienen conocimientos previos sobre el objeto matemático evaluado.

En función del marco teórico y la actividad propuesta a los EPS (Figura 1), nos hemos trazado la siguiente pregunta de investigación:

- ¿Qué evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas, sobre el objeto matemático función cuadrática, podemos encontrar en los EPS?

Metodología

Esta investigación presenta la experiencia de una práctica educativa en un programa formativo, para futuros profesores de Matemática de educación secundaria. De acuerdo con el análisis de los datos es una investigación cualitativa, bajo el paradigma interpretativo. En este estudio participaron 40 estudiantes para profesor de Matemática que cursaban el segundo año, de los cinco, para ser licenciados en una universidad pública de Nicaragua, curso 2023. Al realizar el estudio los futuros profesores ya habían cursado asignaturas referidas a objetos matemáticos como ecuaciones de primer y segundo grado, así como los tipos de funciones. El instrumento de recolección de datos es una actividad propuesta a los EPS (Figura 1), la que propone a los EPS una función cuadrática de la forma $f(x) = x^2 - 2x + 1$. Las cuestiones adicionales sobre la tarea propuesta pretenden hacer que los EPS realicen configuraciones sobre el objeto y de cierto modo, a los investigadores les permita identificar los tipos de Aprehensiones Cognitivas. Uno de los aspectos centrales, es la gráfica de la función original versus una que se obtiene desplazando dicha función una unidad, tanto a la derecha como hacia arriba de esta.

Dada la siguiente función $f(x) = x^2 - 2x + 1$, haga lo que se le indica:

a) ¿Qué tipo de función es? ¿De qué otra forma la puede expresar? Argumenta

b) ¿De qué formas se puede graficar dicha función? Explique

c) Dibuje la función en la siguiente cuadrícula

d) Si traslada un lugar a la derecha y uno hacia arriba de la posición original, ¿cuál sería la nueva función? ¿De qué forma se puede ver gráficamente diferencias entre las funciones? Argumente lo que vaya realizando

Nota: Dibujarla en el mismo plano y con otro color la nueva función y nombrarlas para diferenciarlas

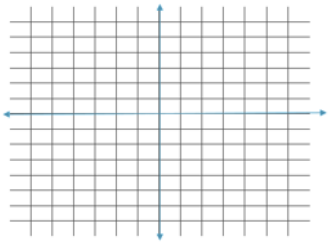


Figura 1. Actividad propuesta a los EPS en el estudio.

Análisis

Una vez que los participantes realizaron la actividad, los registros de cada participante fueron rotulados como P1, P2, ..., P40. Luego se identificaron las subconfiguraciones del objeto matemático respecto a cada Aprehensión Cognitiva (Tabla 1).

Tabla 1
Aprehensiones Cognitivas sobre la función Cuadrática.

Aprehensión Cognitiva	Características (subconfiguraciones del objeto)
Aprehensión Perceptiva	- Tiene noción de que la tarea es una función cuadrática - Tiene en cuenta que la gráfica es una parábola
Aprehensión Secuencial	- Expresa la función cuadrática como binomio al cuadrado. - Indica que para graficar la función basta con hallar el vértice y un punto a cada lado de él - Obtiene el vértice y los dos puntos para cada función - Traza la gráfica de cada función
Aprehensión Discursiva	- Declara que el objeto matemático es una función cuadrática. - Usa conceptos matemáticos como pares ordenados, plano cartesiano, vértice, trinomio cuadrado perfecto o factorización para describir el proceso de resolución
Aprehensión Operativa	- Realiza correctamente el traslado de la función en el plano - Obtiene algebraicamente la nueva función con el desplazamiento pedido - Tiene en cuenta que el nuevo vértice de la función es un punto de la función original y que todos ellos se trasladaron una unidad horizontal y vertical

Fuente. Elaboración propia

Después se verificó el nivel de evidencia de cada subconfiguración en tres categorías de análisis, a través de una tabla: usando color rojo cuando **no hay evidencias** de las subconfiguraciones, color verde para **evidencias no tan claras** de las subconfiguraciones, y, color amarillo cuando hay **evidencias claras** de estas. Por último, se agruparon respuestas similares de los EPS, con la finalidad de mostrar patrones de evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas.

Por ejemplo, una evidencia de la Aprehensión Perceptiva es cuando los estudiantes para profesor identifican que la función es cuadrática o bien que su gráfica es una parábola. Este tipo de Aprehensión se podría evidenciar junto a la discursiva. La Aprehensión Secuencial se puede evidenciar en la medida en que los EPS hacen uso de propiedades y fórmulas al resolver la actividad. Al indicar que es una función cuadrática, podrían argumentar que lo es, por ser un polinomio de grado dos. $f(x) = x^2 - 2x + 1$. También, al argumentar que este polinomio podría ser expresado en la forma del binomio al cuadrado $f(x) = (x - 1)^2$, y que para graficarla podría hallar el vértice y un punto a cada lado de este. Al darse cuenta de que en la función $f(x) = (x - 1)^2$, el vértice es $(1, 0)$; dado que esta función tiene la forma de $y = a(x - h)^2 + k$, donde el punto (h, k) es el vértice de la parábola, $y = (x - 1)^2 + 0$. Por consiguiente, podría evaluar la función en 0 y 2 para las abscisas y obtener así los tres puntos guías, a como vemos en la tabulación siguiente (Figura2).

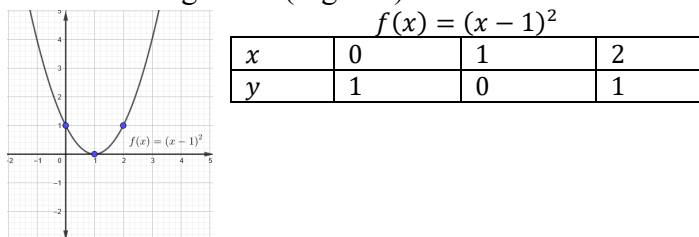


Figura 2. Gráfica de la función original.

Por otro lado, una evidencia de Aprehensión Operativa se podría ejemplificar, cuando los EPS se dan cuenta que para trasladar la función una unidad, tanto a la derecha como hacia arriba de los ejes coordenados, basta con sumar una unidad a los valores de la tabulación anterior, y así, obtener los tres puntos para trazar la nueva función, tal y como se muestra en la siguiente tabulación.

x	1	2	3
y	2	1	2

Una vez obtenido los tres puntos los ubica en el plano cartesiano y dibuja la parábola en el mismo plano. Luego, puede sumarle a h y k una unidad para obtener una nueva función: $y = (x - (1 + 1))^2 + (0 + 1)$; $y = (x - 2)^2 + 1$. La figura 3 muestra la gráfica de ambas funciones. Por último, la Aprehensión Discursiva podría evidenciarse cuando los EPS realizan argumentaciones sobre lo que vayan haciendo, por ejemplo, usar conceptos como función cuadrática o de segundo grado, parábola, plano cartesiano, pares ordenados, abscisas, ordenadas, tabulación, vértice de una parábola.

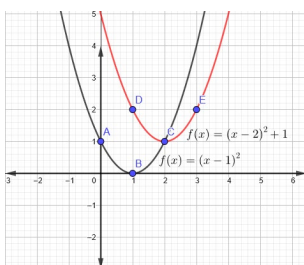


Figura 3. Gráfica de la función original y la desplazada.

Resultados

La pregunta de investigación ha sido, ¿Qué evidencias de las cuatro Aprehensiones Cognitivas, sobre el objeto matemático función cuadrática podemos encontrar en los EPS? Para dar respuesta a esta interrogante, se muestran los resultados de forma general, a través de las subconfiguraciones de cada Aprehensión Cognitiva. Luego, se identifican grupos de EPS con características similares sobre las configuraciones realizadas en el objeto matemático, ejemplificando con los registros semióticos de los participantes, cada tipo de Aprehensión.

La figura 4, presenta de forma general los resultados de cada EPS sobre la actividad realizada. Con relación a la Aprehensión Perceptiva, se puede apreciar que todos los EPS son capaces de identificar que el objeto matemático es una función cuadrática y que su gráfica es una parábola, de igual manera, se observa que lo expresan de forma escrita (Aprehensión Discursiva), sin embargo, muchos EPS no hacen uso de conceptos matemáticos relacionados al objeto matemático, tales como vértice, binomio al cuadrado, factorización, etc. En relación, a la Aprehensión Secuencial, se evidencia que pocos EPS logran transformar la función cuadrática como el cuadrado de un binomio, sin embargo, la mayoría de ellos muestran evidencias de comprender que, para graficar la función, es necesario tabular para obtener pares ordenados, entre ellos el vértice y un punto o dos puntos a cada lado de este, con lo que podemos considerar que tienen noción del concepto de simetría. La mayoría han trazado la función original y, con ayuda de la cuadrícula proporcionada en la actividad, realizaron el desplazamiento de la función

dada. En el caso de la Aprensión Operativa, a pesar de que no logran obtener algebraicamente la nueva función, consideramos que visualmente, es decir, con ayuda de la cuadrícula, logran hacer el desplazamiento de la gráfica de la función original.

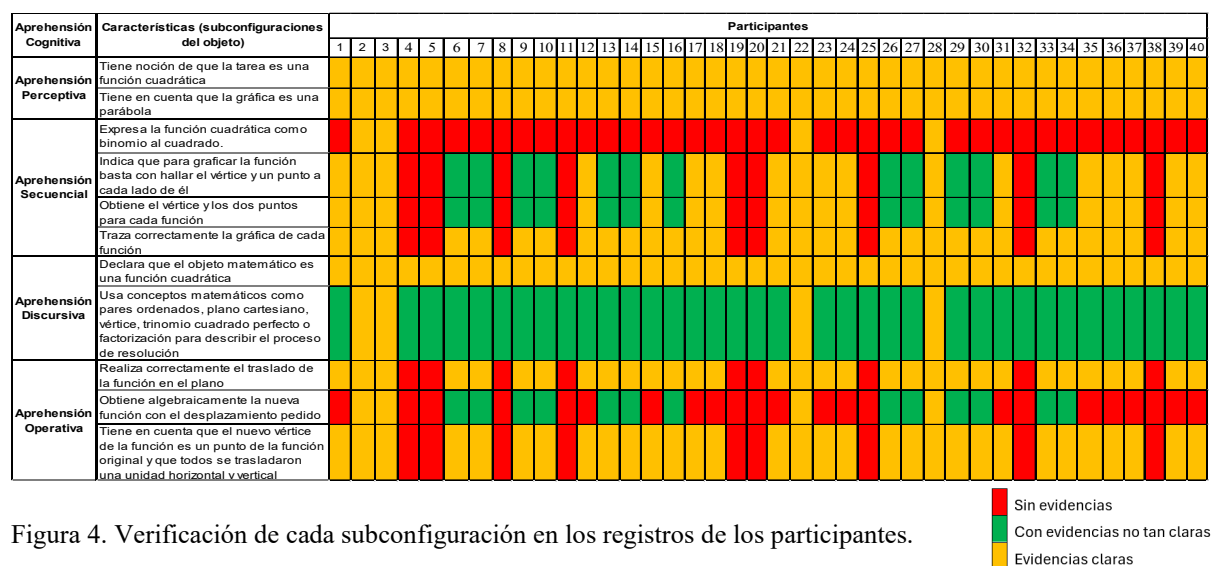


Figura 4. Verificación de cada subconfiguración en los registros de los participantes.

Del análisis anterior, se identificaron cuatro grupos de EPS, en relación con las configuraciones que han realizado sobre el objeto matemático:

- Un primer grupo en el que se evidencian únicamente la Aprensión Perceptiva y Discursiva. Este grupo, muestra en el registro escrito y gráfico la clasificación de la función, sin embargo, la ubicación en el plano cartesiano tanto de la función original como de la desplazada no es correcta (por ejemplo: P4, P5, P8, P11, P19, P20, P25, P32, P38), a como se puede observar en el siguiente registro del P8 (Figura 5). Esto evidencia de que en este grupo de EPS no está presente la Aprehensión Secuencial, dado que no indican las propiedades empleadas para graficar la función cuadrática, por ejemplo, la tabulación, tampoco la Aprehensión Operativa, al no encontrar algebraicamente la función desplazada.

Q: Es una función Cuadrática es p q de que sus formas se llaman polinomio cuadrático, polinomio de grado 2. Es una función polinómica con una o más variables en la que el término de grado más alto es de segundo grado.

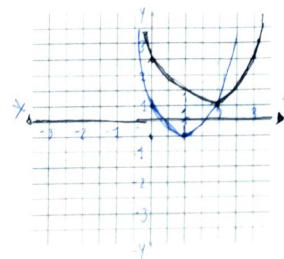


Figura 5. Resolución del P8 en la actividad propuesta.

- Un segundo grupo de EPS en el que hay evidencias claras de la Aprehensión Perceptiva, porque identifican que la función es una parábola y la dibujan. Asimismo, se evidencia la Aprehensión Secuencial porque aplican algunas propiedades como la tabulación para encontrar pares ordenados, para la función original y con ayuda de esta, construye los pares ordenados de la función desplazada, sumándole a ambas coordenadas cartesianas (x, y) una unidad. Sin embargo, no presentan evidencias tan claras de la Aprehensión Discursiva y

Operativa, ya que no describen los procesos realizados y no efectúan las transformaciones sobre el objeto matemático, es decir, no obtienen algebraicamente la función trasladada. (por ejemplo, P1, P12, P15, P17, P18, P21, P23, P24, P31, P35, P36, P37, P39, P40), a como se puede observar en el siguiente registro del P18 (Figura 6).

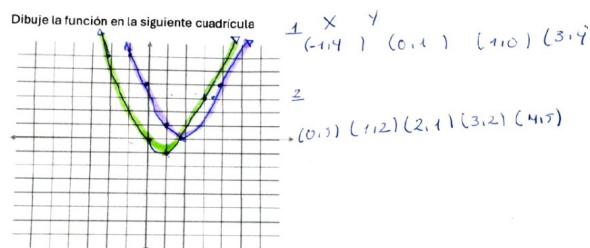


Figura 6. Resolución del P18 en la actividad propuesta.

- En el tercer grupo de EPS se evidencia claramente la Aprehensión Perceptiva, ya que tienen noción de la que función es una parábola. Sin embargo, hay evidencias no tan claras de las demás Aprehensiones, ya que no se evidencia discurso matemático sobre el objeto, únicamente la tabulación y si bien, obtiene pares ordenados de la función desplazada, la grafican y la expresan de forma algebraica $f(x) = x^2 - 4x + 5$, no hay evidencias de cómo la obtuvo, ya que con los pares ordenados no es suficiente condición para decir cuál es la nueva función, en este caso se requiere pasarla la función original a la forma canónica $y = a(x - h)^2 + k$, y sustituir los valores determinados (por ejemplo, P6, P7, P9, P10, P13, P14, P16, P26, P27, P29, P30, P33, P34), a como se puede observar en el siguiente registro del P10 (Figura 7).

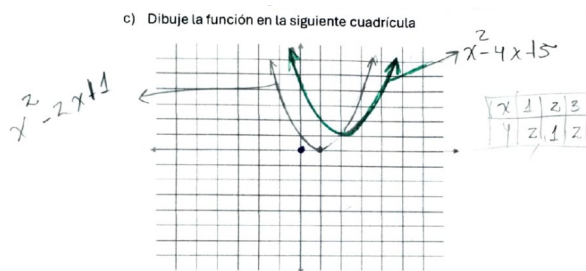


Figura 7. Resolución del P10 en la actividad propuesta.

- Un cuarto grupo, en el que se evidencian de forma clara todas las Aprehensiones Cognitivas. Este grupo identifica que la función es cuadrática y la gráfica, también hace uso del discurso matemático para describir las transformaciones de la función original, expresándola mediante el cuadrado del binomio $y = (x - 1)^2$, que al sumar una unidad tanto a “h” como a “k” obtiene la función desplazada $y = [x - (1 + 1)]^2 + (0 + 1)$ (por ejemplo, P2, P3, P22, P28), a como se observa en el registro del P22 (Figura 8).

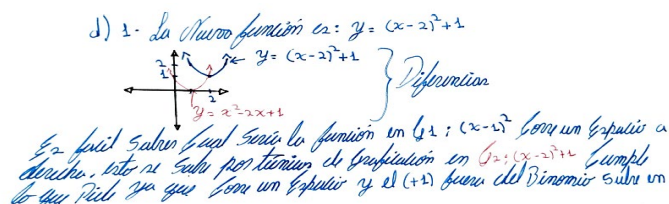


Figura 8. Resolución del P22 en la actividad propuesta.

Discusión y Conclusiones

El objetivo de investigación ha sido analizar las Aprehensiones Cognitivas presentes en estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria al graficar una función cuadrática. De forma general, podemos decir que, las Aprehensiones Perceptiva y Secuencial están presentes en la mayoría de los EPS, porque sus registros evidencian el reconocimiento del objeto matemático, tanto de forma algebraica como gráfica, en contraposición a los resultados de González (2011) en donde los participantes se apoyaban más en la representación algebraica, que en la gráfica y verbal. Por otro parte, los EPS han mostrado evidencias de que cuando se les orienta realizar transformaciones sobre el objeto matemático, la mayoría optan por hacer uso de la tabulación, para obtener la nueva función, sin embargo, algebraicamente, la mayoría no han sido capaces de obtener la función desplazada. Estos resultados dejan en evidencia de que hay un aprendizaje sobre el objeto matemático demostrado por la representación gráfica que han hecho de este, sin embargo, a diferencia de Campos y Rodríguez (2020), los EPS han mostrado realizar el traslado de forma visual y tabular, pero no comprenden como hacer uso de esos elementos visuales y tabulares, para hallar algebraicamente la función desplazada. Esto puede atribuirse a la naturaleza de la tarea, en el caso de Campos y Rodríguez (2020) el objeto matemático era una inecuación, que para identificar si en el sujeto se evidencia la comprensión conceptual gráfica de la inecuación, estos debían primeramente resolverla algebraicamente, dado que es imprescindible para dar una respuesta gráfica de esta. En cambio, en la tarea que se ha propuesto, los EPS han mostrado evidencias del concepto desplazamiento de una función, a través de la resolución gráfica, dado que, con ayuda de pares ordenados, podían realizar los desplazamientos solicitados. Estos resultados presentan un panorama preliminar sobre el aprendizaje de la función cuadrática en estudiantes para profesor y pone de manifiesto que el marco teórico de las Aprehensiones Cognitivas puede considerarse como un buen modelo para analizar el aprendizaje de dicho objeto matemático. A los programas de formación de futuros profesores ofrece una luz sobre aspectos para tener en cuenta, como es el caso del desplazamiento de una función cuadrática, contenido que forma parte importante del currículo de educación secundaria y deben aprenderlo de diferentes formas para que en el futuro sean capaces de enseñarlo, tomando en cuenta criterios de desplazamiento del objeto matemático. Los grupos identificados en el estudio muestran diferentes niveles de aprendizaje del objeto matemático, lo que podría ayudar a replantearse estrategias de enseñanza que favorezcan las Aprehensiones Cognitivas sobre dicho objeto, teniendo en cuenta estos niveles de comprensión. En este momento estamos aplicando estrategias de intervención que ayuden a los sujetos a lograr la comprensión de este objeto matemático y probando este marco teórico sobre otros, tales como funciones exponenciales, secciones cónicas y límites de una función.

Reconocimientos

Esta investigación fue realizada dentro del grupo de investigación DIME (Docentes Investigadores en Matemática Educativa) de la UNAN-León.

Referencias y Bibliografía

Bernabeu, M., Moreno, M. y Llinares, S. (2022). Cambios en la comprensión de las relaciones entre polígonos en estudiantes de 8-9 años. *Enseñanza de las Ciencias*, 40(2),49-70.
<https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3208>

- Campos, M., y Rodríguez, M. A. (2020). Un estudio sobre la aprehensión conceptual de las inecuaciones. *Paradigma*, 540-570. <https://doi.org/10.37618/paradigma.1011-2251.2020.p540-570.id811>
- Duval, R. (1995). Geometrical pictures: Kinds of representation and specific processings. In *Exploiting mental imagery with computers in mathematics education* (pp. 142-157). Springer Berlin Heidelberg
- García-Reche, A., Callejo, M. L. y Fernández, C. (2015). La aprehensión cognitiva en problemas de generalización de patrones. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 279-288). Alicante: SEIEM.
- González Chica, G. (2011). Tratamiento de las representaciones semióticas de las funciones cuadráticas (Tesis de maestría), Universidad Autónoma de Manizales, Colombia. <http://repositorio.autonoma.edu.co/jspui/handle/11182/860>



Características del aprendizaje de la práctica profesional específica de planificar lecciones: El caso de la razón y proporción

Jonathan **Espinoza** González

Universidad Nacional

Costa Rica

jonathan.espinoza.gonzalez@una.cr

Ángela **Buform**

Universidad de Alicante

España

angela.buform@ua.es

Salvador **Llinares**

Universidad de Alicante

España

sllinares@ua.es

Resumen

El estudio caracteriza cómo estudiantes para profesor de Matemáticas aprenden la práctica profesional específica de planificar una lección. Catorce estudiantes para profesor participaron en una propuesta formativa dirigida a aprender la práctica de diseñar, analizar y modificar un plan de lección para promover el razonamiento proporcional como un aspecto de su competencia docente. Una característica identificada en el aprendizaje de esta práctica es la relación entre cómo es usado el conocimiento matemático para justificar la secuencia de problemas, la anticipación de estrategias de resolución y las dificultades en la interpretación del impacto de los problemas en el desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes. Esta característica es ilustrada a través de un estudio de caso mostrando que, aprender esta práctica profesional se apoya en la articulación entre el conocimiento de Matemáticas y sobre la progresión del razonamiento proporcional y que además afecta a sus decisiones de mejora de la planificación.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Planeamiento educativo; Investigación de casos; Razones y proporciones; Mirar profesionalmente; Costa Rica.

Definición y relevancia del problema

La planificación de lecciones es una práctica profesional docente específica que influye en la calidad de la enseñanza y aprendizaje de los estudiantes. En el caso de la enseñanza de razones y proporciones, una planificación adecuada permite a los docentes prever estrategias que fomenten el razonamiento proporcional en sus estudiantes, un concepto clave en el currículo de secundaria y base para el desarrollo del pensamiento algebraico (Lamon, 2007). Sin embargo, la planificación de este contenido presenta desafíos específicos, principalmente porque su enseñanza debe desligarse del uso de reglas para la resolución de problemas que no garantiza un razonamiento proporcional (Lamon, 2007; Rivas et al., 2012). Por ello, es esencial que las propuestas formativas oferten oportunidades de aprendizaje de esta práctica profesional que ayude a los futuros profesores a aprender a usar el conocimiento matemático para la enseñanza de la razón y proporción para diseñar lecciones con estrategias pedagógicas adecuadas (Amador et al., 2024; Castillo y Burgos, 2022).

En este sentido, la práctica profesional docente específica de planificar lecciones como parte de la competencia docente del profesor es crucial para que estos puedan analizar y mejorar sus decisiones pedagógicas. Esta práctica consiste en identificar aspectos relevantes en los problemas que conforman la planificación e interpretarlos en términos del apoyo de los problemas al desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes, para tomar decisiones fundamentadas que contribuyan al aprendizaje de los estudiantes (Spitzer y Phelps-Gregory, 2024). En particular, permite a los futuros profesores valorar si el plan de la lección fomenta el desarrollo del razonamiento proporcional (Castillo y Burgos, 2024).

Estudiar la articulación entre los diferentes dominios del conocimiento de Matemáticas para la enseñanza (MKT - Ball et al., 2008) de la razón y la proporción es clave para comprender cómo los futuros docentes aprenden a diseñar lecciones que promuevan este tipo de razonamiento. La integración de estas dimensiones permite no solo estructurar las tareas matemáticas considerando la progresión del desarrollo del razonamiento proporcional, sino también anticipar dificultades y tomar decisiones informadas sobre los recursos y enfoques didácticos más adecuados.

Aprender a diseñar planes de lecciones sobre la razón y proporción: Articulación entre las destrezas de identificar, interpretar y decidir

La práctica profesional específica de planificar lecciones, como un aspecto de la competencia docente implica tres destrezas que articulan la mirada profesional del docente: identificar, interpretar y decidir. En el tema específico de la razón y proporción, la destreza identificar consiste en reconocer, en la secuencia de problemas de la planificación, elementos matemáticos como tipos de razones, tipos de problemas, estrategias de resolución, representaciones y aspectos que influyen en la dificultad de los problemas. La destreza interpretar conlleva analizar en qué medida la secuencia de problemas favorece el desarrollo del razonamiento proporcional. Por último, la destreza decidir refiere a los ajustes realizados en los problemas para aumentar las oportunidades de desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes.

Esta competencia se caracteriza por el uso del conocimiento de Matemáticas y de didáctica de las Matemáticas que apoyan las tres destrezas (Llinares et al., 2019). Este conocimiento vinculado a la razón y proporción incluye el conocimiento matemático de la idea de razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades y su extensión a otro par de cantidades (Lamon, 1993) y el reconocimiento de situaciones proporcionales y no proporcionales (van Dooren et al., 2005). También conocimientos sobre tipos de problemas proporcionales y no proporcionales, estrategias correctas e incorrectas para resolver estos problemas, aspectos que intervienen en la dificultad de los problemas y diferentes formas de representar la relación funcional. Además, implica comprender el aprendizaje de la razón y proporción a través de las transiciones, entre diferentes niveles de desarrollo del razonamiento proporcional (Espinoza-González et al., 2024; Lamon, 2007; Lobato et al., 2010). La primera transición va desde un razonamiento no proporcional (nivel 0) a considerar la razón como una relación multiplicativa entre dos cantidades (nivel 1); la segunda, desde el uso de una razón (nivel 1) a formar múltiples razones escalares, empezando a comprender las razones funcionales, y la idea de la constante de proporcionalidad (nivel 2); y la tercera transición va de usar la constancia de las razones funcionales (nivel 2) a representarla de varias maneras (tabular, algebraica y verbal) (nivel 3). Estos conocimientos matemáticos y didácticos de la razón y proporción permiten al docente justificar el diseño o selección de problemas que promuevan el razonamiento proporcional, prever dificultades de aprendizaje, anticipar acciones instruccionales o seleccionar estrategias didácticas adecuadas (Ball et al., 2008).

El aprendizaje de la práctica profesional específica de planificar y analizar lecciones de Matemáticas requiere la articulación entre dominios de conocimiento en las destrezas (identificar, interpretar y decidir) de la competencia docente mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza. La articulación se entiende como la relación coherente entre el uso de los elementos del conocimiento en las diferentes destrezas. Es decir, la capacidad de definir y conectar de manera clara los elementos de conocimiento que deben intervenir en los diferentes contextos de uso. Por ejemplo, cuando se identifican los elementos matemáticos relevantes de la situación, su interpretación desde las transiciones en la progresión del razonamiento proporcional, que a su vez, permitirán justificar las decisiones en cada momento.

Con base en lo anterior, el objetivo de esta investigación es identificar características de cómo estudiantes para profesor aprenden a planificar lecciones sobre la razón y proporción como un aspecto de la competencia docente. En particular, considerando como se articula diferentes elementos del conocimiento necesario para enseñar en el desarrollo de las destrezas que configuran la competencia docente (identificar, interpretar y decidir)

Método

En este estudio participaron 14 estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria (EPs) en el tercer año de formación de un total de cinco años. Los EPs participaron en una propuesta formativa de 17 semanas de duración (una sesión semanal de 150 minutos cada una y 7 horas de estudio independiente posterior a cada sesión) en la cual se discutieron dos documentos con información teórica (DOC1 y DOC 2) y los EPs resolvieron una actividad introductoria (Act.int) y seis prácticas profesionales (PR1, PR2, ..., PR6) (Figura 1) con el propósito de desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente el razonamiento proporcional en tres ámbitos: el pensamiento matemático de los estudiantes, la planificación

curricular y la reflexión sobre la implementación de la planificación (Espinoza-González et al., 2024). Esta comunicación se centra en el foco específico de la planificación de una lección para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes de secundaria.

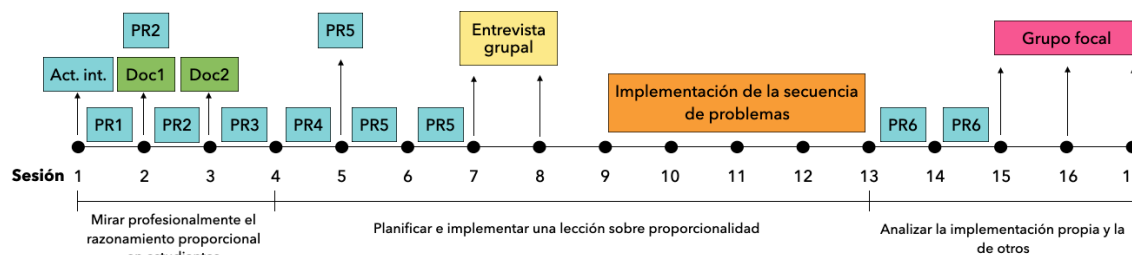


Figura 1. Estructura de la propuesta formativa

En las cuatro primeras sesiones, se introdujeron los conceptos de razón y proporción (Act.int), se resolvieron seis problemas proporcionales (PR1) y se discutieron las características de problemas proporcionales y no proporcionales, los factores que dificultan su resolución y características de estrategias correctas e incorrectas (Doc1) analizando los problemas resueltos en la PR1 (PR2). Además, se discutieron las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional (Doc2) a través de los aspectos clave en las respuestas de tres estudiantes, con distintos niveles de comprensión, a cinco problemas de razones y proporciones, interpretando su comprensión y proponiendo decisiones de qué hacer en cada caso (PR3). Finalmente, los EPs analizaron y propusieron acciones de mejora al tema de proporcionalidad de un libro de texto de secundaria (PR4). En las sesiones 5 y 6 los EPs, en cuatro grupos de dos integrantes (G1, G2, G3 y G4) y dos de tres integrantes (G5 y G6), diseñaron y analizaron una secuencia de problemas (plan de una lección) para desarrollar el razonamiento proporcional en estudiantes de primer año de educación secundaria en Costa Rica (PR5) (Figura 2). Las cuestiones de la 1 a la 5 se vinculan con la destreza identificar, mientras que la cuestión 6 con la destreza interpretar. Por su parte, los ajustes efectuados a la planificación inicial se relacionan con la destreza decidir.

En grupos de dos integrantes diseña/selecciona/adapta una secuencia de problemas para promover en dos lecciones de 40 minutos cada una, la habilidad específica del programa de estudios de Matemática para primer año de Educación Secundaria, *Analizar relaciones de proporcionalidad directa de forma verbal, tabular, gráfica y algebraica*. Para su diseño considera los aspectos estudiados en los documentos 1 y 2. Posteriormente, para cada una de los problemas diseñados indica y JUSTIFICA:

1. Tipos de razones involucradas.
2. Tipos de representaciones utilizadas para relacionar las cantidades.
3. Tipo de problema: proporcional o no proporcional.
4. Características de los problemas que influyen en su dificultad.
5. Estrategias correctas e incorrectas que podrían utilizar los estudiantes para resolverlas.
6. Transiciones en el pensamiento de los estudiantes que apoyan el desarrollo del razonamiento proporcional involucradas en la resolución del problema.

Figura 2. Cuestiones planteadas a los EPs

En las sesiones 7 y 8, se realizó una entrevista semiestructurada donde los EPs justificaron su planificación. Como consecuencia de la entrevista, los EPs realizaron modificaciones a la planificación inicial (la entrevista fue grabada en audio para su análisis). En las sesiones 9 a 12, los EPs implementaron el plan revisado en una aula de primero de secundaria durante 80 minutos y analizaron de forma individual su implementación (PR6) y la de sus compañeros (sesiones 13 y hasta la 17) (Figura 1). La implementación de la planificación y su valoración no son consideradas en este informe. Los datos del estudio son (i) las justificaciones de la secuencia de

problemas diseñada, (ii) las respuestas a la entrevista y (iii) las modificaciones realizadas a la planificación inicial. Para realizar el análisis, se elaboraron comentarios preanalíticos sobre los elementos del razonamiento proporcional que usaban los EPs para justificar la secuencia de problemas que diseñaron (cuestiones de la 1 a la 5) y sobre la interpretación de cada problema para determinar en qué medida la secuencia de problemas apoyaba las transiciones en el desarrollo del razonamiento proporcional (cuestión 6). Posteriormente, se identificaron las modificaciones realizadas a la planificación inicial.

En esta comunicación se presentará el análisis de las respuestas del G6 como un caso que ejemplifica la articulación entre las destrezas de identificar los elementos matemáticos a lo largo del proceso de diseño, justificación y modificación, las interpretaciones generadas y las decisiones tomadas con los dominios de conocimiento matemático para la enseñanza al planificar una lección para desarrollar el razonamiento proporcional.

Resultados

El G6 diseña una secuencia de problemas para desarrollar el razonamiento proporcional combinando problemas proporcionales y no proporcionales. Este grupo identifica características en los problemas como tipos de razones, formas de representación de la razón funcional, tipos de problemas, aspectos que intervienen en la dificultad de los problemas y estrategias correctas e incorrectas. Además, en algunos casos interpretan el apoyo de los problemas a las transiciones del desarrollo del razonamiento proporcional y ajustan los problemas enfocándose en su estructura numérica. El G6 propone tres problemas (Figura 3). El problema 1 es de comparación numérica con dos razones funcionales no enteras ($7.5/4$ y $12/5$) y dos escalares no enteras ($7.5/12$ y $4/5$) con números decimales. El problema 2 es una situación no proporcional de tipo constante. El problema 3 es de valor perdido en una tabla proporcional que presenta una razón funcional no entera ($12/16.2$) y razones escalares enteras ($2/8$, $2/12$, $5.4/16.2$) y no enteras ($8/12$, $5.4/24.3$) con algunos valores decimales y solicita determinar la representación algebraica de la relación funcional.

Problema 1 Marcelo y Felipe un día deciden ver quien es más fanático del anime basándose en cuanto de su tiempo libre invierten consumiendo este producto, tras hacer sus obligaciones a Marcelo le quedan 7,5 horas libres de las cuales invierte 240 minutos en ver animes, mientras que a Felipe le quedan 12 horas libres y de estas invierte 5 horas en ver anime, según el criterio determinado por los chicos, ¿cuál de los dos es más fanático del anime?	Problema 2 Un grupo coreográfico que posee 6 integrantes presenta la coreografía de una obra en 2 sesiones de 40 minutos. ¿Cuántos minutos tardará un grupo de 12 integrantes en presentar la misma coreografía?	Problema 3 Anne tiene una piscina inflable la cual puso a llenar con un flujo constante de agua, dado que estaba aburrida decidió medir la cantidad de agua de la piscina cada 2 minutos y decidió apuntar algunos de los datos en la siguiente tabla. Sin embargo, omitió algunos de los datos porque a veces olvida escribir las cosas por lo que la tabla quedo incompleta. Complete la siguiente tabla: <table><tr><td>Minutos</td><td>2</td><td></td><td>8</td><td>12</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Cantidad de agua</td><td></td><td>5.4</td><td></td><td>16.2</td><td>24.3</td><td>x</td></tr></table>	Minutos	2		8	12			Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x
Minutos	2		8	12												
Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x										

Figura 3. Problemas en la propuesta inicial de G6

Cuando analizan estos problemas, el G6 identifica las razones funcionales enteras y no enteras, pero no reconocen las razones escalares. Sin embargo, son conscientes que las razones no enteras aumentan la dificultad de los problemas. Por ejemplo, en la entrevista cuando se le pide que justifiquen por qué colocaron los números 12 y 16.2 (razón funcional $12/16.2$) en el

problema 3, uno de los miembros del grupo menciona *“procuré que la razón no fuera entera [...] dado que si hacemos la división no es entera. Entonces eso le iba a proporcionar como cierta dificultad más al ejercicio”*. Además, el G6 reconoce que las razones funcionales enteras sin valores decimales facilitan la resolución del problema, comentando en la entrevista que si en el problema 1 se cambia *“las 7.5 horas por un 2 quizá y los 240 minutos por un 4, esto le va a dar más sencillez [a la resolución del problema]”*. Por otra parte, en el caso del problema 2, que es una situación no proporcional, durante la entrevista indican que incluyen los números 6 y 12, que en caso de ser un problema proporcional correspondería a la razón escalar entera 6/12, para *“hacer creer que es directamente una razón de 1 a 2, [pero] en realidad no lo es, porque este no es un problema proporcional”*. Estos EPs, además de las razones no enteras, también identifican que los números decimales en las razones, números pequeños y la familiaridad del contexto intervienen en la dificultad de los problemas, aunque no detallan en qué forma el contexto interviene en la resolución del problema. Respecto a los números decimales, en la entrevista indicaron que en el problema 1 incluyeron el valor 7.5 *“más que todo pensando en la dificultad [del problema]”* y sobre el problema 3 mencionan que *“al utilizar decimales queríamos aumentar la dificultad del ejercicio”*. En relación con el uso de números pequeños, mencionan que en el problema 1 *“se decidió utilizar números que fueran relativamente pequeños para que permitieran la conversión [de horas a minutos]”*.

Respecto a los modos de representación de la relación funcional, identifican la representación tabular en el problema 3, pero no la representación algebraica de la razón funcional que solicita este problema en la última columna de la tabla. Este grupo también reconoce los tipos problemas proporcionales que proponen (comparación numérica en el problema 1 y valor perdido en el problema 3) y señalan que el problema 2 es una situación no proporcional, pero sin especificar que es de tipo constante.

Acerca de las estrategias correctas para resolver los problemas, el G6 propone estrategias acordes con el tipo de problema proporcional que propone. Por ejemplo, para el problema 1 de comparación numérica menciona que puede utilizarse *“unificación de antecedentes o consecuentes y reducción a la unidad”* y para el problema 3 de valor perdido menciona *“el enfoque escalar, enfoque funcional, reducción a la unidad, estrategia constructiva y regla de tres”*. No obstante, en ningún caso detalla los procedimientos asociados a estas estrategias. Para el caso del problema 2, que es una situación no proporcional de tipo constante, no mencionan una estrategia en particular, sino que indica que se debe *“hacer el análisis de que no es una situación proporcional”*. Este grupo también reconoce estrategias incorrectas que se relacionan con el tipo de problema propuesto. Por ejemplo, mencionan *“comparar únicamente antecedentes o consecuentes”* en el problema 1 de comparación numérica, *“tratar como si fuese una proporcionalidad y aplicar algún método de resolución para estas”* en el problema 2 que es una situación no proporcional y la estrategia aditiva para el problema 3 de valor perdido.

En relación al potencial de los problemas para apoyar el desarrollo del razonamiento proporcional, el G6 interpreta y justifica de forma correcta que el problema 3 promueve la transición 3 porque implica representar de forma algebraica la razón funcional pero sin usar estos términos. Al respecto indica *“transición 3 ya que [el estudiante] debe rellenar la casilla del valor x”*. Sin embargo, este grupo tiene dificultades para justificar que el problema 1 de comparación numérica apoya la transición 2, ya que los EPs relacionan la transición 2 con el establecimiento de una relación multiplicativa, siendo la construcción de múltiples razones la

característica principal de esta transición. Al respecto mencionan “*transición 2 debido a que la asociación entre las dos cantidades se da de una forma multiplicativa*”. En el caso del problema no proporcional (problema 2) no interpretan cómo este problema apoya alguna transición, sino que mencionan que “se requiere de un conocimiento profundo sobre proporcionalidad para poder distinguir una situación que es proporcional de una que no lo es”.

Por último, las modificaciones a los problemas de la planificación inicial no se realizan con el propósito que el problema apoye de una mejor manera alguna de las transiciones, sino que buscan disminuir la complejidad de los problemas y facilitar la comprensión de las relaciones entre las cantidades (como un objetivo de aprendizaje que favorece la comprensión inicial de la idea de razón). En la tabla 1 se muestran las modificaciones realizadas a los problemas 1 y 3. El problema 2 no fue modificado.

Tabla 1

Modificaciones realizadas por G6 a los problemas 1 y 3 de la propuesta inicial

Problema	Modificaciones														
Problema 1. Marcelo y Felipe un día deciden ver quien es más fanático del anime basándose en cuanto de su tiempo libre invierten consumiendo este producto, tras hacer sus obligaciones a Marcelo le quedan 7,5 horas libres de las cuales invierte 240 minutos en ver animes, mientras que a Felipe le quedan 12 horas libres y de estas invierte 5 horas en ver anime, según el criterio determinado por los chicos, ¿cuál de los dos es más fanático del anime?	-Cambiar el valor 7.5 por 6, lo cual produce que la razón escalar no entera 7.5/12 sea ahora la razón escalar entera 6/12 (lo que hace más evidente que Felipe tiene el doble de horas libres que Marcelo). -Remplazar todos los valores con decimales por números enteros.														
Problema 3. Anne tiene una piscina inflable la cual puso a llenar con un flujo constante de agua, dado que estaba aburrida decidió medir la cantidad de agua de la piscina cada 2 minutos y decidió apuntar algunos de los datos en la siguiente tabla. Sin embargo, omitió algunos de los datos porque a veces olvida escribir las cosas por lo que la tabla quedo incompleta. Complete la siguiente tabla: <table><tr><td>Minutos</td><td>2</td><td></td><td>8</td><td>12</td><td></td><td></td></tr><tr><td>Cantidad de agua</td><td></td><td>5.4</td><td></td><td>16.2</td><td>24.3</td><td>x</td></tr></table>	Minutos	2		8	12			Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x	-Cambiar la razón funcional no entera 12/16.2 por la razón funcional entera 12/48 (lo que hace más evidente que la cantidad de agua es cuatro veces la cantidad de minutos) -Remplazar todos los valores con decimales por números enteros.
Minutos	2		8	12											
Cantidad de agua		5.4		16.2	24.3	x									

Como se observa en la Tabla 1, las modificaciones se enfocan en cambiar los valores para que las razones funcionales o escalares sean enteras y que los valores en las razones sean números enteros.

Conclusiones

Este estudio se centró en comprender cómo estudiantes para profesor articulan las destrezas de la competencia mirar profesionalmente la planificación curricular con el conocimiento matemático para la enseñanza de la razón y proporción, durante la planificación de una lección para desarrollar el razonamiento proporcional en estudiantes de secundaria. Los resultados señalan como una característica de la articulación, el uso de elementos del conocimiento para la

enseñanza de la razón y proporción para justificar el diseño de una secuencia de problemas que promueve tanto el establecimiento de relaciones multiplicativas entre cantidades (problemas 1 y 3) como el reconocimiento de situaciones no proporciones (problema 2). Además, conocimiento sobre el desarrollo del razonamiento proporcional permitió a los EPs enlazar las características de los problemas (proporcionales y no proporcionales) con la identificación anticipada de estrategias correctas e incorrectas, consistentes con los tipos de problemas planteados y la capacidad para proponer modificaciones a la estructura numérica de las razones en los problemas con el propósito de aumentar o disminuir su complejidad. Sin embargo, una comprensión incompleta de las características del aprendizaje de la razón y proporción de los EPs genera dificultades para interpretar el aporte de los problemas a las transiciones del desarrollo del razonamiento proporcional de los estudiantes y la capacidad de decidir de los EPs para modificar aspectos de los problemas con el propósito de apoyar estas transiciones.

Reconocimientos. La participación de Àngela Buform y Salvador Llinares ha sido apoyada por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Ref. No. PID2023-149624NB-100).

Referencias

- Amador, J., Glassmeyer, D., & Brakoniecki, A. (2024). Teacher's noticing of proportional reasoning. *Journal of mathematics Teacher Education*. <https://doi.org/10.1007/s10857-024-09625-7>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Castillo, M.J., & Burgos, M. (2024). Decision making in managing semiotic conflicts in curriculum materials: a training program with prospective teachers in Costa Rica. *Educational Studies in Mathematics*, <https://doi.org/10.1007/s10649-024-10363-z>
- Castillo, M. J., & Burgos, M. (2022). Developing reflective competence in prospective mathematics teachers by analyzing textbooks lessons. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(6), em2121. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12092>
- Espinoza-González, J., Buform, À., & Llinares, S. (2024). *Diseño de una propuesta formativa para desarrollar la competencia mirar profesionalmente el razonamiento proporcional*. I Simposio Internacional de Educación Matemática para Primaria y Secundaria, Colombia.
- Lamon, S. (1993). Ratio and proportion: children's cognitive and metacognitive processes. In T. Carpenter, E. Fennema, & T. Romberg (Eds.), *Rational Numbers. An Integration of Research* (pp.131-156). Lawrence Erlbaum Associates.
- Lamon, S. J. (2007). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies*. Routledge.
- Llinares, S., Ivars, P., Buform, À., & Groenwald, C. (2019). Mirar profesionalmente» las situaciones de enseñanza: una competencia basada en el conocimiento. In E. Badillo, N. Climent, C. Fernández, & M. T. González (Eds.). *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación, práctica de aula, conocimiento y competencia profesional* (pp. 177-192). Ediciones Universidad Salamanca.
- Lobato, J., Ellis, A. B., Charles, R. I., & Zbiek, R. M. (2010). *Developing essential understanding of ratios, proportions, and proportional reasoning for teaching mathematics in grades 6-8*. National Council of Teachers of Mathematics.
- Rivas, M.A., Godino, J.D., & Castro, W.F. (2012). Desarrollo del conocimiento para la enseñanza de la proporcionalidad en futuros profesores de primaria. *Bolema* 26(42B), 559-588.
- Spitzer, S., & Phelps-Gregory, Ch. (2024). The relationships between prospective teachers' mathematics knowledge for teaching and their ability to notice student thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 36, 443-470 <https://doi.org/10.1007/s13394-023-00455-z>
- van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D., & Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86. https://doi.org/10.1207/s1532690xc2301_3



Conocimiento conceptual y procedimental en futuros profesores. El caso de las fracciones

Ivette Anel **Delgado** Valdez

Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 321, Zacatecas
México

ivette.delgado8@hotmail.com

Luis Manuel **Aguayo** Rendón

Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 321, Zacatecas
México

l_aguo@yahoo.com.mx

Lorena Alejandra **Medina** Hernández

Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 321, Zacatecas
México

lorealwera@gmail.com

Resumen

Aunque las fracciones son un contenido fundamental en la educación primaria, diversas investigaciones han señalado la limitada comprensión que sobre ellas tienen los futuros docentes. En este estudio se indagan los conocimientos conceptuales y procedimentales sobre fracciones que los profesores en formación tienen antes de recibir cursos de enseñanza de las matemáticas. Se diseñaron y aplicaron ocho tareas que involucran fracciones, las respuestas se analizaron considerando cuatro aspectos: *representaciones, interpretaciones, procedimientos y nociones*. Los resultados revelaron vacíos significativos respecto de esos aspectos. Concluimos que es fundamental que en la formación inicial de profesores se tomen en cuenta los saberes previos de los estudiantes para trabajar con dispositivos que ayuden a mejorar su saber conceptual, procedimental acerca de las fracciones.

Palabras clave: Fracciones; representaciones; docentes en formación; conocimientos conceptuales; conocimientos procedimentales

Introducción

En este trabajo se analizan los conocimientos sobre las fracciones con los que los estudiantes para profesor tienen antes de su primer curso sobre enseñanza de las matemáticas, se espera que identificar dichos conocimientos permitirá al formador y a los investigadores establecer puntos de partida para diseñar o reestructurar propuestas de formación congruentes con esos conocimientos.

Los saberes de los futuros profesores. Planteamiento del problema

Diversas investigaciones (Ávila, 2008; Castro y Rico, 2020; Cortina, 2013; Llinares, 2014; Thompson y Saldanha, 2003 y Valdemoros, 2010), señalan que a los alumnos de educación básica se les dificulta comprender las nociones y representaciones de las fracciones (Tassavainen y Helenio, 2024) y dominar los procedimientos y técnicas algorítmicas y que esas dificultades también las tienen los profesores en formación quienes según Castro y Rico (2020) y Yao et al., (2021) no tienen una comprensión suficiente de los contenidos matemáticos para ejercer una enseñanza efectiva. Por su parte Castro et al. (2015) encuentran que para introducir las fracciones en sus prácticas los profesores en formación realizan una propuesta didáctica “vacía” en la que priorizan la explicación y el uso instrumental de las operaciones con fracciones. Tassavainen y Helenio (2024) señalan que tienen dificultades para trabajar con procedimientos fraccionarios y se limitan a usar las reglas para resolver operaciones. Yao et al. (2021) encontraron que existe una estrecha relación entre el desempeño que tienen los estudiantes de primaria y el de los futuros profesores. Sosa et al. (2024) revelan que los docentes en formación tienen una comprensión limitada de las fracciones, lo que les genera dificultades para plantear problemas contextualizados.

Conocimiento conceptual y procedimental. Una perspectiva teórica

Frecuentemente los conocimientos de los profesores en formación se estudian desde dos tipos de conocimiento: el conceptual y el procedimental (Tassavainen y Helenio, 2024). El primero está relacionado con la comprensión de las definiciones, el segundo con las habilidades de cálculo, el uso de reglas y las nociones para operar con estos números. El conocimiento conceptual está relacionado con las representaciones e interpretaciones del objeto matemático, mientras que el procedimental está vinculado con las operaciones, nociones, reglas y habilidades de cálculo. Estos tipos de conocimiento se estructuran con cuatro aspectos:

- *Representaciones*: Un objeto matemático puede representarse de distintas maneras, las representaciones más comunes de la fracción son *verbales*, *visuales* y *simbólicas*. Las verbales se expresan en un lenguaje hablado, las visuales utilizan dibujos, imágenes o manipulaciones y las simbólicas utilizan la escritura con dos números (numerador y denominador) para representar una sola cantidad ($\frac{2}{4}$). Las fracciones también pueden representarse con números decimales o porcentajes.
- *Interpretaciones*: Las fracciones se interpretan de manera diferente, para este estudio usaremos el modelo de Kieren (1981) quien define a las fracciones mediante las *interpretaciones o significados*: parte-todo, razón, operador, cociente y medida.

- *Procedimientos*: Se ven nutridos por las representaciones y las interpretaciones y contribuyen a la realización de operaciones.
- *Nociones*: Se desarrollan en torno a un objeto matemático, incluyen el reconocimiento de los elementos de sus representaciones: numerador, denominador, fracciones equivalentes, recta numérica, fracción unitaria, fracción impropia y números mixtos.

Los aspectos mencionados son considerados una base indispensable para el estudio de álgebra y otras áreas de la matemática, por ello resulta interesante analizar con qué conocimientos cuentan los futuros profesores antes de iniciar sus cursos de enseñanza de las matemáticas.

Metodología

El presente es un estudio descriptivo cuyo objetivo es puntualizar el fenómeno focalizado y especificar sus propiedades, para ello usamos cuatro categorías que se refieren a los conocimientos conceptual y procedimental: F-1 (representaciones), F-2 (interpretaciones), F-3 (procedimientos) y F-4 (nociones). Se realizó con 28 alumnos de la Licenciatura en Intervención Educativa de la Universidad Pedagógica Nacional – Unidad 321, en la ciudad de Guadalupe, Zacatecas, México que cursaban el sexto semestre de la carrera. En el momento de la investigación no habían recibido formación para la enseñanza de las matemáticas. Para identificar sus conocimientos conceptuales y procedimentales sobre las fracciones se les plantearon ocho tareas matemáticas (Ver Tabla 1).

Tabla 1
Tareas planteadas

Representa $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{5}$, $\frac{6}{6}$ <i>Identificar la fracción como simbólica, verbal o visual, así como su significado.</i>	Un conductor ha hecho 80km de un recorrido, si el total es de 240 km ¿Qué fracción del recorrido le falta? <i>Interpretar fracción como una razón.</i>
¿Cuál fracción es mayor y por qué? $\frac{9}{10}$ o $\frac{10}{9}$ $\frac{7}{11}$ o $\frac{2}{3}$ <i>Reconocer nociones de comparación como elementos de sus representaciones.</i>	Matías va a repartir tres chocolates entre él y cuatro amigos ¿Cuánto le toca a cada uno? <i>Interpretar la fracción como cociente.</i>
Señala en la recta $\frac{3}{5}$ y un $\frac{1}{2}$ <i>Noción de fracción al identificarla en recta numérica.</i>	En una fiesta se comparte un pastel y al final solo quedan $\frac{2}{5}$ de él, si Andrés se comió $\frac{1}{4}$ del sobrante ¿Qué fracción del pastel completo se comió? <i>Realizar división de fracción como procedimiento.</i>
¿Qué fracción equivale a $\frac{8}{12}$? $\frac{6}{10}$ $\frac{6}{9}$ $\frac{8}{9}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{12}{8}$ <i>Reconocer nociones de equivalencia como elementos de su representación.</i>	Mirna compró $\frac{3}{4}$ kg de queso, si lo repartió en porciones de $\frac{1}{8}$ de kilo ¿Cuántas porciones puedo sacar? <i>Realizar división de fracción como procedimiento.</i>

Fuente: elaboración propia.

Las tareas fueron diseñadas para identificar fortalezas y debilidades en la comprensión y uso de fracciones, con el objetivo de aportar datos relevantes para la mejora de programas de formación inicial docente.

Análisis. Los conocimientos de los profesores en formación

Cuando se plantea una tarea que involucra a las fracciones se activa el conocimiento conceptual y procedimental del alumno (Sosa et al., 2024), es por ello que las respuestas a las tareas planteadas en un primer momento se analizaron en términos generales contrastándolas con los aspectos incluidos en la Figura 1, enseguida se hará un análisis más detallado de los conocimientos conceptuales y procedimentales presentes en dichas respuestas.



Figura 1. Resultados de problemas aplicados.

Como se puede observar en la figura anterior, todos los alumnos utilizaron representaciones visuales y simbólicas (F1) en las que destaca el uso de números decimales. Los significados (F2) parte-todo y cociente fueron los más identificados; el significado razón fue el menos identificado. En los procedimientos (F-3) el procedimiento para la equivalencia fue el más dominado, el de división fue el menos conocido. En las nociones (F4) todos identificaron la fracción unitaria y sólo dos reconocieron la fracción mixta.

F-1 Representaciones

Las representaciones de la fracción que hacen están centradas en lo simbólico y lo visual ya que, para resolver las tareas de interpretación de la fracción generalmente utilizan representaciones visuales, figuras circulares y rectangulares. Por ejemplo, cuando se les pide determinar cuál fracción es mayor ($9/10$ o $10/9$; $7/11$ o $2/3$) el 25% utiliza dibujos para resolver la cuestión. En sus representaciones se observan dificultades con la congruencia y la unidad de referencia, que los ayudaría a comprender la magnitud de los valores (Ezaki et al., 2022), un ejemplo se puede ver en la Figura 2, consideran la fracción como parte-todo y dividen al entero en las partes que el denominador indica, pero no toman en cuenta que, para compararlas requieren una misma unidad de referencia para ambos casos. Yao et al. (2024) mencionan que “las representaciones gráficas pueden crear diferentes desafíos para los niños en la identificación de la referencia de la unidad” (p. 14).

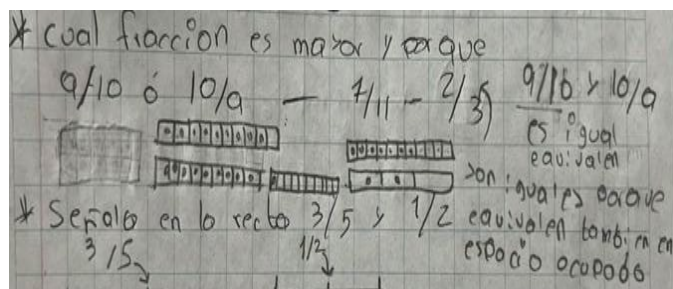


Figura 2. Congruencia en la partición de la unidad.

En el sentido de la idea anterior, Sosa et al., (2024) mencionan que los docentes en formación utilizan representaciones gráficas sin conexión entre el conocimiento conceptual y procedimental, lo que refleja una capacidad limitada para entender las relaciones entre lo que dibujan y la operación que desean realizar. En la Figura 3 se puede ver que, para comparar las fracciones las representa con círculos, pero su primera respuesta (*9/10 es mayor porque tiene más cantidad*) no corresponde con sus dibujos ya que para representar 10/9 tuvo que dibujar dos círculos.

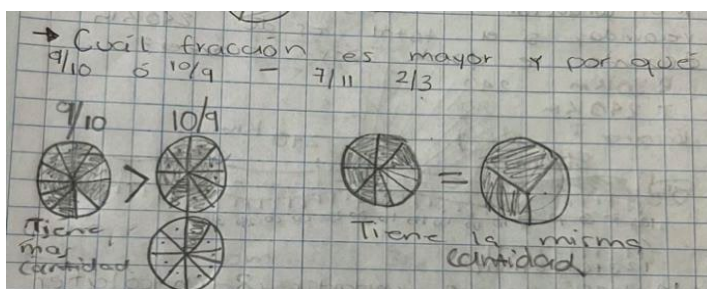


Figura 3. Equipartición de la unidad y su congruencia.

En esta misma tarea (Figura 4) el alumno utiliza representaciones simbólicas (números decimales), para comparar 7/11 y 2/3 transforma las fracciones a decimales (0.63 y 0.6) pero sólo toma en cuenta los décimos, lo que genera que establezca una falsa igualdad.

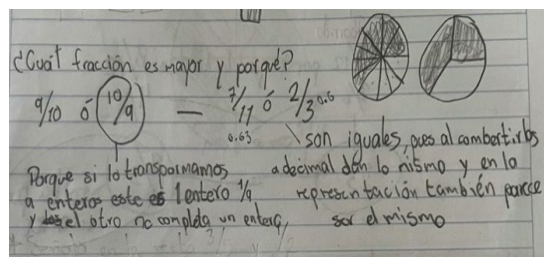


Figura 4. Representación decimal.

Esta misma acción se observa en la Figura 5, para comparar 7/11 y 2/3 las convierte en decimales y a diferencia del estudiante anterior, sí toma en cuenta los centésimos y por ello es capaz de determinar adecuadamente cuál fracción es mayor.

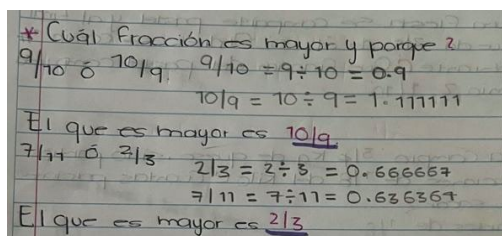


Figura 5. Representación decimal

F-2 Interpretaciones

Cómo hemos señalado, el significado parte-todo fue el más utilizado, es la concepción que predominó en los alumnos para representar fracciones, por ejemplo (Figura 6) cuando se les pide justificar sus comparaciones el 29% de los alumnos da argumentos relacionados con la partición de un todo, esto sucede según Castro y Rico (2020) porque en su instrucción se les ha planteado representaciones de área y parte-todo como estímulo.

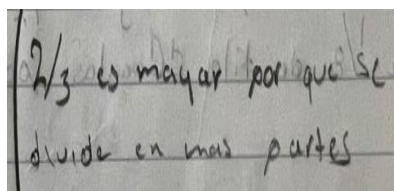


Figura 6. Representación de la fracción como parte-todo

Cuando aparece la fracción como cociente se trata de dividir uno o varios objetos entre un número de personas o partes (Kieren, 1980). Una tarea de este tipo es la No. 6 donde el 82 % de los profesores en formación llegan al resultado correcto pero lo hacen utilizando representaciones visuales (ver Figura 7) similares a la que lo utilizarían los niños de primaria (Castro y Rico, 2020).

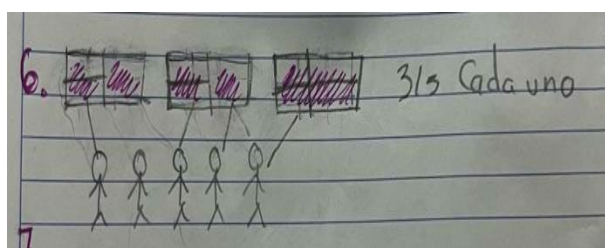
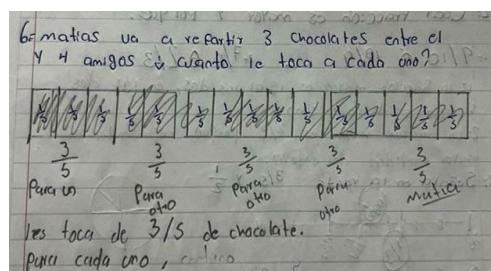


Figura 7. Respuesta de fracción como cociente

F-3 Procedimientos

Los procedimientos que realizan los profesores en formación fundamentalmente se basan en representaciones visuales, muy pocos utilizan las operaciones convencionales con fracciones. En investigaciones hechas por Tassavainen y Helenio (2024) con estudiantes de profesorado en educación primaria, se advierte la incertidumbre por la que pasan los profesores en formación al resolver problemas que involucran fracciones. En nuestro estudio, el 71.5% de los estudiantes fueron capaces de llegar al resultado correcto pero la mitad utilizan representaciones gráficas

para obtenerlo, sólo el 25% utilizan los algoritmos para resolver las tareas, el resto (3.5%) da la respuesta pero no muestra su procedimiento.

A pesar de su trayectoria académica, los procedimientos que utilizan son básicos y similares a los que usan los alumnos de educación primaria, Yao et al. (2024) encuentran algo similar en China y Estados Unidos y señalan que los futuros docentes tienen dificultades para desarrollar una comprensión clara de las fracciones y sus operaciones como consecuencia enfrentar tareas de cálculo centradas en aspectos tradicionales como el dibujo. Lo mismo ocurre con los sujetos de nuestro estudio, se observa poca comprensión de las operaciones y las reglas de ejecución. Por ejemplo (Figura 9) para encontrar el resultado de la tarea 7 primero se sombrea $\frac{2}{5}$ del todo, luego sombrea otros $\frac{2}{5}$ para buscar $\frac{1}{4}$ de ellos, después divide el entero en decimos y encuentra el resultado. Aunque valida su respuesta, se puede apreciar que no existe una conceptualización de las operaciones para resolver problemas de este tipo.

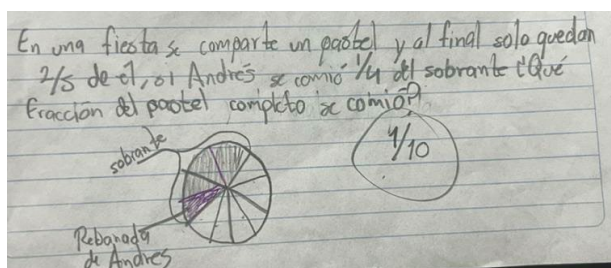


Figura 9. Resolución de problema que planea división con fracciones.

Lo mismo ocurre con los sujetos de nuestro estudio, se observa poca comprensión de las operaciones y las reglas de ejecución. Por ejemplo (Figura 9) para encontrar el resultado de la tarea 7 primero se sombrea $\frac{2}{5}$ del todo, luego sombrea otros $\frac{2}{5}$ para buscar $\frac{1}{4}$ de ellos, después divide el entero en decimos y encuentra el resultado. Aunque valida su respuesta, se puede apreciar que no existe una conceptualización de las operaciones para resolver problemas de este tipo.

F-4 Noción

La fracción unitaria es una de las nociones que más fácilmente comprenden los profesores en formación, todos reconocen la estructura y composición de la misma cuando usan áreas para representarla. Este hecho nos remite a las ideas de Thompson y Saldanha (2003), Olanoff (2014) y Yao et al., (2024) quienes afirman que existe una sobreinterpretación de las ideas de parte-todo que dificultan el aprendizaje de las fracciones, sobre todo cuando se requiere un razonamiento multiplicativo. En contraparte, sólo la mitad fue capaz de reconocer las fracciones impropias,

Las dificultades para comprender la fracción impropia se evidencian cuando invierten la posición del numerador y denominador, al parecer es un efecto de la enseñanza basada en la equipartición que considera a la unidad como un todo. Un ejemplo de esta dificultad se muestra en Figura 11 donde el estudiante divide el entero en séptimos y sombrea cinco partes, lo que significa invertir la función del numerador y denominador. Freudenthal (1983), Llinares y Sánchez (1997), y Cortina (2013) señalan que esto sucede porque generalmente la fracción es enseñada como algo menor o igual a la unidad lo cual limita la comprensión de fracciones impropias.

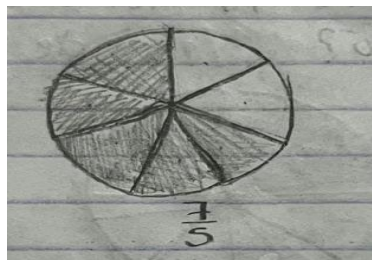


Figura 11. Representación de la fracción impropia.

En la tarea no. 3 se trata de representar fracciones en la recta numérica, en esta solo el 21% logró ubicar de manera adecuada dos fracciones menores a la unidad, Rothery y Flores (2014) afirman los maestros enfatizan las acciones sobre la recta en vez de conceptualizar como modelo continuo que nace de la iteración de la unidad. En la Figura 12 se puede apreciar la dificultad para comprender la distancia entre dos puntos en la recta, en estos casos los alumnos responden al orden que deben seguir según su magnitud, en otros casos el orden y la distancia parecen ser la dificultad para representar fracciones sobre la recta numérica (Rothery y Flores, 2014).

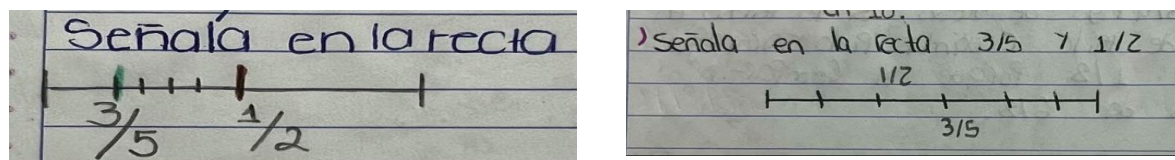


Figura 12. Noción de recta numérica.

Conclusiones

El presente estudio reafirma las dificultades conceptuales y procedimentales que enfrentan los futuros profesores en relación con las fracciones, como lo han señalado autores como Castro y Rico (2021) y Tassavainen y Helenio (2004). Los resultados evidencian que la mayoría de los participantes posee comprensión en el significado parte-todo, lo cual limita su capacidad para abordar interpretaciones más complejas. Este enfoque sesgado refleja una instrucción previa que enfatiza las representaciones visuales y simbólica sin vincularlas adecuadamente con operaciones matemáticas más avanzadas.

En cuanto a los procedimientos se observó que los participantes recurren a métodos rudimentarios, similares a los empleados por los alumnos de educación primaria, lo que demuestra una limitada conexión entre el conocimiento conceptual y el procedimental (Llinares, 2014; Sosa et al., 2024). Esta desconexión resulta evidente en la dificultad para ubicar fracciones en la recta numérica, realiza comparaciones con diferentes denominadores y resolver problemas que involucren operaciones complejas con fracciones.

De manera específica, las representaciones a las tareas planteadas revelaron carencias significativas en la comprensión de la unidad de referencia, la equipartición congruente y las relaciones multiplicativas subyacentes, tal como lo señalaron Rothery y Flores (2014) y Freudenthal (1983). Estas lagunas afectan en su capacidad para conceptualizar las fracciones impropias y trabajar con procedimientos que trasciendan el uso instrumental.

En este contexto, es fundamental replantear los programas de formación docente, priorizando estrategias que integren y fortalezcan los conceptos conceptuales y procedimentales de manera equilibrada. Como lo sugieren Olanoff et al. (2014) y Yao et al. (2021), es necesario diseñar actividades que fomenten una comprensión integral de las fracciones, incorporando contextos significativos y promoviendo el razonamiento multiplicativo. Además, la formación debe incluir herramientas pedagógicas que permitan a los futuros docentes vincular las diferentes representaciones de las fracciones con aplicaciones prácticas y situaciones reales.

En conclusión, abordar las deficiencias identificadas en este estudio contribuirá significativamente a mejorar la enseñanza de las fracciones en los niveles básicos de educación, promoviendo un aprendizaje más profundo y sostenible tanto en los futuros docentes como en sus estudiantes.

Referencias y bibliografía

- Ávila, A. (2008). Los profesores y los decimales. Conocimientos y creencias acerca de un contenido de saber *cuasi invisible*. *Revista Educación Matemática*, 20 (2), 5-33.
- Castro-Rodríguez, E. & Rico, L. (2021). Conocimiento sobre fracciones de docentes de primaria en formación. *Uniciencia*, 35(2), 1-18. <https://doi.org/10.15359/ru.35.2.10>
- Cortina, J. L., Zuñiga, C., & Jana, V. (2013). La equipartición como obstáculo didáctico en la enseñanza de las fracciones. *Educación Matemática*, 25(2), 7-29. <https://www.revista-educacion-matematica.com/pdf/documentos/REM/REM25-2/Vol25-2-1.pdf>
- Ezaki, J., & Copur-Gencturk, Y. (2003). Teachers' Knowledge of Fractions, Ratios, and Proportional Relationships: The Relationship Between Two Theoretically Connected Content Areas. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 235–255 <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10372-z>
- Flores A. & Rothery, T., (2014). Orden y distancia de fracciones y decimales en la recta numérica: El caso de Abigail. *Avances De Investigación En Educación Matemática*, (5), 73–90. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i5.49>
- Freudenthal, H. (1973) *Mathematics as an educational task*. Library of Congress Catalog Card Number, 72-77872. <https://doi.org/10.1007/978-94-010-2903-2>
- Freudenthal, H. (1983). Didactical Phenomenology of Mathematical Structures. *Mathematics Education Library*. D. Kluwer Academic Publisher.
- Kieren, T. (1981). The rational number construct—Its elements and mechanisms. En Kieren, *Recent research on number learning*, (pp.25-149).
- Llinares, S. (2014). Conocimientos de matemáticas y tareas en la formación de maestros. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 12, 205-220. <https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/view/18921/19035>
- Olanoff, D., Lo, J., & Tobias, J. (2014). Mathematical Content Knowledge for Teaching Elementary Mathematics: A Focus on Fractions. *The Mathematics Enthusiast*, 11(2), 267-310. <https://doi.org/10.54870/1551-3440.1304>
- Sosa-Marín, D., Perdomo-Díaz, J., Bruno, A., Almeida, R., & García-Alonso, I., (2024). The influence of problem-posing task situation: Prospective primary teachers working with fractions. *Journal of Mathematical Behavior*, 73-101139, 1-15. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2024.101139>
- Thompson, P.W. & Saldanha, L.A. (2003). Fracciones y razonamiento multiplicativo. En J. Kilpatrick, G. Martin y D. Schifter (Eds), *Investigación complementaria de los Principios y estándares para las matemáticas escolares*. Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas, (pp.95-114).
- Tossavainen, A. & Helenio O. (2024). Student Teachers' Conceptions of Fractions: A Framework for the Analysis of Different Aspects of Fractions. *Mathematics Teacher Education and Development*, 26(1), 1-20. <https://mted.merga.net.au/index.php/mted/article/view/889>
- Valdemoros M. (2010). Dificultades experimentadas por los maestros de primaria en la enseñanza de las fracciones. *RELIME*, 423-440.
- Yao, Y., Hwang, S. y Cai, J. (2021). Preservice teachers' mathematical understanding exhibited in problem posing and problem solving. *Mathematics Education* 53, 937-949. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01277-8>



Conocimiento especializado del profesor de Matemática en formación inicial: Argumentos matemáticos de la demostración

Jennifer Fonseca Castro

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

jennifer.fonseca.castro@una.cr

Christian Alfaro Carvajal

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

cristian.alfaro.carvajal@una.cr

Resumen

El propósito de este estudio es identificar las características de los argumentos matemáticos que resultan más persuasivos para los docentes de matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica (UNA). La investigación se enmarca dentro del paradigma interpretativo y adopta un enfoque cualitativo. Participaron 30 profesores en formación inicial, de los cuales 19 estaban en su cuarto año de bachillerato y 11 en su primer año de licenciatura. Se les aplicó un cuestionario durante el primer semestre de 2022, en el que se presentaron cinco argumentos para demostrar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Para analizar la información, se utilizó el análisis de contenido, creando seis categorías basadas en las características de los argumentos mencionados por los participantes. Los resultados revelaron que la mayoría de los encuestados considera convincente un argumento matemático cuando utiliza elementos lógicos o matemáticos correctos, cuando las ideas se expresan de forma clara y sencilla, y cuando se emplean elementos matemáticos básicos que facilitan la comprensión del argumento.

Palabras clave: Argumentos matemáticos; Conocimiento especializado del profesor de Matemática en formación inicial; Demostración matemática; Formación inicial de profesores de Matemáticas; Matemática Superior.

Introducción

La demostración es un tema de interés en la Educación Matemática, concretamente en la enseñanza de las Matemáticas. En este sentido, la National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2003) sugiere que debe estar presente en los programas de estudio de todos los niveles educativos. Según Stylianides (2007) investigadores y marcos curriculares plantean la inclusión de las demostraciones matemáticas como parte de la formación de los estudiantes en todas áreas temáticas y en todos los niveles educativos ya que son la base que permite comprender el conocimiento matemático.

En el caso de Costa Rica, la demostración forma parte del currículo matemático de la educación secundaria, concretamente, el Ministerio de Educación Pública (MEP, 2012) la considera parte del proceso denominado razonar y argumentar. Tanto en las Matemáticas como en la Educación Matemática existen dos posiciones sobre la demostración, una que alude más a los aspectos lógicos-sintácticos en donde se considera como una secuencia de pasos utilizando reglas lógicas para garantizar una conclusión y otra que refiere más a lo semántico en donde lo fundamental sean las ideas que favorezcan la comprensión matemática (Durand-Guerrier et al., 2012a; Durand-Guerrier et al., 2012b; Hanna y De Villiers, 2012).

Si bien es cierto, el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas sobre los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos de la demostración es importante, también se debe considerar que, tanto en la demostración de teoremas como en la evaluación de los argumentos matemáticos propuestos por sus alumnos, los profesores pueden considerar otros elementos de convicción que les hagan tomar decisiones sobre su validez. Por tal razón, el propósito de esta investigación es estudiar las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores de Matemáticas en formación inicial.

Elementos teóricos o conceptuales

En la comunidad matemática la aceptación de un teorema consiste en un proceso social en donde tiene más relevancia la comprensión y el significado que una demostración rigurosa del mismo. Algunos investigadores han indicado que la convicción de los profesores de Matemáticas sobre algún resultado puede estar basada en algunos elementos diferentes a su propio conocimiento (Knuth, 2002; Lin et al., 2012). Esto es relevante debido a las implicaciones que pueda tener en su desempeño profesional para el abordaje de la enseñanza de la demostración. Por tal razón, consideramos a la convicción de un argumento matemático, como las razones por las que los profesores de Matemáticas encuentran convincente a un argumento matemático.

El término argumento es una unidad discursiva básica de la argumentación y puede entenderse de diferentes formas en función del enfoque de esta (Lo Cascio, 1998; Vega, 2012). Para De Villiers (1993) y Hanna (2002), la demostración es un argumento cuyo propósito es garantizar la validez de una proposición matemática. Puede tener diversas formas de razonamiento, siempre y cuando sea convincente y aceptada por la comunidad, ya que en las Matemáticas la convicción se puede lograr empleando formas alternativas a una demostración lógica y formal (Stylianides, 2007). Según Crespo et. al. (2010), se distinguen seis formas: (i) las argumentaciones abductivas, donde se parte de una implicación, su consecuente y se deduce el

antecedente; (ii) las argumentaciones inductivas, en las que se determina la validez de una proposición basándose en el análisis de un número reducido de casos; (iii) las argumentaciones no monotónicas, que permiten ajustar los supuestos en función de nuevos casos o información; (iv) las argumentaciones visuales, que derivan conclusiones a partir de diagramas; (v) las argumentaciones a conocimiento cero, se refieren a demostraciones que en realidad no lo son; y (vi) las argumentaciones gestuales, en las que se defiende o expresa una idea mediante movimientos y ademanes. Lo anterior se utiliza de base para la selección de las demostraciones mostradas a los sujetos de investigación en el instrumento de recolección de información, a excepción de la forma (vi) por razones obvias.

Elementos metodológicos

En esta investigación pretendemos profundizar y comprender cuáles son las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los 30 profesores en formación inicial participantes en el estudio que estaban matriculados durante el primer semestre del 2022 en la carrera denominada Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional de Costa Rica, 19 en el cuarto año que conformaron el grupo de bachillerato (GB) y 11 en el quinto año que consideramos como el grupo de licenciatura (GL).

Para la recolección de la información se aplicó un cuestionario con una duración aproximada de una hora y que los sujetos completaron de forma individual en los horarios asignados a los cursos matriculados. Puesto que nuestro interés era analizar las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los sujetos de investigación, hemos considerado pertinente utilizar un resultado matemático presente en los programas de estudio de Matemáticas de la educación secundaria en Costa Rica, complejo e importante en la formación matemática de los estudiantes de secundaria (Romero y Rico, 1996) y necesario en el conocimiento del profesor de Matemáticas: la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Dicho resultado es sugerido en tales programas de estudios para introducir a los números irracionales.

La variedad de argumentos matemáticos para demostrar la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, así como las particularidades de cada una, las hemos considerado relevantes para poder caracterizar a los argumentos más convincentes. De esta manera, y de la mano con lo expuesto por Crespo et. al. (2010), se presentan cinco argumentos matemáticos que pretenden garantizar la validez de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos. Todos los argumentos, excepto el número 2, corresponden a demostraciones matemáticas correctas de este resultado. El argumento número 2 es una demostración matemática correcta, pero de la existencia de tal raíz, no de su irracionalidad. Posteriormente, se les pidió a los sujetos que ordenaran los cinco argumentos del 1 al 5 en donde 1 era el más convincente para ellos hasta el 5 que consideraran como el menos convincente. Además, debían brindar las razones por las que escogían al más y al menos convincentes.

Para analizar la información del cuestionario se empleó el análisis de contenido que es una técnica científica de investigación para hacer inferencias replicables y válidas de textos (u otra materia significativa) a los contextos de su uso. Este análisis implica el uso de procedimientos especializados, proporciona nuevas ideas, aumenta la comprensión del investigador de fenómenos particulares o informa acciones prácticas. Además, la frecuencia no es igual a la

importancia, y no decir algo puede ser tan importante como decir algo. El análisis de contenido analiza solo lo que está presente en lugar de lo que falta o no se dice (Cohen et al., 2007; Krippendorff, 2004). A partir de la revisión de las respuestas de los sujetos se consideraron seis categorías de análisis que consisten en las razones fundamentales por las que los sujetos consideran a un argumento matemático convincente. Estas se presentan en la Tabla 1 siguiente.

Tabla 1
Categorías de análisis emergentes de los resultados obtenidos del cuestionario.

Categorías de análisis	Definición de la categoría
(1) El uso de elementos concretos en el argumento	El argumento es convincente debido a que se basa en ejemplos específicos o utiliza alguna referencia visual.
(2) La familiaridad del argumento	El argumento es convincente debido a que el profesor lo conoce o lo ha utilizado anteriormente, la convicción no se basa en las Matemáticas utilizadas, sino en la experiencia previa del profesor de Matemáticas con el argumento.
(3) La forma ritual del argumento	El argumento es convincente en función de su apariencia superficial en lugar de considerar los elementos de fondo.
(4) La validez del argumento	El argumento es convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos.
(5) La simplicidad matemática del argumento	El argumento es convincente porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la comprensión del argumento.
(6) La claridad del argumento	El argumento es convincente debido a que las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla.

Fuente: elaboración propia

Resultados

Los resultados se presentan considerando las respuestas de los sujetos de investigación en torno a las siguientes cuestiones: (a) escoger el orden en el que los argumentos le parecen más convincentes, (b) explicar las razones por las que ha escogido al argumento más convincente y (c) explicar las razones por las que ha escogido al argumento que le parece menos convincente.

En la Tabla 2, se presenta para cada argumento, la cantidad de sujetos que lo consideran como el más convincente y el menos convincente. Se puede observar que la gran mayoría de sujetos de investigación consideró al argumento 3 como el más convincente. Este argumento es el que usualmente se presenta a los profesores de Matemáticas en formación inicial en algunos cursos de la carrera de Enseñanza de la Matemática en la Universidad Nacional de Costa Rica, por lo que podríamos suponer que les es bastante familiar. Además, es el argumento que se presenta en las recomendaciones metodológicas en los programas de estudios de Matemáticas para la educación secundaria en Costa Rica dirigidas a los profesores para favorecer el proceso de razonar y argumentar en sus alumnos. Asimismo, se puede notar que los argumentos 1 y 2

fueron los menos convincentes para los sujetos de investigación. Es interesante que, solo el argumento 2 no corresponde a una demostración de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, ya que únicamente demuestra su existencia y, sin embargo, únicamente ocho sujetos lo eligieron como el menos convincente. Además, solo seis de ellos detectaron que no era una demostración de la proposición dada en función de ese hecho. Si la convicción sobre la validez de un argumento estuviera basada únicamente en aspectos lógico-matemáticos, sería esperable que el argumento 2 sea el menos convincente de todos, por no ser una demostración matemática de la propiedad dada, sin embargo, no es el caso en nuestro estudio.

Tabla 2

Número de sujetos que consideran a los argumentos más o menos convincentes.

Número de argumento	Cantidad de sujetos que lo eligen como el más convincente	Cantidad de sujetos que lo eligen como el menos convincente
1	2	15
2	1	8
3	24	0
4	2	1
5	1	6

Fuente: elaboración propia basado en los resultados del cuestionario aplicado por los autores en 2022.

Esta situación, nos permite observar que la convicción de los profesores de Matemáticas sobre la validez de un argumento matemático tiene muchos matices. En cuanto a las características de los argumentos más convincentes, en la Tabla 3, se presentan el número de sujetos que evidenciaron en sus respuestas algunas de las características mencionadas.

Tabla 3

Número de sujetos asociados a las características de los argumentos más convincentes.

Características de los argumentos más convincentes	Cantidad de sujetos
(1) El uso de elementos concretos en el argumento.	1
(2) La familiaridad del argumento.	4
(3) La forma ritual del argumento.	1
(4) La validez del argumento.	23
(5) La simplicidad matemática del argumento.	5
(6) La claridad del argumento.	9

Fuente: elaboración propia basado en los resultados del cuestionario aplicado por los autores en 2022.

Podemos observar que las características de los argumentos matemáticos que les son más convincentes a los profesores en formación inicial en orden descendente son: la validez para 23 de los 30 sujetos, la claridad para 9 de los 30 sujetos y la simplicidad matemática para 5 de los 30 sujetos. Todas estas características apelan más a elementos de fondo que de forma en el argumento. Esto podría explicarse porque los sujetos de investigación están finalizando su

formación inicial en la que han estado involucrados en procesos de demostración más formales en donde se brinda mayor importancia a los aspectos rigurosos. Se puede apreciar que las características que aluden más a la forma del argumento han sido señaladas por pocos sujetos: la familiaridad en 4 de los 30 sujetos, la forma ritual en 1 de los 30 sujetos y el uso de elementos concretos en 1 de los 30 sujetos. La convicción en las Matemáticas puede estar asociada a otros elementos alternativos a los aspectos lógico-formales, de hecho, la aceptación de nuevos resultados en la comunidad matemática, se considera un proceso social en donde quizás los aspectos más relevantes sean la comprensión y el significado (De Villiers, 1993; Hanna, 2002).

Conclusiones

El estudio de las características de los argumentos matemáticos más convincentes para los profesores de Matemáticas puede tener aristas más complejas que la sola consideración de los aspectos lógico-sintácticos y matemáticos. En la convicción pueden intervenir elementos psicológicos, pues como señala Knuth (2002) en su investigación, algunos profesores estaban más convencidos por argumentos empíricos, aunque eran conscientes de que tales argumentos no eran demostraciones. Según Knuth (2002), es posible que los profesores de Matemáticas tengan diferentes tipos de convicción, tales como la convicción matemática o la convicción personal o psicológica. De los cinco argumentos matemáticos propuestos como demostraciones de la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos en el cuestionario, el argumento 3 fue considerado como el más convincente por los profesores de Matemáticas en formación inicial. Dicho argumento es el que tradicionalmente se presenta a los sujetos de investigación en diferentes cursos de la carrera y es el que se recomienda emplear a los profesores en el programa de estudios de Matemática en la educación secundaria costarricense. Es posible que la familiaridad de los sujetos de investigación con dicho argumento influyera en su escogencia, sin embargo, la gran mayoría brindaron otras razones diferentes a esta.

Los argumentos 1 y 2 fueron los que más sujetos de investigación eligieron como los menos convincentes. El hecho de que solo 8 sujetos eligieran al argumento 2 como el menos convincente sugiere que los profesores pueden basar su convicción en otros aspectos diferentes a la corrección lógico-matemática. Es decir, si la validez lógico-matemática hubiese sido el único criterio de elección, sería esperable que todos los 30 sujetos escogieran al argumento 2 como el menos convincente por no corresponder a una demostración de la irracionalidad de raíz cuadrada de dos. Aunque el objetivo de nuestra investigación no era estudiar las características de los argumentos menos convincentes, hemos considerado este hecho digno de mención y como un elemento a considerarse en la formación inicial de los profesores de Matemáticas.

En cuanto a las seis características de los argumentos más convincentes consideradas en nuestro estudio, hemos apreciado que su ordenación por la cantidad de menciones es: I (4) la validez del argumento, II (6) la claridad del argumento y III (5) la simplicidad matemática del argumento. Las restantes características, (1) el uso de elementos concretos en el argumento, (2) la familiaridad del argumento y (3) la forma ritual del argumento, tuvieron muy pocas menciones. Por lo tanto, la mayoría de los sujetos encuentran a un argumento matemático convincente debido al uso de elementos lógicos o matemáticos correctos, porque las ideas planteadas se comprenden de manera clara y sencilla y además porque se emplean elementos matemáticos simples y básicos que facilitan la comprensión del argumento. Las características de

los argumentos matemáticos a las que la mayoría de los sujetos de investigación hicieron referencia en nuestro estudio están relacionadas más con el fondo que con la forma del argumento. Este resultado difiere de lo hallado por Knuth (2002) en su investigación, pues según este autor las características de los argumentos que los profesores de Matemáticas consideraron más convincentes en gran parte se relacionaban más con la forma que con el fondo, es decir, que los profesores se referían a cualidades relacionadas con la forma de un argumento: características del argumento, la familiaridad del profesor con el argumento, la cantidad de detalles proporcionados por el argumento o el método particular utilizado al construir el argumento. Para buscar una posible explicación de esta diferencia destacamos que en nuestro estudio los sujetos de investigación eran profesores de Matemáticas en formación inicial, por lo tanto, posiblemente el componente matemático tiene mayor importancia y relevancia en su convicción mientras que en el estudio de Knuth (2002) los 16 profesores participantes tenían una experiencia laboral entre los 3 a 20 años por lo que es posible que consideren otros factores, además de los aspectos lógico-matemáticos.

Existe consenso y un amplio reconocimiento a nivel internacional sobre el papel de la demostración matemática en la formación de los estudiantes en todos los niveles educativos (Cabassut et al., 2012; Mariotti, 2006; Stylianides, et al., 2017). En algunas ocasiones, como parte del desempeño profesional de los profesores de Matemáticas deben promover en sus alumnos procesos de razonamiento y argumentación para que comprendan la manera en la que esta actividad se lleva a cabo en la disciplina matemática, los orígenes y las conexiones del conocimiento matemático y nuevos métodos para resolver problemas (Durand-Guerrier et al., 2012a; Stylianides et al., 2017; Zaslavsky, et al., 2012). Esto implica que el profesor tenga que plantear tareas a sus estudiantes en las que deban realizar exploraciones, validar e interpretar resultados que origine la necesidad de realizar demostraciones (Durand-Guerrier et al., 2012a; Zaslavsky et al., 2012). Lo anterior sugiere que la demostración matemática debe formar parte del conocimiento especializado del profesor de Matemáticas, sin embargo, consideramos que las características de los argumentos más convincentes para los profesores de Matemáticas pueden tener una influencia importante en su conocimiento y en la forma en la que aborde la enseñanza de este tema en la clase de Matemáticas, por lo tanto, merece especial atención en futuras investigaciones como en la formación inicial y continua de los profesores de Matemáticas.

Referencias y bibliografía

- Cabassut, R., Conner, A., İşçimen, F. A., Furinghetti, F., Jahnke, H. N. & Morselli, F. (2012). Conceptions of proof—In research and teaching. En G. Hanna y M. De Villiers (Eds.), *Proof and proving in mathematics education* (pp. 169-190). Springer, Dordrecht: https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_7
- Cohen, L., Manion, L., y Morrison, K. (2007). *Research Methods in Education* (sixth edition). London: Routledge.
- Crespo, C. y Farfán, R. (2005). Una visión socioepistemológica de las argumentaciones en el aula. El caso de las demostraciones por reducción al absurdo. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 8 (3), 287-317. <http://www.redalyc.org/pdf/335/33508304.pdf>
- De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática*, (26), 15-30.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012a). Argumentation and proof in the mathematics classroom. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 349-367.
- Durand-Guerrier, V., Boero, P., Douek, N., Epp, S. S., & Tanguay, D. (2012b). Examining the role of logic in teaching proof. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 369-389.
- Hanna, G. (2002). Mathematical proof. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 54-61). Dordrecht: Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-007-2129-6_1

- Hanna, G., & De Villiers, M. (2012). Aspects of proof in mathematics education. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 1-10.
- Knuth, E. J. (2002). Secondary school mathematics teachers' conceptions of proof. *Journal for research in mathematics education*, 33(5), 379-405.
- Krippendorff, K. (2004). Content analysis: An introduction to its methodology. California: Sage Publications.
- Lin, F. L., Yang, K. L., Lo, J. J., Tsamir, P., Tirosh, D., y Stylianides, G. (2012). Teachers' professional learning of teaching proof and proving. *Proof and proving in mathematics education: The 19th ICMI study*, 327-346.
- Lo Cascio, V. (1998). Gramática de la argumentación: estrategias y estructuras. Madrid: Alianza Editorial, S.A.
- Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 173-204). Rotterdam: Sense Publisher.
- Ministerio de Educación Pública. (2012). Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado. San José: autor. <https://mep.go.cr/sites/default/files/programadeestudio/programas/matematica.pdf>
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2003). Principios y estándares para la educación matemática. Sevilla: Thales.
- Romero, I. y Rico, L. (1996). Sobre la introducción del concepto de irracionalidad en enseñanza secundaria: el caso de U2. *Educación Matemática*, 8(02), 18-32.
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for research in Mathematics Education*, 38(3), 289-321.
- Stylianides, G. J., Stylianides, A. J., & Weber, K. (2017). Research on the teaching and learning of proof: Taking stock and moving forward. En J. Cai (Ed.), *Compendium for Research in Mathematics Education* (pp. 237-266).
- Vega, L. (2012). Inducción. Compendio de lógica, argumentación y retórica. En L. Vega. y P. Olmos (Eds), *Argumentación* (pp. 66-74). Madrid: Editorial Trotta.
- Zaslavsky, O., Nickerson, S. D., Stylianides, A. J., Kidron, I. & Winicki-Landman, G. (2012). The need for proof and proving: Mathematical and pedagogical perspectives. En *Proof and proving in mathematics education* (pp. 215-229). Dordrecht: Springer.



Conocimiento matemático de los profesores en formación inicial: Procedimientos relacionados al tema de polígonos

Jennifer Fonseca Castro

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

jennifer.fonseca.castro@una.cr

Helen Guillén Oviedo

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

hellen.guillen.oviedo@una.cr

Resumen

Este artículo presenta los hallazgos de una investigación cualitativa de tipo descriptivo, cuyo propósito es caracterizar el conocimiento matemático evidenciado en los profesores de Matemáticas en formación inicial de la Universidad Nacional de Costa Rica en relación con los procedimientos propuestos para la solución de situaciones-problemas en el tema de polígonos; lo anterior, utilizando el modelo de Conocimiento Especializado de los Profesores de Matemáticas (MTSK). Para esto, se aplicó un cuestionario en 2024, a 15 estudiantes de cuarto año de la carrera de Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática. Para analizar la información, se utilizó el análisis de contenido, generando indicadores de evidencia de conocimiento para cada pregunta. Los participantes mostraron una comprensión general satisfactoria de los procedimientos dados; no obstante, la ausencia de justificaciones adecuadas en ciertos casos indica la necesidad de profundizar en la comprensión de los procedimientos matemáticos y su justificación lógica.

Palabras clave: Conocimiento especializado de profesores de Matemática; Educación Matemática; formación de docentes; Geometría; polígonos.

Introducción

En el currículum de Matemáticas de Costa Rica, la geometría ocupa un lugar central, siendo una de las cinco áreas matemáticas abordadas en todos los niveles educativos. Los

Programas de Estudio de Matemáticas la presentan como una herramienta fundamental para organizar los fenómenos relacionados con el espacio y la forma, proporcionando patrones y modelos que permiten interpretar la relación entre los objetos geométricos y la realidad (Ministerio de Educación Pública de Costa Rica, 2012). Este enfoque promueve la conexión entre las representaciones visuales y las formas geométricas mediante su identificación, visualización y manipulación. Dentro de este contexto, el estudio de los polígonos está presente, de manera explícita o implícita, en todos los niveles del currículo nacional.

En la formación inicial de los futuros docentes de Matemáticas, particularmente en el plan de estudios del Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática (BLEM) de la Universidad Nacional (UNA), el desarrollo del conocimiento geométrico se distribuye en cuatro asignaturas clave: dos cursos de Geometría Euclídea en el segundo año de la carrera, un curso de Geometría Analítica y un curso de Didáctica de la Geometría en el cuarto año. Las competencias adquiridas en estas asignaturas son esenciales para la formación profesional de los futuros docentes, asegurando que dispongan de herramientas conceptuales y metodológicas adecuadas para la enseñanza de la geometría en la educación escolar.

En este contexto, se desarrolló un proyecto de investigación en la Escuela de Matemática de la UNA (código SIA 0227-22) con el objetivo de caracterizar el conocimiento especializado sobre polígonos evidenciado en los profesores de Matemática en formación inicial (PMFI) en la carrera BLEM de la UNA. Para ello, se adoptó como marco de referencia el modelo Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) (Carrillo et al., 2018), el cual permite analizar el conocimiento matemático del docente desde una perspectiva estructurada y detallada.

En este documento, se presentan los hallazgos de la investigación, relacionados específicamente con el subdominio del Conocimiento de los Temas (KoT, por sus siglas en inglés) del modelo MTSK, con un énfasis particular en la categoría de procedimientos. La exploración de este subdominio permite comprender en mayor profundidad cómo los futuros docentes conceptualizan, estructuran y aplican su conocimiento matemático en la enseñanza de los polígonos.

Marco Teórico

En el presente estudio se adopta el modelo Mathematics Teacher's Specialized Knowledge (MTSK) como marco de referencia teórico. Este modelo permite describir y analizar el conocimiento matemático que poseen los docentes de Matemáticas, proporcionando una estructura detallada para comprender sus componentes y las interacciones que emergen entre ellos (Escudero et al., 2015). En particular, esta investigación se centra en el subdominio del KoT, particularmente en la categoría de procedimientos asociados al tema de polígonos.

En lo que respecta a los procedimientos, estos representan el saber hacer del docente, es decir, su conocimiento práctico de las Matemáticas. No obstante, el dominio procedimental no se limita únicamente a la ejecución de algoritmos, sino que también abarca aspectos como el reconocimiento del momento adecuado para su aplicación (cuándo hacerlo), la justificación teórica subyacente (por qué se hace de esa manera) y la interpretación de las características del resultado obtenido (Carrillo et al., 2018). En este sentido, el estudio de los procedimientos

matemáticos dentro del conocimiento del docente permite analizar no solo la ejecución de técnicas y estrategias, sino también la comprensión de las condiciones necesarias para su aplicación efectiva.

Desde una perspectiva más amplia, el término "procedimiento" se entiende como un conjunto de acciones organizadas de manera secuencial para alcanzar un objetivo específico. Dentro del contexto matemático, estas acciones pueden estar relacionadas con el uso de algoritmos convencionales y alternativos, estrategias de resolución de problemas y operaciones específicas vinculadas a conceptos matemáticos (Vasco y Moriel, 2022).

Desde la perspectiva del MEP, principal empleador de docentes de Matemática en Costa Rica, en relación con los procedimientos, se espera que los docentes de Matemática sean capaces de determinar la medida de perímetros y áreas de polígonos en diferentes contextos; calcular la medida de ángulos internos y externos, así como la medida de la apotema y el radio de polígonos regulares y aplicarlo en diferentes situaciones; además de construir distintos polígonos regulares utilizando regla y compás (MEP, 2012).

Marco Metodológico

Se aplicó un cuestionario durante el 2024 con una duración aproximada de dos horas. El mismo fue validado con expertos nacionales e internacionales en didáctica de la Matemática, Matemática pura y enseñanza de la Matemática para su depuración. Posteriormente, se validó en una prueba piloto con PMFI distintos a los sujetos de investigación considerados en este estudio. El cuestionario constaba de 6 preguntas de respuestas abiertas; lo respondieron en parejas, debido a su extensión y complejidad; en total participaron 14 PMFI. Todos los participantes ya habían aprobado los cursos de Geometría Euclídea, Geometría Analítica y Didáctica de la Geometría como parte de su plan de estudios, donde el tema de polígonos es foco de estudio. Las preguntas fueron diseñadas con dos objetivos principales: primero, obtener evidencias sobre los procedimientos que emplean o proponen los PMFI cuando se enfrentan a una situación-problema que requiera de conocimientos matemáticos relacionados a polígonos; y segundo, obtener evidencias sobre las interpretaciones, usos, deducciones y generalizaciones que los PMFI realizan de un procedimiento dado (válido o no) para resolver una situación-problema que requiera de conocimientos matemáticos relacionados a polígonos, y cómo aplican sus conocimientos en dicho análisis. Se utilizó para este fin los contenidos relacionados a la fórmula para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono y el número total de diagonales de un polígono; los conceptos y cálculo para área y perímetro de un polígono; y construcciones de polígonos utilizando regla y compás.

Para el análisis de la información se empleó el análisis de contenido que permite la codificación, la categorización y la comparación de preguntas abiertas de cuestionarios, así como la descripción de patrones y tendencias en el contenido (Cohen et al., 2002). Para la pregunta 1, la cual se compone de cuatro situaciones-problema, se utilizaron los siguientes indicadores de conocimiento para el análisis de las respuestas de la 1A: (i) brinda el resultado correcto para la suma de las medidas de los ángulos internos; (ii) traza correctamente las diagonales desde un vértice de un polígono; (iii) conoce el número de triángulos que se generan a partir de las diagonales trazadas desde un vértice; (iv) usa correctamente la fórmula para la suma de las

medidas de los ángulos internos de un triángulo; (v) no responde. Para la situación-problema 1B, las respuestas se clasificaron como correctas si: (i) brinda la fórmula correcta para la suma de las medidas de los ángulos internos; y (ii) brinda una explicación correcta para llegar a el resultado; y como incorrecta, si la formula brindada era incorrecta o no brindaba ninguna. Para las situaciones-problema de las preguntas 1C, 1D, 2, 3, 5 y 6, las respuestas se clasificaron como correctas, incorrectas o no responde; y la justificación o procedimiento como válido, incompleto, incorrecto, o no responde. En la pregunta 4, se clasificaron las respuestas utilizando los mismos indicadores anteriores, para cada una de las propuestas de solución del Estudiante 1 y Estudiante 2, en cada uno de los problemas (Problema 1 y Problema 2).

Resultados

Los resultados se organizaron de acuerdo con los objetivos de las preguntas planteadas en el cuestionario.

A) Interpretación y uso que hacen los PMFI de un procedimiento dado para resolver una situación-problema de polígonos

En una primera parte, se les presentó a los PMFI la siguiente situación-problema, *“En la clase de Geometría se debe estudiar la suma de la medida de los ángulos internos de un polígono convexo. Se quiere mostrar un procedimiento o método matemático que permita a los estudiantes deducir dicha fórmula. Para esto, la docente del curso ha construido la tabla que se muestra a continuación, donde en la primera columna coloca polígonos de distintos número de lados [un triángulo, un rectángulo, un pentágono, un hexágono y un heptágono]; en la segunda columna, triangula [se entiende por triangular: trazar desde uno de los vértices todas las diagonales posibles] los polígonos de la primera columna con el objetivo de usar la suma de la medida de los ángulos internos de un triángulo para obtener la suma de los ángulos internos del polígono deseado. Por ejemplo, en la segunda figura, triangula el rectángulo trazando una de las diagonales formando así dos triángulos; para cada uno de los triángulos la suma de sus ángulos internos es 180, de donde deduce, en la tercera columna, que la suma de los ángulos internos del rectángulo es $180 + 180 = 360$.”* El objetivo de la pregunta era que los PMFI analizaran el método propuesto y evaluaran su efectividad para obtener una fórmula que permita calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono. Para esto, debían completar los datos faltantes en la tabla (la triangulación y la fórmula para el hexágono y el heptágono); brindar una fórmula para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono de n lados; e indicar para qué tipo de polígonos funciona este método.

Al respecto, los PMFI no tuvieron mayor problema en brindar el valor correcto de la suma de las medidas de los ángulos internos para el hexágono y el pentágono y el heptágono. No obstante, algunos mostraron deficiencias al momento de triangular dichas figuras, por ejemplo, el Grupo 4 cuya respuesta se muestra en la Figura 1. En ambas figuras se evidencia carencias con la definición de diagonal de un polígono, en la primera lo trazado por los PMFI no son diagonales y en la segunda no trazan todas las diagonales posible. Asimismo, se evidencia falta de comprensión del procedimiento propuesto.

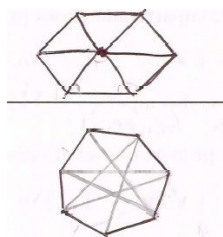


Figura 1. Respuesta del Grupo 4.

Al presentar una fórmula general para la suma de las medidas de los ángulos internos de un polígono, los PMFI proporcionaron una fórmula correcta; sin embargo, algunas justificaciones carecían de argumentos matemático válidos o que dieran sustento a sus proposiciones, la mayoría mostraban para un número de lados en específico, $n = 3, n = 4, n = 5$, como se evidencia en la respuesta del Grupo 6 en la Figura 2. No obstante, dos grupos mostraron una justificación correcta; por ejemplo, la respuesta del Grupo 3 que se muestra en la Figura 3 a continuación.

$180(n-2)$, donde n representa la cantidad de lados del polígono.

- ① $180(3-2) = 180$
- ② $180(4-2) = 360$
- ③ $180(5-2) = 540$
- ⋮
- ④ $180(n-2) = x$

Figura 2. Respuesta del Grupo 6.

Para cualquier polígono convexo la cantidad de triángulos resultantes son las diagonales más uno ($D+1$), como la fórmula de diagonales es $n-3$, la cantidad de triángulos será $n-2$, luego se suma 180 por triángulo, es decir $180(n-2)$.

Figura 3. Respuesta del Grupo 3.

Por otra parte, a la pregunta de si el método presentado es válido para polígonos cóncavos, los PMFI lograron identificar que este es válido solo para convexos; no obstante, solo un grupo proporcionó una justificación válida. Se encontraron igualmente carencias con la definición de diagonal de un polígono, pues consideran que en los cóncavos “no es posible trazar todas las diagonales desde un vértice”. Asimismo, se encontraron carencias con la definición de polígono convexo, pues señalan que “el método solo funciona con polígonos regulares y los cóncavos no lo son”. Tienden a definir polígonos convexos como polígonos regulares.

En una segunda parte, se les presentó a los PMFI dos situaciones-problema; el primero relacionado a la fórmula para calcular el número total de diagonales de un polígono, y el segundo relacionado al concepto y cálculo de área y perímetro de polígonos. En el primero, se les planteó lo siguiente, “En la clase de Geometría se debe calcular el número total de diagonales de un polígono de n lados. Tres estudiantes propusieron las siguientes ideas...” y se les mostró las ideas planteadas hipotéticamente, por tres estudiantes. El planteamiento del Estudiante B era el correcto. Los PMFI no tuvieron mayor problema en descartar como válidos los planteamientos propuestos por el Estudiante A y Estudiante C, y en acertar que el correcto era la respuesta del Estudiante B. No obstante, los argumentos que justificaban sus respuestas nuevamente evidenciaban carencias conceptuales en los PMFI. A continuación, se transcriben las respuestas de los grupos 3 y 4; el primero clasifica correctamente las respuestas de los tres estudiantes y sus justificaciones son válidas; mientras que el segundo clasifica correctamente las respuestas, pero sus justificaciones son incorrectas o incompletas. Aquí como en la pregunta de las diagonales encontramos problemas en los procesos inductivos, pues ofrecen uno o dos casos para deducir una fórmula general.

Respuesta, Grupo 3:

- i) El estudiante A está equivocado, pues un contraejemplo es el cuadrado, pues tiene 4 vértices y dos diagonales, pero $4(4 - 3) = 4$.*
- ii) El estudiante C también está equivocado, el mismo contraejemplo sirve, pues $\frac{4(4-3)}{4} = 1$ y el cuadrado tiene dos diagonales.*
- iii) El estudiante B está en lo correcto, pues si hay que tomar en cuenta las diagonales repetidas, por eso se divide entre dos.*

Respuesta, Grupo 4: El estudiante que está en lo correcto es el estudiante B ya que probando los casos triviales se puede deducir la fórmula.

I Caso: cuando es un triángulo.

$$\frac{3(3-3)}{2} = \frac{3 \cdot 0}{2} = 0 \text{ y se sabe que el triángulo no tiene diagonales.}$$

II Caso: Cuando es un cuadrado

$$\text{Entonces tenemos } \frac{4(4-3)}{2} = \frac{4}{2} = 2 \text{ que cumple con el número de diagonales del cuadrado.}$$

Para la segunda situación-problema, se les plantearon dos problemas relacionados a áreas y perímetros de polígonos, acompañados de soluciones hipotéticas de dos estudiantes. Los PMFI debían comentar cada solución e indicar si las respuestas propuestas eran correctas o incorrectas, justificando sus respuestas. Los PMFI mostraron dominio de los conceptos y fórmulas para área y perímetro de polígonos en los problemas planteados.

B) Procedimientos propuestos por los PMFI para resolver una situación-problema de polígonos

Después de trabajar en el método de triangulación de polígonos para calcular la suma de las medidas de los ángulos internos, se les solicitó a los PMFI que brindaran otro modo o procedimiento para obtener dicha fórmula. Al respecto, dos grupos brindaron un procedimiento alternativo, pero que funciona solo para polígonos regulares. Ambos propusieron triangular los polígonos de una forma distinta, usando los n triángulos isósceles que se forman con el centro del polígono y dos vértices consecutivos e igualmente usar la suma de las medidas de los ángulos internos de dichos triángulos (ver respuesta del Grupo 2). Los procedimientos brindados por ambos grupos, evidenciaron un buen manejo lógico-matemático y algebraico en los procesos propuestos. Otros procedimientos propuestos no eran claros o dependían de otros datos del polígono (además del número de lados) para que funcionaran, por ejemplo, el procedimiento propuesto por el Grupo 7 que se muestra a continuación.

Respuesta, Grupo 2: Si generamos triángulos desde el centro trazando los radios, se generan n triángulos que son congruentes entre ellos. Por Pons Asinorum [Teorema del triángulo isósceles], los dos ángulos en la base son congruentes. Tomando en cuenta que la medida del ángulo central es $\frac{360}{n}$ y que se forman n triángulos, deducimos que otra fórmula es: $n \left[180 - \frac{360}{n} \right]$.

Respuesta Grupo 7: Sacar el $\angle$ externo, ~~dividiendo~~ restarle $180 - \angle$ externo y multiplicar la cantidad de ángulos.

En una segunda actividad, luego de analizar algunos métodos propuestos para calcular el total de diagonales de un polígono, se les solicitó a los grupos proponer otros métodos para obtener dicha fórmula. No se obtuvo respuestas al respecto, solo un grupo propuso una demostración por inducción la cual presentaron de forma correcta.

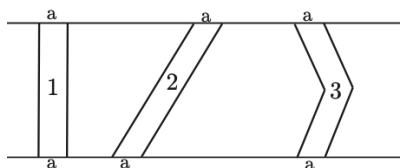


Figura 4. Imagen para el cálculo de áreas.

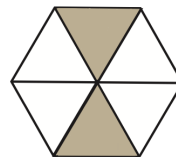


Figura 5. Imagen para el cálculo de áreas.

En una tercera actividad, se les planteó dos situaciones-problemas donde debían determinar el área de los polígonos dados. En el primer problema se les brindó la imagen de la Figura 4, los PMFI debían determinar y justificar cuál de las tres bandas brindadas tiene la mayor área. Las bandas dadas conectan dos segmentos paralelos y el ancho de estas tienen la misma medida “a” en cualquier punto entre las paralelas. Las respuestas correctas, hacían alusión a la congruencia de las alturas de las bandas (pues los segmentos son paralelos) y de sus bases, para posterior usar la fórmula para el cálculo de áreas de paralelogramos, $A = b \cdot h$. Así concluían que las tres bandas tenían igual área. Los grupos que contestaron de forma incorrecta, seleccionaron la banda 2 como la de mayor área, atribuían su respuesta a la inclinación de la barra y la distancia de las barras entre las paralelas. En sus respuestas no había evidencias del conocimiento de la fórmula para calcular áreas de rectángulos o paralelogramos (ver la respuesta del Grupo 7).

Respuesta, Grupo 7: La banda 2, pues como la distancia entre un punto y una recta siempre es la menor y además perpendicular, la [banda] 1 sería la más pequeña y la [banda] 2 es totalmente cruzada por lo que sus diagonales son mayores.

En el segundo problema, se les brindó la imagen de la Figura 5, los PMFI debían determinar el área de la región sombreada. Los PMFI no tuvieron mayor dificultad en reconocer y utilizar apropiadamente las propiedades y procedimientos para hallar la respuesta correcta. En las respuestas correctas se señalaba la congruencia de los seis triángulos formados y que el valor de sus áreas era igual. Por ello, dividían 96 entre 6 y multiplicaban por 2. En los casos incorrectos, el procedimiento planteado era válido, pero el error se produjo por un cálculo incorrecto en las operaciones aritméticas.

Para finalizar, se les planteó una tercera actividad para la construcción de algunos polígonos regulares con regla y compás. Se les brindó la figura de un hexágono regular inscrito en una circunferencia y se les solicitó construir, a partir de este, un dodecágono regular y un cuadrado inscritos en la misma circunferencia. Debían realizar las construcciones y explicar los procedimientos empleados. Los PMFI mostraron evidencias de conocimiento con las propiedades de los dodecágono y cómo obtenerlo; pero no así con sus conocimientos o habilidades de construcción con regla y compás. En sus explicaciones, los PMFI mencionaban que se debía encontrar el punto medio de los lados del hexágono para bisecar los arcos, pero no explicaban cómo realizar esta construcción, ni había evidencia que la hicieran con la regla y el compás. Para el cuadrado, un grupo logró realizar la construcción correctamente y su justificación evidenciaba conocimiento por parte de los PMFI sobre las propiedades de dichos

polígonos. En la Figura 6, se muestran las construcciones realizadas por el Grupo 3 con sus respectivas explicaciones.

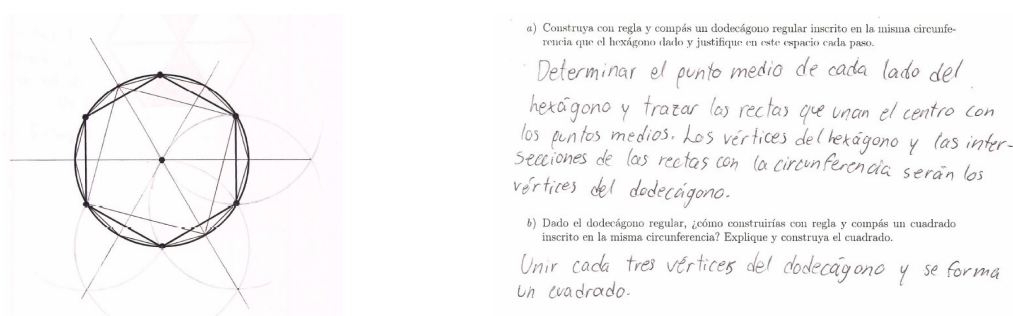


Figura 6. Construcción con regla y compás del Grupo 3.

Conclusiones

Las conclusiones derivadas de los resultados obtenidos en este estudio permiten destacar varios aspectos relevantes sobre el desempeño y las conceptualizaciones de los PMFI en relación con procedimientos en geometría de polígonos.

Los PMFI demostraron una comprensión general adecuada sobre los procedimientos planteados para determinar las fórmulas para calcular la medida y suma de los ángulos internos de los polígonos, así como del total de sus diagonal. Aunque todos los grupos lograron identificar las fórmulas correctas, la ausencia de justificaciones adecuadas en algunos casos sugiere la necesidad de profundizar en la comprensión de conceptos fundamentales, como la definición de diagonales y las condiciones de convexidad y concavidad, así como en los procedimientos matemáticos y su justificación lógica. La tendencia a centrarse en casos específicos refleja una comprensión todavía incipiente de la construcción de argumentos generales en geometría. Esto indica que, aunque los resultados finales puedan ser correctos, el proceso de razonamiento matemático no siempre fue claro o completo. Esto pone de manifiesto la importancia de fomentar el desarrollo de habilidades de argumentación y justificación en contextos matemáticos, lo cual es fundamental para el aprendizaje y la enseñanza de conceptos matemáticos.

Al solicitar a los PMFI que propusieran métodos alternativos para resolver problemas, se observó una variabilidad en la calidad de las respuestas. Mientras que algunos grupos ofrecieron procedimientos correctos y bien fundamentados, otros no lograron proporcionar soluciones adecuadas. Esto resalta la necesidad de promover el pensamiento crítico y la creatividad en la resolución de problemas matemáticos, así como el fomento de la exploración de diferentes enfoques para abordar un mismo problema; esto podría incluir el uso de recursos visuales y prácticos que refuercen la comprensión de los conceptos geométricos.

En resumen, los resultados evidencian que, si bien los PMFI muestran habilidades básicas y conocimientos conceptuales en geometría de polígonos, se identificaron áreas clave que requieren atención, especialmente en la justificación de procedimientos, en la comprensión de conceptos fundamentales, en el desarrollo de diferentes métodos de resolución y en las habilidades prácticas de construcción. Por tanto, es recomendable fortalecer las actividades que

integren razonamiento inductivo y deductivo, el desarrollo de habilidades constructivas y la consolidación de conceptos clave, con el fin de mejorar su competencia para resolver problemas geométricos de manera fundamentada y autónoma. Estos hallazgos ofrecen información valiosa para los formadores de profesores de Matemáticas y los investigadores, en la revisión y análisis de los programas de formación docente, además de contribuir a la identificación de nuevas áreas de investigación relacionadas con este tema.

Referencias y bibliografía

- Carrillo, Y., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores, E., Escudero, D. y Muñoz, M. (2018). The mathematics teacher's specialized knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
- Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2002). *Research methods in education*. Routledge.
- Escudero, D., Carrillo, J., Flores, E., Climent, N., Contreras, L. y Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. *PNA*. 10(1), 53-77.
- Ministerio de Educación Pública. (MEP) (2012). Programas de estudio de matemáticas I, II y III ciclos de la educación general básica y ciclo diversificado. San José, Costa Rica: Autor.
- Vasco Mora, D. y Moriel Junior, J. (2022). Conocimiento de los Temas. *Investigación sobre conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): 10 años de camino*, (pp. 35-46).



Creatividad en la Enseñanza de las Matemáticas. Percepción de Profesores en Formación Inicial

Eulalia Calle

Universidad de Cuenca

Ecuador

eulalia.calle@ucuenca.edu.ec

Marco Jácome

Universidad de Cuenca

Ecuador

marco.jacome@ucuenca.edu.ec

Ruth Coronel

Universidad de Cuenca

Ecuador

ruth.coronel@ucuenca.edu.ec

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo analizar la percepción de profesores en formación inicial, sobre la creatividad en la enseñanza de las matemáticas. Participan 27 estudiantes de la Universidad de Cuenca, quienes responden a un cuestionario de seis preguntas basado en Sánchez, Font y Breda (2019). Se utilizan técnicas descriptivas tipo Likert para el análisis de las preguntas cerradas y Criterios de Idoneidad Didáctica para la valoración de las preguntas abiertas. Los resultados, en relación a las preguntas cerradas, revelan percepciones contradictorias sobre la creatividad, mientras que las preguntas abiertas demuestran tener conocimientos sobre la creatividad, aunque asociada únicamente con el uso de recursos tecnológicos y con el componente afectivo. Se concluye en la necesidad de fomentar la creatividad en el aula, creando situaciones reales o resolviendo problemas de diversas maneras, resaltando la importancia de utilizar criterios de idoneidad didáctica para valorar las actividades creativas que se propongan.

Palabras clave: Creatividad; Criterios de Idoneidad Didáctica; Ecuador; Enseñanza de las Matemática; Formación inicial de profesores.

Definición y relevancia del problema

La creatividad en la enseñanza de las Matemáticas ha sido motivo de diversas investigaciones debido a su impacto en el desarrollo del pensamiento matemático; no obstante, las concepciones sobre la creatividad varían entre los docentes en formación, lo que influye en sus prácticas pedagógicas y en la promoción de entornos de aprendizaje innovadores (Sánchez, Font y Breda, 2019). En la actualidad, varios autores buscan conectar la creatividad con la resolución de problemas, a través del pensamiento crítico (Becerra, 2015), en donde, además de potenciar este pensamiento, demuestran la importancia de la creatividad y el aprendizaje, llegando a relacionar el rendimiento académico con factores de creatividad como fantasía, fluidez y flexibilidad (De la Peña, 2019).

Desde esta perspectiva, el propósito de esta comunicación es analizar las creencias, ideas, opiniones y/o valoraciones, en general, percepciones que tienen 27 futuros profesores de Matemáticas de la Universidad de Cuenca, sobre la creatividad y su importancia en la enseñanza de las Matemáticas, con la finalidad de hacer propuestas de mejora a la formación inicial docente, buscando abordar la creatividad en los diferentes ámbitos como la práctica laboral o preprofesional, la vinculación con la sociedad, las asignaturas de la malla curricular y los procesos de titulación.

Los hallazgos sobre creatividad y Matemáticas subrayan la necesidad de generar un enfoque didáctico que permita a los docentes en formación, desarrollar una comprensión más sólida y aplicada de la creatividad en la enseñanza matemática, favoreciendo su integración en la práctica pedagógica. Situación que sugiere continuar investigando sobre la creatividad vinculada a la flexibilidad en el pensamiento matemático, la búsqueda de soluciones innovadoras, la exploración de diversos enfoques y la capacidad de formular y resolver problemas de formas no convencionales, enfatizando la importancia de ambientes de aprendizaje que fomenten la curiosidad, la reflexión y la conexión entre los conceptos matemáticos, como sugiere la literatura existente.

Marco Teórico

La creatividad en la Educación Matemática es un factor clave para el desarrollo del pensamiento crítico y la resolución de problemas. Diversos autores han abordado esta temática desde perspectivas teóricas y metodológicas que enriquecen la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Pólya (1945) destaca la importancia de la heurística en la resolución de problemas, promoviendo estrategias creativas para abordar situaciones matemáticas. Schoenfeld (1985) amplía esta visión con un enfoque metacognitivo, enfatizando el rol del razonamiento flexible en la creatividad. Radford (2006) aporta una mirada semiótica y sociocultural, considerando que la creatividad matemática emerge en la interacción social y la interpretación de signos matemáticos, también enfoca la creatividad desde la perspectiva de la relación entre los estudiantes y el conocimiento matemático. Según él, la creatividad se activa cuando los estudiantes se enfrentan a situaciones que los invitan a "producir" nuevas ideas y comprender las Matemáticas de manera más profunda. Radford defiende que la creatividad en las Matemáticas surge cuando se da espacio a la construcción de significados y conceptos de manera colaborativa, al integrar la acción, el lenguaje y el pensamiento crítico en la resolución de problemas. Font

(2007) y Arboleda (2015) enfatizan la modelización como estrategia para fomentar la creatividad en Matemáticas, permitiendo a los estudiantes explorar problemas desde múltiples perspectivas. Dienes (1967) resalta el uso de materiales manipulativos y juegos matemáticos como herramientas clave en el pensamiento matemático creativo. Por otro lado, Gómez Chacón (2000) subraya el papel de las emociones en la creatividad matemática, destacando la relación entre motivación, confianza y producción de ideas novedosas. Ballesta-Claver (2025) refuerza esta idea al proponer estrategias didácticas que combinan el razonamiento matemático con enfoques visuales y experimentales. Desde una perspectiva práctica, la creatividad en Matemáticas se puede potenciar mediante la resolución de problemas abiertos, la exploración de patrones y la incorporación de tecnología educativa. Estrategias como el aprendizaje basado en proyectos y la modelización permiten conectar conceptos matemáticos con situaciones del mundo real, promoviendo el pensamiento divergente y la autonomía en el aprendizaje. Todas estas estrategias didácticas, propuestas con creatividad, pueden ser valoradas para demostrar la mejora en un proceso de instrucción matemática.

Una herramienta que valora los procesos educativos constituye los Criterios de Idoneidad Didáctica que surge como un marco para analizar y mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas y permite evaluar la calidad de una intervención didáctica considerando situaciones clave. Los criterios de idoneidad didáctica fueron desarrollados principalmente por Godino et al. (2007, 2013) dentro del Enfoque Ontosemiótico de la Cognición Matemática (EOS). Esta teoría considera la enseñanza como una actividad compleja donde se deben analizar distintos aspectos para garantizar su eficacia. Godino y sus colaboradores establecen seis dimensiones fundamentales para evaluar la idoneidad de un proceso didáctico: *Idoneidad Epistémica*: Evalúa la riqueza y adecuación de los conocimientos matemáticos que se trabajan en la clase. *Idoneidad Cognitiva*: Analiza si los contenidos y estrategias se ajustan al nivel de desarrollo y capacidades de los estudiantes. *Idoneidad Emocional*: Considera el papel de las emociones, motivación y actitudes hacia el aprendizaje matemático (Gómez-Chacón, 2000). *Idoneidad Interaccional*: Examina la comunicación en el aula y la participación de los estudiantes en la construcción del conocimiento matemático (Font, 2007). *Idoneidad Mediacional*: Evalúa el uso de recursos didácticos, materiales y tecnología para mejorar el aprendizaje matemático. *Idoneidad Ecológica*: Analiza la coherencia del proceso didáctico con el contexto social, cultural y curricular en el que se desarrolla la enseñanza.

La evaluación de estos criterios permite detectar fortalezas y debilidades en la práctica docente, favoreciendo el diseño de estrategias más efectivas y creativas. Godino y Batanero (1994) han enfatizado que la idoneidad didáctica es una herramienta clave para mejorar la formación docente y la calidad del aprendizaje matemático. Los criterios de idoneidad didáctica ofrecen un marco integral para evaluar y mejorar la enseñanza de las Matemáticas. Su aplicación en el aula permite generar experiencias de aprendizaje más significativas y alineadas con las necesidades de los estudiantes y el contexto educativo.

Metodología

Se trata de una investigación con metodología mixta en donde se analiza la percepción, sobre la importancia de la creatividad en la enseñanza de las Matemáticas que tiene un grupo de 27 futuros profesores de Matemáticas, quienes se encontraban desarrollando la práctica pre-

profesional de la carrera de Matemáticas y Física de la Universidad de Cuenca, en el período académico marzo - agosto 2024. Para lograr este objetivo, se aplica una encuesta con seis preguntas seleccionadas de manera intencional, del cuestionario propuesto por Sánchez, Font y Breda (2019) y Barquero, Richter, Barajas y Font (2014); de donde, las cuatro primeras preguntas son cerradas y pretenden caracterizar a la creatividad y al pensamiento creativo, desde la mirada de los futuros profesores, mientras que las dos últimas, buscan conocer lo que los participantes harían para promover la creatividad en el aula.

Las preguntas en mención son: *Pregunta 1*. La creatividad es una cualidad o capacidad innata de cada persona, *Pregunta 2*. La creatividad es una cualidad o capacidad que se puede formar, desarrollar, educar, etc., *Pregunta 3*. El pensamiento matemático creativo es una consecuencia de momentos puntuales de inspiración. *Pregunta 4*. El pensamiento creativo está asociado a un proceso de estudio largo y profundo de una situación problemática, *Pregunta 5*. ¿Qué características consideran que debe tener una actividad matemática que promueva la creatividad? Indique tres de estas características y *Pregunta 6*. ¿Qué consideran que se puede hacer en el aula para promover la creatividad matemática en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas?

Para el análisis de los resultados se agrupan en preguntas cerradas y abiertas, evaluándose a las cuatro preguntas cerradas mediante técnicas descriptivas basadas en frecuencias y porcentajes de la escala de Likert (Matas, 2018), en tanto que para las dos preguntas abiertas se trabaja en análisis de contenido, valorando los resultados mediante los Criterios de Idoneidad Didáctica (Godino, Batanero y Font, 2007) y se exponen a continuación.

Análisis de Resultados

En este apartado se presenta el análisis de los resultados obtenidos, en primer lugar, con las cuatro preguntas cerradas, seleccionadas para este estudio y, en segundo lugar, con las dos preguntas abiertas del cuestionario aplicado a 27 de los 30 futuros profesores de Matemáticas que se encontraban realizando su práctica pre profesional en diferentes instituciones educativas de la ciudad.

Análisis de preguntas cerradas

A continuación, se expone en la Tabla 1, los porcentajes y las frecuencias de respuestas a los niveles de cada pregunta tipo Likert, “muy en desacuerdo”, “en desacuerdo”, “neutral”, “de acuerdo” y “muy de acuerdo”.

Tabla 1

Frecuencia y porcentaje de respuesta a las preguntas tipo Likert de futuros profesores (n=27)

	Muy en desacuerdo	En desacuerdo	Neutral	De acuerdo	Muy de acuerdo
Pregunta 1	1 4%	4 15%	9 33%	9 33%	4 15%
Pregunta 2	0 0%	0 0 %	6 22%	13 48%	8 30%

Pregunta 3	1 4%	5 19 %	6 22%	12 44%	13 11%
Pregunta 4	1 4%	3 11%	12 44%	8 30%	3 11%

Fuente: Elaboración propia.

Los resultados obtenidos en la pregunta 1: *La creatividad es una cualidad o capacidad innata de cada persona*, en donde, cerca del 50% manifiestan estar de acuerdo y muy de acuerdo con esta pregunta podría entenderse como contradicción o falta de certeza sobre lo que es, o representa en teoría la creatividad para los futuros profesores de Matemáticas; en referencia con la pregunta 2: *La creatividad es una cualidad o capacidad que se puede formar, desarrollar, educar, etc.*, en donde también un alto porcentaje de los participantes está de acuerdo y muy de acuerdo; en todo caso, se percibe la posibilidad de que se pueda desarrollar o fortalecer la creatividad como habilidad del pensamiento, además de dar la opción para promover la creatividad en el aula. Con respecto a la pregunta 3: *El pensamiento matemático creativo es una consecuencia de momentos puntuales de inspiración*, se puede apreciar que hay un porcentaje importante (55%) que está de acuerdo y muy de acuerdo con esta pregunta, de donde se puede deducir que los futuros profesores perciben a la creatividad como un privilegio de algunas mentes; sin embargo, la respuesta mayoritaria a la pregunta 4. *El pensamiento creativo está asociado a un proceso de estudio largo y profundo de una situación problemática*, evidencia una percepción neutral en referencia a esta pregunta; demostrando dudas sobre la concepción real que los participantes tienen sobre la creatividad.

Análisis de preguntas abiertas

A continuación, se presentan los resultados y el análisis de las dos preguntas abiertas dadas por los 27 futuros profesores, seleccionadas para este estudio, utilizando la herramienta Criterios de Idoneidad Didáctica:

Pregunta 5: ¿Qué características considera que debe tener una actividad Matemática que promueva la creatividad? Indique brevemente tres de estas características.

De acuerdo a las respuestas obtenidas, el *criterio de idoneidad epistémica* es considerado cuando *tres* futuros profesores manifiestan la importancia de la creatividad al plantear muchas formas de resolver una determina actividad matemática y generar conocimiento; además, de *doce* participantes que sugieren una relación con la vida real o con otras áreas del conocimiento, haciendo conexiones; finalmente *un* participante sugiere que la actividad creativa debe ser significativa y estar relacionada con los temas que los estudiantes están tratando en ese momento. El *criterio de idoneidad emocional* está presente cuando se plantea por parte de *12* futuros profesores que las actividades deben ser motivadoras, novedosas, que les llame la atención y que genere interés; en tanto que *tres* manifiestan que estas actividades deben permitirles resolver a gusto. El *criterio de idoneidad cognitiva* se define cuando *cuatro* futuros profesores mencionan que las actividades creativas deben hacer reflexionar, razonar o pensar al estudiante; *un* participante cree que debe tener una buena planificación y criterios de evaluación; además, *seis* futuros profesores exponen que la actividad debe ser breve, claro y preciso y *un* participante sugiere que se trabaje la metacognición. El *criterio de idoneidad ecológico* es

considerado por *tres* participantes cuando mencionan que las actividades propuestas en el aula deben tener utilidad en su vida. El *criterio de idoneidad mediacional* está vigente cuando *13* participantes exponen su sentir sobre propuestas educativas que tenga innovación o sea actividades didácticas como crucigramas o juegos, o el uso de material concreto o tecnológico; en tanto que *siete* participantes sugieren que sean experimentales o requieran de investigación o desarrollo de proyectos. Es importante anotar que el *criterio de idoneidad interaccional*, no es considerado por ninguno de los participantes. Lo expuesto en esta pregunta, permite identificar el perfil de los futuros profesores, principalmente, como un *ser afectivo*, motivado por el interés común (Idoneidad emocional); además de un *ser innovador* (Idoneidad mediacional), en donde el uso de recursos materiales y tecnológicos es clave para la consecución de los aprendizajes.

Pregunta 6: ¿Qué considera que se puede hacer en el aula para promover la creatividad matemática en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas?:

Para esta pregunta, el *criterio de idoneidad epistémica* es considerado cuando *un* participante expone que es necesario u obligatorio una interdisciplinariedad con las artes y las humanidades; además, *un* participante sugiere crear situaciones reales, donde el uso práctico de las Matemáticas tenga relevancia y sobre todo que sea visible; *dos* participantes sugieren destinar más tiempo al estudio del razonamiento numérico y algebraico; un participante expone la necesidad de trabajar la modelación matemática para tener una práctica creativa; Un participante habla de realizar actividades de campo y proyectos. El *criterio de idoneidad afectiva* está presente cuando se plantea por parte de un futuro profesor que expone la necesidad de dar en las clases, charlas inspiradoras. El *criterio de idoneidad cognitiva* se define cuando un futuro profesor sugiere estimular el pensamiento divergente; Un participante habla de trabajar estrategias de preguntas y respuestas. El *criterio de idoneidad mediacional* está vigente cuando *10* participantes mencionan la importancia de emplear en el aula material como películas, animaciones, simuladores, o material concreto); además que *siete* participantes insisten en usar recursos y herramientas que promuevan un aprendizaje activo, dinámicas creativas en incluso lúdico; *dos* participantes sugieren destinar más tiempo al estudio del razonamiento numérico y algebraico; un participante sugiere definir recurso tiempo en la clase. El *criterio de idoneidad interaccional* está vigente cuando *1* participante expone que en el aula debe haber buena armonía y buena relación maestro y estudiante; dos participantes hablan de escuchar a los alumnos y percibir sus necesidades; uno habla de libertad de opinión. En tanto que el *criterio de idoneidad ecológico*, no es considerado por ninguno de los participantes a esta pregunta. Los resultados de esta pregunta, valorados con los criterios de idoneidad didáctica, coinciden con la pregunta anterior ya que se identifica el perfil de los futuros profesores como un *ser innovador*, en donde el uso de metodologías activas y recursos materiales y tecnológicos son clave para conseguir el logro de los aprendizajes (Idoneidad de medios).

Conclusiones

La percepción que manifiestan los futuros profesores de Matemáticas respecto a la creatividad y su relevancia en la formación inicial, según los resultados obtenidos en las preguntas cerradas, evidencia un conocimiento limitado en relación con las definiciones propuestas por expertos. Asimismo, se observa una aparente contradicción en sus respuestas, lo que coincide con lo reportado por Sánchez et al. (2019), donde los participantes tienden a

adoptar posturas intermedias. Por otra parte, las respuestas a las preguntas abiertas, valoradas bajo criterios de idoneidad didáctica, muestran que los futuros docentes reconocen algunas características necesarias para que una actividad matemática promueva la creatividad en el aula. Sin embargo, su apreciación resulta parcial, pues suelen asociar la creatividad únicamente con la innovación o el componente afectivo, restringiendo así la consideración de otros aspectos relevantes, como la creación de entornos reales o la resolución de problemas en contextos diversos y significativos. Esta limitación concuerda con lo señalado por Ayllón, Gómez y Ballesta-Claver (2016), quienes, en línea con Polya, vinculan la creatividad con el “arte de resolver problemas”.

Durante la formación inicial, los futuros profesores de Matemáticas suelen carecer de herramientas didácticas que les permitan valorar de manera rigurosa los procesos de instrucción y analizar preguntas abiertas en investigaciones educativas. Sin embargo, en el presente estudio, el análisis de las respuestas proporcionadas a dos preguntas abiertas revela la presencia explícita de algunos de los Criterios de Idoneidad Didáctica propuestos por el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Destaca, entre ellos, la recurrencia del criterio de idoneidad mediacional, observable en la tendencia de los participantes a asociar la creatividad con el empleo de metodologías activas y el uso de recursos materiales y tecnológicos en la práctica docente. No obstante, se advierte una consideración limitada de los criterios epistémicos, cognitivos y emocionales, así como una omisión de los criterios interaccional y ecológico, los cuales resultan fundamentales para fomentar el desarrollo creativo de los estudiantes. Este análisis pone de manifiesto la necesidad de incorporar la herramienta CID en la formación inicial, tanto para valorar adecuadamente las actividades propuestas como para orientar la mejora de la práctica docente (Breda, Font y Díez-Palomar, 2018). Por ello, se recomienda que los responsables de la formación docente adopten esta herramienta como punto de partida para potenciar la creatividad y favorecer la consecución de los aprendizajes pretendidos.

Agradecimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto PID2021-127104NB-I00 financiado por MCIN/AEI/10.13039/501100011033/ y por “FEDER Una manera de hacer Europa” y cofinanciado por el Vicerrectorado de Investigación de la Universidad de Cuenca, Cuenca-Ecuador.

Referencias y bibliografía

- Ayllón, M. F., Gómez, I. A., & Ballesta-Claver, J. (2016). *Pensamiento matemático y creatividad a través de la invención y resolución de problemas matemáticos. Propósitos y representaciones*, 4(1), 169-218.
- Arboleda, J. C. (2015). Formación para la vida: de las competencias a la comprensión edificadora. *Revista Boletín Redipe*, 4(12), 7-19.
- Arboleda, L. C. (2018). La formación inicial de docentes y la reforma de las licenciaturas en Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 47-54.
- Ballesta-Claver, J., Redondo, R. R., del Valle, C. J., & Blanco, M. F. A. (2025). STEM, programación e indagación en futuros maestros/as. Evaluación del proyecto iSTEMduino. Enseñanza de las Ciencias. *Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 43(1), 139-158.
- Barquero, B., Richter, A., Barajas, M. y Font, V. (2014). Promoviendo la creatividad matemática a través del colaborativo de c-unidades. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 157-166). Salamanca: SEIEM.

- Becerra, I. J. (2015). Pedagogía de la creatividad viable: un camino para potencializar el pensamiento crítico. *Opción*, 31(2), 632-653.
- Boaler, J. (2020). *Mentalidades matemáticas: cómo liberar el potencial de los estudiantes mediante las matemáticas creativas, mensajes inspiradores y una enseñanza innovadora*. Editorial Sirio Sa.
- Breda, A., Font, V., & Díez-Palomar, J. (2018). Criterios valorativos y normativos en la didáctica de una disciplina científica. El caso del constructo idoneidad didáctica. In *XV Foro Internacional sobre la Evaluación de la Calidad de la Investigación y de la Educación Superior*: (FECIES), 2018 (pp. 242-247). Asociación Española de Psicología Conductual AEPC.
- De la Peña Álvarez, C. (2019). Importancia de la creatividad y aprendizaje en futuros maestros. *Electronic Journal of Research in Education Psychology*, 17(48).
- Dienes, Z. P. (1967). *La matemática moderna en la enseñanza primaria*, 1967.
- Font, V. (2007). Comprensión y contexto: una mirada desde la didáctica de las matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 10(2), 427-442.
- Godino, J. D., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D. (2013). *Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas*. Cuadernos de investigación y formación en educación matemática, 111-132.
- Gómez Chacón, I. M. (2000). *La intuición en Matemáticas*.
- Matas, A. (2018). Diseño del formato de escalas tipo Likert: un estado de la cuestión. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(1), 38-47.
- Polya, G. (1945). Polya, un clásico en resolución de problemas. *Suma*, 22, 103-107.
- Radford, L. (2000). Sujeto, objeto, cultura y la formación del conocimiento. *Educación Matemática*, 12(1), 51-69.
- Radford, L. (2006). The Anthropology of Meaning: Some have concluded that, if meaning is negotiable, then it is no longer of any use in explaining the way we understand one another. (Eco, 1999, p. 271). *Educational Studies in Mathematics*, 61, 39-65.
- Sánchez, A., Font, V. y Breda, A. (2019). Análisis de las respuestas de futuros profesores a un cuestionario sobre el desarrollo de la creatividad en el aula de matemáticas. En J. M. Marbán, M. Arce, A. Maroto, J. M. Muñoz-Escolano *XXIII Simposio de la SEIEM*.
- Seeley, C. L. (2016). *Making sense of math: How to help every student become a mathematical thinker and problem solver*. ASCD.
- Schoenfeld, A. H. (1985). Making sense of “out loud” problem-solving protocols. *The Journal of Mathematical Behavior*, 4(2), 171-191.



Desenvolvimento profissional e o conhecimento matemático para o ensino em Estudos de Aula: Uma revisão da literatura

Wilbertt José de Oliveira **Moura**

Instituto Federal do Piauí - IFPI

Brasil

wilberttmoura@ifpi.edu.br

Maria Madalena **Dullius**

Universidade do Vale do Taquari - Univates

Brasil

madalena@univates.br

Resumo

Esta comunicação apresenta um resultado parcial de uma Revisão Sistemática de Literatura, que teve o objetivo identificar pesquisas em Estudo de Aula aportadas no Conhecimento Matemático para o Ensino. Como metodologia foram utilizados os pressupostos de Ramos, Faria e Faria (2014) para Revisões Sistemáticas de Literatura em Educação. A associação de teorias e outros modelos de desenvolvimento profissional em Estudos de Aula aportados pelo Conhecimento Matemático para o Ensino é feita em grande parte dos estudos. Como resultado principal, inferimos que as integrações com o Conhecimento Matemático para o Ensino possuem potencial para entender como os professores de Matemática desenvolvem seu conhecimento matemático e didático ao longo de um processo de Estudo de aula.

Palavras-chave: Conhecimento Matemático para o Ensino; Estudo de Aula; modelos de desenvolvimento profissional; teorias.

Introdução

Cada vez mais os modelos de desenvolvimento profissional estão sendo estudados e implementados em todo mundo. Entre eles, no campo da educação tem se destacado o Estudo de Aula, caracterizado como processo formativo de desenvolvimento profissional, de natureza colaborativa e reflexiva. Este modelo tem como principal foco a melhoria do ensino e

aprendizagem de estudantes, e concomitantemente ao longo de sua execução, oferta aos professores a oportunidade de contextualizar as representações de suas atividades em sala de aula e, ao mesmo tempo, explicitar seus conhecimentos e práticas implícitos por meio de suas conversas dentro do grupo (Fujii, 2016)

Com o aumento da pesquisa educacional internacional sobre Estudos de Aula, tem havido apelos para aprofundar a base de conhecimento do desenvolvimento do conhecimento do professor de Matemática ao participar desse modelo, a fim de fornecer uma base teórica sólida para seu uso na formação de professores (Clivaz; Ní Shúilleabháin, 2019). Dessa forma, faz-se necessário aprofundar a compreensão teórica e empírica sobre as potencialidades desse modelo formativo no que se refere ao desenvolvimento dos saberes profissionais docentes de professores de Matemática. Nesse cenário, o Conhecimento Matemático para o Ensino (Mathematical Knowledge for Teaching - MK) surge como modelo teórico relevante para investigar tais saberes.

Diante de diversas teorias e de outros modelos de desenvolvimento profissionais disponíveis, somos levados à seguinte problemática: Quais teorias e modelos de desenvolvimento profissionais se articulam aos estudos de aula e ao conhecimento matemático para o ensino em pesquisas com professores de Matemática?

Na busca por respostas à problemática, este artigo tem como objetivo, identificar pesquisas em Estudo de Aula aportadas no Conhecimento Matemático para o Ensino. Para isso, realizamos uma revisão sistemática de literatura (RSL), buscando compreender de que modo essa articulação tem sido explorada na formação de professores de Matemática, identificando teorias e modelos utilizados juntamente com o MKT na busca por aprofundamento de como os professores de Matemática desenvolvem seu conhecimento matemático e didático ao longo de um processo de Estudo de aula.

Esperamos que este trabalho contribua para o debate sobre o desenvolvimento profissional docente de professores de Matemática, ao evidenciar esforços da literatura científica no aprofundamento das potencialidades do Estudo de Aula como estratégia formativa, que integra práticas colaborativas a saberes profissionais requeridos para um ensino de Matemática mais qualificado e significativo.

Estudo de Aula como contexto formativo para o desenvolvimento do conhecimento matemático para o ensino

Com origem no Japão, e de prática incorporada ao trabalho dos professores de Matemática japoneses, este modelo de desenvolvimento profissional destaca-se por acontecer “no local de trabalho do professor, a escola, e é centrado na sua prática letiva” (Quaresma, 2018, p. 3). Mesmo com adaptações a diversos contextos, conserva as etapas principais do modelo japonês: estudar, planejar, ensinar e refletir (Fuji 2014; Lewis, 2016).

Segundo Ponte et al (2016), o Estudo de Aula inicia com a identificação de um problema relevante na aprendizagem dos alunos, seguido pela etapa de planejamento considerando as orientações curriculares, resultados de investigação sobre a aprendizagem do tópico e

experiências anteriores. Os professores realizam o planejamento prevendo possíveis dificuldades dos alunos, construindo tarefas, formulando estratégias de ensino e preparam instrumentos de observação que serão utilizados na aula de pesquisa, que é lecionada por um dos participantes enquanto os demais observam e fazem notas de registros sobre as aprendizagens dos alunos. Após isso, os participantes reúnem-se para um momento de análise e reflexão sobre aquilo que foi observado, podendo levar a alterações no plano de aula. Mas sendo que, a característica principal dos Estudos de Aula “é que eles centram-se nas aprendizagens dos alunos e não no trabalho dos professores” (Ponte et al, 2016, p. 870).

A estrutura colaborativa e reflexiva do Estudo de Aula proporciona aos participantes uma investigação sobre a própria prática docente, criando um ambiente promissor para o desenvolvimento do Conhecimento Matemático para o Ensino (Pedagogical Content Knowledge - MKT), de Ball et al. (2008), que teve sua origem no Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (Pedagogical Content Knowledge - PCK), introduzido por Shulman (1986).

Ball et al. (2008) direcionaram suas pesquisas especificamente para o ensino de Matemática, elaborando o modelo teórico conhecido como Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT). Sendo estruturado a partir de dois domínios de conhecimento:

- Conhecimento específico do conteúdo, relacionado ao conteúdo matemático a ser ensinado;
- Conhecimento pedagógico do conteúdo, referente aos modos possíveis de ensinar esse conteúdo, aos estudantes e suas relações, o currículo e o conteúdo matemático.

Ball et. al. (2008), subdividiram o domínio conhecimento específico do conteúdo em três categorias: i) conhecimento comum do conteúdo, conhecimento matemático que o professor utiliza em contextos além do ensino; ii) conhecimento especializado do conteúdo, vinculado unicamente ao ofício do ensino de Matemática, que permite ao professor ponderar sobre a natureza dos erros dos estudantes, seus padrões e significados para analisar os procedimentos e estratégias utilizados por eles e a possibilidade de se construir uma generalização; iii) conhecimento horizontal do conteúdo, que possibilita ao professor compreender e situar um conceito ao longo do currículo da Matemática, entendendo as correlações presentes entre os conteúdos matemáticos.

Além disso, Ball et al. (2008) ampliaram o domínio conhecimento pedagógico do conteúdo em três categorias, são elas: i) Conhecimento do conteúdo e dos estudantes, relacionado à percepção do professor de como os estudantes lidam com os conteúdos matemáticos e como o professor lida com esse conhecimento dos estudantes a respeito dos referidos conteúdos, devendo ser capaz de antecipar o que os estudantes estão propensos a pensar e suas possíveis dificuldades; ii) Conhecimento do conteúdo e do ensino, combina o saber sobre a Matemática e sobre seu ensino, se relaciona com a capacidade de escolher representações dos conteúdos e os procedimentos metodológicos que melhor contribuirão para a aprendizagem discente; iii) Conhecimento do conteúdo e do currículo, que permite ao professor compreender como organizar o currículo, definir seus objetivos e princípios e como deve ser seu desenvolvimento e como os materiais curriculares podem ser utilizados na sua ação docente. Este último absorveu a terceira vertente de Shulman (1986).

Desta forma, Ball et. al. (2008) construíram o modelo apresentado na Figura 1.

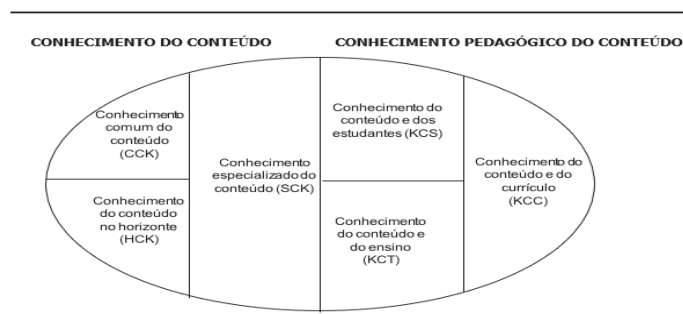


Figura 1. Modelo do Conhecimento Matemático para o Ensino.

Metodologia

Para atingir nosso objetivo de pesquisa, realizamos uma pesquisa qualitativa e interpretativa, do tipo Revisão sistemática de Literatura – RSL, que segundo Kitchenham (2004), é uma forma de identificar, avaliar e interpretar as pesquisas relevantes existentes, a uma questão de pesquisa, tópico ou fenômeno de interesse. Com essa perspectiva, seguimos um modelo de RSL que “parece mais equilibrada, exequível e aplicável no âmbito das investigações produzidas nas Ciências da Educação” (Ramos, Faria e Faria, 2014, p. 23), dividido por meio de oito etapas sequenciadas. São elas: (i) objetivos; (ii) equações de pesquisa pela definição dos operadores booleanos; (iii) âmbito; (iv) critérios de inclusão; (v) critérios exclusão; (vi) critérios de validade metodológica; (vii) resultados; (viii) tratamento de dados.

Por meio de buscas avançadas utilizando operadores booleanos, e respeitando as especificidades intrínsecas de cada base de dados utilizada nesta revisão sistemática de literatura, utilizamos a seguinte equação de busca: “Lesson Study” AND (“Mathematical knowledge for teaching” OR “MKT”) em inglês, “Estudo de aula” AND (“Conhecimento Matemático para o Ensino” OR “MKT”) em português nas bases: Education Resources Information Center (ERIC), Scopus, Web Of Science e o Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD).

A partir de 30 estudos pré-selecionados, critérios de exclusão foram aplicados (O Estudo de Aula realizado não executou a aula planejada/planejamento de aula; Pesquisa não tem foco no Conhecimento Matemático para o Ensino; Estudo não escrito em inglês, português ou espanhol; Pesquisa duplicada; Pesquisa não disponível de forma gratuita), resultando na retirada de 19 estudos e permanência de 11 pelo critério de inclusão (pesquisas primárias sobre EA na promoção do Conhecimento Matemático para o Ensino). São eles: Bieda, Cavanna & Ji (2013); Foster, Wake & Swan (2014); Ni Shuilleabhain (2016); Clivaz & Ní Shuilleabháin (2017); González e Deal (2019); Jita e Ige (2019); Huang, Lai & Huang (2021); Needs, Bahr, McMillan, Nixon, Braden & Royster (2022); Fitriati, Rosli & Iksan (2023); Ponte, Quaresma & Mata-Pereira (2023); Thobela, Sekao, & Ogonnaya (2023).

Após as leituras, encontramos teorias e modelos de desenvolvimento profissional utilizados em pesquisas relacionadas ao Conhecimento Matemático para o Ensino dos participantes em Estudos de Aula. Apresentamos o resultado por meio da Figura 4.

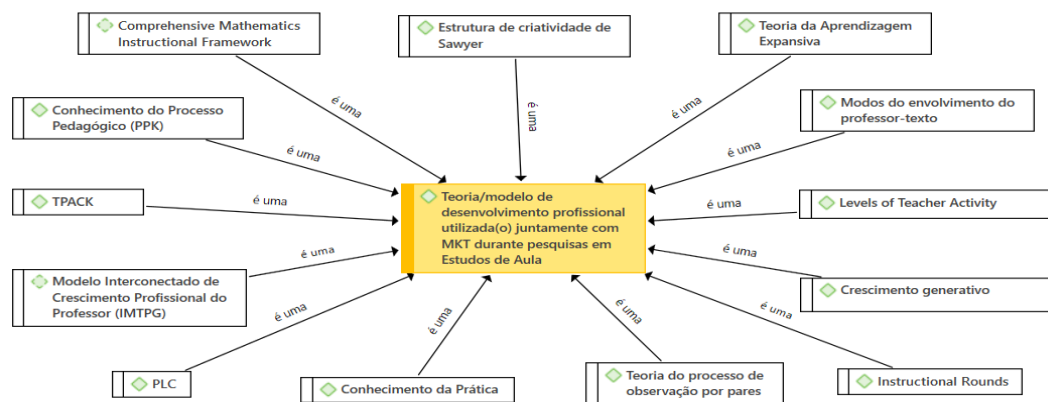


Figura 4. Teorias e Modelos de desenvolvimento profissional associados ao Conhecimento Matemático para o Ensino em Estudos de Aula.

Resultados

Huang, Lai e Huang (2021) tiveram o foco nas aprendizagens dos professores participantes de um Estudo de aula transcultural utilizando o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) de Ball, Thames e Phelps (2008) (2008), Conhecimento sobre Tecnologia, Pedagogia e Conteúdo (TPACK) de Mishra e Koehler (2006), da Teoria da Aprendizagem Expansiva de Engeström (2001), que pode ser considerada uma extensão da Teoria da Atividade Histórico-Cultural (CHAT) que se originou de Vygotsky (1978).

Já Needs et al. (2022) fizeram o uso de uma comunidade local de aprendizagem profissional (PLC) em sua pesquisa juntamente com Comprehensive Mathematics Instructional Framework (CMI) (Hendrickson et al., 2008), Instructional Rounds (City, 2011), Lesson Study (Lewis; Hurd, 2011) e Generative Growth (Franke et al., 2001). Para isso, tiveram o MKT de Ball, Thames e Phelps (2008) como principal lente de estudo.

Clivaz e Ní Shúilleabháin (2017) tiveram o objetivo de analisar o conhecimento do professor de Matemática incorporado durante um ciclo de estudo de aula. Para isso combinaram o Mathematical Knowledge for Teaching (Conhecimento Matemático para o Ensino) de Ball, Thames e Phelps (2008) e os Levels of Teacher Activity (Níveis de Atividade do Professor) de Margolinas et al. (2005).

Já Ponte, Quaresma e Mata-Pereira (2023), em um estudo qualitativo e interpretativo, procuram investigar como o conhecimento matemático para o ensino (MKT) dos professores é desenvolvido durante um EA, nas dimensões de conhecimento especializado do conteúdo, conhecimento do currículo, conhecimento do conteúdo e dos alunos, e conhecimento do conteúdo e do ensino. Para isso tiveram o foco nas tarefas, representações e aprendizado dos alunos, ao trabalharem com professoras do ensino fundamental, em uma turma de terceiro ano, onde o conteúdo escolhido foi a adição e a subtração de números racionais por justaposição retilínea de segmentos de reta colineares. Utilizaram então uma versão modificada do Modelo Interconectado de Crescimento Profissional do Professor (IMTPG) de Clarke e Hollingsworth (2002).

Os estudos de Jita e Ige (2019) se assemelham com os estudos de Fitriati, Rosli e Iksan (2023) por também ser realizado ao longo de um programa de formação. Onde utilizam o modelo do processo de observação por pares desenvolvido por Bell (2002, apud Jita; Ige, 2019, p. 706), por ser uma ferramenta eficaz para melhorar os resultados e a experiência de ensino.

Thobela, Sekao e Ogbonnaya (2023) realizam uma pesquisa qualitativa do tipo estudo de caso, na África do Sul, com uma abordagem dedutiva-indutiva na análise de dados coletados por meio da observação e entrevistas não estruturadas gravadas em vídeos e transcritas, com 8 professores do ensino fundamental. Onde tiveram o foco em padrões numéricos e geométrico, ao longo de um Estudo de Aula sob a lente do MKT e nos Modos de envolvimento do professor com o livro didático (Remillard, 2005).

Já a estrutura de criatividade de Sawyer (2013) foi a lente de estudo do trabalho de González e Deal (2019) que se voltavam ao projeto das atividades de estudo e dos materiais instrucionais resultantes de um Estudo de Aula.

Conclusão

Após estas análises, concluímos que é latente o esforço das pesquisas quanto aos conhecimentos e aprendizagens do professor de Matemática. Sendo, o Estudo de Aula, “um tipo de desenvolvimento profissional de professores, que pode compreender elementos cognitivos, afetivos, sociais, culturais e organizacionais” (Ponte et al., 2016), favorecendo o fortalecimento das bases teóricas destes campos de estudos. Além disso, o Conhecimento Matemático para o Ensino revela-se um modelo com relevantes contribuições no aprofundamento das bases de conhecimentos e aprendizagens do professor de Matemática.

E a sua utilização como lente de estudo, quando associada a outras teorias e modelos de desenvolvimento profissional, favorece investigações na busca por compreensão do processo de aprendizagens profissionais de professores de Matemática participantes de Estudos de Aula. Porém, é mister destacar que diante da complexidade do campo de estudo relacionado aos conhecimentos profissionais docentes de professores de Matemática, em processos de Estudo de Aula, o Conhecimento Matemático para Ensino apresenta-se como uma opção, e jamais como um modelo perfeito para análise de tal complexidade.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pelo apoio.

Referências e bibliografia

- Bieda, K., Cavanna, J., & Ji, X. (2013). Developing Mathematical Knowledge for Teaching through Mentor-Guided Lesson Study. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- City, E. A., Elmore, R. F., Fiarman, S. E., & Teitel, L. (2011). Instructional rounds in education.
- Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and teacher education*, 18(8), 947-967. [https://doi.org/10.1016/S0742-051X\(02\)00053-7](https://doi.org/10.1016/S0742-051X(02)00053-7)

- Clivaz, S., & Ní Shúilleabháin, A. (2017, February). Analysing mathematics teacher learning in lesson study-a proposed theoretical framework. In Dooley, T., Gueudet, G.(eds.). *Proceedings of the Tenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME10, February 1-5, 2017)*. DCU.
- Clivaz, S., & Ní Shuilleabhain, A. (2019). What knowledge do teachers use in lesson study? A focus on mathematical knowledge for teaching and levels of teacher activity. *Theory and practice of lesson study in mathematics: An international perspective*, 419-440. https://doi.org/10.1007/978-3-030-04031-4_20
- Da Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2023). The development of teachers' knowledge in a lesson study. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 12(1), 78-91. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-02-2022-0025>
- Engeström, Y. (2001). Expansive learning at work: Toward an activity theoretical reconceptualization. *Journal of education and work*, 14(1), 133-156. <https://doi.org/10.1080/13639080020028747>
- Foster, C., Wake, G., & Swan, M. (2014). Mathematical Knowledge for Teaching Problem Solving: Lessons from Lesson Study. *North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*.
- Fitriati, F., Rosli, R., & Iksan, Z. H. (2023). Enhancing Prospective Mathematics Teachers' Lesson Planning Skills through Lesson Study within School University Partnership Program. *Journal on Mathematics Education*, 14(1), 69-84.
- Franke, M., & Kazemi, E. (2001). Teaching as learning within a community of practice: Characterising generative growth In T Wood, B Scott Nelson & J Warfield (Eds), *Beyond classical pedagogy* (pp 47-74) Mahwah.
- Fujii, T. (2019). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of lesson study. *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics: An International Perspective*, 681-704. DOI 10.1007/s11858-016-0770-3
- González, G., & Deal, J. T. (2019). Using a creativity framework to promote teacher learning in lesson study. *Thinking skills and creativity*, 32, 114-128. <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2017.05.002>
- Hendrickson, S., Hilton, S. C., & Bahr, D. (2008). The comprehensive mathematics instruction (CMI) framework: A new lens for examining teaching and learning in the mathematics classroom. *Utah Mathematics Teacher*, 1(1), 44-52.
- Huang, X., Lai, M. Y., & Huang, R. (2021). Teachers' learning through an online lesson study: an analysis from the expansive learning perspective. *International Journal for Lesson & Learning Studies*, 10(2), 202-216. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-09-2020-0076>
- Jita, L. C., & Ige, O. A. (2019). South African teachers' mathematical knowledge: Reflections from short learning intervention programme (slip). *Problems of Education in the 21st Century*, 77(6), 705.
- Kitchenham, B. (2004). Procedures for performing systematic reviews. Keele, UK, Keele University, 33(2004), 1-26.
- Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction?. *ZDM*, 48, 571-580.
- Loewenberg Ball, D., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special?. *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/002248710832455>
- Margolinas, C., Coulange, L., & Bessot, A. (2005). What can the teacher learn in the classroom?. *Beyond the apparent banality of the mathematics classroom*, 205-234.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017-1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684.x>
- Needs, M., Bahr, D. L., McMillan, B. G., Nixon, R. S., Braden, Q. H., & Royster, R. (2022, October). RETRACTED: A modified approach to professional learning communities in mathematics: Fostering teacher reflection around formative assessments of students' thinking. In *Frontiers in Education* (Vol. 7, p. 1040805). Frontiers Media SA.
- Ní Shuilleabhain, A. (2016). Developing mathematics teachers' pedagogical content knowledge in lesson study: Case study findings. *International journal for lesson and learning studies*, 5(3), 212-226.
- Ponte, J. P. D., Quaresma, M., Mata-Pereira, J., & Baptista, M. (2016). O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 30(56), 868-891. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v30n56a01>
- Quaresma, M. A. F. (2018). *O estudo de aula como processo de desenvolvimento profissional de professores de matemática: duas experiências do ensino básico* (Doctoral dissertation, Universidade de Lisboa (Portugal)).

- Ramos, Altina, Faria, Paulo M., & Faria, Ádila. (2014). Revisão sistemática de literatura: contributo para a inovação na investigação em ciências da educação. *Revista Diálogo Educacional*, 14(41), 17-36. Recuperado em 15 de fevereiro de 2025, de http://educa.fcc.org.br/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S1981-416x2014000100002&lng=pt&tlng=.
- Sawyer, K. (2013). *Zig zag: The surprising path to greater creativity*. John Wiley & Sons.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Thobela, N. M., Sekao, R. D., & Ogbonnaya, U. I. (2023). Mathematics Teachers' Use of Textbooks for Instructional Decision-Making in Lesson Study. *Journal of Pedagogical Research*, 7(4), 1-13. <https://doi.org/10.33902/JPR.202320138>
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes* (Vol. 86). Harvard university press.



Do passado ao presente: contribuições do PROTAD para formação inicial de professores em Trigonometria

Poliana Figueiredo Cardoso **Rodrigues**

Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil

polianacar@gmail.com

Maria Alice Veiga Ferreira de **Souza**

Pós-graduação em Educação em Ciências e Matemática, Instituto Federal do Espírito Santo
Brasil

alicevfs@gmail.com

Resumo

Esta pesquisa verificou a contribuição do instrumento PROTAD - Proporção Trigonométrica de Altura, Distância e Profundidade - na formação de licenciandos em Matemática, com foco na compreensão do conceito de função seno, a partir da relação entre o triângulo retângulo e o círculo trigonométrico. Desenvolvido como uma adaptação do esquadro móvel de Ottavio Fabri, o PROTAD foi o recurso central das atividades práticas. O embasamento teórico pautou-se nas pesquisas de Nacarato, Nacarato e Santos, que discutem o ensino de Trigonometria, e de Carrillo-Yañez *et al.*, sobre conhecimentos epistemológicos e pedagógicos do professor. Os resultados evidenciaram o potencial do PROTAD como estratégia didático-pedagógica para favorecer a construção de conhecimentos necessários à aprendizagem da função seno. As tarefas pedagógicas integraram a semelhança entre triângulos retângulos, as razões trigonométricas e sua representação no plano cartesiano, promovendo uma abordagem prática para consolidação conceitual da função seno, para além de um estudo singularmente procedimental.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino Superior; Ensino Presencial; Formação Inicial de Professores; Pesquisa Qualitativa; Trigonometria; Brasil.

Introdução

No século XVI, a necessidade de medir alturas de grandes estruturas, como torres e morros, por trabalhadores com conhecimento matemático limitado, levou Ottavio Fabri (1615) a criar um instrumento prático: o esquadro móvel. Este artefato histórico, estudado por pesquisadores como Cesana e Saito (2020) e Cesana e Silva (2022), utilizava triângulos retângulos e a relação entre ângulos e lados para realizar medições. Inspirados por Fabri e pelas investigações de Cesana (2013, 2017), desenvolvemos o PROTAD – Proporção Trigonométrica de Altura, Distância e Profundidade –, adaptando o esquadro móvel ao contexto acadêmico para auxiliar na formação inicial de licenciandos em Matemática, enfrentando dificuldades epistemológicas com Trigonometria (Nacarato & Santos, 2004; Feijó, 2018). Nesse sentido, objetivamos compreender as potencialidades do PROTAD para promoção da construção conceitual de noções trigonométricas, superando abordagens mecânicas e priorizando o desenvolvimento de um conhecimento matemático especializado fundamentado (Carrillo-Yañez et al., 2018). Este trabalho é parte de uma tese de doutoramento e está estruturado em: referencial teórico, conceitos trigonométricos fundamentais, metodologia, resultados e considerações finais.

Enquadramento teórico: conhecimento do professor e objetos trigonométricos

De maneira geral, estudos realizados no âmbito da Educação Matemática apontam para compreensões conceituais superficiais por professores, que, por exemplo, referem-se ao seno como uma razão ou uma função, entre outras interpretações limitadas (Feijó, 2018). Essas dificuldades também são observadas entre estudantes do ensino básico e superior (Feijó, 2018; Oliveira, 2021). Ademais, o tratamento pouco criterioso de objetos trigonométricos em livros didáticos brasileiros, nos quais conceitos como de radiano e de seno são apresentados sem distinções Matemáticas adequadas (Oliveira, 2021), intensifica nossas preocupações em relação ao conhecimento dos professores em formação inicial. Quando nos referimos ao conhecimento do professor, o fazemos na perspectiva do *Mathematics Teachers' Specialized Knowledge* – MTSK¹ (Carrillo-Yañez et al., 2018), que consideram os conhecimentos dos professores de forma holística, ou seja, é relevante para o estudo os saberes dos professores e como são colocados em prática. Para isso, Carrillo-Yañez et al. (2018) subdividiram os conhecimentos em dois domínios: *Mathematical Knowledge* – MK e *Pedagogical Content Knowledge* – PCK. Cada domínio foi subdividido em três dentro de uma perspectiva de crenças dos professores sobre a Matemática.

O domínio (1) *Mathematical Knowledge* (MK), tem subdomínios: (1.1) *Knowledge of Topics* (KoT) –se refere aos componentes específicos da Matemática, e está associado aos conhecimentos dos conteúdos, como teoremas e conceitos (e.g., seno, cosseno, equações trigonométricas, função seno) e contempla também o conhecimento relacionado a diferentes formas de representar a Matemática, como gráfico e pictográfico (e.g., relação métrica do triângulo retângulo com círculo trigonométrico, a partir de representações pictóricas na análise das relações da escala altímetra e o gráfico da função seno). O subdomínio (1.2) *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) diz respeito ao conhecimento das conexões que devem ser estabelecidas entre os itens da Matemática (e.g., conexões com os conceitos de semelhança de triângulos, razões trigonométricas e o círculo trigonométrico). Carrillo-Yañez et al. (2018), ao

¹ As siglas e termos serão mantidos originais na língua inglesa por serem conceitos reconhecidos internacionalmente.

Comunicação; Superior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

descreverem o subdomínio (1.3) *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM), definiram que o objeto da ‘prática’ é a própria Matemática, e, por conseguinte, o cerne do estudo está no processamento da Matemática, e não na maneira como ela será ensinada (e.g., estudo de ângulos suplementares e complementares por meio de definição sem contextualização).

Sobre o domínio (2) - *Pedagogical Content Knowledge* (PCK) está relacionados mais à prática em sala de aula. Esse domínio foi subdividido em (2.1) *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) – conhecimentos voltados para o conteúdo matemático escolar, reconhecendo como fonte de saber a experiência acumulada pelos professores ao longo de sua trajetória profissional. No KFLM é possível discutir aspectos emocionais da aprendizagem – o que motiva um estudante, quais são seus interesses –, e discussões sobre procedimentos e diferentes estratégias para resolver problemas matemáticos (e.g., variadas compreensões de conceitos e ampliação de possibilidades na atuação profissional dos estudantes). O subdomínio (2.2) *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) se conecta a saberes teóricos relacionados ao ensino de Matemática. Além da discussão sobre a importância da utilização dos recursos e materiais didáticos, esse subdomínio sublinha como eles podem ser potenciais para o ensino, minimizando possíveis dificuldades epistemológicas (e.g., materiais físicos para ensino da função seno). No subdomínio (2.3) *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS), de acordo com Carrillo-Yañez *et al.* (2018, p. 22, tradução nossa), o conhecimento do professor inclui “tudo o que o aluno deve ou é capaz de alcançar em determinado nível, em combinação com o que o estudante tem previamente estudado e as especificações para níveis subsequentes” (e.g., função seno, a partir de conhecimento sobre função).

Conceitos fundamentais para construção da função seno em meio à apresentação do PROTAD

Nesta seção daremos breve relevo aos conceitos trigonométricos fundamentais necessários à aprendizagem da função seno, em meio à apresentação e possibilidades de uso do PROTAD. De início, por meio da medição, é possível estabelecimento da relação de proporção entre triângulo retângulo com o PROTAD. Com isso, é factível a determinação de razões trigonométricas com essas medições. A Figura 1 apresenta um esboço do PROTAD que é composto por um braço móvel, um braço fixo, um quadrante geométrico no qual é marcada a escala altímetra, um meio círculo e quatro miras. Como esse instrumento, a princípio, foi idealizado para medição de grandes alturas, devemos considerar algum erro quando da medição de objetos menores, mas que pode ser considerado baixo, embora sempre deva ser mensurado e declarado.

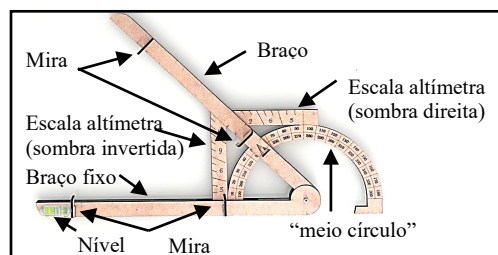


Figura 1. Indicação das partes do PROTAD

O PROTAD possibilita o estabelecimento da relação de semelhança de triângulos que pode ser entendida a partir do triângulo retângulo formado com o objeto a ser medido e o triângulo retângulo formado com a escala altímetra e os braços do instrumento (Figura 2a) determinando os valores das razões trigonométricas.

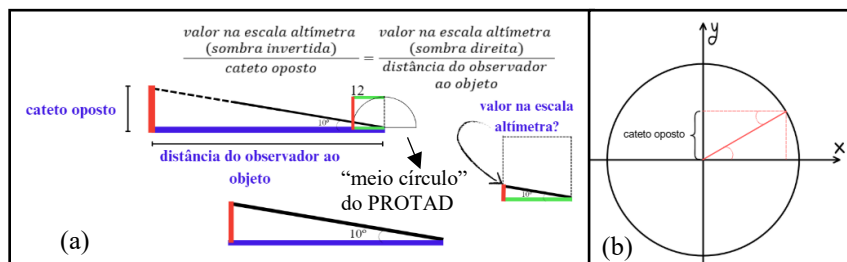


Figura 2. (a) Cateto oposto pelas proporções da escala altímetra; (b) Sen 30° no círculo trigonométrico

Após determinação da razão trigonométrica do seno, é possível registrá-la no eixo do círculo trigonométrico (Figura 2b), considerando não apenas o ângulo, mas também os valores obtidos. No PROTAD, a variação do braço móvel, que altera os ângulos, permite registrar diversas razões trigonométricas no primeiro quadrante. Com o conhecimento das relações entre ângulos suplementares e complementares, esses registros podem ser projetados para os demais quadrantes. Esse processo estabelece uma conexão entre o círculo trigonométrico e o plano cartesiano, possibilitando a plotagem dos valores da função seno e a construção de seu gráfico. Assim, é viável realizar análises e formular conjecturas sobre propriedades e relações inerentes à função seno, ampliando a compreensão conceitual por meio da exploração gráfica.

Metodologia

Esta pesquisa, de abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994), apoiou-se no MTSK (Carrillo-Yañez *et al.*, 2018) e envolveu 16 licenciandos em Matemática de uma instituição federal brasileira matriculados no componente curricular Fundamentos de Matemática III. A formação integral foi levada a efeito pela primeira autora e acompanhada pela segunda autora e outros dois professores de Matemática e pesquisadores da Educação Matemática. Foram investidos 4h/aula de um componente curricular do segundo semestre de 2024 para realização dessas tarefas. As tarefas foram preparadas a partir de um Lesson Study sendo: (*Tarefa 1*) medição da altura de um prédio com o PROTAD, variando ângulos (10°, 30°, 40°, 45°, 50°, 60°, 80°) no primeiro quadrante para determinação do seno; (*Tarefa 2*) registro das razões trigonométricas no círculo trigonométrico sem transferidor; (*Tarefa 3*) plotagem no plano cartesiano para construção da função seno do primeiro quadrante; e (*Tarefa 4*) ampliação dessas relações para os demais quadrantes, abrangendo $[0, 2\pi]$. Os dados, coletados por gravações, discussões grupais e produções escritas, foram triangulados e categorizados segundo o MTSK, permitindo analisar de modo indutivo a potencialidade do PROTAD no desenvolvimento de noções trigonométricas essenciais entre futuros professores.

Resultados e Discussões

O processo formativo dos licenciandos foi conduzido por meio de quatro tarefas. Mais detalhadamente, na *Tarefa 1*, os estudantes foram encaminhados ao pátio da instituição para medirem a distância entre eles e o prédio, utilizando o PROTAD (Figuras 3c e 3d), a partir das

aberturas para ângulos de: 10° , 30° , 40° , 45° , 50° , 60° e 80° . A seleção desses ângulos não foi arbitrária, mas fundamentada na possibilidade de estabelecer relações com a escala altimétrica do PROTAD (exemplificada na Figura 2a). As informações foram organizadas em uma tabela (Tabela 1). (KoT – conceito: com o cálculo da hipotenusa e do seno de cada ângulo).

Tabela 1

Registro das informações e cálculos realizados após as medições

	10°	30°	40°	45°	50°	60°	80°
Ângulo							
Distância							
cateto oposto (determinada pela relação da escala altimétrica)							
Hipotenusa (Teorema de Pitágoras)							
Seno do ângulo							

Notas. Protocolo de pesquisa. 2024.

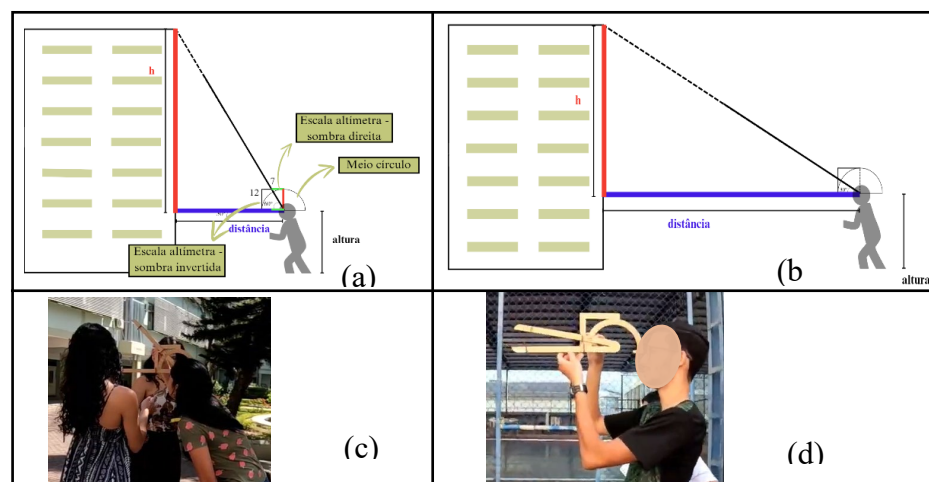


Figura 3. Ilustração da utilização do PROTAD para medição da altura com variação de abertura do braço móvel (a) de 60° , (b) de 10° e demonstração dos alunos utilizando o PROTAD (c) com 45° e (d) com 10°

Após a medição da distância (Figura 3a, b, c e d), como os licenciandos já tinham realizado outras tarefas para familiarização do instrumento, foi possível discutir conjuntamente como determinar o valor do seno do respectivo ângulo a partir de relações da escala altimétrica (KMT – recurso: o uso do PROTAD potencializando o ensino de função seno) (Figura 2a), com os valores da Tabela 1. Essa tarefa possibilitou discussões para além de procedimentos mecânicos para cálculo do seno ou para a determinação dos valores dos catetos, visto que realizamos uma experimentação, uma investigação na determinação do cateto oposto (KoT – representações: a partir de representações pictóricas na análise das relações da escala altimétrica).

Na Tarefa 2, foram finalizados os devidos cálculos e realizamos a marcação dos ângulos no círculo trigonométrico com a determinação do triângulo retângulo para cada ângulo compreendendo as projeções do seno no eixo y em um círculo de raio um (KSM – conexões conceituais: relação entre os conhecimentos de semelhança de triângulo, razão trigonométrica, círculo trigonométrico). Durante o processo de marcação no círculo trigonométrico (Figura 4a e 4b) constatamos como os conceitos relacionados ao estudo de Trigonometria ainda geravam

dúvidas, como observado durante o seguinte questionamento realizado pela professora durante uma das aulas: “No círculo trigonométrico, em qual eixo é realizada a projeção do valor do seno quando consideramos um círculo trigonométrico de raio um?”. Respostas dos estudantes sem maiores explicações: Aluno1: “não sei”; Aluno2: “era em pé” [fazendo referência ao eixo vertical]. Observamos que eles possuíam uma reprodução mecânica do conhecimento, por exemplo, a partir da resposta do Aluno2. O Aluno1 ainda completou “tudo que sei de Trigonometria é “macete”, com essas reflexões o Aluno3 questionou “eu não sei por que o seno é eixo y, quer dizer, eu nem sei se tem um porquê?”. A partir desses questionamentos, a professora aproveitou a oportunidade (KPM – define: a relação dos eixos com o ângulo e o valor do seno) para justificar como é definido, qual é a projeção de cada razão trigonométrica nos eixos e o sinal do seno no primeiro quadrante, dando significado ao conhecimento.

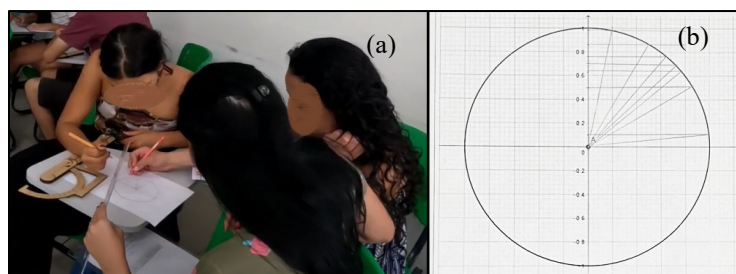


Figura 4. (a) Alunos realizando a tarefa 2; (b) Tarefa realizada pelos alunos de marcação dos ângulos e seno

A Tarefa 3 oportunizou a discussão sobre o que eles entendem do conceito de função, estabelecendo a relação entre o que eles compreendem por variável dependente e variável independente, para compreender e(ou) reafirmar o que foi realizado no círculo trigonométrico na marcação dos ângulos no eixo x e dos valores de seno do ângulo no eixo y (Figura 5a). Foi questionado pelo Aluno3 “pode deixar escala diferente?” e a professora pôde reafirmar que a definição de escala seria definida por cada grupo, em relação aos eixos. A partir da definição da escala, conseguiram realizar a transposição dos pontos do círculo trigonométrico para o plano cartesiano e, posteriormente, compreenderam o comportamento da função seno no 1º quadrante (KoT – conceito: com o entendimento de variável dependente e independente, reflexão sobre escalas em cada eixo). Vale dizer que o Aluno3, após a marcação dos pontos no plano cartesiano, esperava encontrar algo semelhante à função afim. Como estavam realizando a atividade em grupo, o Aluno4 comentou que aqueles pontos descreviam um comportamento similar à do semicírculo obtido no círculo trigonométrico (KSM – conexões conceituais: relacionar o círculo trigonométrico com o gráfico da função seno). Essa tarefa proporcionou uma ampliação dos conceitos, fazendo com que os alunos refletissem sobre características da função.

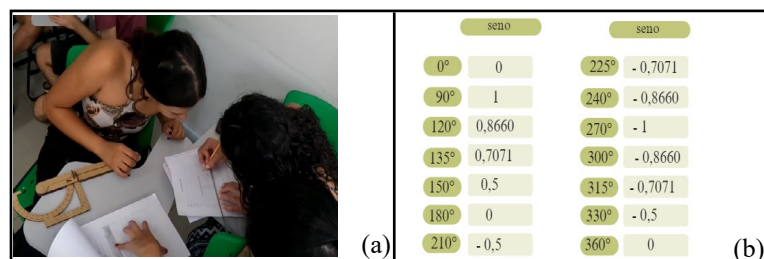


Figura 5. (a) Marcação dos ângulos e seno no plano cartesiano; (b) Ângulos dos quatros quadrantes para serem marcados

Para finalizar, na *Tarefa 4* os alunos possuíam uma tabela (Figura 5b) com valores de ângulos do segundo, terceiro e quarto quadrantes e seus respectivos valores do seno (na representação decimal), que deveriam ser marcados no círculo trigonométrico e no plano cartesiano que já começaram a construir (Figura 6a e 6b). Durante esse processo de marcação o Aluno3 perguntou “estou roubando, pois eu estou copiando do lado de cá [estava fazendo a marcação no segundo quadrante e se referindo ao primeiro quadrante]. É roubar isso?”, e a professora questionou “Por que você está copiando do outro lado?”. O Aluno3 respondeu: “porque é o mesmo seno” e a professora ainda questionou “Por que esses ângulos têm o mesmo seno?”. O Aluno3 refletiu e respondeu “pois são ângulos suplementares”, mostrando que compreendeu as relações dos ângulos nos quadrantes (KFLM – diferentes estratégias de resolução: ao realizar a marcação dos ângulos do 2º, 3º e 4º quadrantes no círculo trigonométrico, alguns alunos relacionaram com os conceitos de ângulos suplementares, ou ângulos complementares ou a partir dos valores obtidos).

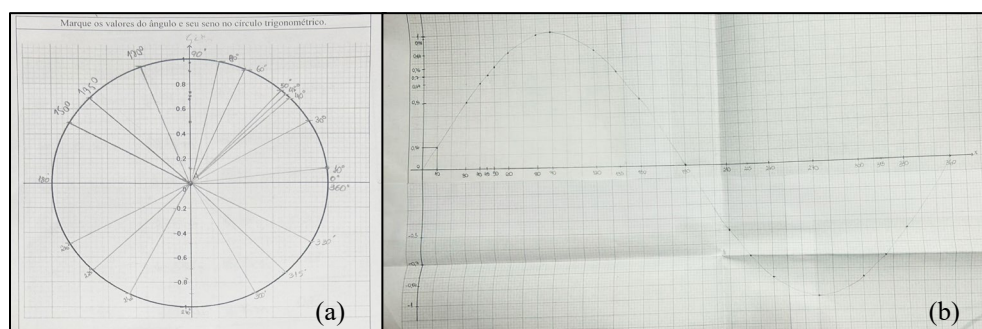


Figura 6. (a) Marcação dos valores do segundo, terceiro e quarto quadrante no círculo trigonométrico; (b) no plano cartesiano

Ao realizarem a transposição dos demais quadrantes para o plano cartesiano, os alunos construíram o percurso da função seno ao longo do eixo x, sendo capazes de identificar o domínio e a imagem da função, além de refletirem sobre outras características como amplitude e período da função trigonométrica (KMLS – conhecimentos relacionados ao currículo: compreensão de função seno a partir de conhecimentos prévios e esse conhecimento ser fundamental para conhecimentos futuros). As quatro tarefas possibilitaram a ampliação dos conceitos relacionados à Trigonometria, em uma abordagem que valorizasse a produção de conhecimentos conceituais, investigação e interpretação, diferente da apresentação procedimental que comumente é realizada com os estudantes quando de discussões sobre Trigonometria. O íterim das tarefas mostrou, assim, a potencialidade do PROTAD como meio prático para construção das ideias conceituais desejadas.

À guisa de conclusão

Esta pesquisa teve como objetivo verificar como o PROTAD pode contribuir para a formação de licenciandos em Matemática, promovendo a compreensão do conceito de função seno a partir da relação entre o triângulo retângulo e o círculo trigonométrico. A aplicação da proposta revelou as potencialidades do PROTAD no processo de aprendizagem e no processo formativo dos licenciandos ao relacionar com a abordagem do MTSK e evidenciando avanços na marcação e interpretação de valores no círculo trigonométrico e na conexão desses estudos com

o plano cartesiano. Os licenciandos foram capazes de construir a função seno, compreendendo as variações nos quatro quadrantes e analisando propriedades como domínio, imagem, amplitude e período, tendo assim maior aquisição de conhecimento matemático.

A investigação também mostrou que conceitos foram mobilizados com o uso do PROTAD, por meio da perspectiva do MTSK, pois foi desenvolvido conexões conceituais, ampliação de definições, utilização de recurso para potencializar o ensino, desenvolvimento de conceito, desenvolvimento de diferentes estratégias de resolução, obtenção de conhecimento relacionado ao currículo, assim desenvolveram novos conhecimentos matemáticos e pedagógicos

Referências e bibliografia

- Bogdan, R. C. e Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em educação*. Tradução Maria João Alvarez, Sara Bahia dos Santos e Telmo Mourinho Baptista. Porto Editora.
- Carrillo-Yanez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., ... e Munoz-Catalán, M. C. (2018). The Mathematics Teacher's Specialised Knowledge (MTSK) Model. *Research in Mathematics Education, Volume* (20), 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., Montes, M. Á., Escudero, D. e Medrano, E. F. (2014). *Un marco teórico para el Conocimiento especializado del Profesor de Matemáticas*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.
- Cesana, A., e Saito, F. (2020). Mapeando alguns conhecimentos matemáticos incorporados no “esquadro móvel” de Ottavio Fabri (1544-1612). *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas/RECM, Volume* (16), 89-104. <http://dx.doi.org/10.18542/amazrecm.v16i35.8263>
- Cesana, A. e Silva, C. M. S. da. (2022). Uma análise de imagens contidas no tratado L'Uso della Squadra Mobile de Ottavio Fabri. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, Volume* (15), 33-53.
- Cesana, A. (2017). Alberti, Finé e Fabri: Contribuições em Problemas de Medição de Alturas no Renascimento. *REMATEC, Volume* (12). 52-69. <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/254>
- Cesana, A. (2013). *Textos e contextos dos problemas de mediação de altura em livros do Renascimento*. [Tese de Doutorado em Educação, Universidade Federal do Espírito Santo].
- Cunha, M. (2000). Saberes Profissionais de Professores de Matemática: Dilemas e Dificuldades na Realização de Tarefas de Investigação. *Millenium, Volume* (17).
- Espinosa, G. M. e Cortés, G. J. (2014). Significado Trigonométrico en el Profesor [Significado Trigonométrico no Professor]. *Bolema, Volume* (28), 1193-1216. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v28n50a10>
- Fabri, O. (1615). *L'Uso della squadra mobile*. Pietro Bertelli. <https://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHODOCUView?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/4K>
- Farias, S. A. D. de. (2014). *Ensino-aprendizagem de Triângulos: um estudo de caso no curso de licenciatura em matemática a distância*. [Tese de Doutorado em Educação]. Universidade Federal da Paraíba.
- Feijó, R. S. A. A. (2018). Dificuldades e obstáculos no aprendizado de trigonometria: um estudo com alunos do ensino médio do Distrito Federal. [Dissertação de Mestrado Profissional em Matemática]. Universidade de Brasília.
- Gomes, S. C. (2011). *Elaboração e aplicação de uma sequência de atividades para o ensino da trigonometria numa abordagem histórica*. [Dissertação de mestrado Acadêmico em Ciências Naturais e Matemática]. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. <https://repositorio.ufrn.br/handle/123456789/16072>
- Nacarato, A. M. (2003). A definição de seno apresentada nos livros didáticos de matemática no século XX. *V Seminário Nacional de História da Matemática*, Rio Claro.
- Nacarato, A. M. e Santos, R. T. dos. (2004). Espaços alternativos de formação: quando graduandos em matemática e professores em exercício compartilham experiências sobre o ensino de trigonometria. *Educação Matemática Pesquisa, Volume* (6), 63-90. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/4687/3257>
- Oliveira, M. S. de. (2021). Dificuldades na Aprendizagem de trigonometria: reflexos da Educação Básica no Ensino Superior. *INTERMATHS, Volume* (2), 140-155.
- Rodrigues, P. F. C., Souza, M. A. V. F. de e Thiengo, E. R. (2022). Trigonometria: Conhecimento de conteúdo e de Ensino fundamentados em uma revisão sistemática de literatura. *REnCiMa. Volume* (13), 1-23.



Educação de jovens e adultos: um relato de experiência sobre o programa residência pedagógica em Matemática

Pedro Luiz **Alves** Gomes
Universidade de Brasília
Brasil
Pedroluiz2409@hotmail.com

Rui **Seimetz**
Universidade de Brasília
Brasil
rseimetz@unb.br

Igor dos Santos **Lima**
Universidade de Brasília
Brasil
igor.matematico@gmail.com

Contexto

O Programa Residência Pedagógica aderido pela Universidade de Brasília tem como objetivo o aperfeiçoamento e aprimoramento dos estudantes das licenciaturas (Ministério da Educação, 2024). No Departamento de Matemática da Universidade de Brasília, os estudantes participaram da Residência Pedagógica em diversas escolas, níveis e modalidades. Neste Relato de Experiência descrevemos sobre a participação na Educação de Jovens e Adultos, quais aspectos se destacaram e como essa vivência escolar fez parte para formação docente dos estudantes do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília.

O Centro Educacional 11 foi construído na cidade Ceilândia, tal nome se origina da campanha de erradicação de invasores. Os primeiros moradores relatam que era feito a falsa promessa de um lote e, quando chegavam na cidade precisavam improvisar para construir uma barraca (Gu da Cei, 2021). A infraestrutura não planejada da cidade representa grandes desafios para acesso à educação de qualidade, cultura e saúde básica.

Desenvolvimento

Na escola participei como mediador dos conteúdos ministrados para o ensino-secundário juntamente com outros residentes de forma presencial, todas as ações eram supervisionadas por um Preceptor. Para otimização do tempo e melhor assimilação dos conteúdos adotamos metodologias inovadoras, tais como: Slide, Sala de Aula Invertida e oficinas.

A escola promoveu uma semana de evento em comemoração ao Dia da Consciência Negra, participei do ensaio do canto coral, assisti uma palestra e fui jurado do desfile. Esse evento forneceu momentos de empatia, interação entre os alunos e maior participação com a escola. Nas últimas semanas de aula apliquei o dominó de operações e deixei os alunos mais livres. No ano seguinte as turmas eram constituídas majoritariamente por adultos, apliquei uma oficina de gamificação sobre análise combinatória com direito a premiação por participação.

Na universidade participamos de eventos, reuniões semanais e seminários como complementação da teoria e prática. Durante as reuniões e eventos havia a integração com outros residentes, que possuíam vivências e práticas diferentes dentro da sala de aula, todos se mostravam otimistas e com bons resultados após aplicações de oficinas, elevando o interesse e participação dos alunos.

Conclusão

A experiência na Educação de Jovens e Adultos foi enriquecedora para o desenvolvimento profissional, através da prática consolidei teorias e conheci as dificuldades que os alunos vivenciam. As aulas planejadas se diferenciavam do ensino tradicional e eram adaptadas conforme a dificuldade das turmas, os alunos comentavam que a aula era diferente do ensino tradicional, as oficinas e os métodos de avaliação por participação sem provas avaliativas foram ferramentas essenciais para estimular na interação e motivação deles.

A estrutura da Educação de Jovens e Adultos não é adequada para os alunos, que enfrentam dificuldades para resgatar conhecimentos anteriores à evasão escolar, dever de casa ou estudar a matéria posteriormente era inviável devido às responsabilidades com o trabalho e a família. Muitos alunos tinham dificuldade em Matemática; alguns relatavam que não eram capazes de resolver ou apenas reproduzir resoluções prontas, isso vinha de crenças limitantes, reforçada por reprovações.

Referências

- Gu da Cei. (2021, maio 27). História da Ceilândia contada por pioneiros [vídeo]. No Youtube.
<https://www.youtube.com/watch?v=PGZ3ZMipKXw>
- Ministério da Educação. (2024, junho 21). Programa de Residência Pedagógica. Gov.br.
<https://www.gov.br/capes/pt-br/aceso-a-informacao/acoes-e-programas/educacao-basica/programas-encerrados/programa-residencia-pedagogica#>



El análisis didáctico en la formación y ejercicio docente: Percepciones de profesores en contextos escolares auténticos

Claudia **Matus-Zúñiga**
Universidad de Santiago
Chile
claudia.matus.z@usach.cl

Andrea **Pinto-Vergara**
Universidad de Santiago
Chile
andrea.pinto@usach.cl

Resumen

La investigación plantea indagar acerca de la transferencia pedagógica a los campos de práctica y de ejercicio docente, de la herramienta Análisis Didáctico, utilizada en los cursos de Taller I y II de Herramientas Didácticas de la Matemática, de Pedagogía en Matemática y Computación. Se presentan resultados de la implementación de un estudio de casos que incluyó a tres profesores en formación, con experiencia como profesores novatos. Se realizó un grupo focal que indagó en las opiniones de actividades y simulaciones desarrolladas en los dos cursos. Se construyeron mapas y se analizaron las transcripciones para comprender la valoración que hacían del uso del Análisis Didáctico. Los resultados muestran mejoramiento en la implementación del currículum y la didáctica de la Matemática escolar, consideración de aspectos emocionales en el aprendizaje y desarrollo de confianza profesional. Adicionalmente, los participantes plantean estrategias de mejoramiento para los dos ramos Taller I y Taller II cursados.

Palabras claves: Práctica docente, Formación de Profesores, Análisis didáctico.

Introducción y antecedentes

El estudio de la práctica docente en el marco de la formación de profesores debe considerar al formador, al estudiante y al contexto, pues desde esta perspectiva corresponde comprender las relaciones que se establecen al educador por medio de sus acciones entre el mundo, el contenido

y al aprendiz (Friesen y Kenklies, 2021; Westbury et al., 2000). Consideraremos la definición de práctica docente que propone Da Ponte y Chapman (2006) que señala que: “La práctica docente se define como las actividades que [los profesores] realizan recurrentemente, tomando en consideración su contexto, sus significados y sus intenciones”.

La formación docente se enfrenta a diversas problemáticas que influyen en la enseñanza, un fenómeno complejo que abarca aspectos sociales, culturales, políticos, económicos e institucionales. Estos factores inciden en la práctica docente, aunque no determinan su desarrollo. Estas situaciones son relevantes porque inciden en el proceso formativo de los futuros profesores, tensionan la labor del formador y están dentro del alcance decisional del formador, ya que puede incidir personalmente en las acciones necesarias para resolverlo (Russell et al, 2016).

Posicionándonos en las asignaturas de Taller I y II de Herramientas Didácticas de la Matemática y Taller II de Herramientas Didácticas de la Matemática, que se encuentran en el semestre 7° y 8° correspondientemente, de la carrera de Pedagogía en Matemática de la Universidad de Santiago de Chile. Ambas asignaturas, que comparten las mismas contribuciones al perfil de egreso, los mismos resultados de aprendizaje general, específicos, así como las mismas unidades temáticas, sólo diferenciándose en la aplicación de las mismas, Taller I se centra en la aplicación de las situaciones que de él emerjan en el eje de Números y Álgebra del currículo nacional propuesto por el Ministerio de Educación, en cambio Taller II se aborda los ejes de Geometría y Probabilidad y Estadística.

Damos cuenta que el enfoque en el que se estaba desarrollando era de corte muy teórico y la práctica de la simulación de tareas docentes estaba alejada del mundo escolar que enfrentan los profesores principiantes. De hecho, Díaz Barriga y Núñez Castillo (2008) identificaron dificultades que enfrentan los docentes novatos, como el manejo del grupo, la ansiedad, la planeación didáctica y la evaluación del aprendizaje en un estudio con docentes nóveles de un programa de magister.

Por este motivo se implementó una innovación pedagógica en ambas asignaturas basada en el uso del *Análisis didáctico* (Rico, 2012; Gómez, 2002) como preparación a su quehacer docente, reflexionando sobre cada uno de los aspectos que debe abordar como educador/a matemático, desde una mirada profesional.

Los resultados de la implementación de esta estrategia, mostrados a través de los productos y simulaciones realizadas por los y las estudiantes participantes de los cursos Taller I y Taller II, permitieron apreciar un alto nivel de apropiación del currículum, comprensión del aspecto conceptual y didáctico de los contenidos, y el desarrollo de habilidades de pensamiento crítico, lo que les permitió tomar decisiones sobre secuencias de aprendizaje, tiempo y recursos de aprendizaje, entre otros (Pinto y Matus, 2023). Así mismo se observaron el desarrollo de competencias de desarrollo profesional docentes como son la preparación y evaluación de la enseñanza indicadas en el Marco de la Buena Enseñanza, del Ministerio de Educación (CPEIP, 2021).

La presente investigación, es una continuación de la indagación a nuestra propia práctica, es parte de la exploración continua de la propia labor docente que realizamos, lo que implica

cuestionar las experiencias vividas en el aula, manteniendo una disposición para comprender a fondo lo que ocurre (Aulls y Shore, 2008). Es un proceso que esperamos nos lleve al cambio y al estudio de nuestra labor docente, a través de la innovación y la investigación en la práctica educativa.

Lo que nos llevó a preguntarnos ¿Cómo la simulación mediante el análisis didáctico de distintos dispositivos en la formación inicial de profesores de Matemática y computación contribuye a su preparación para la práctica profesional y el ejercicio docente temprano, fomentando la reflexión sobre el conocimiento disciplinar, curricular, didáctico y pedagógico? Se propone el siguiente objetivo de investigación: analizar si el uso del análisis didáctico, como estrategia propuesta en la formación de profesores de Matemática, contribuye a su preparación y desempeño en contextos escolares auténticos, a partir de las percepciones y experiencias de docentes novatos en su práctica profesional y ejercicio docente.

Investigaciones han planteado la necesidad de proporcionar más apoyo a los profesores novatos pues no buscan apoyo focalizado en la pedagogía dentro de los establecimientos educacionales (Flores, 2014). Por esto, la necesidad de conocer sus percepciones de las competencias entregadas en sus cursos de formación profesional, en especial del análisis didáctico como herramienta de análisis y diseño curricular.

Marco referencial

Según Rico (1992), el análisis didáctico en Matemáticas es una herramienta de planificación que busca responder a cuatro cuestiones esenciales para el docente: ¿Qué es el conocimiento matemático? ¿Qué es el aprendizaje? ¿Qué es la enseñanza? ¿Para qué sirve el conocimiento? Estas interrogantes se relacionan con cuatro dimensiones del currículo en Matemática: cultural y conceptual; cognitivo o de desarrollo; ética o formativa, y la dimensión social, que permiten organizar y relacionar la planificación docente con la legislación vigente. El autor además introduce los denominados organizadores del currículo, los que incluyen elementos como la estructura de los contenidos, análisis fenomenológico, representaciones, modelos matemáticos, procesos de modelización, errores y dificultades, materiales y recursos, historia de las Matemáticas, y estudios sobre resolución de problemas. Todos elementos que deben ser considerados en la planeación docente de Matemática.

Gómez (2002), organiza este análisis como un procedimiento que incluye varias fases interrelacionadas (ver Figura 1):

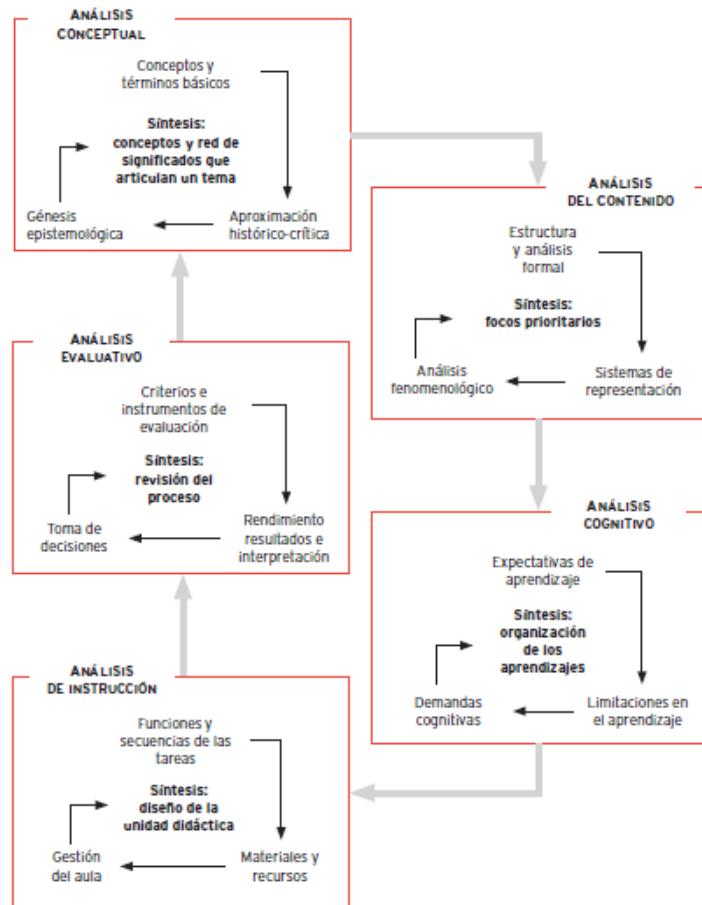


Figura 1. Esquema del Análisis Didáctico (Gómez, 2002, p.258)

En donde las etapas se corresponden a las siguientes tareas:

- **Análisis Conceptual:** Identificación del tema y descripción de los significados matemáticos de una estructura matemática, génesis histórica y epistemológica.
- **Análisis de Contenido:** Identificación y descripción de conceptos, sistemas de representación, modelos y fenómenos.
- **Análisis Cognitivo:** Previsión de las actuaciones de los estudiantes, identificación de tareas que pueden abordar, errores, dificultades y obstáculos que podrían enfrentar.
- **Análisis de Instrucción:** Selección y diseño de tareas y actividades de enseñanza, considerando la resolución de problemas, modelización y recursos disponibles.
- **Análisis Evaluativo:** Evaluación de las actuaciones de los estudiantes para describir su comprensión y planificar nuevos ciclos de enseñanza.

Así, cada uno de estos análisis requerirá del despliegue de los diferentes conocimientos del futuro profesor/a, a nivel conceptual, de contenido matemático, pedagógicos, didácticos y de evaluación, con el fin de fortalecer su toma de decisiones cuando planifique la enseñanza.

Marco metodológico

Se eligió explorar cómo perciben los estudiantes el uso del análisis didáctico mediante una metodología de tipo cualitativa, pues según Hernández Sampieri et al. (2014) este tipo de investigación pretende describir, comprender e interpretar los fenómenos a través de las percepciones y significados producidos por las experiencias de los participantes. Para este estudio se utilizará un diseño de tipo análisis de caso que estudia un fenómeno dentro de la vida real, especialmente cuando no están claros los límites del fenómeno y su contexto (Yin, 1994). Además, considera completar este diseño con uno del tipo fenomenológico, cuyo propósito es explorar, describir y comprender las experiencias de las personas respecto a un fenómeno y describir los elementos comunes de tales vivencias (Mertens, 2015).

El caso estudiado involucró a una muestra de estudiantes que aprobaron los cursos de Taller I y II de Herramientas Didácticas de la Matemática, ubicados en el cuarto año (7° y 8° semestre respectivamente) de la Malla 4503, de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile. La herramienta principal de investigación fue un grupo focal realizado de manera virtual durante el mes de octubre de 2024.

La muestra elegida constó de 3 participantes, fue intencional a propósito para recoger información de las percepciones y opiniones de estudiantes y egresados en práctica y ejercicio docente en diferentes contextos escolares (particular, subvencionado, municipal) en relación con su preparación para enseñar, utilizando diferentes aspectos del análisis didáctico. Se diseñó una pauta temática semiestructurada para guiar el desarrollo de la entrevista grupal y se grabó y transcribió la conversación para efectos del análisis posterior.

El enfoque global de análisis de los datos se basó en las recomendaciones de Lincoln y Guba (1985) acerca de los pasos a seguir en las actividades de procesamiento de los datos (por ej.: establecer unidades de análisis, categorías y patrones). Las preguntas realizadas y las respuestas de los participantes serán tabuladas en una versión adaptada de la tabla de Miles y Huberman (1994) utilizada para resumir datos y facilitar la lectura y relectura de estos. Cada información en la tabla de resumen se codificó con el seudónimo del participante y el tipo de institución escolar en la cual este se encontraba trabajando. Se identificarán con color las oraciones significativas, palabras y frases —unidades de información— (Lincoln y Guba, 1985, p. 344) en las transcripciones con el propósito de definir categorías emergentes.

Resultados

El esquema de la Figura 2, muestra las principales categorías emergentes del grupo focal sobre los Talleres I y II de Herramientas Didácticas de la Matemática, destacando su impacto en la formación docente.

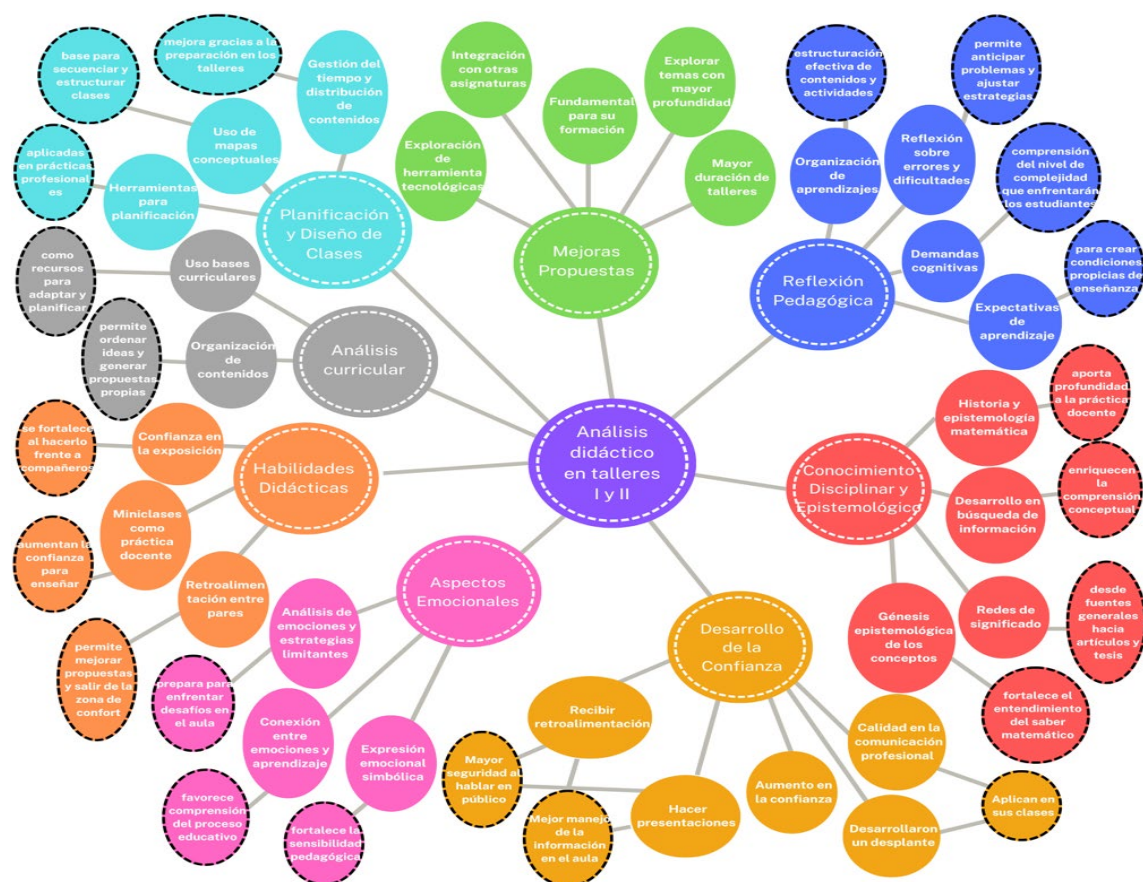


Figura 2. Esquema de Resultados del Grupo Focal

El grupo focal reveló que la estrategia del uso del análisis didáctico, propuesta en los talleres I y II, contribuye significativamente a la preparación de los docentes de Matemática en formación para su práctica profesional y ejercicio docente, tal como se buscaba en la investigación. Esta conclusión se centra en las percepciones y opiniones de profesores en formación y novatos insertos en contextos de práctica profesional y ejercicio docente.

Los participantes destacaron cómo estas experiencias -incluidas en el desarrollo del análisis didáctico- contribuyeron a su desarrollo en diversas áreas claves:

- **Planificación y diseño de clases:** Los participantes destacan que los talleres proporcionaron herramientas esenciales para la planificación de clases, que aplicaron en sus prácticas profesionales. El estudiante 1 menciona que *"las herramientas que me entregó el ramo fueron súper valiosas al momento de empezar a planificar mis clases para las prácticas profesionales"*. La experiencia de planificar, especialmente mediante el uso de mapas conceptuales, resultó ser una base sólida para su desempeño profesional. El estudiante 2 rescata del taller 2 *"el trabajo de los mapas yo siento que eso lo voy a rescatar el resto de mi vida que el mapa es súper importante porque al final yo misma generaba una secuencia"*. La gestión del tiempo y la distribución de contenidos también se vieron beneficiadas por esta preparación.

- **Análisis Curricular:** El análisis de recursos curriculares, bases curriculares, programas de estudio y guías docentes fue un componente clave. Aunque extenso, este análisis permitió a los profesores en formación cruzar información y generar propuestas de enseñanza propias, ordenando sus ideas sobre cómo abordar los contenidos. El estudiante 3 señala que esta parte del trabajo le ayudó *"a ordenar las ideas ya lo vamos a hacer en este orden que está propuesto podemos hacer esto esto otro a esto sale de aquí"*. Los participantes reconocieron la importancia de las guías docentes como una fuente de ideas y adaptación de recursos curriculares.
- **Conocimiento Disciplinar y Epistemológico:** La exploración de conceptos, la génesis epistemológica y las redes de significado enriquecieron su comprensión de la materia. La importancia de la historia y epistemología de las Matemáticas para su práctica docente fue una revelación, lo que demuestra una profundización en el conocimiento disciplinar. Estudiante 2 menciona que *"nunca hubiese pensado que lo epistemológico era tan importante hasta ahora"*. La evolución en la búsqueda de información, desde fuentes generales como ChatGPT a artículos académicos y tesis, evidencia un desarrollo en sus habilidades de investigación. El estudiante 1 comenta que *"en taller 1 la primera la primera vez me acuerdo que muchos lo buscamos por ChatGPT entonces esa parte estuvo super ChatGPT y estuvo súper buscada y rebuscaba a nosotros porque no pensamos en cómo buscar por ejemplo papers que hablarán de eso"*.
- **Habilidades Didácticas:** Las miniclases fueron fundamentales para mejorar la confianza de los estudiantes al exponer frente a sus compañeros y recibir retroalimentación. El estudiante 2 destaca que *"el tener las miniclases hizo que yo mejorara con mi confianza al momento de tener una clase"*. La retroalimentación entre pares se destacó como un mecanismo para perfeccionar sus propuestas y salir de su zona de confort.
- **Reflexión Pedagógica:** El análisis de las expectativas de aprendizaje, las demandas cognitivas y la organización del aprendizaje les ayudó a pensar en cómo crear condiciones propicias para el aprendizaje. La reflexión sobre errores y dificultades les permitió anticipar problemas y adaptar sus estrategias de enseñanza. El estudiante 3 destaca que *"es como crucial hacerlo antes. Como para poder tener una noción más o menos de qué cosas podrían salir mal"*.
- **Aspectos Emocionales:** El análisis de las expectativas emocionales y las estrategias para manejar emociones limitantes fue relevante, preparando a los futuros docentes para usar diferentes estrategias en el aula. El estudiante 1 expresa que *"el análisis emocional te prepara para eso también. Te prepara para pensar en las diferentes estrategias que uno va a tener que usar"*. Algunos participantes conectaron las emociones de los estudiantes con su aprendizaje, demostrando una mayor sensibilidad pedagógica. El estudiante 3 describe una experiencia donde utiliza una simbología para que las estudiantes expresen cómo se sienten en relación a los contenidos.
- **Desarrollo de la Confianza:** La participación en los talleres aumentó significativamente la confianza de los estudiantes como futuros profesores. La experiencia de hacer presentaciones y recibir retroalimentación les dio mayor seguridad para hablar en público y

manejar información en el aula. El estudiante 1 menciona que el taller *"potenció mucho la confianza como el momento de hacer las clases como de hablar con tus compañeros"*. Desarrollaron un "desplante" y una calidad de comunicación profesional que ahora aplican en sus clases.

- Los participantes del grupo focal **sugirieron algunas mejoras al diseño e implementación de los talleres**. Estas incluyen una mayor extensión de los talleres, una mejor integración con otras asignaturas, y una mayor exploración de herramientas tecnológicas. También recomendaron explorar algunos temas con mayor profundidad, sugiriendo una integración más longitudinal de estos temas en la carrera. El estudiante 3 sugiere que *"fuera más extensa, que tuviera más duración, alguna forma en la que lo empiecen a entrometer en los otros ramos"*. En general, los participantes coinciden en que el trabajo realizado en los talleres es fundamental para su formación.

Conclusiones

Los hallazgos de esta investigación confirman que la implementación del análisis didáctico en los cursos de Taller I y II de la carrera de Pedagogía en Matemática y Computación de la Universidad de Santiago de Chile ha impactado positivamente la formación y desempeño de los docentes novatos en contextos escolares auténticos. Según Friesen y Kenklies (2021), la práctica docente debe entenderse en su relación con el mundo, el contenido y el aprendiz, lo que resalta la importancia del análisis didáctico en la formación inicial.

Los participantes destacaron que el análisis didáctico fortaleció la planificación y el diseño de clases, permitiéndoles estructurar secuencias de aprendizaje y gestionar mejor el tiempo. Además, favoreció una mayor comprensión del currículo escolar al desarrollar un conocimiento más profundo sobre las bases curriculares y los programas de estudio, lo que les permitió generar propuestas de enseñanza fundamentadas (Da Ponte & Chapman, 2006).

El uso de miniclases y la retroalimentación entre pares resultó clave en el desarrollo de habilidades didácticas y confianza, mejorando su seguridad al exponer y su capacidad de adaptación a diferentes escenarios educativos. Además, los participantes reconocieron la importancia del análisis de expectativas y emociones en la enseñanza, aspecto crucial para enfrentar la realidad del aula y fortalecer su sensibilidad pedagógica (Russell et al., 2016).

El grupo de participantes sugiere una mayor integración del análisis didáctico en otros cursos de la carrera y su expansión a lo largo de la formación. Esto implicaría, por un lado, profundizar en los aspectos conceptuales, fenomenológicos, epistemológicos y de representaciones de los conceptos matemáticos estudiados del currículo, y por otro, actualizar los programas de estudio de las asignaturas de formación profesional, alineándose con las competencias del Marco de la Buena Enseñanza (CPEIP, 2021).

Aunque una limitación de este estudio fue el grupo seleccionado de participantes, por lo que se sugiere hacer seguimiento de las opiniones de todos los y las estudiantes sobre el uso del análisis didáctico en estas dos asignaturas Taller I y Taller II en los años siguientes, los resultados obtenidos refuerzan la relevancia del análisis didáctico como herramienta clave en la

formación inicial docente de Matemática, facilitando la transición de la teoría a la práctica y asegurando un impacto positivo en la enseñanza de la Matemática en contextos escolares auténticos, considerando que, la falta de preparación en aspectos específicos como la planeación, evaluación y gestión del aula es una fuente de preocupación para los docentes principiantes (Sánchez y Jara, 2019).

Bibliografía y Referencias

- Aulls, M. W., & Shore, B. M. (2008). *Inquiry in education (Vol. 1)*. The conceptual foundations for research as a curricular imperative. Taylor & Francis Group/Lawrence Erlbaum Associates.
- Da Ponte, J. P., & Chapman, O. (2006). Mathematics teachers' knowledge and practices. In A. Gutierrez, & P. Boero (Eds.), *Handbook of research on the psychology of mathematics education* (pp. 461–512). Sense Publisher.
- Díaz Barriga Arceo, F., & Núñez Castillo, P. (2008). Formación y evaluación de profesores novatos: Problemática y retos. *Reencuentro*, 53, 49-61. <https://www.redalyc.org/pdf/340/34005305.pdf>
- Flores Gómez, C. (2014). Inducción de profesores novatos en Chile: un estudio de caso. *Pensamiento Educativo. Revista de Investigación Educativa Latinoamericana*, 51(2), 41-55.
- Friesen, N., & Kenkies, K. (2021). What is pedagogy? *ESHA Magazine* (December), 26-31
- Hernández Sampieri, R., Fernández Collado, C., & Baptista Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6a. ed. --.). México D.F.: McGraw-Hill.
- Lincoln, Y. S., & Guba, R. G. (1985). *Naturalistic inquiry*. Beverly Hills, California: Sage Publications.
- Miles, M. B., & Huberman, A. M. (1994). *Qualitative data analysis: an expanded sourcebook*. (2a ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.
- Pinto-Vergara, A. & Matus-Zúñiga, C. (2023). Propuesta de análisis didáctico en el contexto de los cursos Taller I y Taller II de la carrera de pedagogía en matemática y conmutación de la Universidad de Santiago, como innovación para la formación de profesores. Resúmenes del II Encuentro Nacional de Formadores de Profesores en Matemáticas-REDFID. Osorno, noviembre de 2023.
- Russell, T., Fuentealba, R., & Hirmas, C. (2016). *Formadores de formadores: Descubriendo la propia voz a través del Self-Study*. Organización de Estados Iberoamericanos.
- Sánchez Sánchez, G. I., & Jara Amigo, X. E. (2019). Las preocupaciones de docentes principiantes en contextos de ruralidad. *Actualidades Investigativas en Educación*, 19(1), 28. <https://doi.org/10.15517/aie.v19i1.35407>
- Yin, R. (1994). *Case Study Research: Design and Methods*. Sage Publications, Thousand Oaks, CA.
- Westbury, I., Hopmann, S., & Riquarts, K. (2000). *Teaching as a reflective practice. The German didaktik tradition*. Springer.



El Diseño Universal para el Aprendizaje en la enseñanza matemática en la Licenciatura en Educación Preescolar

José Armando **Ortiz** Ruiz
Escuela Normal “Miguel F. Martínez”
México

armando.ortiz@enmfm.edu.mx

Luis Adrián **Miranda** Pérez
Escuela Normal “Miguel F. Martínez”
México

daniel.castillo@enmfm.edu.mx

Héctor Alonso **Rosas** Álvarez
Escuela Normal “Miguel F. Martínez”
México

hector.rosas@enmfm.edu.mx

Resumen

Este trabajo tiene como objetivo presentar los avances en la aplicación y el análisis del Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA), con el propósito de fomentar espacios inclusivos en un grupo de 36 estudiantes de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Preescolar, pertenecientes a una Escuela de Educación Superior del área metropolitana de Monterrey, Nuevo León, México. La investigación se centra en responder a la pregunta: ¿De qué manera la aplicación del DUA favorece una práctica docente inclusiva dentro del curso Didáctica del Pensamiento Matemático en Preescolar? El proyecto se enmarca en un enfoque cualitativo bajo el diseño de investigación-acción. Para su implementación, se consideraron tres indicadores propuestos por Pastor (2018) relacionados con el uso del DUA. El análisis de los resultados obtenidos a partir de los instrumentos aplicados reveló que los estudiantes respondieron de manera positiva al aprendizaje de las Matemáticas a través de dicho enfoque.

Palabras clave: Diseño universal para el aprendizaje; Educación inclusiva; Educación superior; Enseñanza; Matemáticas

Definición y relevancia del problema

Desde el Sistema Educativo Mexicano se han propuesto herramientas e ideas que giran en torno a la educación inclusiva. La evolución del proceso para integrar a todos los estudiantes a partir de sus necesidades y características ha dejado en claro que es importante retomar elementos como el uso de metodologías que atiendan a la diversidad, el diseño de currículos flexibles, la creación de diferentes oportunidades para que todos los alumnos tengan acceso al aprendizaje, el trabajo colaborativo, el uso de materiales educativos y de manera transversal; la atención a la diversidad.

Ainscow (2001) señala que, desde la perspectiva educativa, una escuela inclusiva “es aquella donde se considera que la enseñanza y el aprendizaje, los logros, las actitudes y el bienestar de todos los jóvenes son importantes” (pp. 1-2), enfatizando que el centro del proceso educativo son los estudiantes como constructores de su propio aprendizaje. En este marco, se retoma la noción de Pastor (2018), quien plantea que el Diseño Universal para el Aprendizaje (DUA) constituye una estrategia de planificación inclusiva. El DUA se define como un enfoque educativo que busca diseñar materiales, métodos y evaluaciones flexibles, con el objetivo de garantizar que todos los estudiantes, independientemente de sus habilidades o necesidades, puedan acceder, participar y progresar en el aprendizaje (Pastor, 2018). En línea con esto, Alejo e Isabel (2022) proponen que esta planificación sea intuitiva, es decir, que favorezca la creación de un ambiente de aprendizaje inclusivo, donde las actividades sean claras y comprensibles para los estudiantes, permitiéndoles desarrollar las tareas de manera coherente y con la capacidad de tolerar el error como parte del proceso de aprendizaje.

A su vez, Castro y Torres (2017) señalan que el fracaso escolar y la urgencia de atender la diversidad, entre otros desafíos, exigen una reorganización de los métodos de enseñanza y aprendizaje en el ámbito de la Educación Matemática. Esta disciplina ha sido percibida como compleja debido a prácticas de enseñanza desvinculadas de las características, necesidades y realidades diversas de los estudiantes (Acharya, 2020; Dorantes & Ojeda, 2023; Rincón & Falk, 2020). Ante esta situación, destaca la propuesta de Aké & Vargas (2015), quienes advierten la carencia de investigaciones que aborden la formación de futuros docentes de Matemáticas frente a los retos de la inclusión educativa.

El propósito principal de este estudio es examinar la propia práctica profesional mediante el diseño e implementación del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) en un grupo de tercer semestre de la Licenciatura en Educación Preescolar. Asimismo, se analizan las interacciones docente-conocimiento-alumno durante las sesiones y su contribución al desarrollo del aprendizaje. La pregunta central que orienta el análisis es: ¿De qué manera la aplicación del DUA favorece una práctica docente inclusiva dentro del curso Didáctica del Pensamiento Matemático en Preescolar? Este enfoque propicia el poder explorar cómo el DUA pudiera impactar la creación de un entorno educativo inclusivo en el contexto de la Educación Superior.

Referencias teóricas y disposiciones en torno a la educación inclusiva

La educación ha transcurrido por cambios derivadas de las demandas sociales influenciadas por los contextos en los que se desarrolla, actualmente es un tema que representa una tarea que nos compete a todos los involucrados en los diferentes niveles del sistema educativo. Demanda considerar opiniones como conocimientos que poseen los docentes acerca de la inclusión, replantear el concepto de inclusividad, tomar en cuenta la realidad de los escenarios internacionales, nacionales y regionales para reconocer la situación actual de la misma.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura [UNESCO] indica que el objetivo es claro: “eliminar la exclusión social que es consecuencia de las actitudes y respuestas a la diversidad de raza, clase social, etnia, religión, género, orientación sexual, condición de migrante y capacidades” (p.7, 2021), así mismo, no debemos dejar por fuera que la inclusión parte de ser una perspectiva transversal que privilegia la atención a las características como la diversidad de los estudiantes.

Por lo tanto, UNESCO redefine el concepto de inclusión como “un proceso que ayuda a superar las barreras que limitan la presencia, la participación y los logros de los estudiantes” (p. 8, 2021), permitiendo abordar los limitantes del aprendizaje desde diferentes perspectivas, además de movilizar al colectivo docente tomar en cuenta los diversos contextos en los que se desarrollan cada uno de los estudiantes dentro de la comunidad.

También indica que la equidad “consiste en garantizar la imparcialidad, donde se considera que la educación de todos los estudiantes tiene la misma importancia” (UNESCO, p.7, 2021), retomando de manera puntual los derechos que tienen los niños con el fin de que los docentes tengan en mente el valor que reside en cada uno de ellos como individuos y lo importante que es ofrecer un servicio educativo de calidad para el desarrollo de sus capacidades dentro de una sociedad de paz.

La educación inclusiva parte de la garantía que tenemos todos del derecho a la educación sin importar raza, género, creencias religiosas, nivel socioeconómico o capacidades en la búsqueda del aprendizaje a través de los diferentes sistemas como metodologías de enseñanza. Documentos como el Artículo 3ero. constitucional (Diario Oficial de la Federación, 2013), la Ley General de Educación (LGE) (DOF, 2016) y la Estrategia Nacional para la Educación Inclusiva (ENEI) (Senado de la República, 2019), permiten en México introducirnos en las condiciones para ofrecer un servicio educativo inclusivo y en ese sentido, todo plantel educativo enfrenta el reto de desarrollar características de una escuela inclusiva.

Por su parte, el gobierno federal mexicano, a partir del Artículo 3º Constitucional (DOF, 2013), impulsa la implementación de la Nueva Escuela Mexicana (Secretaría de Educación Pública, 2019a) con el objetivo de reorientar las prácticas educativas en los centros escolares, otorgando mayor relevancia a la educación inclusiva para garantizar una educación equitativa para todas y todos. Esta iniciativa reconoce que el sector educativo se ha visto afectado por problemáticas como la pobreza, la desigualdad y la discriminación, las cuales limitan las

oportunidades de acceso y generan condiciones educativas poco favorables para gran parte de la población mexicana.

Así mismo, la Secretaría de Educación Pública (SEP) indica que la educación inclusiva “se refiere a crear políticas educativas transversales e intersectoriales que atiendan a la diversidad de acuerdo con las necesidades, intereses, características, estilos y ritmos de aprendizaje de los alumnos, en donde todos los ámbitos del sistema educativo se involucren” (p. 14, 2018), no obstante se considera que más allá de políticas, un objetivo primordial es preparar a los docentes de todos los niveles para ejercer prácticas inclusivas dentro de sus aulas a partir de las necesidades que presenten sus estudiantes.

Este acto se evidencia en las Escuelas Normales, que son instituciones de educación superior especializadas en formación docente. Este impacto se refleja en un rediseño curricular en los años 2018 y 2022 que dan lugar a los Planes de Estudios de las Licenciaturas en Educación ofrecidas por estas instituciones (DOF, 2018) (DGESUM, 2022). A partir de este momento, surge el desafío para los educadores de crear aulas inclusivas y capacitar a los futuros docentes con estándares de calidad y equidad en su práctica pedagógica, en consonancia con el currículo nacional vigente. En el ámbito de la Educación Superior, las Escuelas Normales implementan la Estrategia de Mejora, establecida por la Secretaría de Educación Pública (2019b), con el objetivo principal de transformar la realidad social a través de sus 16 programas de formación inicial de docentes. Estos programas están diseñados con un enfoque centrado en los derechos humanos y la igualdad, con el fin de abordar de manera efectiva los desafíos educativos que enfrenta el país.

Es importante destacar que estos programas se basan en la premisa de que las Escuelas Normales deben definir y reconocer la visión que se tiene para la profesión docente. Esto implica el establecimiento de mecanismos y herramientas para lograr este objetivo. La principal preocupación es proporcionar respuestas concretas para alcanzar el perfil de egreso con una perspectiva inclusiva, a través de los logros obtenidos en el proceso educativo. Es esencial asegurar que la formación docente no solo cumpla con los estándares académicos, sino que también se enfoque en promover valores de inclusión y diversidad para contribuir a la construcción de una sociedad más equitativa.

Aspectos metodológicos a considerar

A través del curso de Didáctica del Pensamiento Matemático en Preescolar, curso cuyos propósitos se dirigen a que el docente en formación diseñe y aplique propuestas de intervención desde una mirada social, cooperativa, incluyente y contextualizada, utilizando como referente las teorías, investigaciones, experiencias comunitarias y los planes de estudio vigentes sobre espacio, forma y medida, con objeto de coadyuvar en el desarrollo del Pensamiento Matemático en las niñas y niños de preescolar (Dirección General de Educación Superior para el Magisterio, 2023).

Este estudio se realizó bajo un enfoque cualitativo, siguiendo las directrices de Sandín (2003), el cual permite una comprensión profunda de los fenómenos educativos y sociales,

brindando una base sólida para la toma de decisiones que favorezcan la organización y estructuración del conocimiento. La problemática abordada se centra en la necesidad de atender la diversidad mediante un diseño de investigación que permitiera recuperar la práctica docente, optando por la investigación-acción. Esta metodología no solo busca resolver problemas prácticos, sino que también posiciona al docente como un agente transformador dentro del aula, asumiendo un rol activo de investigación a lo largo del proceso de indagación (Rodríguez & Valdeoriola, 2009).

Por otro lado, la muestra de estudio para este proyecto de intervención es de un grupo asignado de 36 estudiantes de la Licenciatura en Educación Preescolar de 3er. periodo, de una Escuela de Nivel Superior de Educación en Monterrey, Nuevo León, México. La temporalidad de implementación fue durante semestre “par” correspondiente a agosto del 2023 a enero del 2024. Un primer momento de intervención fue diagnosticar las Barreras para el Aprendizaje y la Participación que enfrentan los estudiantes; y así poder diseñar el curso. En ese sentido, se realiza un diagnóstico a través del instrumento Índice de Inclusión - Index (SEP, 2018 y Booth *et al.*, 2000)

La puesta en práctica, diseño e indicadores de análisis del DUA en el ámbito educativo de este concepto se redefine desde una perspectiva didáctica, al aplicar los principios del DUA en la construcción curricular de los distintos niveles educativos, adaptándolos a la diversidad del alumnado. Esto implica un currículo flexible e inclusivo, que atienda a todos los estudiantes sin importar sus características individuales. Sin embargo, su enfoque no se limita únicamente al diseño curricular, sino que también abarca que los objetivos, contenidos, materiales y evaluaciones estén pensados para atender a toda la diversidad del estudiantado. En este sentido, el DUA se concibe como la elaboración de materiales y actividades didácticas que posibilitan que los objetivos de aprendizaje sean alcanzables por personas con diversas capacidades.

Para lograrlo, es necesario aplicar los tres principios fundamentales propuestos por Pastor (2018), que se integran de la siguiente manera: 1) Generar múltiples formas de implicación, a partir del componente emocional y la motivación para el aprendizaje del estudiantado; 2) Ofrecer múltiples formas de representación, considerando la estimulación de diversos sentidos para favorecer el conocimiento y promoviendo, desde la enseñanza del docente, la comprensión de la información de manera diferenciada para cada individuo; y 3) Proporcionar múltiples formas de acción y expresión sensorial del aprendizaje. Asimismo, se establecieron momentos de evaluación del proceso con el propósito de tomar decisiones que permitieran potenciar las acciones a medida que avanzaba el curso, proceso que fue respaldado por el grupo de investigación al cual pertenecen los autores que presentan este estudio.

Finalmente, se realizó una recolección de datos a través de observación participante, de análisis de la práctica conforme a los elementos que propone Pastor (2018) para el uso adecuado del DUA para la generación de un espacio inclusivo durante el curso. El motivo por el cual se pretendió actuar de esta forma parte de la importancia de propiciar la inclusión desde la atención a la diversidad como principio rector desde una escuela formadora de docentes. No se puede enseñar lo que no se tiene, por lo que se considera que los resultados que se obtenga de la enseñanza del análisis de la práctica permitirán caracterizar los pilares que integran la propuesta

del uso del DUA por Pastor (2018) que permitan generar referentes de mejora de la equidad y calidad en el servicio que se brinda.

Resultados y Conclusiones

El uso del DUA en la enseñanza de las Matemáticas implica adoptar una mirada intercultural para responder a la diversidad en el aula. Esto se logra mediante el diseño de situaciones didácticas que potencien el aprendizaje y el desarrollo de habilidades de todo el estudiantado, considerando tanto sus características cognitivas como culturales y sociales. A su vez, la implementación de estrategias basadas en el DUA se ve influenciada por aspectos actitudinales y por la concepción de diversidad que tienen el profesorado y el propio alumnado, lo cual puede generar prejuicios respecto a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Por ejemplo, para que las estudiantes comprendieran las implicaciones que existen en los estudiantes de preescolar en tanto a la ubicación como percepción dentro del espacio, se les pidió buscar un “tesoro” a partir de una hoja con instrucciones. Después de encontrarlo, se les cuestionó por aquellos elementos que les permitieron cumplir con la consigna, encontrando que existen palabras que permiten construir referentes para la ubicación tales como “arriba, a un lado, debajo, atrás o adelante”; concluyendo que la experiencia y la interacción con los adultos a través del juego les permite a los preescolares desarrollar su ubicación espacial.

Posteriormente, abordaron el texto “El desarrollo en la noción de espacio en el niño de educación inicial” de Castro Bustamante, quien deja en claro las implicaciones que existe en la construcción de la ubicación espacial en los estudiantes de preescolar. En ese sentido, la implicación desde el juego y la teoría, les permitió comprender cómo atender a los preescolares.

Por mencionar otro ejemplo, para que las estudiantes comprendieran los procesos cognitivos y evolutivos en tanto a la percepción espacial del niños y niñas, pidieron a un estudiante de preescolar, primaria y secundaria dibujar el croquis de su casa a su respectivo centro educativo. Posteriormente, ellas dibujarían el correspondiente. Analizaron cada evidencia para identificar las características que existen en tanto al trazo, la perspectiva y claridad de los objetos.

Posteriormente, abordaron el texto “Estudio de la cognición ambiental infantil en la ciudad de Bogotá” de Benavides & Oviedo, en el cual identificaron las características que existen en las producciones que analizan los autores en tanto a la edad como a los procesos cognitivos de diferentes estudiantes. Esto les permitió situar sus expectativas en tanto a las producciones de los estudiantes preescolares.

En este sentido los resultados obtenidos en la propuesta Pastor (2018) en la implementación del DUA fueron: Para el pilar *Generar múltiples formas de involucramiento* (componente emocional y motivación del aprendizaje): Para lograr que el estudiantado se motive en el aprendizaje de las Matemáticas, resulta esencial mantener una apertura y una atención constante a la diversidad de ritmos y actitudes que surgen día con día. El profesorado debe adaptar los contenidos y las estrategias de enseñanza a las necesidades puntuales de cada

momento formativo, pues de esta manera se evita una respuesta emocional negativa que pueda afectar el proceso de aprendizaje futuro. También es recomendable incorporar actividades que reconozcan y valoren la diversidad, por ejemplo, mediante ejemplos tomados de distintos contextos, de modo que el alumnado se sienta identificado y comprometido con la asignatura.

Como segundo *pilar*, *Generar múltiples formas de representación* (comprensión de la información): para favorecer la comprensión de las Matemáticas, se requiere utilizar recursos didácticos diversos que atiendan diferentes estilos de aprendizaje y contextos culturales. Esto incluye el uso de material concreto, herramientas tecnológicas, ejemplos de la vida cotidiana-profesional y situaciones problemáticas que tengan sentido para el alumnado. Además, es importante que el docente de Matemáticas valore las interpretaciones y concepciones que surjan de los estudiantes, incentivando la creatividad y la formulación de respuestas que puedan ajustarse al objetivo de aprendizaje. Con ello se promueve una experiencia formativa más apreciable y significativa.

En el último pilar, *Generar múltiples formas de acción y expresión* (comunicación y demostración de los aprendizajes) se destaca la necesidad de ofrecer distintas vías para que el estudiantado comunique y demuestren sus aprendizajes. Esto implica respetar los diferentes estilos de representación que cada alumno o alumna elige para expresar sus ideas Matemáticas, ya sea a través de presentaciones orales, trabajos escritos, producciones gráficas o el uso de herramientas digitales. Validar estas expresiones fomenta la confianza y el sentido de pertenencia, a la vez que promueve una concepción más amplia y flexible de lo que significa “saber Matemáticas”. Desde la perspectiva intercultural, se trata de reconocer y acoger la diversidad de experiencias y lenguajes presentes en el aula.

Al recopilar información sobre la puesta en práctica de estos tres pilares desde la propuesta de Pastor (2018), permitió valorar y mejorar la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva inclusiva. Así, la puesta en práctica se sustentó en motivar y concientizar a las estudiantes en torno a su propio aprendizaje. Posteriormente, representaron el aprendizaje a través de actividades lúdicas, construcción de organizadores de ideas y actividades de indagación. Finalmente, lo proyectaron en la producción de textos que permiten el análisis y la reflexión de la propia práctica docente y sus aprendizajes; en la construcción de situaciones didácticas que desarrollan saberes en los preescolares; y en la construcción de materiales didácticos adecuados para el desarrollo del aprendizaje en los diferentes grupos.

Este proceso ayuda a identificar las características específicas del grupo, así como los prejuicios y actitudes que puedan existir hacia la asignatura. Al trabajar conscientemente en la creación de entornos de aprendizaje dinámicos, donde toda la clase participe con convicción, se fortalece la enseñanza y se promueven saberes y aprendizajes más profundos y significativos.

Trabajar con docentes en formación a partir de los principios del DUA requiere un enfoque formativo complejo que supere las prácticas rutinarias o tradicionales. El papel del educador de nivel superior es fundamental, ya que el análisis de la situación de cada grupo y de los contenidos a abordar debe establecer la base para diseñar experiencias de aprendizaje inclusivas.

Asimismo, la perspectiva intercultural se convierte en un eje transversal que fomenta la participación, el respeto a la diversidad y la equidad educativa.

La implementación de estos principios conlleva reflexionar sobre las propias concepciones y prejuicios, así como promover estrategias didácticas que reconozcan la diversidad cultural y cognitiva. De esta manera, se propicia un entorno de aprendizaje donde el alumnado se involucre activamente, desarrolle habilidades matemáticas pertinentes y valore la asignatura como parte fundamental de su formación integral y en virtud de ejercer el derecho a la educación para todos.

Referencias

- Acharya, B. (2020). Promoción de prácticas inclusivas de matemáticas en el aula en las escuelas de Nepal: una investigación etnográfica. *Revista internacional de investigación - Granthaalayah*, 8(3), 223-237. Recuperado de: <https://doi.org/10.29121/granthaalayah.v8.i3.2020.146>
- Ainscow, M. (2001). Comprendiendo el desarrollo de escuelas inclusivas. Notas y referencias bibliográficas. Pp. 1 y 2. Recuperado de: https://www.researchgate.net/profile/Mel-Ainscow-2/publication/266574049_COMPRENDIENDO_EL_DESARROLLO_DE_ESCUELAS_INCLUSIVAS/links/5605827308ae5e8e3f32a393/COMPRENDIENDO-EL-DESARROLLO-DE-ESCUELAS-INCLUSIVAS.pdf
- Aké, L.P., & Vargas, M. (2015). Los profesores de matemáticas y su formación. Reflexiones ante la inclusión educativa. *Educación inclusiva*. Una perspectiva de oportunidades. Colima: Universidad de Colima. Pp. 95-107.
- Alejo, V., & Isabel, M. (2022). Diseño Universal y Aprendizaje Accesible. Modelo DUA-A.
- Booth, T., Ainscow, M., Black-Hawkins, K., Vaughan, M., & Shaw, L. (2000). Índice de inclusión. *Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas*. Recuperado de: <https://bibliotecadigital.mineduc.cl/bitstream/handle/20.500.12365/17276/indice%20de%20inclusion.pdf>
- Castro, C. & Torres, E. (2017). La educación matemática inclusiva: una experiencia en la formación de estudiantes para profesor. *Infancias Imágenes*. Pp. 295-304. Recuperado de: <https://revistas.udistrital.edu.co/index.php/infancias/article/view/9953>
- Diario Oficial de la Federación (2013). Constitución Política de los Estados Unidos Mexicanos. Artículos 3°. Recuperado de: <https://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/pdf/CPEUM.pdf>
- DOF (2016). Ley General de Educación. México. Recuperado de: http://www.dof.gob.mx/avisos/2517/SEP_010616_01/SEP_010616_01.html
- DOF (2018). Acuerdo 14/07/18 por el que se establecen los planes y programas de estudio de las licenciaturas para la formación de maestros de educación básica que se indican. México. Recuperado de: https://www.dof.gob.mx/nota_detalle.php?codigo=5533902&fecha=03/08/2018
- DOF (2022). Acuerdo número 16/08/22 por el que se establecen los Planes y Programas de Estudio de las Licenciaturas para la Formación de Maestras y Maestros de Educación Básica. México. Recuperado de: https://www.dof.gob.mx/nota_to_doc.php?codnota=5662825
- Dorantes, A. E. U., & Ojeda, J. I. M. (2023). Estrategias de Enseñanza Inclusiva de las Matemáticas en Educación Básica: Revisión Sistemática. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 23(1). Recuperado de: <https://www.redalyc.org/journal/6079/607970262002/607970262002.pdf>
- Dirección General de Educación Superior para el Magisterio (2023) Didáctica del Pensamiento Matemático en Preescolar. Licenciatura en Educación Preescolar. Plan de estudios 2022. SEP Recuperado de: <https://dgesum.sep.gob.mx/storage/recursos/planes2022/PAoZ7VxytP-4233.pdf>
- Miranda, L. A. (2020). Jóvenes desde la periferia: región cuerpo y violencia. *Regiones socioculturales: una perspectiva desde los estudios regionales en Chiapas*. Universidad Autónoma de Chiapas. Recuperado de: https://books.google.com.mx/books/about/Regiones_socioculturales.html?id=UmEizwEACAAJ&redir_esc=y
- Rincón, J., y Falk, M. (2020). ¿Cómo la exclusión, la desigualdad, el currículo y las expectativas del docente influyen en el aprendizaje de las matemáticas escolares? *Visión Electrónica*, 14(2), pp. 271-278. <https://doi.org/10.14483/22484728.16727>

- Rodríguez, D. & Valdeoriola J. (2009). Metodologías cualitativas. *Metodología de la Investigación*. España: Universitat Oberta de Catalunya. pp. 64- 65.
- Sandín, E. (2003). Investigación cualitativa en educación. *Fundamentos y tradiciones*. España: Mc Graw Hill.
- Secretaría de Educación Pública. (2018). Estrategia de equidad e inclusión en la educación básica: para alumnos con discapacidad, aptitudes sobresalientes y dificultades severas de aprendizaje, conducta o comunicación. SEP. México. Recuperado de https://www.planyprogramasdestudio.sep.gob.mx/descargables/biblioteca/basica-equidad/1LpM_Equidad-e-Inclusion_digital.pdf
- SEP (2019a). La Nueva Escuela Mexicana: principios y orientaciones pedagógicas. Subsecretaría de Educación Media Superior (SEMS). México. Recuperado de: <https://dfa.edomex.gob.mx/sites/dfa.edomex.gob.mx/files/files/NEM%20principios%20y%20orientacio%C3%ADn%20pedago%C3%ADgica.pdf>
- SEP. (2019b) Estrategia Nacional de Mejora de las Escuelas Normales. Recuperado de: <http://gaceta.diputados.gob.mx/Gaceta/64/2019/nov/MejEscNormales.pdf>
- Senado de la República (2019). Estrategia Nacional de Educación Inclusiva. Gaceta Parlamentaria. Recuperado de: https://infosen.senado.gob.mx/sgsp/gaceta/64/2/2019-11-14/1/assets/documentos/Estrategia_Educacion_Inclusiva.pdf
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (2021) Llegando a todos los estudiantes: una caja de recursos de la UNESCO-OIE para apoyar la inclusión y la equidad de la educación. Suiza.
- Pastor, C. A. (2018). *El Diseño Universal para el Aprendizaje: Educación para todos y prácticas de enseñanza inclusivas*. Ediciones Morata. Recuperado de: https://books.google.es/books?hl=es&lr=&id=fZojEAAAQBAJ&oi=fnd&pg=PT8&dq=El+Dise%C3%B1o+Universal+para+el+Aprendizaje:+Educaci%C3%B3n+para+todos+y+pr%C3%A1cticas+de+ense%C3%B1anza+inclusivas&ots=szEVDAa32d&sig=wVy_6MbDpNWKMURsweHQFO_hK-o



El fenómeno de Redención Matemática en docentes en formación de Educación Primaria: Primeros hallazgos

Alma Soto Castillo

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México

soto_castillo10@hotmail.com

José Antonio Juárez López

Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, Benemérita Universidad Autónoma de Puebla
México

jajul32@hotmail.com

Resumen

Este avance de investigación tiene como objetivo analizar las historias de vida de docentes en formación para identificar el fenómeno de Redención Matemática, es decir, el deseo de transformar una relación negativa previa con las Matemáticas. Se emplea una metodología cualitativa de tipo narrativo, utilizando un cuestionario adaptado y validado por juicio de expertos, el cual incorpora preguntas abiertas y frases incompletas que permiten evocar emociones ligadas a experiencias escolares. El análisis de las narrativas, basado en la Teoría OCC, permitió identificar emociones negativas recurrentes, especialmente en el nivel medio superior. A pesar de estas vivencias, los participantes expresaron esperanza y satisfacción al pensarse como futuros maestros, lo que evidencia una resignificación emocional. Los resultados subrayan la importancia de considerar el dominio afectivo en la formación docente y confirman que la Redención Matemática es un fenómeno existente en futuros profesores de educación primaria.

Palabras clave: México; Educación Matemática; Educación Superior; Docentes en Formación; Dominio Afectivo; Redención Matemática; Teoría OCC.

Planteamiento del problema

Se ha reportado que hay docentes en formación que manifiestan emociones negativas hacia las Matemáticas y hacia el hecho de enseñarlas (Coppola et al., 2012, 2013a, 2013b; Di Martino et al., 2013).

Se sabe que la Educación Matemática está muy interesada en definir lo que es necesario para enseñar Matemáticas con eficacia (Coppola et al., 2013a), inclusive hay líneas de investigación que tratan de describir qué tipo de conocimiento es necesario para enseñar Matemáticas de manera efectiva (Ball et al., 2008; Godino et al. 2007). Coppola et al. (2013b) consideran que el afecto de los maestros juega un papel crucial en la determinación de la calidad de la enseñanza, enfocándose en lo emocional.

Se tiene como objetivo general analizar la historia de vida de docentes en formación a través de un cuestionario para confirmar la existencia del fenómeno de Redención Matemática. Lograrlo requiere identificar las situaciones desencadenantes, a través de conexiones causales, que originan emociones negativas hacia las Matemáticas. Se pretende responder a la pregunta ¿cómo fueron las emociones que experimentaron los docentes en formación en las clases de Matemática durante su formación básica? Para darle respuesta, no solo es necesario indagar sobre la disposición emocional y la visión que los docentes en formación tienen de las Matemáticas y su enseñanza (Coppola et al., 2012), sino de conocer su propia historia emocional.

Marco teórico

Dominio afectivo y Redención Matemática

El dominio afectivo en Educación Matemática refiere a aspectos emocionales, actitudinales y de creencias que influyen en el aprendizaje de las Matemáticas. Este dominio es crucial porque las creencias, emociones y actitudes de los estudiantes hacia la Matemática pueden afectar significativamente su desempeño y disposición para aprender (McLeod, 1992). Actualmente se consideran cuatro descriptores clave del dominio afectivo: creencias, valores, actitudes y emociones (Grootenboer y Marshman, 2016).

De acuerdo con Brockert y Braun (1997) la palabra emoción se emplea como equivalente de sentimiento. Goleman (2022) entiende la emoción como un sentimiento que afecta a los propios pensamientos, estados psicológicos, estados biológicos y voluntad de acción.

Redención matemática, es el término que se utiliza para describir la experiencia de profesores que declaran una relación negativa con las Matemáticas, pero expresan el deseo de reconstruirla (Di Martino et al., 2013b). Este fenómeno, se estudia desde el descriptor “emoción”.

Teoría OCC

La Teoría de la Estructura Cognitiva de las emociones, mejor conocida como Teoría OCC propuesta por Ortony, Clore y Collins (1988) asume que las emociones surgen a partir de una valoración cognitiva y que afectan, indirecta o directamente, los objetivos, planes y creencias del individuo. La teoría presenta 22 emociones clasificadas en clases y grupos para reflejar las diferentes maneras en que las personas evalúan la situación desencadenante.

La existencia de clases y grupos en la teoría OCC permite una organización sistemática de las emociones, ayudando a entender cómo diferentes valoraciones cognitivas pueden dar lugar a

emociones diversas. Dicha clasificación permite interpretar y reportar los resultados de investigaciones.

Tabla 1
Tipología de las emociones desde la OCC.

Clase	Grupo	Tipos (ejemplo de nombre)
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Contento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (feliz por). Contento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (alegre por el mal ajeno). Descontento por un acontecimiento deseable para alguna otra persona (resentido por). Descontento por un acontecimiento indeseable para alguna otra persona (quejoso por).
	Basadas en previsiones	Contento por la previsión de un acontecimiento deseable (esperanza). Contento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento deseable (satisfacción). Contento por la refutación de la previsión de un acontecimiento indeseable (alivio). Descontento por la refutación de la previsión de un acontecimiento deseable (decepción). Descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (miedo). Descontento por la confirmación de la previsión de un acontecimiento indeseable (temores confirmados).
	Bienestar	Contento por un acontecimiento deseables (júbilo). Descontento por un acontecimiento indeseable (congoja).
Reacciones ante los agentes	Atribución	Aprobación de una acción plausible de uno mismo (orgullo). Aprobación de una acción plausible de otro (aprecio). Desaprobación de una acción censurable de uno mismo (autorreproche). Desaprobación de una acción censurable de otro (reproche).
Reacciones ante objetos	Atracción	Agrado por un objeto atractivo (agrado). Desagrado por un objeto repulsivo (desagrado).
Reacciones ante el acontecimiento y el agente simultáneamente	Bienestar/ atribución	Aprobación de la acción plausible de otra persona y contento por el acontecimiento deseable relacionado (gratitud). Desaprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (ira). Aprobación de la acción censurable de otra persona y descontento por el acontecimiento deseable relacionado (complacencia). Desaprobación de una acción censurable de uno mismo y descontento por el acontecimiento indeseable relacionado (remordimiento).

Fuente: Dolores et al., 2018, p.22,25.

García y Martínez (2018) reportan que existen factores, llamadas también variables, que afectan la intensidad de las emociones y que están presentes desde que inicia la situación que da lugar a la emoción. Estas variables se organizan con base en las clases de emociones, como se muestra en la Figura 1.

<i>Clase de emociones</i>	<i>Grupo de emociones</i>	<i>Variables locales</i>	<i>Variables centrales</i>	<i>Variables globales</i>
Reacciones ante los acontecimientos	Vicisitudes de los otros	Deseabilidad para los otros Afecto Merecimiento	Deseabilidad (evaluación en términos de metas)	Sentido de la realidad Proximidad
	Basadas en previsiones	Probabilidad Esfuerzo Realización		
	Bienestar			
Reacciones ante los agentes	Atribución	Fuerza de la unidad cognitiva Desviación de las expectativas	Plausibilidad (evaluación en términos de normas)	Cualidad de inesperado
Reacciones ante los objetos	Atracción	Familiaridad	Capacidad de atraer (evaluación en términos de actitudes)	Excitación

Figura 1. Variables que afectan la intensidad de las emociones (García y Martínez, 2018, p.25)

Método

En este trabajo el fenómeno que se desea comprender es la Redención Matemática, por lo tanto, se considera un enfoque cualitativo ya que plantea concepciones del conocimiento basadas en perspectivas, obtiene datos abiertos y emergentes con la intención de comprender fenómenos específicos (Guzmán y Alvarado, 2016); además, permite una exploración de las deficiencias en el conocimiento del fenómeno (Hernández et al., 2014). Es de tipo narrativo pues pretende entender el fenómeno basándose en la experiencia vivida (Connelly y Clandinin, 1995) y permite entender, procesos y eventos donde se involucran pensamientos, sentimientos, emociones e interacciones de los sujetos de estudio (Hernández et al., 2014).

El principal instrumento que se utiliza es el cuestionario. Este se ha basado en el propuesto por Coppola et al. (2012) y se ha mejorado para conocer la historia de vida (Pals, 2006) de los participantes y explorar sobre las causas del fenómeno de Redención Matemática a través de narrativas. Las mejoras consistieron en agregar preguntas para indagar el nivel educativo en el que están localizadas las experiencias negativas, con las Matemáticas, que han marcado su vida; saber cuáles fueron esas vivencias e; incorporar frases incompletas para que los sujetos logaran proyectar sus emociones (Sacks, 1978) considerando los niveles educativos que han cursado.

El instrumento se validó mediante juicio de expertos utilizando el método de agregado de individuales, de acuerdo con Escobar-Pérez y Cuervo-Martínez (2008), tomando en cuenta cuatro categorías: suficiencia, claridad, coherencia y relevancia. Posteriormente se procedió a realizar un análisis estadístico de las evaluaciones de los expertos para determinar la concordancia de las valoraciones a través de la V de Aiken (Aiken, 1980) tomando en cuenta 0 como calificación mínima y, 1 como calificación máxima por ítem.

Los participantes son 17 docentes en formación de la Licenciatura en Educación Primaria de una Escuela Normal privada del estado de Puebla, México, que cursan 1er semestre del ciclo escolar 2024-2025. El instrumento se aplica en las primeras horas del día uno de clases. Se analizan todas las respuestas de los estudiantes, en especial, aquellas que reportan experiencias negativas hacia las Matemáticas durante su formación básica. Dichas narrativas se reportan

considerando la Teoría OCC y acotando con *cursiva* las palabras que expresan la experiencia emocional, en **negritas** la frase concisa que expresa las situaciones que desencadenan la emoción, entre llaves, la variable de intensidad que afecta la emoción identificada y, entre corchetes, las palabras que requiere el lector para comprender la historia (García y Martínez, 2018).

M1-G3: En clase no me frustra no poder resolverlo [un problema], en el examen me frustra, porque sé que mi calificación depende del examen {realización}.

Figura 2. Experiencia emocional redactada por un estudiante (García y Martínez, 2018, p.30)

El resultado final de este proceso analítico es la construcción de un conjunto de narrativas, extraídas de las historias de vida de los sujetos que hayan reportado emociones negativas en cualquiera de estos niveles educativos: primaria (6-12 años), secundaria (12-15 años), medio superior (15-18 años). Dichas narrativas se presentan en tablas para organizar las respuestas.

Para garantizar la confidencialidad de los participantes, se han utilizado nombres ficticios. Estos fueron asignados aleatoriamente y no guardan relación con la identidad real de los estudiantes.

En los resultados de este avance de investigación solo reportamos la historia de vida de cuatro docentes en formación porque reportaron haber vivido experiencias negativas en sus clases de Matemáticas además de haber manifestado una relación de altibajos como estudiantes. Para las narrativas de estos sujetos consideramos tres frases incompletas agregadas al instrumento antes de su validación: 1) En las clases de Matemáticas en la primaria casi siempre me sentía...porque... 2) En las clases de Matemáticas en la secundaria, frecuentemente me sentía...porque... 3) En las clases de Matemáticas en el nivel medio superior, frecuentemente me sentía...porque...

Una sugerencia relevante de los expertos fue agregar “porque” a las frases incompletas, ya que esta conjunción causal permitiría indagar sobre la situación desencadenante de la emoción reportada en la historia de vida. En contraste con esas frases incompletas, tomamos en cuenta dos preguntas: ¿Qué emociones sientes al saber que tendrás que enseñar Matemáticas, ¿por qué? (Coppola et al., 2012). Estas preguntas permitieron activar la consciencia sobre su propia historia para evocar emociones y conocer el resignificado que les quieren dar en su transición de estudiantes a profesores; sobre todo, ayudaron a inferir una posible Redención Matemática.

Resultados

Partiendo de la idea de que la Redención Matemática involucra a docentes que declaran una relación negativa con las Matemáticas, pero expresan el deseo de reconstruirla (Di Martino et al., 2013), a continuación, se muestran cuatro casos (Tabla 2, 3, 4 y 5) que emergen de las historias de los participantes en los que se detecta el fenómeno estudiado en esta investigación. Se organizan por nivel académico cursado, seguido de la experiencia vivida y de la interpretación de los resultados con base en Teoría OCC.

Tabla 2
Situaciones desencadenantes de emociones en José.

Nivel	Narrativa	Interpretación
Nivel primaria	En la primaria casi siempre me sentía <i>frustrado</i> porque los profesores eran malos educadores, pues su explicación de los temas era mínima y no comprendía los temas {proximidad}.	Con base en Teoría OCC, la emoción es <i>congoja</i> porque es el descontento por los malos educadores que José tuvo. Dado que no hay variables locales para ese tipo de emoción, la variable de intensidad es Proximidad, pues al referirse a “los temas” está manifestando que hubo más de uno, razón por la que la situación desencadenante ocurrió en múltiples ocasiones.
Nivel secundaria	Me sentía <i>tranquilo</i> porque no se me dificultaba [la Matemática] y si había un error, [los maestros] me apoyaban {esfuerzo}.	La emoción es <i>satisfacción</i> porque representa la confirmación de la previsión de recibir apoyo de sus profesores en caso de tener dificultades. La variable de intensidad es Esfuerzo porque refleja el grado en que se han gastado recursos para evitar un acontecimiento (no cometer errores).
Nivel medio superior	Me sentía <i>aburrido</i> porque el trabajo solo era copiar un libro en mi libreta {familiaridad}.	La emoción es <i>desagrado</i> ante un objeto (libro) y, la variable de intensidad es Familiaridad, ya que se relaciona con el número de exposiciones que una persona tiene ante el objeto.
Nivel licenciatura	Siento <i>felicidad</i> al saber que puedo mostrar que no son complicadas [las Matemáticas] y no siempre es frustración {deseabilidad}.	La emoción es <i>feliz por</i> , ya que refiere a un acontecimiento deseable para otros. Su meta es demostrar que las Matemáticas no son complicadas, por tal motivo, la variable de intensidad es Deseabilidad.

José es un docente en formación que manifiesta haber tenido una relación positiva con las Matemáticas como estudiante, sin embargo, en las frases incompletas del instrumento aplicado comparte que solo en las clases de secundaria se sintió tranquilo

Las emociones de José resultaron negativas en dos niveles educativos, sobre todo en primaria, pero a pesar de esto, él siente alegría de compartir lo positivo de las Matemáticas.

Tabla 3
Situaciones desencadenantes de emociones en Orlando.

Nivel	Narrativa	Interpretación
Nivel primaria	Casi siempre me sentía <i>nervioso</i> al pensar si [el ejercicio matemático] estaba bien o mal {probabilidad}.	La emoción es <i>miedo</i> porque refiere al descontento por la previsión tener correcto o incorrecto el ejercicio. La variable de intensidad es Probabilidad ya que indica cuán seguro se está de que un evento pueda ocurrir.
Nivel secundaria	Me sentía <i>asombrado</i> porque daban otro tipo de evaluaciones [numéricas] {cualidad de lo inesperado}.	La emoción es <i>júbilo</i> , pues Orlando deseaba otra forma de ser evaluado numéricamente. La variable de intensidad es Cualidad de lo inesperado, porque era una situación que no tenía prevista.
Nivel medio superior	Me sentía <i>infeliz</i> porque en algunos temas no era fácil de entenderles {proximidad}.	La emoción es <i>congoja</i> al no entender el contenido matemático de las clases. La variable de intensidad es Proximidad, pues al mencionar “algunos temas” se refiere a que hubo más de uno, razón por la que la situación desencadenante surgió más de una vez.
Nivel licenciatura	Siento <i>nervios y alegría</i> [al saberse futuro docente] porque demostraré que las Matemáticas no son difíciles y que son sorprendentes {deseabilidad}.	Aunque Orlando reporta alegría, la OCC afirma que la emoción es <i>esperanza</i> por la afable previsión de un acontecimiento deseable. La variable de intensidad es Deseabilidad porque su meta es demostrar que las Matemáticas son sorprendentes y no son difíciles.

Orlando comparte en el cuestionario una relación de altas y bajas con las Matemáticas mientras fue estudiante. En 4° grado de primaria se localiza su peor experiencia negativa debido a que su profesora solo daba diez segundos para terminar un ejercicio matemático; al ver que sus compañeros se levantaban, él sentía nervios de tenerlo incorrecto, por lo que no se lo mostraba a su docente.

Tabla 4
Situaciones desencadenantes de emociones en Roberto.

Nivel	Narrativa	Interpretación
Nivel primaria	Casi siempre me sentía <i>nervioso</i> porque no sabía si iba a poder resolver los ejercicios que se dejaban {probabilidad}.	La emoción es <i>miedo</i> porque refiere al descontento por la previsión de tener correcta o incorrectamente resueltos los ejercicios. La variable de intensidad es Probabilidad ya que refleja el grado de creencia en que un acontecimiento previsto va a ocurrir.
Nivel secundaria	Sentía <i>aburrimiento</i> porque no le entendía al tema ni al profesor {sentido de la realidad}	La emoción es <i>congoja</i> , porque refiere al descontento de un acontecimiento indeseable. La variable de intensidad es Sentido de la realidad, porque no hay variables locales en el grupo de Bienestar.
Nivel medio superior	Me sentía con <i>miedo</i> porque era difícil sobrellevar a los profesores , ya que la mayoría eran serios e imponentes {proximidad}.	La emoción es <i>ira</i> porque representa la desaprobación de la acción censurable de otra persona: el profesor. La variable de intensidad es Proximidad ya que, al mostrar seriedad, la mayoría de los maestros hace que la situación desencadenante esté más cercana una de otra; esto da lugar a emociones más intensas.
Nivel licenciatura	Al saber que seré docente de Matemáticas siento <i>emoción, satisfacción y nerviosismo</i> porque me da gusto poder saber qué técnicas [de enseñanza] aplicar al enseñar los temas y crear nuevas como a mí me hubiera gustado que me enseñaran {descabilidad}.	La emoción es <i>esperanza</i> porque Roberto previene un acontecimiento deseable: aplicar técnicas de enseñanza y crear nuevas. La variable de intensidad es Deseabilidad porque su meta es enseñar como a él le hubiera gustado que le enseñaran.

Roberto reporta solo emociones negativas en su relación con las Matemáticas como estudiante. Pese a esto, él manifiesta emociones positivas al saber que puede modificar, para bien, su forma de enseñanza de las Matemáticas.

Tabla 5
Situaciones desencadenantes de emociones en Karla.

Nivel	Narrativa	Interpretación
Nivel primaria	Casi siempre me sentía <i>segura</i> porque mis maestros me explicaban lo que no entendía {realización}.	La emoción es <i>satisfacción</i> porque está relacionada con la confirmación de un suceso deseable: explicación de los maestros ante las dificultades Matemáticas de Karla. La variable de intensidad es Realización debido a que el acontecimiento previsto ocurre realmente.
Nivel secundaria	Me sentía <i>satisfecha</i> porque a la mayoría de los ejercicios les entendía muy bien {realización}.	La emoción es <i>satisfacción</i> porque está relacionada con la confirmación de un suceso deseable: entenderle a la mayoría de los ejercicios matemáticos. La variable de intensidad es Realización, ya que el acontecimiento sí ocurría.

Nivel medio superior	Me sentía <i>estresada</i> porque se me dificultaba [el tema de Matemáticas] y tenía poco tiempo [para resolver los ejercicios] {sentido de la realidad}.	La emoción es <i>congoja</i> , ya que Karla tiene descontento por el tiempo del que disponía para contestar los ejercicios y por las dificultades al resolverlos. La variable de intensidad es Sentido de la realidad.
Nivel licenciatura	Siento <i>nostalgia y alegría</i> [al saberse futura docente] porque yo podré compartir todas las cosas positivas que me enseñaron mis maestros de Matemáticas al igual que mejorar las negativas {deseabilidad}.	La emoción es <i>esperanza</i> porque prevé lo que desea: compartir lo positivo de las Matemáticas. La variable de intensidad es Deseabilidad porque su meta es mejorar, cuando imparta clases, los aspectos negativos que vivió con las Matemáticas.

Karla reporta haber tenido altas y bajas en su relación con las Matemáticas como estudiante, siendo el nivel medio superior en el que se encuentran localizadas las experiencias negativas que han marcado su vida escolar.

Los sujetos presentan una evolución emocional distinta a lo largo de su formación matemática. Mientras que en nivel primario algunos participantes expresaron frustración o nerviosismo debido a dificultades en la comprensión de los contenidos o a la metodología de los docentes, en secundaria hubo experiencias mixtas, reportando emociones como tranquilidad o satisfacción. Sin embargo, los cuatro casos analizados evidencian una mayor concentración de emociones negativas en nivel medio superior. A pesar de estas experiencias negativas, todos los participantes manifestaron emociones positivas al saberse futuros docentes de Matemáticas. Este hallazgo es clave para comprender el fenómeno de Redención Matemática, ya que indica que los sujetos, a pesar de haber vivido dificultades en su relación con la disciplina, han logrado resignificar su experiencia y transformar su actitud hacia la idea de enseñar Matemáticas.

Conclusiones

En términos metodológicos, la aplicación de un enfoque cualitativo basado en historias de vida (Pals, 2006), permitió capturar la profundidad y diversidad de las experiencias emocionales vividas por los participantes. Usar la OCC para interpretar los datos, coadyuvó en el análisis de la situación desencadenante para ubicar la emoción reportada por la teoría y, con base en ello, identificar la variable de intensidad. Desde la perspectiva de esta teoría, se observa que los sujetos de estudio han transitado por diversas emociones clasificadas en la en la clase Reacciones ante los acontecimientos, particularmente en las Basadas en previsiones, lo que hace evidente que la evaluación de los sucesos afecta los objetivos de vida.

Los resultados permiten identificar que las experiencias negativas en nivel primaria están relacionadas al descontento por la previsión de un acontecimiento indeseable (poca explicación de los temas por parte del docente, desconfianza en la capacidad de resolver los ejercicios y, dudas sobre si la respuesta es correcta o incorrecta). Tres de los cuatro sujetos manifestaron emociones negativas en este nivel (frustración y nerviosismo). Mientras tanto, en secundaria predominaron emociones positivas en tres docentes en formación (tranquilidad, asombro y satisfacción). En nivel medio superior, todos los sujetos compartieron solo emociones negativas (aburrimiento, infelicidad, miedo y estrés) siendo desencadenadas por metodologías de los maestros, dificultad del contenido matemático y, tiempo disponible para resolver el ejercicio.

El análisis de los casos reportados muestra que, si bien los participantes han experimentado emociones negativas, sobre todo en primaria y medio superior, todos ellos expresan un deseo consciente de transformar su relación con las Matemáticas y mejorar la enseñanza para sus futuros estudiantes. Lo anterior confirma que la Redención Matemática es un proceso que emerge a partir de una historia de vida marcada por dificultades, pero que culmina en un deseo de reconstrucción de la relación con la Matemática. Sin embargo, para tener total certeza de que estos cuatro casos refieren al fenómeno, es necesario realizar entrevistas.

Referencias y bibliografía

- Aiken, L. (1980). Content validity and reliability of single items or questionnaire. *Educational and Psychological Measurement*, 40(4), 955-959. <https://doi.org/10.1177/001316448004000419>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Brockert, S., & Braun, G. (1997). *Los tests de la inteligencia emocional: técnicas y ejercicios para comprobar y desarrollar su coeficiente emocional*. Oceano.
- Connelly, F. M., & Clandinin, D. J. (1995). Narrative and education. *Teachers and teaching*, 1(1), 73-85.
- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T. & Sabena, C. (2012). Primary teachers' affect: a crucial variable in the teaching of mathematics. *Nordic studies in mathematics education*, 17(3-4), 101-118.
- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013a). Primary teachers' beliefs and emotional disposition towards mathematics and its teaching. *QUADERNI DI RICERCA IN DIDATTICA*, 23(1), 217-226.
- Coppola, C., Di Martino, P., Pacelli, T., & Sabena, C. (2013b). Inside teachers' affect: teaching as an occasion for math-redemption. In M. S. Hannula, P. Portaankorva-Koivisto, A. Laine & L. Näveri (Eds.) *Proceedings of MAVI 17 Conference* (pp. 203-215). Helsinki, Finland: Finnish Research Association for Subject Didactics.
- Di Martino, P., Coppola, C., Mollo, M., Pacelli, T. & Sabena, C. (2013). Pre-service primary teachers' emotions: The math-redemption phenomenon [conference]. *37th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. University of Kiel. https://arpi.unipi.it/bitstream/11568/387871/1/2013_PME37.pdf
- Dolores-Flores, C., Martínez-Sierra, G., García-González, M. S., Juárez-López, J. A., y Ramírez-Cruz, J. C. (2018). *Investigaciones en dominio afectivo en matemática educativa*. Notabilis Scientia.
- Escobar-Pérez, J., y Cuervo-Martínez, A. (2008). Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización. *Avances en Medición*, 6(1), 27-36.
- García, M.S. y Martínez, G. (2018). Investigación sobre emociones en la clase de matemáticas. En C. Dolores, G. Martínez, M. S. García, J. A. Juárez y J. C. Ramírez. (Eds.), *Investigaciones en domino afectivo en matemática educativa* (pp.21-38). Notabilis Scientia.
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Goleman, D. (2022). *La inteligencia emocional: Por qué es más importante que el cociente intelectual*. B.
- Grootenboer, P. & Marshman, M. (2016). *Mathematics, Affect and Learning*. Springer.
- Guzmán, A. y Alvarado, J. (2016). *Fases y Operaciones Metodológicas en la Investigación Educativa*. Idea.
- Hernández, R. et al. (2014). *Metodología de la investigación*. Mc Graw Hill.
- McLeod, D. B. (1992). Research on affect in mathematics education: a reconceptualization. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 575–596). Macmillan.
- Ortony, A., Clore, G. L. & Collins, A. (1988). *The cognitive structure of emotions*. Cambridge University Press.

- Pals, J. L. (2006). Constructing the "springboard effect": causal connections, self-making, and growth within the life story. In D. P. McAdams, R. Josselson y A. Lieblich (Eds.), *Identity and history: the creation of oneself in the narrative* (pp. 175–199). American Psychological Association. <https://doi.org/10.1037/11414-008>
- Sacks, J. y Levy, S. (1978). El test de frases incompletas. En L. Abt y L. Bellak (Eds.), *Psicología proyectiva* (125-154). Paidós.



El número como cantidad de magnitud en la enseñanza de los números enteros con modelos concretos

Alberto **Zapatera**

Universidad de Alicante

España

alberto.zapatera@ua.es

Àngela **Buform**

Universidad de Alicante

España

angela.buform@ua.es

Eduardo **Quevedo**

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

España

eduardo.quevedo@ulpgc.es

Rubén **Lijó**

Universidad de Las Palmas de Gran Canaria

España

ruben.lijo@ulpgc.es

Resumen

Aunque existen estudios epistemológicos que señalan que los números enteros surgen en el ámbito algebraico, habitualmente se introducen desde el ámbito aritmético por medio de los modelos concretos. En este trabajo, tras estudiar los modelos concretos en la enseñanza de los números enteros, se analizan las respuestas de 148 estudiantes del Grado en Educación Primaria a un cuestionario sobre obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. Del análisis de las respuestas se infiere que la enseñanza de los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos mantiene la consideración del número como cantidad de magnitud, adquirida en la Educación Primaria con los números naturales, lo que obstaculiza la aceptación y comprensión de los números enteros. Para superar el obstáculo, se requiere una ruptura con el pensamiento matemático de los estudiantes y un cambio hacia contextos algebraicos en la enseñanza de los números enteros.

Palabras clave: Matemática educativa; Educación superior; Formación docente inicial; Pensamiento algebraico; Pensamiento numérico.

Introducción

Las teorías cognitivas consideran el aprendizaje como un proceso de modificación de significados, en el que interaccionan los conocimientos a adquirir y los conocimientos previos. Estas teorías afirman que para aprender algo nuevo, a veces, es preciso modificar (Piaget, 1970), eliminar (Bachelard, 1948) o revisar (Brousseau, 1989) conocimientos previos que obstaculizan ese aprendizaje. Pero, si los conocimientos previos fueron útiles en su momento, los estudiantes se muestran reacios a eliminarlos y tratan de mantenerlos, dificultando la adquisición de los nuevos. A estos conocimientos previos que dificultan la adquisición de nuevos conocimientos, Brousseau (1989) los denominó obstáculos epistemológicos y los diferenció de los obstáculos ontogenéticos, que derivan de la naturaleza y del momento evolutivo del alumno, y de los obstáculos didácticos, que derivan de las elecciones didácticas del profesor o del sistema. La consideración del número como cantidad de magnitud adquirida en Educación Primaria con el estudio de los números naturales, posteriormente en Educación Secundaria, dificulta el aprendizaje de los números enteros, convirtiéndose así en un obstáculo epistemológico.

En esta comunicación se estudia si el obstáculo del número como cantidad de magnitud real persiste a lo largo del tiempo en estudiantes que han recibido la enseñanza de los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos.

Marco teórico

Habitualmente, la enseñanza del campo numérico se inicia con los números naturales y racionales positivos en Educación Primaria. Posteriormente, tomando este conocimiento como base, se plantea el estudio de los números enteros en los primeros cursos de Educación Secundaria o, en algunas ocasiones, en los últimos cursos de Educación Primaria. A partir de este conocimiento, se estudian los números racionales y los números reales.

Los números naturales se presentan habitualmente como cantidades de magnitud y sus operaciones se asocian con las acciones de juntar, quitar, repetir o repartir; es decir, se estudian en un entorno aritmético y se justifica por la necesidad de modelizar situaciones concretas y reales. Para Brousseau (1989), la consideración de los números como objetos matemáticos que representan cantidades de magnitud, adquirida con los números naturales, presenta un obstáculo epistemológico en la enseñanza de los números enteros. En esta línea, Iriarte et al. (1991) consideran que “el gran obstáculo para la aceptación y reconocimiento del número negativo fue la creencia [...] que identifica número con cantidad” (p. 13).

Históricamente los números enteros se han introducido desde enfoques memorísticos, inductivos, deductivos o constructivos, pero, actualmente se suelen presentar en un entorno aritmético apoyados en modelos concretos basados en el estudio de magnitudes opuestas.

Los modelos concretos son situaciones, cercanas a los estudiantes, que emplean magnitudes de dos sentidos (positivo y negativo) que son indicadas con los signos más y menos.

De esta manera, si estos signos con los números naturales significan una suma o una resta, con los enteros también pueden representar un estado o una cualidad. Si los signos se refieren a una suma o una resta, su significado es binario u operativo, y si se refieren a un estado o una cualidad, su significado es unario o predicativo.

Además, los modelos concretos pueden ser de neutralización y de desplazamiento. Los modelos de neutralización se contextualizan en situaciones como haberes y deudas, ganancias y pérdidas o fichas de colores que se neutralizan; y los modelos de desplazamiento se contextualizan en situaciones de temperaturas, movimientos del ascensor o ejes cronológicos.

La necesidad de representar magnitudes con dos sentidos, que se alega para utilizar los modelos concretos, es ficticia: ambos sentidos pueden diferenciarse, sin necesidad de utilizar signos, con números naturales debidamente contextualizados. Por ejemplo, $+3$ y -3 se pueden contextualizar, en el modelo de neutralización de ganancias-pérdidas, como “ganar 3” y “perder 3”, y en el modelo de desplazamiento del termómetro, como “3° por encima de cero” y “3° por debajo de cero”. Esta argumentación se puede extender a los problemas, donde la resolución aritmética con números enteros, con frecuencia, es más compleja y menos creíble que con números naturales. Desde esta perspectiva, la aritmética elemental ni necesita ni justifica la utilización de los números enteros.

En los modelos concretos se encuentran tanto situaciones de estructura aditiva como multiplicativa. En la estructura aditiva, el signo unario se refiere, en los modelos de neutralización, a los dos sentidos de la magnitud y, en los modelos de desplazamiento, se refiere a la posición, a la derecha o a la izquierda del cero. En los modelos de neutralización, el signo binario se refiere a las acciones de añadir o quitar, mientras que en los modelos de desplazamiento se refiere a desplazamientos a la derecha o a la izquierda.

Los modelos concretos pueden provocar errores en la estructura aditiva; por ejemplo, la expresión $(-3) - (-2)$ puede interpretarse, en el modelo de neutralización tener-deber, que debe 3 y, aunque le perdonen una deuda de 2, aún sigue debiendo 3, es decir, $(-3) - (-2) = -3$; y en el modelo de desplazamiento en la recta, también podría interpretarse que la diferencia entre la posición -3 y la posición -2 es 1, es decir, $(-3) - (-2) = 1$.

La estructura multiplicativa, en los dos tipos de modelos, resulta compleja y alejada de la experiencia del estudiante, que, con frecuencia, no llega a comprender las reglas de los signos. Por ejemplo, en el modelo de neutralización con fichas de colores, $(-3) \cdot (-2)$ significa quitar 3 veces 2 fichas negativas, por lo que el signo menos de -3 sería binario y el de -2 sería unario; y en los modelos de desplazamiento, el signo del -3 significa un cambio de sentido y el del -2 un desplazamiento. En ambos modelos, la operación resulta confusa y difícil de comprender.

El orden en los modelos concretos obliga al estudiante a emitir juicios de valor en los que lo positivo siempre es mejor que lo negativo. En los modelos de neutralización es fácil entender que “tener” es mejor que “deber”, pero no es fácil entender que una ficha es mejor que otra por ser de un determinado color; tampoco es fácil de comprender en los modelos de desplazamiento, que un número sea mayor que otro porque está detrás de él, en el sentido definido como positivo.

De esta manera, aunque los modelos concretos “justifican bastante satisfactoriamente la suma de enteros, no ocurre lo mismo con el producto” (Cid, 2015, p. 65), por lo que investigadores como Glaeser (1981) o Cid (2015) proponen su utilización, en determinados casos, en la estructura aditiva, pero no en la estructura multiplicativa, al considerar que pueden obstaculizarla comprensión de los números enteros.

Además, estudios epistemológicos señalan que la razón de ser de los números negativos proviene del ámbito algebraico (Cid et al., 2020) y que, históricamente, la aritmética ha supuesto un obstáculo para su aceptación y comprensión (Brousseau, 1989; Cid, 2015; Cid et al., 2020; Glaeser, 1981).

Si para Brousseau (1989) el obstáculo para la enseñanza de los números enteros es la consideración de los números como objetos matemáticos que representan una cantidad de magnitud, para González (1995), el obstáculo es la creencia que identifica número con cantidad. En la misma línea, Iriarte et al. (1991) consideran que la gran idea que obstaculizó “la aceptación y reconocimiento del número negativo es la creencia [...] que identifica número con cantidad” (p. 13) y concretaron esta idea obstaculizadora en ocho obstáculos vinculados a la idea de número como cantidad de magnitud real: (1) el número como expresión de cantidad, (2) la suma como aumento, (3) la sustracción como disminución, (4) la multiplicación como multiplicación natural, (5) la división como división natural, (6) el orden de los negativos como orden natural, (7) ignorar el signo y (8) la identificación de los símbolos literales como números positivos.

En esta investigación nos centramos en el obstáculo del número como cantidad de magnitud real, que Glaeser (1981) denominó “estadio de las relaciones concretas”, y que dificultó la aceptación del número entero como objeto matemático. Herrera (2021) considera que la concepción del número como representación de la realidad aún persiste en la enseñanza de los números enteros y Zapatera et al. (2024) consideran que su superación requiere un cambio en los procesos de enseñanza y una ruptura en el pensamiento matemático que el estudiante ha ido construyendo durante la Educación Primaria a partir de los números naturales.

Desde esta perspectiva, el objetivo de esta investigación consiste en estudiar si el obstáculo del número como cantidad de magnitud real persiste a lo largo del tiempo en estudiantes que han recibido la enseñanza de los números enteros en contextos aritméticos con modelos concretos.

Metodología

En esta investigación han participado 148 estudiantes del 1º curso del Grado en Educación Primaria de la Universidad de Las Palmas de Gran Canaria, que no habían recibido previamente una instrucción específica, en sus estudios de Grado, sobre los números enteros, por lo que sus conocimientos de los números enteros se remontaban, mayoritariamente, a los construidos en la Educación Secundaria desde el ámbito aritmético mediante los modelos concretos. El tipo de investigación llevada a cabo en este estudio es de investigación-acción ya que se busca mejorar la práctica docente a partir de tareas en formación inicial de maestros para fomentar el desarrollo personal y profesional de los participantes.

El cuestionario utilizado (Figura 2) recoge las ocho cuestiones que analizaron Iriarte et al. (1991) para estudiar los ocho obstáculos de la idea obstaculizadora “lo real como obstáculo”.

Cuestionario estudiantes del 1º curso del Grado de Educación Primaria	
1.	¿Puedes encontrar una situación real en la que tenga sentido $-(-3)$?
2.	¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?
3.	¿Es posible encontrar un número que restado de 7 dé 10?
4.	¿Es posible encontrar un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero?
5.	¿Es correcta la siguiente división? $\begin{array}{r} 3 \overline{) 4} \\ -1 \\ \hline 1 \end{array}$
6.	¿Cuál es el número mayor en una unidad a -3?
7.	-7 grados en Moscú y -3 en Budapest. Si alguien hubiera viajado de Moscú a Budapest, ¿habría notado una subida o una bajada de temperatura?
8.	Si a es positivo y b es negativo, $a - b$ es un número positivo

Figura 2. Cuestionario utilizado en la investigación (Iriarte et al., 1991)

Se han analizado los datos agrupando las respuestas semejantes de cada cuestión en tres grupos: respuestas correctas, respuestas incompletas o sin justificar y respuestas incorrectas. Ejemplos de estas categorías se muestran en el apartado de resultados.

Resultados

En la Tabla 1 se muestran los resultados obtenidos en cada una de las cuestiones que se han utilizado para analizar los ocho obstáculos definidos por Iriarte et al. (1991).

Tabla 1

Resultados del cuestionario sobre los ocho obstáculos definidos por Iriarte et al. (1991)

	Número de respuestas y porcentajes		
	Correctas	Incompletas	Incorrectas
Cuestión 1 (número como expresión de cantidad)	30 (20%)	9 (6%)	109 (74%)
Cuestión 2 (suma como aumento)	132 (89)	2 (1%)	14 (10%)
Cuestión 3 (sustracción como disminución)	67 (45%)	2 (1%)	79 (54%)
Cuestión 4 (multiplicación como multiplicación natural)	32 (22%)	2 (1%)	114 (77%)
Cuestión 5 (división como división natural)	3 (2%)	5 (3%)	140 (95%)
Cuestión 6 (orden de los negativos como orden natural)	132 (89%)	0 (0%)	16 (11%)
Cuestión 7 (ignorar el signo)	144 (97%)	0 (0%)	4 (3%)
Cuestión 8 (símbolos literales como números positivos)	42 (28%)	43 (29%)	63 (43%)
Total	73 (49%)	8 (5%)	67 (46%)

Los obstáculos que más dificultades han generado en los participantes han sido el número como expresión de cantidad (cuestión 1), la sustracción como disminución (cuestión 3), la multiplicación como multiplicación natural (cuestión 4), la división como división natural (cuestión 5) y la identificación de los símbolos literales como números positivos (cuestión 8).

En la primera cuestión, solo el 20% de los participantes ha encontrado una situación real que se ajusta a la expresión $-(-3)$; unos escribiendo, por ejemplo, “me quitan una deuda de 3€”, y otros, considerando “ $-(-3) = +3$ ” y escribiendo una situación real a partir de +3, como, por ejemplo, “tengo 3€”. En la mayoría de las respuestas incorrectas, los participantes reconocen que no pueden encontrar una situación real en la que tenga sentido la expresión y algunos han descrito situaciones como “debo 3 €”.

En la segunda cuestión, la mayoría de los participantes, un 89%, ha sido capaz de encontrar el número -3, que sumado a 5 da -2; muchos de ellos, además, han justificado su respuesta escribiendo la suma “ $5 + (-3) = -2$ ”.

Menos de la mitad de los participantes, el 45%, ha sido capaz de encontrar, en la tercera cuestión, el número -3, que restado de 7 da 10; casi todos ellos, además, han escrito la resta. “ $7 - (-3) = 10$ ”. Sin embargo, casi otra mitad ha considerado el 7 como sustraendo, en lugar de minuendo, y han contestado que el valor requerido es 17, porque “ $17 - 7 = 10$ ”.

Solo el 22% de los participantes ha encontrado, en la cuarta cuestión, un múltiplo de 5 menor que 3 y distinto de cero, escribiendo múltiplos negativos, “-5, -10,...”. El 25% ha escrito el número 1 y casi todos los demás han reconocido que “no se puede” o que “no existen”.

Solo un 2% ha reconocido, en la quinta cuestión, la posibilidad de que existan restos negativos justificándolo con la prueba de la división, “ $4 \cdot 1 + (-1) = 3$ ”. El resto ha contestado que no es correcta y, muchos de ellos han afirmado que “el resto no puede ser negativo”.

En la sexta cuestión, casi todos los participantes, el 89%, han contestado que el -2 es una unidad mayor que el -3, y algunos lo han justificado escribiendo “ $-3 + 1 = -2$ ”.

El 97% de los participantes ha reconocido, en la séptima cuestión, una subida de temperatura desde los -7°C de Moscú, a los -3°C de Budapest.

Finalmente, en la última y octava cuestión, el 28% ha considerado correcto que “si a es positivo y b es negativo, $a - b$ es positivo” justificándolo numéricamente, “ $4 - (-2) = 6$ ”, o con letras, “ $a - (-b) = a + b$ ”; otro 29%, aunque ha contestado que sí es correcto, pero no ha justificado la respuesta. La mayoría de los que han contestado que la expresión es incorrecta, consideran que “depende de los valores de a y de b ”.

Conclusiones

Para superar el obstáculo del número como expresión de cantidad es preciso comprender los significados que puede tener el signo menos, y pocos participantes han demostrado ser capaces de hacerlo. Además, con frecuencia, las expresiones con números negativos son artificiales y alejadas de la realidad, y pueden ser sustituidas por otras más sencillas con números naturales (Martínez et al., 2022), por lo que los números negativos, a veces, son difíciles de concebir desde el plano real.

Aunque la mayoría de los participantes entiende que la suma no siempre significa aumentar, algunos aún continúan con la concepción, adquirida con los números naturales, de la suma como acción de añadir una cantidad a otra y consideran que el resultado de una suma siempre debe ser mayor que los sumandos (Bishop et al., 2014). Pero, si en los números naturales sumar y restar tienen significados contrarios, en los enteros una misma situación puede representarse de dos formas distintas; por ejemplo, ganar 3 equivale a perder -3 y perder 3 equivale a ganar -3. Los modelos concretos no evidencian esta relación y mantienen la consideración de que sumar es añadir y restar es quitar, por lo que los estudiantes conciben la suma como un aumento y la resta como una disminución. Más de la mitad de los participantes continúa asociando la resta con la acción de quitar, por lo que consideran que el resultado siempre debe ser menor que el minuendo (Bishop et al., 2014). Muchos estudiantes extienden la propiedad conmutativa de la suma a la resta para que el minuendo sea mayor que el sustraendo como con los números naturales (Peled et al., 1989); es decir, operan con los números enteros como lo harían con los naturales (Martínez et al., 2022).

Muchos participantes aún conciben la multiplicación de los enteros como la de los naturales, de forma que el producto siempre será mayor que los factores y positivo (Bell et al., 1981). Desde el entorno aritmético de los modelos concretos no tiene cabida la regla de los signos de la multiplicación, en especial que el producto de dos números negativos sea un número positivo, lo que dificulta la comprensión de su estructura multiplicativa. Aunque los participantes están habituados a dividir números negativos, casi todos conciben la división como división natural, es decir, como reparto de una cantidad en la que el resto es la cantidad sobrante, por lo que no puede ser negativo.

La mayoría de los participantes han encontrado el número que es una unidad mayor que un número negativo; es decir, son capaces de reconocer el orden de los negativos, aunque pocos justifican su respuesta. Sin embargo, González (1995) sostiene que el orden de los enteros es un orden total y que los modelos concretos inducen dos órdenes parciales y opuestos. Los participantes están familiarizados con los problemas aditivos con números enteros y con los modelos de desplazamiento, especialmente con el de temperatura, por lo que casi todos reconocen los signos de las dos temperaturas y las comparan correctamente. La mayoría de los participantes identifica las letras con valores positivos, confirmando su tendencia a asignar solo números naturales a los símbolos y a tratar expresiones del tipo $-b$ únicamente como cantidades negativas (Lamb et al., 2012).

A partir de estas conclusiones, se infiere que la enseñanza de los números enteros a través de los modelos concretos no justifica la necesidad de los números negativos y mantiene la consideración del número como cantidad de magnitud real. Así pues, consideramos que la idea del número como cantidad de magnitud real adquirida en la Educación Primaria persiste en el pensamiento matemático de los futuros docentes después de 5 o 6 años de enseñanza de los números enteros con modelos concretos.

Por otra parte, los números naturales surgen en el ámbito aritmético de la necesidad de modelizar el mundo real, pero los enteros surgen en el ámbito algebraico de la necesidad de resolver ecuaciones con coeficientes y soluciones enteras. Considerando lo anterior, se evidencia que la enseñanza de los números enteros desde el ámbito aritmético puede obstaculizar su

aceptación y comprensión (Brousseau, 1989; Cid, 2015; Cid et al., 2020; Glaeser, 1981). Consideramos también que, aunque la resolución de determinadas situaciones aditivas con números enteros puede iniciarse a través de los modelos concretos, es en el ámbito algebraico donde se pueden superar los obstáculos que plantea la enseñanza de los números enteros. Desde esta perspectiva, es fundamental continuar con las investigaciones actuales (i.e. Cid et al., 2020; Detzel et al., 2021; Martínez et al., 2022) en las que, a partir de las habilidades de cálculo aritmético que poseen los estudiantes, sea posible, “mediante rupturas, hacerlos evolucionar hacia nuevos conocimientos propios del álgebra” (Detzel et al., 2021, p. 53). De este modo, la investigación presentada en esta comunicación tiene un aporte a la educación matemática ya que muestra evidencias de la necesidad de un cambio hacia contextos algebraicos en la enseñanza de los números enteros.

Referencias y bibliografía

- Bachelard, G. (1948). *La formación del espíritu científico*. Siglo XXI Editores.
- Bell, A., Swan, M., & Taylor, G. (1981). Choice of operations in verbal problems with decimal numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 12(4), 399–420. <https://doi.org/10.1007/BF00308139>
- Bishop, J. P., Lamb, L. L., Philipp, R. A., Whitacre, I., Schappelle, B. P., & Lewis, M. L. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children's Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 45(1), 19-61. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.45.1.0019>
- Brousseau, G. (1989). Les obstacles épistémologiques et la didactique des mathématiques. En N. Bednarz, & C. Garnier (Eds.), *Construction des Savoirs Obstacles et Conflits* (pp. 41-63). Les éditions Agence d'Arc.
- Cid, E. (2015). *Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números enteros*. Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.
- Cid, E., Muñoz-Escolano, J. M. y Ruiz-Munzón, N. (2020). La introducción de los REI en la formación de profesores: un ejemplo de REI-FP. *Educação Matemática Pesquisa*, 22(4), 646–660. <http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2020v22i4p.646-660>
- Detzel, P., Ruiz, M. E. y Colipe, E. (2021). Una construcción de las reglas de cálculo de los números enteros a partir de la manipulación de expresiones algebraicas.
- Glaeser, G. (1981). Epistémologie des nombres relatifs. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 2(3), 303-346.
- González, J. L. (1995). *El campo conceptual de los números naturales relativos*. Tesis Doctoral. Universidad de Granada.
- Herrera, E. E. (2021). Implementación de herramienta m-learning para el aprendizaje de adición de números enteros en tiempos de pandemia. *Revista Universidad y Sociedad*, 13(6), 99-108. . <http://ref.scielo.org/2x3tps>
- Iriarte, D., Jimeno, M., y Vargas, I. (1991). Obstáculos en el aprendizaje de los números enteros. *Suma*, 7, 13-18.
- Lamb, L. L., Bishop, J. P., Philipp, R. A., Schappelle, B. P., Whitacre, I., & Lewis, M. (2012). Informing Practice: Developing Symbol Sense for the Minus Sign: research matters for teachers. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 18(1), 5-9. <https://doi.org/10.5951/mathteacmiddscho.18.1.0005>
- Martínez, R., Ruiz, M. E., Barrio, E., Benarz, N., Cid, E., Colipe, L., Detzel, P., Núñez, E.I., Morari, R., Petich, A., & Zambrano, A. (2022). *Trabajo colaborativo entre profesores de matemática e investigadores en Didáctica de la Matemática. Desafíos y problematizaciones en la adaptación y difusión de una propuesta para la enseñanza de los números enteros*. Editorial de la Universidad Nacional del Comahue.
- Peled, I., Mukhopadhyay, S., & Resnick, L.B. (1989). Formal and informal sources of mental models for negative numbers. En G. Vergnaud, J. Roglaski, & M. Artigue, *Proceedings of the 13rd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 106-110). PME.
- Piaget, J. (1970). Piaget's theory. En P.H. Mussen (Ed.), *Carmichael's manual of child psychology*. John Wiley and Sons, Inc. 703-732. Trad. cast, de M. Serigos en 1981 en *Monografía de Infancia y Aprendizaje*, 4(2), 13-54. <https://doi.org/10.1080/02103702.1981.10821902>
- Zapatera, A., Quevedo, E., González, S., Santana, A., y Álamo, J. (2024). Obstáculos y dificultades de los alumnos en la incorporación de los números enteros. *AIEM -Avances de investigación en educación matemática*, 26, 41-63. <https://doi.org/10.35763/aiem26.4725>



El razonamiento geométrico de docentes de Matemáticas en pre-servicio caracterizado según el modelo Van Hiele

Miguel Picado Alfaro

Escuela de Matemática, Universidad Nacional Costa Rica

miguel.picado.alfaro@una.cr

José Romilio Loría Fernández

Escuela de Matemática, Universidad Nacional Costa Rica

jose.loria.fernandez@una.cr

Resumen

Esta contribución consiste en la caracterización del razonamiento geométrico de un grupo de 31 docentes de Matemáticas en pre-servicio cuando resuelven tareas sobre conceptos geométricos. El referente teórico se construye desde el Modelo de Van Hiele. La información se recolectó a través de un instrumento con cuatro ítems de selección única, cada uno asociado a uno de los cuatro primeros niveles de pensamiento geométrico, y se analizó mediante el análisis de contenido y el diseño de categorías. Los resultados destacan habilidades, en estos docentes, vinculadas a los niveles de visualización, análisis y ordenación. También, es notoria la presencia de un mayor número de errores en el ítem asociado al nivel de deducción formal, y una falta de correspondencia entre la respuesta seleccionada y las justificaciones aportadas por los docentes.

Palabras clave: Didáctica de la geometría; Geometría; Modelo de Van Hiele; Profesores de Matemática; Razonamiento geométrico.

Introducción

El estudio del desarrollo del razonamiento geométrico se ha orientado al reconocimiento y fomento de destrezas y habilidades en los estudiantes, como parte de su aprendizaje en los distintos niveles que conforman los planes de formación en Educación Matemática (Usiskin, 1982; Proenza y Layva, 2008; Sáenz et al., 2017). Gutiérrez y Jaime (1991) señalan la necesidad de acercar al profesorado de Matemáticas a teorías de aprendizaje que incidan en el diseño de actuaciones en el aula en las clases de geometría; Afonso (2003) destaca particularidades del

proceso de planificación de la enseñanza de la geometría y las competencias didácticas que manifiestan los docentes de Matemáticas, desde la perspectiva del Modelo de Van Hiele. La formación inicial de profesores de Matemáticas en Costa Rica ha tomado un rumbo distinto a los modelos tradicionales basados en la generalidad pedagógica. Se pretende una formación de profesionales orientada por la especificidad didáctica en Matemáticas (Valverde et al., 2020) a través de un plan de estudios que promueve el desarrollo de competencias específicas que contribuyen al desarrollo de capacidades y habilidades matemáticas, didáctico-matemáticas y pedagógicas en este profesorado en pre-servicio, respectivamente (Universidad Nacional [UNA], 2017).

Esta contribución destaca los resultados de un estudio sobre el razonamiento geométrico que manifiestan estudiantes de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional en Costa Rica (BLEM), tomando como fundamento los niveles de pensamiento propuestos en el Modelo de Van Hiele. Con especificidad, se responde a la pregunta ¿qué características del razonamiento geométrico se identifican en profesores de Matemáticas en pre-servicio, según los primeros cuatro niveles de pensamiento del Modelo de Van Hiele, cuando resuelven tareas sobre conceptos geométricos? El objetivo particular del estudio fue determinar las singularidades en la resolución de ítems sobre figuras geométricas planas y de las justificaciones manifestadas por este grupo de profesores de Matemáticas, que condujeran a la identificación de indicadores sobre el grado de desarrollo de los niveles de visualización (o reconocimiento), análisis, ordenación (o clasificación) y deducción formal propuesto en el Modelo de Van Hiele.

Fundamentación teórica

Stenhouse (1984) propone superar la separación entre teoría y práctica mediante la investigación activa y el desarrollo curricular. Así, el docente es el centro de toda actividad de investigación y de desarrollo de manera que “este aumente progresivamente la comprensión de su propia labor y perfeccione así su enseñanza” (Rico, 1997, p. 110). La formación de profesores de Matemáticas tiene como propósito el desarrollo de conocimientos matemáticos, de estrategias de enseñanza que promuevan el aprendizaje óptimo en el estudiantado y de actitudes favorables para estos procesos. Particularmente, diversos autores hacen énfasis en que esta formación acentúe el análisis y el diseño de tareas matemáticas escolares, la consideración de las condiciones cognitivas específicas del estudiantado, la selección y elaboración adecuada de recursos y materiales didácticos, el análisis de las directrices curriculares y el establecimiento de las estrategias evaluativas adecuadas, entre otros (Aguayo, 2018; Caraballo, 2014; Lupiáñez, 2014; Rico et al., 2008). Así, los procesos de formación de profesionales de la Educación Matemática apuntan al desarrollo y la comprensión de conocimientos matemáticos y al fomento de competencias vinculadas con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en niveles educativos como la educación secundaria.

La perspectiva teórica adoptada para este estudio incluye como uno de sus componentes el MTSK (Carrillo et al., 2014), que caracteriza el conocimiento del profesorado de Matemáticas a partir de dos dominios: matemático y didáctico, que se complementan con las creencias y concepciones sobre las Matemáticas. Para este estudio, interesa profundizar en el primero, puesto que interesa un conocimiento matemático particular del profesorado en pre-servicio: el

geométrico. El dominio del conocimiento matemático se comprende como “el conocimiento que tiene el profesor de las Matemáticas como disciplina científica en un contexto escolar” (Escudero-Ávila et al., 2015, p. 71), que es importante para garantizar que el profesorado cuente con las herramientas necesarias para implementar las estrategias didácticas que pretenden el aprendizaje significativo en el estudiantado. Para este estudio se acentúa el conocimiento de los temas (Carrillo, et al., 2014), que enfatiza los contenidos de las Matemáticas escolares tradicionalmente considerados en el área temática de Geometría del currículo XXX, como es el caso de las figuras geométricas planas.

El modelo teórico de Van Hiele

Gutiérrez y Jaime (1991) destacan dos intenciones del modelo de Van Hiele: explicar la manera en que evoluciona el razonamiento geométrico del estudiantado, y determinar insumos para que el profesorado contribuya al mejoramiento de la calidad de ese razonamiento. En nuestro caso, destacamos este segundo propósito, de manera que los resultados del estudio permitan la definición de indicadores sobre el pensamiento geométrico de los docentes de Matemáticas en pre-servicio participantes.

El modelo presenta cinco niveles de pensamiento geométrico que se definen a partir de una serie de propiedades que los caracterizan (Gutiérrez y Jaime, 1991; Fouz, 2005).

Nivel 0. Visualización o reconocimiento. En este nivel el estudiante es capaz de mostrar tres características: percepción de objetos como un todo (N0.1); descripción del aspecto físico de los objetos, sin la presencia de lenguaje geométrico básico (N0.2); y, falta de reconocimiento explícito de los componentes y propiedades de los objetos (N0.3).

Nivel 1. Análisis. Al estudiante en el nivel de análisis se le suelen atribuir tres características: percepción de los componentes y las propiedades de los objetos y figuras, sin llegar a la identificación de relaciones entre estas propiedades o con otras figuras (N1.1); descripción de propiedades de las figuras sin llegar a una clasificación lógica de estas (N1.2); establecimiento de propiedades de las figuras u objetos a partir de la experimentación (N1.3).

Nivel 2. Ordenación y clasificación. El estudiante en este nivel de pensamiento geométrico presenta cuatro características: clasifica lógicamente los objetos y figuras, y establece nuevas relaciones o propiedades conocidas desde un razonamiento informal (N2.1); describe las figuras y los objetos formalmente, basado en las definiciones y las condiciones de estas (N2.2); comprende cada uno de los pasos de una demostración o razonamiento lógico, sin alcanzar la comprensión de estos como componentes de un todo (N2.3); y, carece del razonamiento lógico formal que posibilita la comprensión de la estructura axiomática de las Matemáticas (N2.4).

Nivel 3. Deducción formal. En este nivel, el estudiante muestra características próximas al razonamiento lógico matemático: realiza razonamientos lógicos formales (N3.1); comprende las Matemáticas como una estructura axiomática (N3.2); y, es consciente de la posibilidad de obtener un mismo resultado desde diversas premisas (N3.3).

Nivel 4. Rigor. En este nivel, el estudiante: conoce, analiza y compara distintos sistemas axiomáticos (N4.1); y, manipula la geometría desde la abstracción, sin necesidad de recursos o representaciones concretas (N4.2).

Al igual que Gutiérrez y Jaime (1991) y Fouz (2005), centramos nuestra atención en los primeros cuatro niveles, ya que los docentes participantes se encuentran en un proceso de formación inicial, por lo que se podría carecer de información propia del nivel de rigor. Para efectos metodológicos, los niveles mostrados han sido considerados como las categorías de análisis y las características, que se destacan en estos, constituyen las unidades de estudio para el análisis de la información.

Metodología

El estudio se ubica dentro de las investigaciones cualitativas descriptivas que buscan comprender, interpretar y describir el conocimiento de un grupo de docentes de Matemáticas en pre-servicio cuando resuelven tareas sobre triángulos o cuadriláteros, desde la perspectiva del pensamiento geométrico propuesta en el modelo de Van Hiele. Consiste en un estudio intrínseco de casos (Sandín, 2003 p. 176). Con la investigación se pone de manifiesto parte del pensamiento geométrico que este grupo de participantes expresa al resolver tareas, de manera que se genere evidencia sobre el conocimiento matemático que han desarrollado hasta el momento, con el propósito de tomar decisiones sobre el proceso de formación.

Recolección de la información

Las personas participantes fueron 31 estudiantes de tercer nivel de la carrera BLEM (identificados como PF). Estas formaban parte de los dos grupos definidos para la asignatura *MAC414 Didáctica de la Geometría* (15 estudiantes del grupo 01 y 16 estudiantes del grupo 02), a cargo de los autores de este estudio, y manifestaron su disposición y anuencia a que la información que aportaran se utilizara para fines investigativos. La información se recolectó mediante un instrumento, como prueba diagnóstica, elaborado a partir de cuatro ítems de selección única, sobre el tema de figuras geométricas planas, tomados de la adaptación de Fouz (2005) del *Van Hiele Geometry Test* (Usiskin, 1982). Estos ítems fueron complementados con un ítem adicional de respuesta breve para que la persona informante justificara la elección realizada en cada uno de estos.

Ítem 1. El primero de los ítems plantea la identificación de cuadrados en una serie de figuras planas, vinculado al nivel de visualización o reconocimiento de objetos del Modelo de Van Hiele (Nivel 0). *Ítem 2.* El segundo ítem corresponde a la percepción de determinadas propiedades del rombo. Este está relacionado con el nivel de análisis del Modelo de Van Hiele (Nivel 1). *Ítem 3.* Para este ítem la persona participante debía considerar condiciones necesarias y suficientes en las premisas que permitieran la selección de la opción correcta. Este ítem se asocia al nivel de ordenación y clasificación del Modelo de Van Hiele (Nivel 2). *Ítem 4.* Aquí se requiere de razonamientos lógicos y formales con los que se justifique la selección de la opción correcta. Este ítem se asocia al nivel de deducción formal del Modelo de Van Hiele (Nivel 3). La elección de los cuatro ítems de selección única obedeció a su ligamen con los primeros cuatro niveles de pensamiento geométrico del Modelo de Van Hiele y su aproximación con el

planteamiento curricular para la enseñanza de la geometría en Costa Rica. El instrumento se aplicó como parte de las estrategias implementadas en la asignatura *MAC414 Didáctica de la Geometría* para la evaluación diagnóstica del estudiantado. Este se incluyó en la plataforma Moodle de la UNA asociada a la asignatura. Las personas informantes tuvieron un tiempo límite de 1 hora para su completación en un momento específico de la clase (el mismo en los dos grupos).

Análisis de la información y resultados

La información fue analizada mediante la técnica del análisis de contenido, a partir de categorías correspondientes a los cuatro primeros niveles del Modelo de Van Hiele: visualización, análisis, ordenación y deducción formal. Las características que describen cada nivel constituyeron las unidades de análisis, que sustentan los resultados mostrados en esta contribución; estas unidades de análisis se detallan usando los códigos asignados en el marco teórico.

Categoría 1. Visualización del cuadrado en un grupo de cuadriláteros

Las resoluciones del ítem 1 permiten reconocer en los profesores en pre-servicio un destacado nivel de visualización. Resalta que 21 participantes acertaron la respuesta del ítem. No obstante, los argumentos para esta selección muestran una variedad de criterios y conocimientos que los alejan de un Nivel 0 de visualización, asociado al razonamiento geométrico. Particularmente, solo PF19 percibe el cuadrado como un todo (unidad de análisis N0.1). Su argumento señala: “si hablamos de figuras planas la G [una de las figuras] es la que parece que representa un cuadrado desde esa perspectiva”. La selección desestima el reconocimiento de propiedades del cuadrado y el uso de lenguaje geométrico básico para describirlo (N0.2 y N0.3). Por otra parte, PF16, PF24 y PF29 acentúan la necesidad de más información precisa en las figuras para asegurar su selección, que sustentan a través de la comparación entre las figuras y las propiedades que definen a un cuadrado. Como tercer caso, sobresalen los argumentos errados de tres participantes, que distan de una comprensión correcta de la definición de un cuadrado. Por ejemplo, “Un triángulo equilátero es equiángulo”, “...un cuadrado es un paralelogramo con todos los lados con igual medida”, “todo rectángulo es cuadrado y tienen sus ángulos opuestos de 90”. Por último, 14 participantes identificaron el cuadrado a partir de la descripción de los componentes o propiedades que lo definen (N1.1). Así, se aprecia que el reconocimiento del objeto incluye la descripción explícita de la definición de un cuadrado: paralelogramo cuyos lados son congruentes y al menos un ángulo interno es recto. Esto evidencia el uso de un razonamiento mayor al Nivel 0 para la visualización de figuras geométricas. Ahora, conviene analizar las respuestas consideradas incorrectas para el ítem 1. Diez participantes indicaron que ninguna de las figuras correspondía a un cuadrado. De estos, ocho subrayan en sus argumentos el incumplimiento de propiedades necesarias para la definición de un cuadrado, debido a la falta de precisión en la información mostrada en las figuras. Por ejemplo, PF21 indica: “A pesar de que la [figura] G parece cumplir con las características de un cuadrado, no se puede asegurar a simple vista que los ángulos entre los lados consecutivos sean rectos”. También, es destacable que los argumentos de dos participantes muestran errores conceptuales o de observación al momento de analizar las figuras. Por ejemplo, PF7 destaca que “solamente la figura F tiene ángulos internos rectos, sin embargo, no cumple que sus lados adyacentes tengan la misma

medida”. Aquí, la posición no tradicional con la que se presenta el cuadrado impide el reconocimiento de los ángulos rectos en este. El análisis de las respuestas asociadas al ítem 1, deja ver un nivel de razonamiento geométrico superior a la visualización y el reconocimiento básico de figuras geométricas planas.

Categoría 2. Análisis de propiedades de un rombo

Para el ítem 2, 28 participantes seleccionaron la opción correcta. En sus argumentos se identifican características propias del Nivel 1 de análisis y otras particularidades. Primero, los argumentos mostrados por PF1, PF3, PF9, PF11, PF14, PF21, PF24 y PF26 reconocen en los rombos la diferencia de medida entre sus diagonales como una de sus propiedades, esto como argumento para elegir la opción correcta. En este sentido, la característica de las diagonales no se relaciona con otras propiedades (N1.1), ni se complementa con otras condiciones necesarias que definen el rombo (N1.2). No obstante, el hecho de que hayan elegido la opción correcta también permite interpretar que existe conocimiento sobre las otras propiedades del rombo mostradas en las opciones B, C y D del ítem 2. Por ejemplo, PF24 detalla: “las diagonales no necesariamente son de la misma medida, todas las demás [afirmaciones] son ciertas”. Segundo, en el caso de PF25, su argumento destaca propiedades del rombo a partir de la experimentación (N1.3): “en la primera figura se muestra un rombo lo cual si trazamos las diagonales se puede determinar que ellas no tienen la misma longitud”. Y, tercero, dos participantes no aportan argumento y uno justifica la selección con una explicación que no siempre es correcta: “Si las dos diagonales tienen la misma longitud este no sería un rombo, porque posee una diagonal mayor y una menor”.

Además, destaca que 16 argumentos quedan fuera de la clasificación de un Nivel 1 de análisis: los argumentos de PF8 y PF16 se caracterizan desde el Nivel 0 de visualización (N0.1, identifican el rombo como un todo), y 14 argumentos se interpretan desde un nivel mayor de razonamiento geométrico, pues además de señalar propiedades del objeto en estudio en el ítem destacan relaciones con otras propiedades o figuras, como el cuadrado (N2.1). Por último, las respuestas incorrectas muestran una falta en la comprensión del enunciado del ítem, un desconocimiento de las propiedades del rombo o una errónea interpretación de estas, por parte de estas tres personas participantes. Sus argumentos son: “porque pueden que se cumpla para algún tipo de rombo”, “me parece confusa la pregunta y las respuestas, pero considero que todas las afirmaciones son correctas”, y “sinceramente no recordaría como justificarlo”. Este análisis evidencia fortalezas en el profesorado participante. Si bien sus respuestas son en su mayoría correctas, sus justificaciones van más allá de un reconocimiento de propiedades y trascienden a la identificación y establecimiento de relaciones entre figuras geométricas, que son características propias del nivel de ordenación y clasificación.

Categoría 3. Clasificación de un triángulo según sus dimensiones

Las resoluciones al ítem 3 destacan del profesorado en pre-servicio un acercamiento sobresaliente al Nivel 2 de ordenación y clasificación, particularmente en cuanto al dominio de definiciones y propiedades vinculadas a conceptos geométricos asociados al ítem. Destaca que 28 participantes responden de forma correcta al ítem, al discriminar entre las opciones presentadas y justificar su elección. Para la unidad de análisis N2.2 de este nivel, una mayoría de participantes (16) refiere a descripciones formales de los triángulos tratados en el ítem, mediante

argumentaciones basadas en definiciones y propiedades de estos. Particularmente, relacionan las medidas de los lados del triángulo con las medidas de los ángulos opuestos a estos lados; esto les permite hacer inferencias en cuanto a las afirmaciones mostradas en el ítem. Como tercer caso, ocho participantes justifican su resolución a través de la exposición y explicación de pasos relacionados con procesos demostrativos, sin dejar evidencia de una demostración completa al ítem (N2.3). Participantes como PF7, PF18, PF28 y PF29 indican de manera explícita, en la justificación mostrada, el teorema que le permitió resolver el ítem. Otros refieren al teorema u otros resultados sin precisar su enunciado. Por último, la respuesta proporcionada por PF5 manifiesta una carencia de razonamiento lógico formal: “porque el triángulo equilátero es un caso particular de un triángulo isósceles” (N2.4). Debe indicarse que tres personas participantes argumentan su procedimiento desde afirmaciones inconsistentes, erradas y con poca claridad.

Por ejemplo, se indica: (1) “los lados de un triángulo pueden ser congruentes más no iguales y también un ángulo está formado por 3 puntos, se puede sobreentender que el ángulo B es el ángulo con vértice B pero el ángulo como tal es el ángulo ABC o CBA”, (2) “como la segunda preposición [sic.] dice dos ángulos del triángulo son iguales no restringe [a que] el tercero no lo sea entonces se podría considerar un triángulo equilátero donde los tres lados y los tres ángulos son congruentes pero solo mencionar dos ángulos y así se podrían considerar las dos preposiciones [sic.] verdaderas” y (3) “la relación de los lados y ángulos de un triángulo equilátero no es condicional sino bicondicional por esto no es posible ninguna de las opciones anteriores”.

En síntesis, se identifica que una gran parte del profesorado participante muestra un conocimiento y comprensión destacables de la definición y las propiedades de objetos geométricos - particularmente el incluido en el ítem 3 - que les posibilita su clasificación y el reconocimiento de condiciones necesarias para asignar valores de verdad a distintas afirmaciones sobre estos. Además, algunas aportaciones trascienden las características del Nivel 2 sobre ordenación y clasificación, y se aproximan a las deducciones formales que describen el Nivel 3.

Categoría 4. Deducciones sobre el rectángulo y sus diagonales

A partir de esta categoría, se reconoce un acercamiento al razonamiento lógico matemático de la mayoría de las personas participantes al momento de resolver el ítem 4: 23 profesores señalan la respuesta correcta al ítem; sin embargo, la validez de los argumentos mostrados en las justificaciones es diversa. Puntualmente, las justificaciones de 17 participantes evidencian razonamientos lógicos formales asociados a las unidades de análisis N3.1 y N3.2, puesto que determinan condiciones necesarias y suficientes para establecer el valor de verdad de las proposiciones indicadas en el ítem 4, o incluyen sugerencias que describen a las matemáticas como una estructura axiomática. Tanto PF5 como PF16 utilizan un razonamiento lógico para justificar su elección de opción correcta en el ítem (N3.1). Además, acentúan el uso de contraejemplos - basados en resultados o propiedades preliminares - como una estrategia para determinar el valor de verdad de las proposiciones (estrategia de demostración) (N3.2). Dentro de este mismo marco, vale la pena destacar que algunos de los argumentos mostrados son insuficientes o presentan algunos errores conceptuales. Por ejemplo, PF17 justifica su respuesta afirmando: “Considerando un rombo, sus diagonales se bisecan, sin embargo, no corresponde a

un rectángulo”. En este caso, el docente - al igual que PF18, PF25 y PF27 - omite acentuar la necesidad de que el rombo no sea cuadrado, pues esto haría verdadera la segunda proposición.

Por otra parte, PF3, PF9, PF12, PF24 y PF28 seleccionaron la opción correcta, pero aportaron dentro de su justificación afirmaciones incorrectas o argumentos incompletos para la situación planteada en el ítem; en el caso de PF30 no aportó justificación. Por último, ocho participantes seleccionaron alguna de las opciones incorrectas. De estas personas, destaca que el argumento de PF6 - a pesar de no ser el más completo - muestra rasgos de un razonamiento lógico basado en el conocimiento de propiedades geométricas sobre los cuadriláteros. Las restantes siete personas aportan una justificación incorrecta o no responden. En resumen, la mayoría de las personas participantes manifiestan características sobre la deducción formal en Matemáticas, fundamentada en los razonamientos lógicos y los indicios de procesos demostrativos expuestos. Algunas limitaciones identificadas responden a la falta de especificidad al momento de indicar propiedades de las figuras geométricas como componentes de un proceso demostrativo.

Conclusiones

Del estudio llevado a cabo, sobresale que las justificaciones hechas en los ítems 1, 2 y 3 corresponden a la elección de la respuesta correcta en estos. Pero, las justificaciones mostradas en el ítem 4 destacan por la falta de correspondencia con la opción seleccionada, por la debilidad del fundamento matemático mostrado y por la presencia de errores conceptuales. De esta manera, se evidencia en este profesorado en pre-servicio una fortaleza en el desarrollo de las capacidades de visualización, análisis y ordenación. Respecto al nivel de visualización o reconocimiento se establecen los siguientes indicadores: (a) se perciben los objetos geométricos como un todo, (b) el reconocimiento de la figura geométrica se acompaña de lenguaje geométrico básico, y (c) los objetos geométricos se reconocen a partir de los componentes y propiedades que los definen.

Para el nivel de análisis, el razonamiento geométrico de los docentes se caracteriza por: (a) la percepción de los componentes y propiedades de figuras geométricas, y la relación entre estas o con otras figuras, y (b) la descripción y establecimiento de propiedades de las figuras geométricas, a partir de la experimentación. En el nivel de ordenación y clasificación, se determinan los siguientes indicadores: (a) las figuras geométricas se clasifican desde una fundamentación lógica, (b) la descripción de figuras geométricas se realiza a partir de definiciones y las condiciones implícitas en estas, y (c) el razonamiento lógico matemático mostrado es próximo a la comprensión de la estructura axiomática de las Matemáticas. Y, en los ítems correspondientes a la visualización o el reconocimiento, al análisis y a la ordenación o clasificación, las justificaciones mostradas trascienden las características de estos niveles; esto es, que además de manifestar características propias del nivel, se reconocen otras asociadas a niveles superiores. De forma complementaria, el enunciado y el grado de abstracción de las tareas inciden en una mayor presencia de errores matemáticos en las resoluciones hechas por las personas participantes del estudio. Con especificidad, se considera que la falta de precisión en los elementos de las figuras mostradas en el enunciado del ítem 1, condujo a errores de interpretación de las figuras y por consecuencia en la selección de la opción considerada correcta. Por su parte, los errores que se manifiestan en el ítem 4 se asocian a la abstracción

matemática, que es característica del nivel de deducción formal propuesto en el Modelo de Van Hiele. Finalmente, se sugiere que los procesos de formación profesional de docentes de Matemáticas acentúen el fortalecimiento de la competencia matemática a partir de la aplicación del significado (o significados) y las propiedades de conceptos geométricos básicos, de la identificación de condiciones suficientes para argumentar los razonamientos realizados en una demostración matemática, y de la comprensión de las Matemáticas como una estructura axiomática.

Referencias y bibliografía

- Afonso, M. C. (2003). *Los niveles de pensamiento geométrico de Van Hiele. Un estudio con profesores en ejercicio*. Tesis doctoral. Universidad de La Laguna.
- Aguayo, C. G. (2018). *El Análisis Didáctico en la formación inicial de maestros de primaria*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Caraballo, R. M. (2014). *Diseño de pruebas para la evaluación diagnóstica en matemáticas: Una experiencia con profesores*. Tesis doctoral. Universidad de Granada.
- Carrillo, J., Contreras, L., Climent, N., Escudero-Ávila, D., Flores-Medrano, E. & Montes, M. (Eds.) (2014). *Un marco teórico para el conocimiento especializado del profesor de Matemáticas*. Ediciones Bonanza.
- Escudero-Ávila, D. I., Carrillo, J., Flores-Medrano, E., Climent, N., Contreras, L. C. & Montes, M. (2015). El conocimiento especializado del profesor de matemáticas detectado en la resolución del problema de las cuerdas. PNA, 10(1), 53-77. DOI: <https://doi.org/10.30827/pna.v10i1.6095>
- Fouz, F. (2005). Modelo de Van Hiele para la didáctica de la geometría. En R. Ibáñez y M. Macho, *Un paseo por la geometría 2004/2005* (pp. 67-81). Universidad del País Vasco.
- Gutiérrez, A. & Jaime, A. (1991). El modelo de razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría. Un ejemplo: Los Giros. *Educación Matemática*, 3(2), 49-65. <http://www.revista-educacion-matematica.org.mx/descargas/vol3/vol3-2/vol3-2-5.pdf>
- Lupiáñez, J. L. (2014). Competencias del profesor de educación primaria. *Educação & Realidade*, 39(4), 1089-1111. <https://seer.ufrgs.br/index.php/educacaoerealidade/article/view/45875>
- Proenza, Y. & Leyva, L. M. (2008). Aprendizaje desarrollador en la matemática: estimulación del pensamiento geométrico en escolares primarios. *Revista Iberoamericana de Educación*, 48(1), 1-15. DOI: <https://doi.org/10.35362/rie4812249>
- Rico, L. (1997). Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria. *Síntesis*.
- Rico, L., Marín, A., Lupiáñez, J. L. & Gómez, P. (2008). Planificación de las matemáticas escolares en secundaria. El caso de los números naturales. *Revista SUMA*, 58, 7-23. <https://revistasuma.fespm.es/sites/revistasuma.fespm.es/IMG/pdf/58/007-023.pdf>
- Sáenz, E., Patiño, M. & Robles, J. (2017). Desarrollo de las competencias matemáticas en el pensamiento geométrico, a través del método heurístico de Polya. *Panorama*, 11(21), 61-74. <https://doi.org/10.15765/pnrm.v11i21.1055>
- Sandín, M. P. (2003). *Investigación Cualitativa en Educación*. Fundamentos y Tradiciones. McGraw Hill.
- Stenhouse, L. (1984). *Investigación y desarrollo del currículo*. Morata.
- Universidad Nacional [UNA] (2017). *Plan de estudios de la Carrera Bachillerato y Licenciatura en la Enseñanza de la Matemática*. <https://www.matematica.una.ac.cr/index.php/oferta-academica/bach-lic-ensenanza-de-la-matematica/documentacion-digital/category/8-plan-blem-2017>
- Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele levels and achievement in Secondary School Geometry*. University of Chicago.
- Valverde, G., Araya, A. & Picado, M. (2020). Programas de formación inicial de docentes de matemáticas en Costa Rica: la perspectiva de la Universidad Pública. En H. de García, D. dos Santos y M. Malatempi (Coords.), *Formação inicial de professores de matemática em diversos países* (pp. 89-113). São Paulo: Editora Livraria da Física.



Estructuras de lecciones diseñadas según los principios de la enseñanza exploratoria por futuros profesores de Matemáticas

Paloma **Santonja** Serrano

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

paloma.santonja@ua.es

Mar **Moreno** Moreno

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

España

mmoreno@ua.es

Salvador **Llinares** Ciscar

Facultad de Educación, Universidad de Alicante

sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo de esta investigación es caracterizar las planificaciones diseñadas por los estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria cuando aplican los principios de la Enseñanza Exploratoria al planificar lecciones. Las planificaciones se analizaron considerando las tareas propuestas y la anticipación de los movimientos del profesor, lo que permitió identificar la estructura de estas. Los resultados muestran cuatro estructuras formadas por dos tipos de secuencias. Solo uno de los tipos de estructura favorecía la enseñanza exploratoria. Estos resultados indican que los principios de la enseñanza exploratoria son una herramienta conceptual eficaz para la planificación de lecciones pero difícil de aprender.

Palabras clave: Aprendizaje profesional; Enseñanza exploratoria; Estructura de lecciones; Formación de profesores de Matemáticas; Planificación de lecciones.

Introducción

Planificar lecciones es una práctica profesional específica del profesor fundamental para la enseñanza de las Matemáticas por lo que su aprendizaje es esencial en los programas de formación de profesores de Matemáticas (Cevikbas et al., 2024). Investigaciones recientes en Educación Matemática identifican características de las planificaciones realizadas por profesores en ejercicio y por futuros profesores (Ayalon et al., 2021; González et al., 2020; Ozyldirim-Gummus, 2020). Por ejemplo, Ayalon et al. (2021), en su investigación con profesores y futuros docentes de secundaria, indicaron su tendencia a usar tareas desafiantes en sus planificaciones. En cambio, González et al. (2020) señalaron que la mayoría los profesores participando en un programa de desarrollo profesional consideraban una estructura de la lección basada en presentar conceptos, poner ejemplos y proponer tareas de un libro de texto, a realizar en lápiz y papel; o bien, en el caso de Ozyldirim-Gummus (2020), con futuros profesores, las lecciones estaban centradas en el profesor y presentaban escasas conexiones de los conceptos matemáticos con la vida real.

Estos resultados muestran la necesidad de incluir en los programas de formación enfoques para planificar la instrucción que incidan en resolver problemas no rutinarios, analizar datos, formular hipótesis o comunicar resultados, es decir, siguiendo el método científico. Uno de estos enfoques es el modelo enseñanza exploratoria (Artigue & Blomhøj, 2013), que se apoya en prácticas matemáticas tales como generar y estudiar casos particulares, organizar sistemáticamente la información, buscar patrones y relaciones, conjeturar y generalizar (Moreno et al., 2024). Esta aproximación a la enseñanza determina en la formación de profesores la necesidad de crear oportunidades para que los estudiantes para profesor aprendan a realizar planificaciones de la lección usando los principios de la enseñanza exploratoria. En particular, cuando los estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria modifican tareas matemáticas, solo aquellos que usan consistentemente los principios de la enseñanza exploratoria definían como objetivos de aprendizaje prácticas matemáticas anteriores (Moreno et al., 2024).

En esta investigación ponemos el foco en cómo los estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria aplican los principios de la Enseñanza Exploratoria al planificar lecciones.

Marco conceptual

La enseñanza exploratoria es un modelo de enseñanza centrado en el estudiante, en el que se crean oportunidades para que éstos trabajen de forma similar a como lo harían matemáticos y científicos (Artigue & Blomhøj, 2013; Dorier y Mass, 2020). En este modelo de enseñanza se requiere que los estudiantes observen fenómenos, se hagan preguntas, busquen métodos matemáticos y científicos para dar respuesta a dichas preguntas (ej. llevar a cabo experimentos, controlar sistemáticamente las variables, dibujar diagramas, buscar patrones y/o relaciones; conjeturar y generalizar los resultados). El rol del profesor incluye usar constructivamente el conocimiento previo de los estudiantes, desafiarlos a través de preguntas efectivas y probatorias, manejar pequeños grupos y discusiones matemáticas que permitan a los estudiantes valorar distintos puntos de vista y conectar sus ideas (Artigue, 2017).

Aunque la enseñanza exploratoria no se diseñó específicamente para la enseñanza de las Matemáticas (Artigue & Blomhøj, 2013), guarda semejanzas con la exploración en ciencias (Artigue, 2017): (i) Se parte de una pregunta o problema abierto. Las respuestas se buscan a través de la observación e indagación mediante experimentos mentales. (ii) Se buscan conexiones con preguntas ya respondidas; aplicando y adaptando técnicas matemáticas conocidas. (iii) El proceso conduce a respuestas hipotéticas y conjeturas que requieren de validación, lo que implica revisar y cuestionar las definiciones de los objetos matemáticos implicados. (iv) El proceso puede llevar a formular nuevas preguntas o problemas, cuya respuesta podría influir en la formulación o respuesta a la pregunta inicial. En particular, en esta investigación concretamos los principios de la enseñanza exploratoria que se pueden evidenciar en la planificación de una lección como: (1) El profesor introduce un problema, una cuestión sugerente/desafiante, un experimento, etc. (puede provenir de una discusión surgida en el contexto del aula, del visionado de un vídeo, etc.). (2) Los estudiantes exploran el problema, hacen experimentos o pruebas, en un contexto de laboratorio, etc. No hay una explicación explícita de los contenidos matemáticos con los que se relaciona la tarea. (3) El profesor guía la exploración (4) A partir de las respuestas de los estudiantes, el profesor enseña el contenido. (5) El profesor favorece el proceso de generalización, pudiendo proponer otra tarea o una extensión de esta. (6) El profesor puede proponer una tarea de evaluación.

El desafío en la formación de profesores es crear oportunidades para que los estudiantes para profesor puedan aprender a planificar la enseñanza de las Matemáticas reflejando estos principios de la enseñanza exploratoria. Además, se generan interrogantes sobre cómo se da el aprendizaje del estudiante para profesor del uso de estos principios para la planificación de la enseñanza.

El objetivo de esta investigación es caracterizar las planificaciones diseñadas por los estudiantes para profesor de Matemáticas de secundaria (EPMS) cuando aplican los principios de la enseñanza exploratoria. En particular, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación:

¿Cuáles son las características de la estructura de las planificaciones diseñadas por los estudiantes para profesor de Matemáticas para favorecer la enseñanza exploratoria?

Método

Participantes y contexto

Los participantes fueron 25 estudiantes para profesor de Matemáticas de educación secundaria (EPM) en un programa de formación de profesores de enseñanza secundaria en España. La formación previa de los participantes era variada: 5 ingenieros, 1 informático, 11 matemáticos, 7 físicos y 1 arquitecto.

Los EPMs participaron en una asignatura centrada en apoyar el desarrollo de la competencia docente vinculada a analizar tareas/problemas matemáticos, modificar y secuenciar tareas/problemas para apoyar la enseñanza exploratoria. Éstos recibieron información teórica sobre principios de la enseñanza exploratoria (Artigue y Blomhøj, 2013) y (ii) prácticas para orquestar discusiones productivas (Stein et al., 2008). Durante el curso, los EPMs resolvían prácticas profesionales en grupos de 4 o 5. Las prácticas profesionales consisten en registros de

la práctica (ej. transcripción de una interacción profesor-alumno, tarea de un libro de texto y descripciones de situación de enseñanza) y una serie de cuestiones que permiten a los EPMs estructurar su mirada sobre la situación y aplicar la información teórica proporcionada generando información adicional sobre la situación. Para la evaluación final de la asignatura los EPMs resolvieron una práctica individual como síntesis de todas las prácticas profesionales anteriores, en la que se solicitaba que planificaran una lección de cuatro sesiones para favorecer la enseñanza exploratoria de un contenido matemático específico. Este contenido podía ser: proporcionalidad, semejanza, teorema de Tales y escalas (3° -4° ESO); derivada de una función, propiedades y aplicaciones (1°-2° Bachillerato); identificación de regularidades de secuencias numéricas, sucesiones y series (3-4° ESO); sistemas de ecuaciones lineales e interpretación geométrica (3°-4° ESO). A los EPMs se les proporcionó un guion para elaborar la planificación de la lección (Figura 1).

PLANIFICACIÓN: Planifica una lección de una semana (4 sesiones aprox., que integre Tics) que te permita desarrollar el contenido elegido desde una enseñanza exploratoria. Indica: objetivos específicos, secuencia de tareas, aspectos específicos de la enseñanza exploratoria, y criterios de evaluación.

- Justifica por qué tu propuesta favorece la enseñanza exploratoria, y el papel que juegan las Tics.
- Justifica la situación de aprendizaje elegida: situaciones y actividades que impliquen el despliegue por parte del alumnado de actuaciones asociadas a las competencias específicas y a las competencias clave que contribuyen a su adquisición y desarrollo.

Anticipa una gestión de la discusión en gran grupo, según el modelo de Stein et al. (2008), mostrando las fases y ejemplificando las prácticas. Justifica la respuesta.

Figura 1. Guion para elaborar la planificación de la lección

Análisis

Los datos del estudio fueron las 25 planificaciones presentadas por los EPMs. El análisis de las planificaciones se realizó en dos fases. En la fase 1 analizamos el tipo de tareas y la anticipación de las acciones del profesor. Las tareas se analizaron según su propósito para el contexto de la lección y se identificaron cuatro tipos de tareas: aplicación, exploración, verificación, demostración. Las tareas de aplicación permitían aplicar conceptos/propiedades previamente explicadas por el profesor o exploradas por los estudiantes. Las tareas de exploración permitían estudiar alguna propiedad o concepto matemático, bien fuera estudiando casos particulares, buscando la generalización, estableciendo la falsedad de una relación o buscando contraejemplos. Las tareas de verificación permitían verificar propiedades/condiciones matemáticas dadas en el enunciado. Finalmente, las tareas de demostración permitían dar una demostración formal de un resultado o propiedad matemática.

En segundo lugar, analizamos la anticipación de las acciones del profesor en la planificación, identificando 6 acciones diferentes: explicaciones directas, explicaciones mediante discusiones, ejemplificaciones, resúmenes, síntesis, y guiar exploraciones. Las explicaciones directas eran fragmentos en los que los EPMs indicaban que el profesor explicaría los contenidos; las explicaciones mediante discusiones consistían en fragmentos de las planificaciones en los que los EPMs indicaban que el profesor, tras una exploración, pediría a los alumnos exponer las conclusiones y llegar a los conceptos. Las ejemplificaciones eran declaraciones explícitas de los EPMs del uso de ejemplos para clarificar. Los resúmenes eran fragmentos en los que los EPMs planeaban resumir los conceptos explicados durante una sesión.

Los “momentos de síntesis” eran fragmentos de la planificación en la que los EPMs proponían sintetizar los conceptos tratados en sesiones anteriores. Finalmente, “guiar exploraciones” eran fragmentos en los que los EPMs planeaban preguntas para monitorear la exploración, pistas para ayudar a los alumnos a deducir propiedades matemáticas o facilitaban la búsqueda de casos particulares. La manera de considerar la disposición en la planificación prevista de las tareas y las acciones permitió identificar diferentes “partes de la lección” definidas por los objetivos y las acciones pretendidas. Las “partes de la lección” se etiquetaron como: “motivar a los alumnos”, “proponer tareas de exploración”, “proponer tareas de aplicación”, “proponer tareas de profundización”, “realizar explicaciones directas con ejemplos”, “realizar explicaciones mediante discusión”, “recapitulaciones” y contenían tareas pretendidas y/o anticipación de las acciones del EPM (Tabla 1).

Tabla 1

Focos del análisis y categorías generadas en el plan de la lección

Partes de la lección	Tipos de tareas	Anticipación de las acciones
“motivar a los alumnos”	Aplicación o exploración (breves)	Momentos de síntesis
“proponer tareas de exploración”	Verificación (si el concepto no se había explicado) Exploración	Guiar la exploración
“proponer tareas de aplicación”	Aplicación Verificación (si el concepto ya se había explicado/explorado)	
“proponer tareas de profundización”	Exploración (basada en exploraciones previas) Demostración	
“realizar explicaciones mediante discusión”		
“realizar explicaciones directas con ejemplos”		Explicación directa Ejemplificaciones
Recapitulaciones		Resúmenes

La manera en la que estaban relacionadas las tareas propuestas y las acciones del profesor constituyen la estructura de la planificación. Las estructuras de las planificaciones las representamos mediante un diagrama en el que se muestra la distribución y orden de las tareas y diferentes acciones del profesor previstas en el plan de la lección (Figura 2).

En la fase 2 se compararon las estructuras de las planificaciones en un proceso 2 a 2. Este proceso consiste en comparar dos de ellas e identificar semejanzas y diferencias entre sí. A continuación, se selecciona una tercera planificación y se compara con las dos anteriores. Esta comparación permitió agrupar planificaciones con características similares e identificar sus características. Así, generamos cuatro tipos de planificaciones.

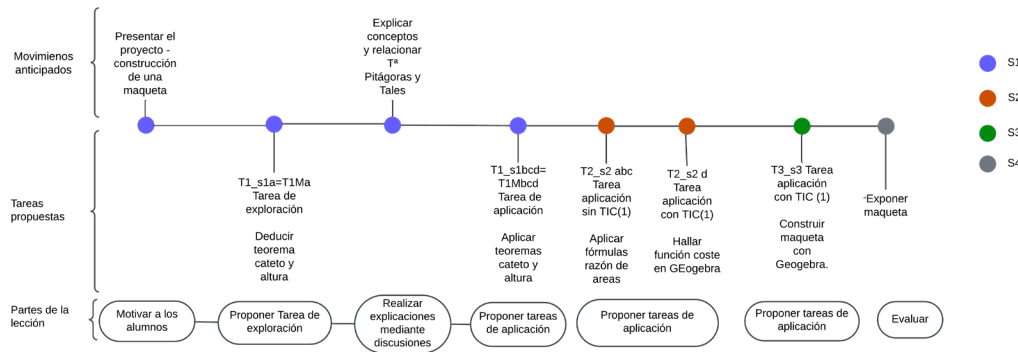


Figura 2. Estructura de la planificación de ST25 para curso 3º ESO, sobre aplicaciones de concepto semejanza en la construcción de maquetas

Resultados

Los resultados muestran cuatro tipos de estructuras (Tabla 2) que nos permiten considerar dos grandes grupos. En primer lugar, las que contienen secuencias de explicaciones directas con ejemplificaciones y tareas de aplicación, con tres variantes (tipo T1, tipo T1.1 y tipo T2). En segundo lugar, las planificaciones formadas por secuencias de tareas de exploración, seguidas de explicaciones mediante discusión, de tareas de profundización y/o tareas de aplicación (Tipo T3). En esta comunicación presentaremos las características de las secuencias que han permitido identificar los cuatro tipos de estructuras.

Tabla 2
Tipos de planificaciones según su estructura

Tipo	fi
T1. Secuencias de “explicaciones directas con ejemplificaciones”, “propuesta de tareas de aplicación” y “recapitulaciones”	2
Subgrupo T1.1. Añaden “tareas de exploración”	3
T2. Secuencias de “explicaciones directas con ejemplificaciones” y/o “propuesta de tareas de aplicación” combinadas con “propuesta de tareas de exploración”, seguidas de “realizar explicaciones mediante discusión” y propuesta de “tareas profundización” o “tareas de aplicación”	12
T3. Secuencias de “propuesta de tareas de exploración”, “realizar explicaciones mediante discusión”, “propuesta de tareas de profundización” y/o “propuesta de tareas de aplicación”	7

(1) Secuencia de “explicaciones directas con ejemplificaciones”, “propuesta de tareas de aplicación” y “recapitulaciones”

Esta secuencia aparece en las planificaciones de tipo T1, T1.1., T2. La evidenciamos con un fragmento de la planificación de EMP13 (tipo T2) sobre sistemas de ecuaciones lineales para 4ºESO. En esta planificación, el objetivo específico de la sesión 2 era aprender a resolver sistemas de ecuaciones con dos incógnitas. Para ello, el EPM13 proponía iniciar la sesión explicando los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones mediante ejemplos y, a continuación, proponía una tarea (ejercicio 1.a) de aplicación de los métodos explicados, seguida

de dos tareas (1.b y 1.c) que favorecían el razonamiento de los estudiantes sobre los métodos de resolución:

2º sesión. En la segunda sesión, se explicarán los métodos de resolución de sistemas tanto sustitución, como igualación, como reducción. Además, se pondrán distintos ejemplos de cada uno y se propondrá que los alumnos realicen el siguiente ejercicio:

1.a. Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución, igualación y reducción:

$\begin{cases} -7x + 2y = 13 \\ 4x - 2y = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 5x - y = 9 \\ -6x + y = -10 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x - 2y = 16 \\ -2x + 4y = -14 \end{cases}$	$\begin{cases} 7x + y = 9 \\ -12x + 9y = -69 \end{cases}$
$\begin{cases} -4x + 9y = -19 \\ 5x - 9y = 17 \end{cases}$	$\begin{cases} -x - 2y = -5 \\ -5x - 3y = 3 \end{cases}$	$\begin{cases} 4x + 5y = -14 \\ -3x + 7y = -11 \end{cases}$	$\begin{cases} 3x + 8y = 11 \\ -4x - 3y = -7 \end{cases}$

1.b. ¿Puedes observar que método es más sencillo en cada sistema?

1.c. ¿Puedes encontrar una relación entre los sistemas que comparten método de resolución óptimo?

Esta secuencia pretende que el profesor explique los conceptos y los alumnos los apliquen y reflexionen sobre ellos en una tarea de aplicación (Cuestión 1a). Las cuestiones 1b y 1c permiten buscar relaciones entre los coeficientes para decidir qué método de resolución es más sencillo en cada caso. Parece aplicar parte del segundo principio de la enseñanza exploratoria “exploran el problema, hacen experimentos” (buscar relaciones entre los métodos de resolución óptimos). Sin embargo, los conceptos con los que se relaciona la tarea (métodos de resolución de sistemas de ecuaciones) han sido explicados previamente por el profesor y no se deducen propiedades matemáticas. Esto puede ser interpretado como que al diseñar estas secuencias los EPMs no aplican los principios de la enseñanza exploratoria.

(2) Secuencias de “propuesta de tareas de exploración”, seguidas de “explicaciones mediante discusión”, seguidas de “tareas de demostración o nuevas tareas de exploración” y/o “tareas de aplicación”

Estas secuencias aparecen en las planificaciones del tipo T2 y T3. La evidenciamos utilizando fragmentos de la sesión S1 de la planificación de EPM12 (tipo T4) sobre semejanza para 3º ESO. El objetivo de esta sesión era explorar el teorema de Thales. Para ello, se inicia la sesión proponiendo una tarea de exploración para buscar relaciones entre los segmentos de una configuración, en lápiz y papel, para deducir el teorema de Thales:

Se formarán grupos de 3 estudiantes, se les solicitará que dibujen dos rectas que se corten (r y s) y seguidamente dos rectas paralelas (p1 y p2) entre sí que corten a las dibujadas anteriormente. 2. Se le pedirá si pueden identificar qué relación existe entre los segmentos formados en las rectas secantes [...] (ST12, pp14)

A continuación, el EPM12 proponía una discusión con los estudiantes para tratar de formalizar el Teorema de Thales usando el libro de texto. Finalmente, el EPM proponía apoyar la generalización mediante un applet de GeoGebra que permite a los estudiantes comprobar el teorema para variedad de casos particulares:

Se desarrollará un debate entre los grupos para comprobar las relaciones obtenidas y otros casos particulares, como por ejemplo el recíproco del Teorema de Thales. Una vez determinadas las relaciones, se planteará entre todos el Teorema de Thales y se comparará con la definición que da el libro. “Finalmente, se les proporcionará un applet para practicar y comprobar de una manera más rápida con diferentes rectas secantes y rectas paralelas este teorema. (ST12, pp14)

Esta secuencia evidencia un uso estructurado de los principios de la enseñanza exploratoria: (1) plantear cuestión sugerente (buscar relaciones entre los segmentos dibujados), (2) buscar relaciones (conjeturar el teorema de Thales al investigar un caso particular) sin explicación previa, (3) explicar el teorema (los estudiantes exponen sus ocusiones y el profesor formaliza el teorema) (4) favorecer la generalización (al proporcionar un applet para que comprueben que el resultado es cierto en variedad de casos particulares).

Discusión y conclusiones

El objetivo de esta investigación es caracterizar las planificaciones de lecciones realizadas por EPMs aplicando los principios de la enseñanza exploratoria. El análisis de las 25 planificaciones ha permitido identificar cuatro estructuras de planificaciones, formadas por secuencias de: (1) “explicaciones directas con ejemplificaciones”, “propuesta de tareas de aplicación” y “ejemplificaciones” y (2) “propuesta de tareas de exploración”, seguidas de “realizar explicaciones mediante discusión”, seguidas de “propuesta de tareas de demostración o nuevas tareas de exploración” y/o “tareas de aplicación”. Los resultados muestran que 17 de 25 planificaciones contienen secuencias en las que no se usan los principios de la enseñanza exploratoria (Secuencias de (1)). Este resultado no es inesperado, y evidencia una tendencia de los EPMs a planificar lecciones o partes de éstas siguiendo un enfoque de enseñanza centrado en el profesor, en línea con los hallazgos de investigaciones previas (González et al. (2020), Ozyldirim-Gummus, 2020), a pesar de que las tareas permiten profundizar en conceptos matemáticos (Ayalon et al., 2021). Podemos interpretar la limitación de algunos EPMs para aplicar los principios de la enseñanza exploratoria como una dificultad en considerar como objetivos de aprendizaje las prácticas derivadas de la enseñanza exploratoria (Moreno et al., 2024). Además, las experiencias previas de los EPMs en contextos de la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas pueden explicar los objetivos de aprendizaje definidos (Moreno et al., 2024), dada la presencia del enfoque de enseñanza tradicional en el contexto español. En futuras investigaciones sería necesario profundizar en las características de las tareas propuestas e identificar cómo usan los principios de la enseñanza exploratoria al diseñar y secuenciar tareas en el contexto específico de las lecciones planificadas. Esta investigación ayudaría a clarificar cómo los EPMs interpretan la enseñanza exploratoria.

Reconocimientos

Este estudio ha sido apoyado por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Ref. No. PID2023-149624NB-I00, PID2020-116514GB-I00, PR2021-097154).

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (2017). ¿Qué es la educación matemática basada en la indagación? *La Gaceta de la RSME*, 20(3), 593-609.
- Artigue, M., & Blomhøj, M. (2013). Conceptualizing inquiry-based education in mathematics. *ZDM Mathematics Education*, 45(6), 797-81 <https://doi.org/10.1007/s11858-013-0506-6>
- Ayalon, M., Naftaliev, E., Levenson, E. S., & Levy, S. (2021). Prospective and in-service mathematics teachers' attention to a rich mathematics task while planning its implementation in the classroom. *International journal of science and mathematics education*, 19(8), 1695-1716. <https://doi.org/10.1007/s10763-020-10134-1>

- Cevikbas, M., Koenig, J., & Rothland, M. (2024). Empirical research on teacher competence in mathematics lesson planning: Recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 101-113. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01487-2>
- Dorier, J.L., & Maass, K. (2020). Inquiry-Based Mathematics Education. En S. Lerman (eds.). *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp.384-388). Springer, Cham. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_176
- Gonzalez, M. J., Gomez, P., & Pinzon, A. (2020). Characterising lesson planning: A case study with mathematics teachers. *Teaching Education*, 31(3), 260-278. <https://doi.org/10.1080/10476210.2018.1539071>
- Moreno, M., Llinares, S., & Santonja, P. (2024). Prospective secondary mathematics teachers' use of inquiry-based teaching principles as conceptual tools when modifying mathematical tasks. *Journal on Mathematics Education*, 15(4), 1131-1154. <http://doi.org/10.22342/jme.v15i4.pp1129-1150>
- Ozyildirim-Gumus, F. (2022). Preservice elementary mathematics teachers' use of patterns and pattern problems when planning and implementing lessons. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 53(8), 2152–2175. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2021.1952325>
- Stein, M.K., Engle, R.A., Smith, M.S., & Hughes, E.K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: five Practices for Helping Teachers Move beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340. <https://doi.org/10.1080/10986060802229675>



Experiencias de futuros docentes aprendiendo Matemáticas en la educación primaria rural

Reina San Martín
Universidad Católica de Temuco
Chile
reina.sanmartin@uct.cl

Resumen

La enseñanza de las Matemáticas se relaciona con conocimientos y habilidades de la formación, junto con creencias y disposiciones de las experiencias. Así, la autobiografía permite reconocer esta dimensión. El objetivo es comprender las disposiciones y creencias de futuros profesores de primaria sobre lo que es enseñar y aprender Matemáticas desde historias de vida. En un curso de didáctica de las Matemáticas se propone a estudiantes de pedagogía de Chile que narren experiencias de aprendizaje matemático en ruralidad. Se desarrolla un análisis cualitativo biográfico-narrativo con el software Atlasti a través de una codificación abierta. Se concluye que las creencias se relacionan con la necesidad de construcción de relaciones de confianza estudiante-docente, status epistemológico del saber matemático, dependencia entre docente-estudiante y disposiciones relacionadas con relaciones jerárquicas entre docente-estudiante y la memorización. Es necesario tensionar estas creencias y disposiciones para formar docentes que valoren la construcción de pensamiento matemático y sensibles culturalmente.

Palabras clave: Educación Matemática; Formación Inicial Docente; Escuela Rural; Autobiografía; Educación Primaria

Introducción

Cuando un profesor enseña Matemáticas despliega distintos conocimientos, habilidades y disposiciones en el aula. Las ideas que poseen los profesores en formación y en ejercicio respecto de lo que es enseñar y aprender Matemáticas se relacionan no solo con los conocimientos y habilidades adquiridas tanto en la formación como en el ejercicio, sino con las creencias que han construido durante toda su vida a partir de sus experiencias educativas (Giné y

Deulofeu, 2014). Así, las creencias y disposiciones docentes son fundamentales para la toma de decisiones y cómo perciben distintas situaciones que atraviesan como parte de su actividad diaria (Felbrich et al., 2012).

Las creencias son los conocimientos del profesorado que se encuentran en un nivel implícito y subjetivo respecto a lo que es enseñar y aprender Matemáticas basado en sus propias experiencias (Giné y Deulofeu, 2014). Las disposiciones se relacionan con la forma en la que se valora una enseñanza de las Matemáticas desde la equidad y aspectos de la cultura que son parte los estudiantes y sus familias (Yolcu, 2019). De esta manera, las disposiciones dan cuenta de un compromiso político del profesorado para una enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva crítica (Gutstein, 2018).

Las creencias y disposiciones del profesorado respecto a los antecedentes culturales de los estudiantes toman vital importancia, dado que influyen en los modos en que los docentes se conectan con los estudiantes de contextos culturales diversos e influyen en su quehacer profesional (Abdulrahim y Orosco, 2020). De esta manera, el rol docente contribuye en la construcción de las identidades matemáticas de los estudiantes, dado que la identidad se constituye por creencias y disposiciones sobre la capacidad para desarrollarse matemáticamente, que se ve influida por el contexto sociocultural y el rol docente (Martín, 2000).

Así, las disposiciones y creencias que los docentes poseen son fundamentales, especialmente en contextos escolares rurales, dado que estas ideas influyen profundamente cuando el profesorado toma decisiones pedagógicas en comunidades históricamente marginalizadas (Anzano y Stewart, 2015). Pues, si las creencias y disposiciones del profesorado no han sido puestas en tensión a partir de una perspectiva que valore la diversidad cultural, se tiende a reproducir la desigualdad respecto al aprendizaje matemático.

En este sentido, la experiencia del futuro profesor es fundamental para comprender cuáles son las creencias y disposiciones que lo acompañan al momento de ingresar a la universidad. Estas experiencias son posibles de evidenciar a través de sus historias de vida. Para Scheafer y Clandinin (2011), la historia de vida en futuros profesores permite dar cuenta cómo se constituye la identidad y las prácticas pedagógicas de un profesor. En este sentido, la historia de vida es fundamental para acceder a las creencias y disposiciones que poseen los futuros docentes respecto a lo que es enseñar y aprender Matemáticas en contextos escolares rurales. Así a través de relatos de experiencias es posible acceder a estas comprensiones. En este sentido se plantea la siguiente pregunta de investigación; ¿cuáles son las disposiciones y creencias que poseen profesores de educación primaria en formación sobre lo que es aprender y enseñar Matemáticas a partir de sus experiencias escolares?

Para responder a esta pregunta, en un curso de didáctica de las Matemáticas que es parte de un programa de formación de profesores de primaria en una universidad del sur de Chile, se les propone a 25 estudiantes que realicen una escritura autobiográfica sobre su experiencia como estudiante de Matemáticas en la educación primaria. Para efectos de esta comunicación se seleccionaron 8 narraciones de futuros docentes cuyas experiencias educativas se desarrollaron en contextos rurales.

Marco Teórico

Enseñanza de las Matemáticas en contextos rurales

En Chile, la escuela rural representa al 30% de las escuelas del país (Mineduc, 2024). Las escuelas rurales son en su mayoría multigrado, es decir atienden a más de un nivel educativo en la misma aula lo que genera dificultades de orden pedagógico, didáctico y curricular para organizar la enseñanza (Mineduc, 2020). Estas escuelas están emplazadas en comunidades campesinas e indígenas, por lo que poseen características territoriales y socioculturales diversas, dependiendo del territorio en las que se emplacen. En general, estas escuelas mantienen relaciones cercanas con las familias y poseen climas de aula acogedores lo que permite el desarrollo de relaciones cercanas entre profesores, estudiantes y sus familias (Núñez et al., 2020). Al considerar las complejidades del trabajo docente en estos contextos, la literatura reporta la enseñanza en aulas multigrado, debido a la complejidad de enseñar a estudiantes de distintos niveles educativos en una misma aula. Además, se reconoce las dificultades que poseen los profesores para acceder a instancias de formación continua que sean pertinentes a la educación rural (Ávila, 2017). Junto con lo señalado, los contextos rurales poseen altos niveles de pobreza multidimensional, lo que repercute en falta de acceso a servicios, problemas de conectividad, pobreza, entre otros (Agencia de Calidad, 2019).

Al analizar la enseñanza de las Matemáticas en contextos rurales, es posible dar cuenta que en la formación inicial en Chile se ha desconsiderado las características de las escuelas rurales al plantear itinerarios formativos, dado que se forma a un docente para ejercer en contextos urbanos (Williamson et al., 2017). Esta situación repercute en los profesores en ejercicio, quienes, al no tener formación específica sobre la enseñanza de las Matemáticas en contextos rurales, desconocen las características propias de la ruralidad en la enseñanza. Como consecuencia, los docentes al enfrentarse al aula multigrado, desarrollan estrategias de enseñanza de las Matemáticas basadas principalmente en el ensayo y error (Anzano et al., 2022). Lo que repercute en bajos resultados en Matemáticas que han tenido históricamente niños y niñas de escuelas rurales (Cano, 2020).

Autobiografía y la experiencia de los futuros docentes

Las experiencias de vida se reconstruyen en los sujetos a través de relatos. Estos relatos se constituyen de historias que los sujetos narran sobre sí mismos y las experiencias vividas. De esta manera es posible reconocer que los relatos biográficos permiten comprender en profundidad las personas, incluidos su identidad y el sentido de la vida (Caro, 2013). Cuando una persona escribe sobre sus propias experiencias, rememora sus creencias, las representaciones y significatividades que le evocan, para que en este ejercicio sea capaz de auto reconocerse y reflexionar sobre su propia vida (Mitchell, 2015). De esta manera, la escritura autobiográfica es una herramienta que facilita a los sujetos fortalecer su conexión con el contexto sociocultural, junto con rememorar las diversas situaciones que marcan un hito en la vida y por lo tanto son trascendentales en la toma de decisiones y en la construcción de la subjetividad (Trueba, 2020).

Al analizar la formación de docentes que enseñan Matemáticas, la autobiografía permite al futuro profesor analizar las distintas experiencias relacionadas con su propio aprendizaje

matemático, de manera de generar una reflexión que permita ser consciente de sus propias creencias, valores y disposiciones y cómo éstas le afectan como docente en formación (Hass y Reyes, 2020). Dado que la autobiografía trae al presente elementos tanto del pasado, del presente y del futuro referido a las prácticas pedagógicas. En este sentido, el uso de la autobiografía para la formación inicial docente es necesaria, ya que permite al futuro profesor reflexionar sobre cómo su propia experiencia influye en sus decisiones pedagógicas.

Metodología

Para efecto de esta investigación se llevó a cabo una metodología de tipo cualitativa, con un enfoque biográfico-narrativo (Delory-Momberger, 2014). Este enfoque muestra cómo la experiencia de los sujetos en conjunto con sus subjetividades son parte de su cotidianidad. Desde la Educación Matemática, este enfoque permite al futuro profesor reflexionar respecto a cómo su historia de vida y experiencias influyen en sus representaciones respecto a la enseñanza de las Matemáticas (Haas y Prieto, 2020).

En un curso de didáctica de las Matemáticas en la carrera de pedagogía en educación primaria de una universidad del sur de Chile, se les pide a 25 estudiantes que escriban su experiencia como estudiantes de Matemáticas durante su educación primaria. Se les entrega una hoja en blanco para desarrollar la escritura a mano y se le otorga libertad respecto al número de páginas y el tipo de experiencias que quisieran relatar en el escrito, junto con 90 minutos para la escritura.

Para efectos de esta comunicación, se seleccionaron 8 relatos que corresponden a las experiencias de los futuros docentes que en sus escritos se desarrollaron desde contextos educacionales rurales. Para el análisis de los escritos, se desarrolló una codificación abierta (Strauss y Corbin, 2002) a través del software Atlas ti 9. La codificación se desarrolló en primera instancia por la investigadora, y luego se solicitó a 2 expertos la revisión de las codificaciones iniciales para fortalecer el proceso analítico desde una mirada retrospectiva y crítica de los datos (San Martín, 2014). Posteriormente la investigadora incluyó las sugerencias de los expertos para fortalecer el proceso de codificación abierta.

Resultados

Los relatos autobiográficos muestran la experiencia en educación primaria de futuros docentes aprendiendo Matemáticas en contextos rurales. Estas experiencias son cruciales al momento de elegir ser profesor, pues en la educación primaria el docente que enseña Matemáticas es quien abre las puertas para acceder a las primeras aproximaciones significativas respecto al conocimiento matemático.

Las experiencias de los futuros docentes muestran la importancia del aprendizaje matemático en un ambiente de confianza entre docente y estudiante. Así, la falta de confianza entre docente y estudiante repercute de manera negativa en el aprendizaje matemático. Sin confianza el miedo y la vergüenza frente a la posibilidad de preguntar sobre cuestiones referidas al conocimiento matemático en construcción permean la relación estudiante – docente.

"...me enseñó otra profesora, con ella tuve una buena experiencia, ella se interesaba por enseñar. Con el tiempo tuve más confianza para preguntar y gracias a ella aprendí muchas cosas, ya que al inicio no preguntaba nada por miedo y vergüenza, pero después me inspiraba confianza mi entorno." (Estudiante 7).

Así como la confianza es fundamental para construir aprendizajes matemáticos, también las formas en que el docente despliega sus conocimientos toman relevancia. En este sentido se releva la sencillez en la explicación como medio para acceder al aprendizaje matemático. Por lo tanto, la explicación de ejercicios en la pizarra y posterior participación del estudiante en el planteamiento de una respuesta es valorada y posibilitaría una relación positiva con el saber matemático.

Considero que es el mejor profesor de Matemáticas que he tenido. Era muy simpático con nosotros y sus clases me encantaban. Las clases no eran nada del otro mundo, solo escribía en la pizarra los ejercicios y luego te hacía participar a dar tu respuesta. Creo que las clases me gustaban, simplemente porque no tenía ningún problema para comprender. (Estudiante 1).

De esta manera, se observa la creencia que la relación de confianza con el docente de primaria y la sencillez del planteamiento del saber matemático es fundamental para el aprendizaje. Tradicionalmente el conocimiento matemático ha sido considerado complejo, por lo tanto, quien posee el saber matemático tiene un status intelectual superior (Valero, 2017). A partir de esta idea, la posibilidad de acceso al saber matemático por el estudiante mediante una representación sencilla resulta valorada. En este mismo sentido, el docente de Matemáticas cuando es capaz de explicar estos conocimientos de una manera comprensible y sencilla, fortalece la relación de confianza y seguridad frente al saber matemático.

De primero a octavo año estuve en la escuela rural, en la cual tuve una profesora que me enseñó a pensar que las Matemáticas eran fáciles. Ella fue un ejemplo para mí, ya que, al ser pequeña, para mí era increíble que ella supiera tantas cosas, las cuales yo no me imaginaba que existían. (Estudiante 4).

Esta idea de sencillez para la comprensión de las Matemáticas escolares se vincula con la creencia que dichos conocimientos deben ser entregados al estudiante a través de procedimientos ordenados y precisos. Este orden y precisión se vincula con la posibilidad de replicar procedimientos como forma de aprender Matemáticas (Friz et al., 2018). Un saber sin enredos ni complicaciones. "Este profesor enseñaba de una manera correcta y precisa, sin enredos ni complicaciones. Tenía mucho saber en las Matemáticas" (Estudiante 5).

Así, es posible evidenciar que a pesar de creer que el aprendizaje matemático es complejo (Rodríguez, 2020), el docente al evitar los "enredos y complicaciones" podría facilitar dicha complejidad. En este sentido se observa la creencia que se requeriría que el docente otorgue pasos claros para resolver las situaciones Matemáticas planteadas. Es en este escenario que la explicación reiterada de este saber se considera como facilitador del aprendizaje matemático, pues a través de estos pasos y su posterior ejercitación es posible aprender.

... ella me ayudaba a entender que yo era capaz de muchas cosas, ya que ella decía que equivocarse era parte de aprender. Nos explicaba muchas veces, las que fueron necesarias para que pudiéramos entender, y ella me ayudó a ver que las Matemáticas no eran tan difíciles, sino que había que intentarlo muchas veces hasta lograrlo." (Estudiante 4).

Así, se naturaliza una relación docente – estudiante de dependencia, pues sin una explicación constante del contenido, no es posible construir aprendizajes matemáticos. Para mantener esta relación es necesaria la confianza. Puesto que el estudiante debe desarrollar una relación que le permita consultar al docente reiteradamente respecto a los procedimientos aplicados. Luego de resolver las dudas se facilita la posibilidad de memorización y la posterior réplica de los pasos. Esta confianza le abre las puertas al estudiante a consultar constantemente sin temor ni vergüenza.

...me enseñó otra profesora, con ella tuve una buena experiencia, ella se interesaba por enseñar. Con el tiempo tuve más confianza para preguntar y gracias a ella aprendí muchas cosas, ya que al inicio no preguntaba nada por miedo y vergüenza, pero después me inspiraba confianza mi entorno. (Estudiante 7).

Esta situación es un tanto compleja, pues a pesar de que el relato muestra la valoración de la posibilidad de realizar preguntas al docente, esta relación no fortalece la autonomía del aprendizaje y una comprensión profunda de las Matemáticas. Al no existir comprensión respecto a los procedimientos empleados, al presentarse un nuevo docente que no replique dicha confianza, el estudiante se vería imposibilitado a preguntar constantemente, como consecuencia tendría un desempeño en la clase de Matemáticas insuficiente.

Aún recuerdo que en mi primera clase de Matemáticas estábamos repasando las divisiones, lo cual no es por alardear, pero me encontraba bastante avanzado. Realicé mis propios ejercicios extra, como hacía en mi anterior colegio. Fui el primero en terminar y le pedí al profesor que revisara mis ejercicios extra. Él no demoró en responder; eso no lo hacemos aquí, espera que tus compañeros terminen. Me sentí un poco avergonzado. (Estudiante 1).

En este escenario se observa la creencia que el docente de Matemáticas de primaria al romper la confianza con sus estudiantes da paso a que los mismos construyan ideas sobre temor y rechazo a la asignatura. Esta situación es aún más compleja cuando se relatan experiencias con docentes que generan relaciones que menoscaban a sus estudiantes. De esta manera, se entiende que el saber matemático posee un status de superioridad y quien no lo replica se encuentra en una categoría de inferioridad respecto a sus pares o al mismo docente (Ernest et al., 2016).

"...ya estaba en tercero básico, nos tocaba esa materia (Matemáticas) con una profesora que era muy mayor y bastante agresiva. Cada vez que un estudiante se equivocaba en algún problema, ella levantaba la voz y lo humillaba frente a todos. A mi parecer ahí inició mi miedo y rechazo por las Matemáticas. (Estudiante 8).

De acuerdo a lo relatado por los futuros docentes, las experiencias de aprendizaje matemático basados en la confianza entre docente y estudiantes fortalecen la idea de comprensión respecto a los saberes matemáticos. Pero, dicha ideas se ponen en tensión, al analizar si estos aprendizajes fortalecen comprensiones matemáticas profundas y del pensamiento. Puesto que la relación entre docente-estudiante-saber matemático se genera a partir de la memorización de procedimientos que deben ser replicados y no comprendidos. Por lo tanto, cuando existe un nuevo docente de Matemáticas que no construye relaciones de confianza con sus estudiantes, estos se ven imposibilitados de aprender.

Conclusiones

El análisis de los escritos autobiográficos evidencia cómo la experiencia de aprendizaje matemático en la escuela rural promueve creencias y disposiciones sobre el enseñar Matemáticas. Las creencias se relacionan principalmente con la necesidad de generar ambientes de confianza, el status epistemológico del saber matemático, la necesidad de una explicación sencilla sobre el contenido matemático y la necesidad de desarrollar preguntas constantes para asegurarse que los pasos replicados en un ejercicio son los correctos. De esta manera es posible observar disposiciones relacionadas una relación profesor- estudiante y saber matemático que requiere una dependencia jerárquica del estudiante hacia el docente, dado que sin la explicación constante y la aprobación se dificultan considerablemente las posibilidades de aprendizaje matemático.

La creencia relacionada con la confianza del estudiante hacia el profesor es de gran importancia dado que niños y niñas no solo aprenden por la instrucción docente, sino que la confianza y la consideración de la emocionalidad es fundamental para el desarrollo de aprendizajes matemáticos (Ernest et al., 2016). Esta idea es parte del reconocimiento de la otredad, de la representación del otro como un legítimo otro, a través del respeto y valoración de sus saberes. De esta manera, se establecen relaciones entre docente y estudiante horizontales, de respeto y valoración mutua como parte del desarrollo de prácticas equitativas de enseñanza de las Matemáticas (Yolcu, 2019).

A partir de lo planteado es posible señalar que desde el reconocimiento de las prácticas culturales y los conocimientos que poseen los estudiantes, se estimula el desarrollo de la autoconfianza respecto al aprendizaje matemático (Matthews et al., 2022). En este sentido, la autoconfianza sobre el aprendizaje matemático es fundamental para el desarrollo de un autoconcepto matemático positivo, pues la identidad matemática es una construcción en la que intervienen las experiencias del estudiantado (Darragh, 2016), por lo tanto, el profesor tiene gran inferencia.

Así mismo, el desarrollo de relaciones de confianza en la clase de Matemáticas posee tanto un carácter individual como institucional. Por lo que la responsabilidad no solo recae en el docente de Matemáticas, sino que la institución educativa debe fomentar la vinculación con la comunidad en las clases de Matemáticas (Owens, 2015). De esta manera, resulta fundamental el esfuerzo de la escuela y la comunidad, a través de escuchar las voces de los estudiantes, las familias y profesores, de manera tal de construir relaciones de confianza y respeto como parte de la cotidianidad de las interacciones (Matthews et al., 2022).

Un elemento problemático en las narrativas es la valoración de la memorización del saber matemático y de ciertos pasos que serán replicados en el pizarrón. En los relatos se observa cómo se valora la simplicidad de la explicación y la posibilidad de replicar los pasos enseñados por el profesor. Esta situación es compleja, pues se les niega a los estudiantes rurales la posibilidad de generar aprendizajes matemáticos profundos, basados en la resolución de problemas y el desarrollo de habilidades como la argumentación matemática y la colaboración (Schoenfeld, 2023). Así, también es complejo que los futuros docentes valoren estas experiencias, corriendo el riesgo de replicarlas en su ejercicio docente. De esta manera, la

reflexión sobre las creencias y disposiciones recogidas a través del escrito autobiográfico, abren una puerta para los formadores respecto de la importancia de reconocer las valoraciones que poseen los futuros profesores de lo que es enseñar y aprender Matemáticas a partir de sus historias de vida. Y así generar una reflexión profunda para fortalecer el ejercicio de prácticas de enseñanza de las Matemáticas para la equidad y justicia educativa especialmente en contextos de ruralidad.

Referencias y bibliografía

- Abdulrahim, N. y Orosco, M. (2020) Culturally Responsive Mathematics Teaching: A Research Synthesis. *Urban Rev* 52, 1–25. <https://doi-org.proxybiblioteca.idm.oclc.org/10.1007/s11256-019-00509-2>
- Agencia de Calidad. (2019). *Estudio Calidad en Escuelas Pequeñas 2019*. Ministerio de Educación Chile.
- Anzano, S., Vázquez, S. y Liesa, M. (2022). Invisibilidad de la escuela rural en la formación de maestros. *REDIE*, 24, 1-14. <https://redie.uabc.mx/redie/article/view/3974>
- Ávila, B. (2017). Experiencias pedagógicas significativas de educación rural en Colombia, Brasil y México. *Revista del Centro de Investigación*, 14(48), 121-158. <http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=34254710006>
- Cano, A. (2020). Análisis de dificultades en la enseñanza y aprendizaje del español y las matemáticas en escuelas primarias multigrado de Veracruz-México. *Tendencias Pedagógicas*, 37, 57-74. doi:10.15366/tp2021.37.006
- Caro, M. (2013). El uso de la autobiografía de infancia como recurso para la investigación en educación. *Revista española de pedagogía*, 71(256), 509-523. <https://revistadepedagogia.org/wp-content/uploads/2013/09/256-07.pdf>
- Darragh, L. (2016). Identity research in mathematics education. *Educ Stud Math*, 93, 19-33. <https://doi.org/10.1007/s10649-016-9696-5>
- Delory-Momberger, C. (2014). *De la recherche biographique em éducation: fondements, méthodes, pratiques*. Téraèdre.
- Ernest, P., Sriraman, B., y Ernest, N. (2016). *Critical mathematics education: Theory, praxis, and reality*. Information Age Publishing, Inc.
- Felbrich, A., Kaiser, G. y Schmotz, C. (2012). The cultural dimension of beliefs: an investigation of future primary teachers' epistemological beliefs concerning the nature of mathematics in 15 countries. *ZDM Mathematics Education* 44, 355–366. <https://doi-org.proxybiblioteca.idm.oclc.org/10.1007/s11858-012-0418-x>
- Friz, M., Panes, R., Salcedo, P., y Sanhueza, S. (2018). El proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Concepciones de los futuros profesores del sur de Chile. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 20(1), 59-68. <https://doi.org/10.24320/redie.2018.20.1.1455>
- Giné, C. y Deulofeu, J. (2014). Conocimientos y creencias entorno a la resolución de problemas de profesores y estudiantes de profesor de matemáticas. *Bolema*, 28(48), 1092-112. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v28n48a10>
- Gutstein, E. (2018). The struggle is pedagogical: Learning to teach critical mathematics. En Ernest, P. (ed.) *The Philosophy of Mathematics Education Today. ICME-13 Monographs* (pp. 131-143). Springer. https://doi-org.proxybiblioteca.idm.oclc.org/10.1007/978-3-319-77760-3_8
- Haas, V. y Reyes, P. (2022). La autobiografía como estrategia activadora de la reflexión docente: Desafíos y oportunidades. *Zona Próxima*, 34, 49-77. <https://doi.org/10.14482/zp.34.371.1>
- Martin, D. (2000). *Mathematics success and failure among African American youth: The roles of sociohistorical context, community forces, school influence, and individual agency*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Matthews, L., Jones, S. y Parker, Y. (2022). *Engaging in Culturally Relevant Math Tasks*. Corwin.
- Mineduc (2020). *Orientaciones generales para la enseñanza en escuelas rurales multigrado. Educación rural y división de educación general*. Ministerio de Educación de Chile.
- Mineduc (2024). *Evidencias; análisis de la educación rural en Chile*. Ministerio de Educación de Chile.
- Mitchell, C. (2015). Looking at Showing: On the Politics and Pedagogy of Exhibiting in Community-Based Research and Work With Policy Makers. *Educational research and social change*, 4(2), 48-60. http://ersc.nmmu.ac.za/articles/ERSC_Vol_4_No_2_ALL_ARTICLES_October_2015_as_on_31_October_2015B.pdf
- Owens, K. (2015). Changing the teaching of mathematics for improved Indigenous education in a rural Australian city. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 18, 53-78. <https://doi.org/10.1007/s10857-014-9271-x>

- Rodríguez, M. (2020). La educación matemática decolonial transcompleja como antropolítica. *Utopía y Praxis Latinoamericana*, 25(4), 125-137. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3931056>
- San Martín, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16(1), 104-122. <http://redie.uabc.mx/vol16no1/contenido-sanmartin.html>
- Scheafer, L. y Clandinin, J. (2011). Stories of sustaining: A narrative inquiry into the experiences of two beginning teachers. *Learning Landscapes*, 4(2), 275-295. <https://www.learninglandscapes.ca/index.php/learnland/article/download/Stories-of-Sustaining-A-Narrative-Inquiry-Into-the-Experiences-of-Two-Beginning-Teachers/400>
- Schoenfeld, A. (2023). A Theory of Teaching. En K. Praetorius y C. Charalambous (Eds.), *Theorizing Teaching* (pp. 159-187). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25613-4_6
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la Teoría Fundamentada*. Universidad de Antioquia.
- Trueba, L. (2020). La ruptura de la temporalidad en la investigación (auto)biográfico narrativa. En L. Porta (Ed), *La expansión biográfica* (pp. 371-390). Facultad de Filosofía y Letras Universidad de Buenos Aires
- Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 97. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce97.126>
- Williamson, G., Torres, T. y Castro, Y. (2017). Educación rural: Proyecto educativo institucional desde un enfoque participativo. *Sinéctica*, 49, 1-16. <https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/710/721>
- Yolcu, A. (2019). Research on equitable mathematics teaching practices: Insights into its divergences and convergences. *Review of Education*, 7(3), 701-730. <https://doi.org/10.1002/rev3.3163>



Explorando la ecuación cuadrática: Un diseño de clase centrado en representaciones y el método babilónico

José David **Vargas**

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica

jose.vargas_g@ucr.ac.cr

Karla **Contreras**

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica

karla.contrerasmonge@ucr.ac.cr

Helen **Alfaro**

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica
Costa Rica

helen.alfaro@ucr.ac.cr

Resumen

La utilización de diversas representaciones de objetos matemáticos es fundamental en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas, para promover la comprensión de conceptos y procedimientos. En este documento, se analizan las fortalezas y debilidades de un diseño de una clase sobre ecuaciones cuadráticas para estudiantes que se forman como docentes de Matemáticas. Desde un enfoque cualitativo, se analiza el diseño en términos de las posibilidades para promover el uso y la conexión entre diferentes representaciones de la ecuación cuadrática. Dentro de los principales resultados se destaca que la transición entre representaciones fortalece la comprensión conceptual y procedimental de las ecuaciones cuadráticas. Además, se evidencia que el estudiantado tuvo más éxito al transitar entre las representaciones verbal y algebraica, en contraste con la dificultad mostrada al intentar conectar la verbal o la algebraica, con la representación geométrica.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza presencial; Formación docente inicial; Investigación cualitativa; Álgebra; Universidad de Costa Rica; Costa Rica.

Introducción

Según investigaciones recientes, en los últimos años los estudios sobre la *Ecuación cuadrática* en la disciplina Educación Matemática han aumentado (Didiş Kabar, 2023). Sin embargo, tal y como señala Didiş Kabar (2023) en su revisión temática, hay escasos estudios con docentes en formación y relacionados con la enseñanza del tema. Considerando estos vacíos, y que en la carrera de Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica se ofrece un curso de álgebra elemental donde se estudia la ecuación cuadrática como objeto de estudio, realizamos un diseño de clase para esta temática, utilizando la metodología de Lesson Study. En este diseño, se introduce el tema de ecuaciones cuadráticas a través de un problema babilónico antiguo, escrito y resuelto con palabras (Sessa, 2005), pero del cual se espera hacer las conexiones con las representaciones algebraicas y geométricas. De esta manera, se busca promover la comprensión de los conceptos y procedimientos asociados a las ecuaciones cuadráticas, mediante el uso y manipulación de diversas representaciones matemáticas.

Este enfoque alternativo a la enseñanza tradicional invita al estudiantado a construir y reconstruir el procedimiento de resolución de ecuaciones cuadráticas, lo que promueve una comprensión profunda de los aspectos conceptuales y procedimentales involucrados. Además, se presenta como una modelación implícita en la cual el docente ejecuta “buenas prácticas” sobre cómo integrar elementos semióticos, epistemológicos, didácticos y matemáticos en el aula. Estas prácticas resultan efectivas para la instrucción de los futuros docentes, y pueden ser valiosas para ellos cuando enseñen a sus propios estudiantes (Boyd, 2014). El propósito de este trabajo es examinar las fortalezas y debilidades de este diseño en su capacidad para fomentar el uso y la interconexión de diversas representaciones matemáticas, un aspecto fundamental en la comprensión de las ecuaciones cuadráticas, como destacan Acosta (2017), Amaya (2020), Tocto (2016) y Díaz et al. (2013). De este modo, se busca que los futuros docentes incorporen estas estrategias en su profesión, enriqueciendo sus métodos de enseñanza.

Marco Teórico

Las representaciones de un objeto matemático son fundamentales ya que permiten acceder, referirse e interpretar entes abstractos que no pueden ser comprendidos de otra manera (Duval, 2006). Además de ser una herramienta clave para la comunicación, son esenciales en la construcción de significados (Schlepppegrell, 2010) y en la comprensión profunda de los conceptos matemáticos (Drehen y Kuntze, 2014). La capacidad de transitar entre distintas representaciones y reconocer las conexiones entre ellas es una habilidad matemática deseable (NCTM, 2000), que refleja una comprensión profunda del objeto matemático.

Un objeto matemático puede representarse de forma lingüística o verbal, simbólica y visual, y cada tipo destaca aspectos y connotaciones particulares del objeto (O' Halloran, 2015). Por ello, combinar lenguajes permite explorar más características que usar solo uno (Dreher, Kuntze y Lerman, 2016).

El lenguaje simbólico, característico del álgebra, representa un reto para muchos estudiantes por su abstracción y generalización, así como por la visión reduccionista del álgebra como manipulación de símbolos y la fluidez en los procedimientos con símbolos (Star y Rittle-

Johnson, 2009). La desconexión entre los símbolos algebraicos y las experiencias concretas, así como la dificultad para interpretar el significado de las expresiones algebraicas (Wang, 2015), profundiza esta problemática, limitando la comprensión de los objetos y reduciendo la aplicación significativa del pensamiento algebraico. Incorporar otras representaciones puede mitigar estas dificultades asociadas con el uso exclusivo del lenguaje simbólico.

Esto se puede realizar por medio del método Naive Geometry, el cual fue usado en Babilonia y se fundamenta en la manipulación de figuras geométricas, en particular cuadrados y rectángulos, para resolver ecuaciones no con el uso de símbolos algebraicos (Radford y Guérette, 2000), sino mediante cortes y reubicaciones de partes de figuras y de explicaciones orales de manera intuitiva. Por ejemplo, la secuencia didáctica de Radford y Guérette (2000), inicia con un problema geométrico abierto, seguido de la introducción del método Naive Geometry para ilustrar cómo los babilonios resolvían problemas similares, facilitando una transición de la manipulación concreta a la abstracción algebraica, y culminando con la reinención de la fórmula de resolución de ecuaciones cuadráticas. Fachrudin et al. (2018) proponen una secuencia similar pero más guiada para estudiantes de secundaria. Ambas secuencias progresan desde representaciones geométricas y verbales hasta la formalización algebraica.

Al incorporar al estudio del álgebra, las representaciones geométricas y verbales no tan comúnmente usadas, es importante considerar las ventajas y desventajas asociadas con ellas, para tomar decisiones didácticas acertadas en el diseño e implementación de lecciones. En la Tabla 1 se presentan las principales ventajas y desventajas de los tipos de representación. Para efectos de este estudio se consideran como sinónimos las representaciones lingüística-verbal, simbólica-algebraica y visual-geométrica-gráfica.

Tabla 1
Ventajas y desventajas según tipo de representación.

Tipo	Ventajas	Desventajas
Verbal	Facilita la formulación del problema y la interpretación de la solución. Promueve la comprensión contextual y la comunicación efectiva de la solución. Permite el uso de razonamiento verbal en la conexión con diversos contextos.	Puede ser ambigua y susceptible a asociaciones irrelevantes o engañosas. Presenta limitaciones en su universalidad. Puede generar obstáculos en la comunicación debido a la dependencia del estilo individual.
Gráfica	Presenta una naturaleza intuitiva que facilita la comprensión inicial. Contribuye a la comprensión procedimental y conceptual al visualizar relaciones y procesos.	Carece de precisión. Puede representar solo una parte limitada del problema. Su efectividad depende de la naturaleza de la tarea solicitada.
Algebraica	Ofrece una representación, general y efectiva para expresar patrones y relaciones. Constituye, en ocasiones, el único método de justificación válido para generalizar.	Puede obstaculizar el significado o la naturaleza de los objetos representados. Puede causar dificultades en la interpretación de resultados.

Fuente: Adaptado de Friedlander, A., y Tabach, M. (2001). *Promoting multiple representations in algebra*. The roles of representation in school mathematics, 11, 173-185.

La construcción del diseño de clase

El diseño de clase se titula "Introducción al estudio de ecuaciones cuadráticas" y se inspira en el método *Naive Geometry*; una técnica antigua utilizada en Babilonia para abordar problemas. En nuestro caso, el problema seleccionado es el siguiente: "*he sumado el cuadrado y mi lado obteniendo $3/4$* " (Sessa, 2005, p. 22). Este problema, analizado por distintos autores (p. ej. Sessa, 2005), implica determinar la medida del lado de ese cuadrado a partir de la suma del área y el lado, para lo cual, de manera implícita, se resuelven ecuaciones cuadráticas utilizando recomposiciones geométricas explicadas con lenguaje verbal.

El diseño de clase se propone para introducir la resolución de ecuaciones cuadráticas desde una perspectiva histórica que integra representaciones verbales, gráficas y algebraicas. Tiene como objetivo conectar la geometría con el álgebra mediante la asociación de representaciones, la justificación de procedimientos matemáticos y la comunicación de estrategias. Se fomenta el trabajo colaborativo para la toma de decisiones, permitiendo que los estudiantes construyan una comprensión progresiva de las ecuaciones cuadráticas a través del método babilónico. En el siguiente enlace se puede encontrar el material que se le entregó al estudiantado: [Diseño de clase: Introducción al estudio de ecuaciones cuadráticas](#). A continuación, se describe cada una de las partes del diseño.

En la parte I, titulada "Exploración de conocimientos previos", se realiza un diagnóstico individual para identificar las preconcepciones y conocimientos previos del estudiantado sobre ecuaciones cuadráticas. Para ello, se le proporciona preguntas abiertas que puede responder utilizando la representación que considere más adecuada. Posteriormente, en una discusión plenaria, se analizan las ideas expuestas y se vinculan con el método babilónico que será introducido.

En la parte II, titulada "Resolviendo ecuaciones cuadráticas", se propone una actividad centrada en la resolución de la ecuación cuadrática "el cuadrado de un número más ese número es igual a tres cuartos", el cual es una modificación del problema original. La primera tarea consiste en expresar el enunciado, dado en representación verbal, utilizando la representación algebraica. Luego, utilizando la representación algebraica, se solicita completar la tabla con las columnas: "procedimiento algebraico", "justificación" y "representación geométrica". Las primeras dos columnas se presentan semicompletas requiriendo que el estudiantado complete los espacios en blanco con la información que sea coherente con lo que está en la otra columna, fomentando así la transición entre el lenguaje verbal y el algebraico. Una vez completada esta etapa, se realiza una discusión plenaria dirigida por el docente para comparar y validar las respuestas de sus estudiantes.

Para completar la tercera columna, el estudiantado debe asociar a los pasos algebraicos y verbales las representaciones geométricas correspondientes. Esta actividad busca fortalecer la conexión entre las distintas representaciones y profundizar la comprensión de las ecuaciones cuadráticas y sus métodos de resolución. Finalmente, la persona docente revisa y discute en clase las asociaciones para resaltar las relaciones entre las representaciones de las tres columnas de la tabla. Esto que, a diferencia de otros enfoques y del desarrollo epistemológico del método, este

diseño invierte el orden de presentación, comenzando con las representaciones algebraica y verbal, y dejando la representación geométrica para el final. Esta decisión se fundamenta en la familiaridad del estudiantado con el álgebra y en el valor del lenguaje verbal para conectar con conocimientos previos. El uso del álgebra promueve la generalización, mientras que la representación geométrica sirve como un recurso adicional para consolidar la comprensión.

La parte III, “Aplicaciones de las ecuaciones cuadráticas”, busca promover la reflexión y valoración de la relevancia histórica y contemporánea de las ecuaciones cuadráticas, así como conocer la percepción del estudiantado sobre el diseño de clase. Por limitaciones de espacio, de ello solamente se tomarán en cuenta las percepciones del estudiantado para el análisis.

Metodología

Se adoptó un enfoque cualitativo con un diseño de estudio de caso para analizar en profundidad el diseño de clase. La implementación se realizó en un grupo de 18 estudiantes en formación inicial como docentes de Matemática, en el curso Álgebra Elemental de la Universidad de Costa Rica, en el 2024, el cual forma parte del I año de la carrera Educación Matemática. Éste se seleccionó por conveniencia, dado que incluía contenidos de ecuaciones de segundo grado y una de las personas investigadoras era docente del grupo. Se utilizaron tres técnicas de recolección de datos. Primero, observaciones de aula, realizadas por las otras dos personas investigadoras, anotando sobre el trabajo realizado por los estudiantes. También, se tomaron fotografías y videos de las producciones estudiantiles, mientras que conversaban entre ellos o escribían en sus cuadernos. Finalmente, se recolectaron las producciones escritas de cada estudiante.

Se llevó a cabo un análisis de contenido sobre los datos recolectados, para establecer ventajas y desventajas del diseño de clase en términos del uso de las representaciones, utilizando como referencia la Tabla 1, así como algunos extractos de los videos, fotografías y producciones escritas realizadas por los estudiantes. Se estructuró el análisis por cada parte del diseño, y se establecieron las siguientes categorías a priori: tipo de representación utilizada, transiciones entre representaciones, dificultades en las conexiones e interpretación, y percepciones del diseño.

Resultados, análisis y conclusiones

En la Parte I, dedicada a la exploración de los conocimientos previos, se observó que 13 de 18 estudiantes utilizaron representaciones verbales (10 correctas y 3 incorrectas) para describir el concepto y el método de resolución de ecuaciones de segundo grado. Por otro lado, 15 de 18 personas, emplearon representaciones algebraicas (11 correctas y 4 incorrectas). Quienes combinaron ambas representaciones lo hicieron generalmente de manera coherente, aunque hubo casos como el del estudiante E1 en los que no coincidían (ver Tabla 2). Ningún estudiante usó representaciones geométricas, lo que era previsible dado que el currículo costarricense prioriza las formas algebraica y verbal sobre la gráfica.

Tabla 2

Representaciones correctas o incorrectas usadas por los estudiantes según su tipo.

	Representaciones simbólicas	Representaciones verbales
Correctas	• $x^2 + 4 = 8$ [E1] • $x^2 + 2x + 1^2 = 0$ $= (x + 1)^2$ Fórmula notable $= (x + 1)(x + 1) = 0$ $= (x + 1) = 0 \vee (x + 1) = 0$ Ausencia de divisores de 0 $= x = -1$ [E9] • $x^2 - 2x + 4 = -1 + 2x^2$ [E7]	• Una ecuación cuadrática supongo que es la que tiene grado 2 en la expresión. [E4] • La ecuación cuadrática es aquella cuál es su máximo exponente es de grado dos, que, dependiendo de su discriminante, posee una, dos o ninguna solución, igualando a cero u otro valor. [E5] • Es una ecuación en la cual la variable es de grado 2 y sus coeficientes son diferentes de 0. [E9] • Es una expresión algebraica con 2 o más términos elevados al cuadrado. Además, tiene una igualdad. [E7]
Incorrectas	• $x^2 - 2x + 9 = -1 \div 2x^2$ [E3] • $ax^2 + bx + c$ [E6] • $x^2 + 7x + 4$ [E6]	• Existe al menos un término de grado 2. [E1] • Es una igualdad entre 2 expresiones algebraicas, en donde contiene una incógnita de grado 2. [E8] • Es una ecuación con una “a” con incógnita en grado 2, una “b” con incógnita en grado 1, y “c”. [E2]

Fuente: elaboración propia. 2025.

Como se observa en la Tabla 2, hubo representaciones simbólicas correctas como las de E1, E9 y E7, a pesar de que E9 usó de forma incorrecta el símbolo “=” para secuenciar los pasos. Se observa que no se usó la representación general de una ecuación de segundo grado, excepto por E6, aunque lo hizo de forma incorrecta porque omitió la igualdad, error que replicó en el ejemplo que brindó. También E3 brindó un ejemplo incorrecto, pues colocó una ecuación que no es polinomial. Por otro lado, en las representaciones verbales, destacan las de E4, E5, E9 y E7, pues hicieron referencia a una igualdad y al mayor grado que puede estar en la ecuación. Otros estudiantes muestran tener nociones correctas al respecto, pero al escribir sus definiciones omiten elementos indispensables como la igualdad (E1 y E2) o el máximo exponente (E8).

El diseño de la clase presentó fortalezas como permitir el uso de diversas representaciones para identificar conocimientos previos y anticipar dificultades, así como dar espacio para que las personas estudiantes compartieran sus respuestas en la pizarra (representación algebraica) y explicaran sus producciones (representación verbal). No obstante, una debilidad fue condicionar la pregunta sobre el procedimiento a quienes ya lo conocían, y la pregunta sobre la comparación con la ecuación lineal a quienes no conocían dicho procedimiento, en lugar de ofrecer también la posibilidad responder ambas preguntas independientemente de si conocían o no el procedimiento. Incluir ambas preguntas habría permitido a más estudiantes expresar sus ideas y brindar más información sobre sus conocimientos previos.

En la segunda parte, el trabajo colaborativo en la resolución de ecuaciones cuadráticas utilizando Naive Geometry fue bien recibido, evidenciándose un alto nivel de compromiso del estudiantado en la formulación y justificación de argumentos a través del uso de distintas representaciones. Inicialmente, la transición entre el lenguaje verbal y algebraico se realizó con fluidez, pues la totalidad de estudiantes identificó inmediatamente la representación algebraica de la ecuación planteada verbalmente. El estudiantado interpretó la información proporcionada y

estableció conexiones tanto verticales -entre pasos anteriores y posteriores representados de distintas formas- como horizontales -entre diferentes representaciones del mismo paso-, lo que facilitó la construcción completa de las primeras dos columnas de la tabla y la explicitación pública de sus razonamientos (ver Figura 1). Por ejemplo, E9 manifestó que “ $(x + 1)^2 = 0$, como está igualado a cero, el punto es encontrar una manera de que quede en dos factores lineales. En este caso es muy evidente porque es una fórmula notable... esta idea es mediante la propiedad de ausencia de divisores del cero. Entonces, si la multiplicación de estos dos términos [señala en la pizarra $(x + 1)(x + 1)$] es igual a cero, o este da cero o este da cero”.

Asimismo, la representación verbal contribuyó a que el estudiantado expresara su comprensión en sus propias palabras, como se observa en el intercambio donde E10 cuestiona: “¿Por qué resta 1?”, y E9 responde: “Porque necesitamos la manera de que nos quede cero para encontrar una de las respuestas”, seguido de la escritura del paso algebraico correspondiente.

En la correspondencia geométrica, los estudiantes interpretaban las figuras geométricas a partir de las expresiones algebraicas, buscando equivalencias con números, variables u operaciones. Esta estrategia, aunque indicativa de un intento de comprensión, generó confusión en la asociación entre las diferentes representaciones. Esto se evidencia en el cuestionamiento de E11: “¿Profe, es un cuadradito para la ecuación completa o un cuadradito para cada pedacito?, ¿Un cuadradito es un lado del igual y otro cuadradito es otro lado del igual?”. Asimismo, en el diálogo donde E8 explica que “para completar el cuadrado, usted le mete un rectángulo. Y si tienen dos minirectángulos y se pone uno abajo del cuadrado y otro al lado, y le ponemos un cuadrado chiquito y se completa el cuadrado”. Así, se observó que el estudiantado tendía a interpretar las figuras geométricas a partir de las expresiones algebraicas. Con lo que, se evidenció una concordancia limitada entre las columnas algebraica/verbal y la representación geométrica en la mayoría de las respuestas. Por ejemplo, en la Figura 1 se presenta la solución de un estudiante con un fragmento del razonamiento que manifestó.

Procedimiento algebraico	Justificación
$x^2 + x = \frac{3}{4}$	Ecuación por resolver.
$\Leftrightarrow x^2 + x + 1 = \frac{3}{4} + 1$	Sumar 1 a ambos lados de la igualdad.
$\Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}$	Dividir 1 a la mitad.

- “El primero es sumar un 1 a ambos lados de la igualdad” [coloca como primer paso un cuadrado de medida de lado 1].

- “Después de eso se divide el 1 a la mitad, que es $\frac{1}{2}$, entonces aquí se le agrega $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ a cada uno” [toma figura que tiene como medida de lado x y que tiene $\frac{1}{2}$ en alguna de sus partes] ...

- “Creo que está mal el primer paso...” [procede a colocar como primer paso un cuadrado de lado con medida x , debido a que en el primer paso algebraico se involucra dicha letra].

Figura 1. Ejemplo de resolución de la Parte II y fragmento de la transcripción.

Estos resultados muestran fortalezas y áreas de mejora en el diseño de clase. Entre las fortalezas, destaca la promoción de una construcción activa del conocimiento mediante la conexión entre diversas representaciones. Presentar una solución completa y desafiar al estudiantado a reconstruirla y justificarla mediante distintas formas de representación fomenta un aprendizaje significativo y el desarrollo de habilidades cognitivas superiores. El uso de material manipulativo facilitó la comparación y la visualización. Entre las dificultades se observó un tiempo de resolución prolongado (más de 2.5 horas) y falta de espacio en las hojas de trabajo. La mayoría del estudiantado manifestó que la transición hacia la representación geométrica resultó

más desafiante que otras, aunque ésta fue la más disfrutada. En futuras implementaciones se sugiere iniciar con representaciones geométricas, como proponen Radford y Guerrete (2000) y Fachrudin et al. (2018), evitando que la construcción algebraica limite el aprendizaje (por ejemplo, hacer coincidir la variable x con los dibujos).

En conclusión, el diseño favorece la comprensión conceptual y procedimental a través del uso de diversas representaciones y un enfoque colaborativo. No obstante, su implementación requiere ajustes para mejorar la eficiencia del tiempo y la transición entre representaciones. Se recomienda incorporar preguntas sobre conocimientos previos desde el inicio y ampliar el tiempo asignado a cada parte. Además, que el docente modele el razonamiento esperado, ejemplificando los primeros pasos de la tarea para fortalecer la conexión entre lo geométrico y lo algebraico.

Referencias y bibliografía

- Acosta, L. (2017). *Resolución de problemas que requieren de la ecuación cuadrática: Rutinas de pensamiento y registros de representación semiótica en octavo grado* [Tesis de maestría, Universidad de La Sabana].
- Amaya, J. (2020). *Los sistemas de representación semiótica en la enseñanza de funciones polinómicas de segundo grado en la Institución Educativa Javiera Londoño* [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/77425>
- Boyd, P. (2014). Using ‘modelling’ to improve the coherence of initial teacher education. In P. Boyd, A. Szplit, & Z. Zbróg (Eds.), *Teacher educators and teachers as learners: International perspectives* (pp. 51–73). Wydawnictwo Libron. <https://doi.org/10.13140/2.1.3059.6167>
- Díaz, M., Haye, E., Montenegro, F., y Córdoba, L. (2013). Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Revista UNIÓN*. <https://revistaunion.org/index.php/UNION/article/view/644/379>
- Didiş Kabar, M. G. (2023). A Thematic Review of Quadratic Equation Studies in The Field of Mathematics Education. *Participatory Educational Research*, 10(4), 29–48. <https://doi.org/10.17275/per.23.58.10.4>
- Dreher, A., y Kuntze, S. (2015). Teachers’ professional knowledge and noticing: The case of multiple representations in the mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 88(1-2), 89–114. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9577-8>
- Dreher, A., Kuntze, S., y Lerman, S. (2016). Why use multiple representations in the mathematics classroom? Views of English and German preservice teachers. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 14(2), 363–382. <https://doi.org/10.1007/s10763-015-9633-6>
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 61(1–2), 103–131.
- Fachrudin, A., Putri, R., Kohar, A., y Widadah, S. (2018). Developing a Local Instruction Theory for Learning the Concept of Solving Quadratic Equation Using Babylonian Approach. *Journal of Physics: Conference Series*, 1108(1). <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1108/1/012069>
- Friedlander, A., y Tabach, M. (2001). Promoting multiple representations in algebra. En A. A. Cuoco & F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 173–185). National Council of Teachers of Mathematics.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Author. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/Principles-and-Standards/>
- O’Halloran, K. L. (2015). The language of learning mathematics: A multimodal perspective. *The Journal of Mathematical Behavior*, 40, 63–74. <https://doi.org/10.1016/j.jmathb.2014.09.002>
- Radford, L., & Guérette, G. (2000). Second degree equations in the classroom: A Babylonian approach. *Paleontological Society Papers*, 6, 69–76. https://www.luisradford.ca/pub/95_babylonian.pdf
- Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra*. Buenos Aires, Argentina. Editorial: Libros del Zorzal.
- Schleppegrell, M. J. (2010). Language in mathematics teaching and learning: A research review. En J. N. Moschkovich (Ed.), *Language and mathematics education: Multiple perspectives and directions for research* (pp. 73–112). Information Age Publishing.
- Star, J. R., y Rittle-Johnson, B. (2009). Making algebra work: Instructional strategies that deepen student understanding, within and between representations. *ERS Spectrum*, 27(2), 11–18.

- Tocto, E. (2016). *Comprensión de la noción función cuadrática por medio del tránsito de registros de representación semiótica en estudiantes de quinto año de secundaria* [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. <https://tesis.pucp.edu.pe/items/f310bce7-88c8-467a-98ec-ddee4ad9346d>
- Wang, X. (2015). The Literature Review of Algebra Learning: Focusing on the Contributions to Students' Difficulties. *Creative Education*, 6, 144-153. <https://doi.org/10.4236/ce.2015.62013>



Explorar el Universo a través de la Geometría

Julián **Félix**

Universidad de Guanajuato

México

felix@fisica.ugto.mx

Magdalena Waleska **Aldana** Segura

Universidad de San Carlos de Guatemala

Guatemala

waldanasegura@profesor.usac.edu.gt

Resumen

Este taller está diseñado para docentes de Matemáticas y Ciencias interesados en integrar la Astronomía en el aprendizaje de la Geometría. El taller busca a través de una metodología STEAM (Science, Technology, Engineering, Arts and Mathematics) promover la integración de contenidos y motivar a través de la experiencia del mundo cotidiano la comprensión de los conceptos matemáticos. Se proporcionarán recursos para enriquecer el aprendizaje en el aula, promoviendo el pensamiento crítico y la interdisciplinariedad. El uso de actividades prácticas y el uso de herramientas didácticas, tanto físicas como digitales, permite a los participantes explorar conceptos geométricos aplicados a fenómenos astronómicos, como la medición de distancias cósmicas, la geometría esférica y la orientación celeste. Al terminar el taller los participantes podrán utilizar la bóveda celeste como un laboratorio donde los conceptos de la Geometría son comprendidos por los estudiantes.

Palabras clave: Astronomía; Geometría; Herramientas digitales; interdisciplinariedad; STEAM.

Introducción

El aprendizaje de la Matemática y la Astronomía están estrechamente ligados a lo largo de la historia, desde las primeras observaciones de los cielos por las civilizaciones antiguas hasta el desarrollo de modelos geométricos para comprender el universo. Sin embargo, actualmente, estas

disciplinas suelen enseñarse de manera aislada, desvinculadas y en muchos casos descontextualizadas. Se pierde la oportunidad de mostrar a los estudiantes cómo los conceptos matemáticos tienen aplicaciones concretas en la exploración del cosmos y la vida cotidiana.

Este taller propone una integración efectiva entre la Geometría y la Astronomía para enriquecer el aprendizaje de la Matemática en el aula. A través de actividades prácticas y estrategias didácticas innovadoras, los docentes exploran cómo conceptos geométricos fundamentales, como la trigonometría, las coordenadas espaciales y la geometría esférica, permiten explicar fenómenos astronómicos clave, como el movimiento de los astros, la medición de distancias en el espacio y la orientación en la esfera celeste.

El objetivo del taller es proporcionar a los docentes herramientas y recursos que les permitan diseñar experiencias de aprendizaje interdisciplinarias, fomentando en los estudiantes el pensamiento crítico y la capacidad de relacionar la Matemática con fenómenos reales. De esta manera, se busca fortalecer el enfoque STEM en la educación y motivar a los estudiantes a explorar el universo a través de la Matemática. Esto también contribuye a motivar vocaciones científicas.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

La Astronomía y la Geometría han estado interconectadas desde tiempos antiguos, cuando las primeras civilizaciones utilizaron principios geométricos para comprender y predecir fenómenos celestes. La Geometría, como rama de la Matemática, proporciona el lenguaje y las herramientas necesarias para describir la forma y estructura del cosmos, desde la medición de distancias hasta la orientación en el espacio.

En este taller, se aborda la relación entre la Geometría y la Astronomía a partir de conceptos clave como la trigonometría esférica, las coordenadas celestes, cálculo de distancias astronómicas mediante paralaje y la determinación del tamaño de la Tierra con métodos geométricos. Los docentes explorarán cómo estos principios pueden incorporarse en el aprendizaje de la Matemática, utilizando ejemplos reales que conecten el aula con la observación del cielo.

La relevancia de este tema radica en su capacidad para hacer que la Matemática sea más tangible y significativa para los estudiantes. Integrar la astronomía en la enseñanza de la geometría permite no solo ilustrar conceptos abstractos con aplicaciones concretas, sino también despertar el interés por la ciencia y la exploración del universo. Además, el enfoque interdisciplinario del taller responde a las tendencias educativas actuales, que buscan promover el aprendizaje STEM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería y Matemática) y desarrollar habilidades de pensamiento crítico y resolución de problemas en los estudiantes.

Este enfoque también es particularmente relevante en el contexto del aprendizaje de la Matemática ya que ofrece una oportunidad para utilizar metodologías de aprendizaje basadas en la indagación y la experimentación. Al trabajar con modelos Geométricos y herramientas astronómicas, los docentes podrán diseñar actividades dinámicas que favorezcan la comprensión profunda de los conceptos matemáticos y su relación con el mundo real.

Se pretende fortalecer el aprendizaje de la Matemática y fomentar en los estudiantes una visión más integrada de las ciencias. Es necesario proveer a los docentes estrategias y recursos para transformar el aprendizaje de la Geometría, promoviendo un aprendizaje más interactivo y contextualizado a través de la astronomía.

Marco Teórico

La interrelación entre la Astronomía y la Geometría ha sido fundamental en la evolución del conocimiento científico. Desde los primeros intentos de medir el cosmos hasta los modelos actuales de exploración espacial, la geometría ha proporcionado un marco matemático para comprender el universo.

El uso de la geometría en la astronomía se remonta a las civilizaciones antiguas. Los astrónomos babilonios, egipcios y griegos aplicaron principios geométricos para describir el movimiento de los astros y realizar mediciones astronómicas. Un ejemplo clásico es el trabajo de Eratóstenes (siglo III a.C.), quien utilizó la geometría para estimar la circunferencia de la Tierra con notable precisión (Evans, 1998). Asimismo, Claudio Ptolomeo, en su obra *Almagesto*, sistematizó modelos geométricos para explicar el movimiento de los planetas en el cielo (Toomer, 1998).

En la era moderna, el desarrollo de la trigonometría esférica ha sido clave para la navegación y la astrometría. Johannes Kepler formuló sus leyes del movimiento planetario a partir de observaciones astronómicas y cálculos geométricos (Koyré, 1992). La geometría sigue desempeñando un papel esencial en la exploración espacial actual, desde el diseño de órbitas hasta la medición de distancias cósmicas mediante el método del paralaje (Sparke & Gallagher, 2007).

El aprendizaje interdisciplinario, en el que se combinan la Astronomía y la Matemática, permite que los estudiantes comprendan conceptos de manera más profunda y aplicada. De acuerdo con Ausubel (1968), el aprendizaje significativo ocurre cuando los nuevos conocimientos se relacionan con estructuras cognitivas previas, facilitando una mejor retención y comprensión. Al vincular la geometría con fenómenos astronómicos observables, los estudiantes pueden internalizar conceptos matemáticos de manera más intuitiva.

Además, la enseñanza basada en la indagación (Bybee, 2006) promueve la exploración activa y el pensamiento crítico. Aplicado a este taller, este enfoque permitirá que los docentes diseñen actividades en las que los estudiantes formulen preguntas, analicen datos y realicen experimentos geométricos para resolver problemas astronómicos.

La incorporación de herramientas tecnológicas al aprendizaje de las ciencias experimentales en particular de la Geometría astronómica facilita la comprensión de los conceptos. Aplicaciones como Stellarium y simuladores de observación celeste permiten que los estudiantes visualicen la geometría del cielo y comprendan la relación entre los movimientos de los astros y las coordenadas espaciales (Fitzpatrick, 2013).

Además, la educación STEM enfatiza la necesidad de un aprendizaje basado en problemas reales y en la integración de disciplinas (National Research Council, 2012). La enseñanza de la geometría a través de la astronomía responde a este enfoque al proporcionar contextos auténticos en los que los estudiantes pueden aplicar sus conocimientos matemáticos a fenómenos del mundo real.

Propuesta de desarrollo del taller

Introducción (15 min)

Presentación de los objetivos del taller.

Breve historia de la relación entre astronomía y geometría (de la Antigüedad a la actualidad).

Importancia de la enseñanza interdisciplinaria en la educación STEM.

Bloque 1: Geometría en la Astronomía (30 min)

Conceptos clave: trigonometría, geometría esférica y coordenadas celestes.

Actividad práctica: Construcción de un modelo de esfera celeste usando materiales simples.

Bloque 2: Medición de Distancias Cósmicas (30 min)

Uso del paralaje y la trigonometría para medir distancias astronómicas.

Actividad en grupo: Simulación del cálculo del tamaño de la Tierra (Método de Eratóstenes).

Bloque 3: Aplicaciones y Recursos para el Aula (30 min)

Herramientas tecnológicas: Stellarium, aplicaciones de realidad aumentada.

Diseño de actividades interdisciplinarias para estudiantes.

Discusión y creación de estrategias de implementación.

Cierre y Reflexión (15 min)

Conclusiones y retroalimentación.

Recursos adicionales y oportunidades de formación.

Preguntas y respuestas.

Referencias y bibliografía

- Ausubel, D. P. (1968). *Educational psychology: A cognitive view*. Holt, Rinehart & Winston.
- Bybee, R. W. (2006). *The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness*. BSCS.
- Evans, J. (1998). *The history and practice of ancient astronomy*. Oxford University Press.
- Fitzpatrick, R. (2013). *An introduction to celestial mechanics*. Cambridge University Press.
- Koyré, A. (1992). *The astronomical revolution: Copernicus—Kepler—Borelli*. Dover Publications.
- National Research Council. (2012). *A framework for K-12 science education: Practices, crosscutting concepts, and core ideas*. National Academies Press.
- Sparke, L. S., & Gallagher, J. S. (2007). *Galaxies in the universe: An introduction*. Cambridge University Press.
- Toomer, G. J. (1998). *Ptolemy's Almagest*. Princeton University Press.



Intervención de recursos digitales para la comprensión de nociones geométricas en el profesorado de educación primaria

Noelia Saleme

Facultad de Ciencias de la Salud, Universidad Nacional de Catamarca

Argentina

noeliasaleme@unca.edu.ar

Soraya Eugenia Pol

Instituto de Educación Superior Gobernador José Cubas, provincia de Catamarca

Argentina

sorayaepol@gmail.com

Introducción

En este póster, se presenta una propuesta para la enseñanza de lugar geométrico y propiedades de los triángulos con la intervención de recursos digitales para la comprensión de nociones geométricas en el Profesorado de Educación Primaria. La metodología utilizada en este trabajo responde a un enfoque descriptivo porque parte del análisis de experiencias realizadas con estudiantes del mencionado Profesorado donde se detectaron errores asociados a la representación de figuras y comprensión de propiedades. El trabajo propone el diseño de secuencias didácticas, entendiéndose éstas como dispositivo pedagógico buscando establecer entornos de aprendizaje significativos cuyas construcciones geométricas adquieren una relevancia trascendental basado en interacciones con el uso del programa de GeoGebra.

Presentación de la propuesta

La enseñanza y el aprendizaje de la Geometría, es un dominio que de a poco fue perdiendo espacio y sentido en la escuela, tendencia que, de seguir sosteniéndose, podría privar a los estudiantes de conocer modos particulares de pensar y de razonar (Itzcovich, 2005).

La enseñanza de esta disciplina se ve afectada por una serie de problemas. Báez, Iglesias (2007) y Paredes, Iglesias y Ortiz (2007) sostienen que en la mayoría de las instituciones educativas la enseñanza de la geometría se caracteriza por la clase magistral, el trabajo en grupos y el discurso del profesor como principal medio didáctico. Sea cual fuera la modalidad educativa que se aplica, en la mayoría de los casos se tiene un factor en común: se brinda una enseñanza

Póster; Educación Superior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

basada en el lápiz y papel, o de pizarra y tiza, que no ofrece, al estudiante, mayores posibilidades de desarrollo (Vargas y Araya, 2013).

Autores como Gómez-Chacón (2011), García (2011) y Gomez-Chacon, Botana, Escribano, y Abánades, (2016) resaltan los resultados positivos de usar tecnologías que promueven la visualización y la exploración para desarrollar la perseverancia, la autonomía, el pensamiento crítico, la precisión, el rigor y la actitud inductiva en los estudiantes.

El propósito de este trabajo es que los estudiantes del Profesorado en Educación Primaria diseñen secuencias didácticas como estrategia de enseñanza para la clase de Geometría, aprovechando el potencial que brinda el software GeoGebra.

Desarrollo de la propuesta

Actividad 1: Dibujen un ángulo cualquiera y construyan la bisectriz, además dibujen cualquier segmento y construyan la mediatriz.

Posibles anticipaciones: Al desarrollar la tarea puede suceder que los pasos para la construcción no estén claros y que la bisectriz o mediatriz no cumplan con la condición de equidistancia, si esto sucede, se les pedirá que trabajen grupalmente y revisen entre todos, el concepto de lugar geométrico.

Actividad 2: Tracen mediatriz y bisectriz en la carpeta, con lápiz y papel de manera individual. Luego hacer extensiva la consigna usando el programa GeoGebra.

Posibles anticipaciones: Orientar a los estudiantes que observen que con el uso del GeoGebra en la vista gráfica el ángulo queda dividido en dos ángulos iguales, que la vista algebraica muestra las amplitudes de los tres ángulos y para analizar la condición de lugar geométrico requiere que tomen un punto sobre la bisectriz y que describan que herramientas facilitarán dicho análisis.

Actividad 3: Construyan con el programa GeoGebra un triángulo ABC de manera tal que las medidas de sus lados sean $AB = 5$ y $AC = 3$. Si mueven alguno de los vértices, ¿sigue siendo ABC un triángulo de lados 5 y 3? En caso de que se deforme, busquen otra manera de construirlo. Construyan con GeoGebra, de ser posible en cada caso, un triángulo con las siguientes medidas para sus lados: a. $AB = 9$ $BC = 7$ y $AC = 5$ b. $AB = 7$ $BC = 3$ y $AC = 2$

Posibles anticipaciones: Se espera que consideren la existencia y unicidad de las construcciones, con el propósito de estudiar el concepto de la desigualdad triangular. En la puesta en común, se buscará reflexionar sobre el tipo de construcción, que no se desarme al mover sus elementos, además, que existen infinitos triángulos que cumplen lo pedido, y una construcción sometida al desplazamiento representa esos infinitos triángulos. En la segunda situación se espera que puedan reconocer la existencia de construcciones posibles e imposibles, que puedan reinvertir algunas estrategias y herramientas del programa utilizadas previamente, elaboren otras, y de ser necesario redactar un instructivo.

Actividad 4: Teniendo en cuenta el recorte de contenido y respetando el enfoque didáctico del diseño curricular. Elabore una secuencia didáctica donde se plasmen las actividades, las posibles estrategias y resoluciones de sus alumnos

Bibliografía y referencias

- Báez, R. e Iglesias, M. (2007). Principios didácticos a seguir en el proceso de enseñanza y aprendizaje de la geometría en la UPEL. “El Mácaro”. Revista Enseñanza de la Matemática, 12 al 16.
- Itzcovich, H. (2005). Iniciación al estudio didáctico de la geometría. De las construcciones a las demostraciones. Buenos Aires: Libros del Zorzal.
- Gomez Chacon, M., Botana, F., Escribano, J., & Abánades, M. A. (2016). *Concepto de Lugar Geométrico. Génesis de Utilización Personal* y. Obtenido de scielo:
<https://www.scielo.br/j/bolema/a/Gkb4tNjpCCGvfqDRGzqHTTm/?lang=es&format=pdf>
- Vargas, G., y Araya, R. G. (2013). El modelo de VAN HIELE y la enseñanza de la geometría. Uniciencia Vol. 27, 74-94.



La preparación académica de futuras y futuros docentes de Matemática del nivel elemental en Puerto Rico

Dannael Carrero Pellicier
 Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
dannael.carrero@upr.edu

Resumen

La preparación de los maestros de escuela elemental es la base para la formación de las futuras generaciones, por tanto, es necesario investigar la forma en que las universidades preparan a futuros docentes. Esta investigación tuvo como propósito explorar cómo se están formando en Matemática a los futuros docentes de nivel elemental en las universidades en Puerto Rico. Se utilizó el marco teórico del Conocimiento Pedagógico para Enseñar Matemáticas reformulado por Ball et al. (2008), quienes se enfocaron en el conocimiento pedagógico y matemático para la enseñanza. La metodología de investigación es de naturaleza cualitativa, el diseño de investigación que se utilizó fue el de estudio de casos múltiples de Skate (2006) y los participantes son profesores que forman parte de la universidad pública del país. Se analizaron las herramientas y estrategias empleadas por el profesor en la sala de clases para fomentar los conocimientos: contenido matemático, pedagógico y curricular.

Palabras clave: Educación Matemática; Formación docente inicial; Matemática de nivel elemental; Metodología de enseñanza en Matemática.

Introducción

La preparación magisterial de escuela elemental es la base para la formación de los estudiantes, por tanto, es necesario investigar la forma en que las universidades preparan a los futuros docentes. En el caso de Matemática, varias organizaciones nacionales e internacionales han indicado criterios para la preparación de las personas que estarán a cargo de formar matemáticamente a las nuevas generaciones (Association of Mathematics Teacher Educator, 2017; National Council of Teachers of Mathematics, 2020, 2005; National Council on Teacher Quality, 2008). El *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2005) emitió una

declaración de posición en la que indica que los maestros y maestras de nivel elemental o primario deberían de haber completado el equivalente de al menos tres cursos que enfaticen las estructuras matemáticas esenciales para ese nivel, (números y operaciones, álgebra, geometría, análisis de datos y probabilidad). El *Conference Board of the Mathematical Sciences* (CBMS, 2001) recomendó que los futuros docentes de elemental completen al menos tres cursos sobre las ideas fundamentales en Matemática elemental, los cursos deben de estar enfocados en un desarrollo exhaustivo de las ideas matemáticas básicas. Para el año 2012, el CBMS, cambia sus recomendaciones e indican que deben ser al menos cuatro cursos sobre las ideas fundamentales de Matemática de nivel elemental. Sin embargo, no está claro cómo se implementan esas recomendaciones en Puerto Rico.

Desde hace varias décadas, la comunidad de Educación Matemática se ha preocupado por que los futuros docentes de nivel elemental no son preparados adecuadamente para enseñar Matemática (Ball 1990; Philipp et al. 2007; van Es & Conroy, 2009). Las investigaciones coinciden en que el futuro magisterio necesita saber Matemática en las formas requeridas, especialmente para la enseñanza, con el fin de ser efectivos en la sala de clase (Ball et al., 2008). Para entender cómo los futuros maestros desarrollan el conocimiento matemático para la enseñanza, es crucial entender el contenido y, sobre todo, el diseño de los cursos (McCrary et al., 2009). En esta investigación cuando se habla del diseño del curso se refiere al contenido matemático, la secuencia de contenido, las estrategias instruccionales y los materiales que se utilizan para el desarrollo del conocimiento matemático en los cursos de preparación de docentes. Desarrollar el conocimiento de contenido matemático les permitirá a los futuros docentes aprender las Matemáticas y entenderlas. De esta manera entenderán que no solamente son procedimientos algorítmicos, repetitivos o de patrones. La manera en la que los docentes en formación analizan las tareas matemáticas es un ejemplo de cómo utilizarán el conocimiento matemático para la enseñanza en su tarea profesional (Llinares, 2013).

Tradicionalmente, en las universidades de los Estados Unidos y Puerto Rico, los cursos de contenido matemático se ofrecen en departamentos de Matemática, mientras que los cursos diseñados para la metodología se ofrecen en los de educación. Debido a esa realidad, existe una desconexión que afecta la formación de los futuros docentes (Li & Castro, 2018). El propósito de esta investigación fue explorar la preparación académica que reciben en las universidades de Puerto Rico los futuros docentes que ofrecerán cursos de Matemática de nivel elemental. Las Matemáticas en la escuela elemental son la base de todas las Matemáticas desde la escuela hasta la universidad. Por lo tanto, es necesario preparar a los estudiantes para todo lo que está por venir (Wu, 2009). Asimismo, será necesario considerar el contenido, las herramientas y la metodología a la que son expuestos los futuros docentes durante su proceso de enseñanza aprendizaje en los cursos relacionados con Matemática que toman a nivel universitario.

Las preguntas de esta investigación son las siguientes:

1. ¿A qué preparación académica se exponen los futuros docentes de nivel elemental en cuanto al conocimiento del contenido matemático?
2. ¿A qué preparación académica se exponen los futuros docentes de Matemática de nivel elemental en cuanto al conocimiento pedagógico y curricular en la enseñanza de Matemática?

3. ¿Cómo integran los profesores universitarios las herramientas y actividades metodológicas para desarrollar el conocimiento de contenido matemático, el conocimiento pedagógico y el conocimiento curricular en los futuros docentes de nivel elemental?
4. ¿Cómo integran los profesores de nivel universitario las estrategias de enseñanza para desarrollar el conocimiento de contenido matemático en los futuros docentes de nivel elemental?

Marco Teórico

Shulman (1986) propone un dominio especial para el conocimiento de enseñar que lo llama *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), el cual lo define como el conocimiento de contenido único para la enseñanza. Las investigaciones utilizaban el PCK para referirse a los aspectos de conocimiento de la materia y al conocimiento de la enseñanza de la materia. El PCK de Shulman es el conocimiento necesario para enseñar a través de la disciplina y se entiende como un tipo de conocimiento del contenido que incorpora los aspectos del contenido que se relacionan más con la enseñanza (Muñoz-Catalán et al., 2015).

Por varias décadas, los investigadores utilizaron el PCK para referirse a una amplia gama de aspectos del conocimiento y la enseñanza de la materia. Además de las diferencias en la amplitud de lo que el término incluye, ha habido diferencias significativas en cómo el término se utiliza para relacionar el conocimiento del contenido con la práctica de la enseñanza. Considerando que el saber implica la enseñanza, empezaron a investigar qué es lo que exigía la propia enseñanza (Ball et al., 2008). Estos en vez de trabajar con el currículo y una lista de tópicos desarrollan un enfoque empírico para comprender el conocimiento de contenido necesario para la enseñanza. De esta manera identifican un dominio que no estaba contenido en el PCK y era esencial para una enseñanza efectiva y a este se refieren como *Specialized Content Knowledge* (Ball et al., 2008).

De esta forma proponen el conocimiento de contenido especializado para enseñar Matemáticas (Mathematics knowledge for Teaching o MKT). El conocimiento matemático para la enseñanza representa el conocimiento matemático, las habilidades, la sensibilidad que se necesitan para el trabajo concreto de enseñar, tareas especiales en las que los profesores conocen y utilizan las Matemáticas de diferentes maneras (Muñoz-Catalán et al., 2015). En esta investigación se utilizará el marco teórico del conocimiento pedagógico para enseñar Matemáticas desarrollado por Ball et al. (2008), quienes refinaron las categorías de conocimiento de los maestros en dos grandes categorías: conocimiento de la materia y conocimiento de contenido pedagógico. Cada una de ellas las dividen en tres subdominios que proveen más detalles del conocimiento para enseñar Matemática a nivel elemental que se espera tenga el futuro docente.

El marco teórico propuesto es útil para la investigación debido a que queremos identificar el conocimiento matemático especializado para la enseñanza que necesita ese futuro docente de Matemática para que pueda afrontar con éxito el proceso de enseñanza que acerque a los alumnos al conocimiento matemático. El contenido matemático de los docentes en formación se enfoca en propiedades, algoritmos y definiciones (Ball, 1990; Humarán-Martínez, 2012; Ma, 2010). El docente de nivel elemental necesita desarrollar una comprensión profunda y fundamental de las Matemáticas de su nivel (Hart et al., 2013).

Metodología

Debido a la naturaleza exploratoria del propósito de investigación el método que se consideró como el más adecuado fue el cualitativo. Según Creswell (2009), la investigación cualitativa busca explorar y entender el significado que los individuos o grupos le dan a un determinado fenómeno. Debido a que el propósito de la investigación fue explorar, por esta razón, la investigación está basada en un proceso inductivo: queremos explorar, descubrir y contribuir a la literatura para mejorar las prácticas educativas, por eso el enfoque de estudio es el cualitativo (Hernández-Sampieri et al., 2014). La naturaleza de los datos es: documentos y narraciones, que es lo que representa una investigación de carácter cualitativo, debido a que se quiere llegar a la profundidad de los significados.

El diseño de investigación que se utilizó fue el estudio de casos múltiples. Una razón importante para realizar el estudio de casos múltiples es examinar cómo se comporta el programa o fenómenos en diferentes entornos (Skate, 2006). Se analizó a profundidad la preparación académica que reciben los futuros docentes de nivel elemental en Matemática en las universidades en Puerto Rico. Los participantes de este estudio fueron los profesores que dicten los cursos de contenido matemático y los que dicten cursos de metodología en enseñanza matemática en los tres entornos universitarios en donde se realizó la investigación vinculados a recintos de la Universidad de Puerto Rico.

Para responder a las preguntas de investigación, se utilizaron las siguientes técnicas de recopilación de datos: análisis de documentos, observaciones y entrevista semiestructurada. Se crearon instrumentos para la recopilación de datos. Según Creswell (2012) una fuente valiosa de información en la investigación cualitativa son los documentos. Los documentos proporcionan información valiosa para ayudar a los investigadores a comprender los fenómenos centrales en los estudios cualitativos (Creswell, 2012). Este estudio se enfocó en analizar los siguientes documentos de los cursos de Matemática y metodología en la enseñanza matemática: prontuario del curso o sílabo del profesor y cualquier otro documento que utiliza el profesor en el curso. Los documentos obtenidos se analizaron identificando todo lo relacionado con el conocimiento de contenido matemático que se requiere en los cursos de preparación de docentes y el conocimiento pedagógico y curricular.

En términos de las observaciones, se observó dos clases de contenido matemático en todos los escenarios y dos clases de metodología de enseñanza matemática en un solo escenario. La observación se centró en el profesor que imparte el curso. En las observaciones se anotaron las estrategias y metodologías de enseñanza que utilizan los profesores en la sala de clases. La entrevista que se realizó fue semiestructurada, los objetivos primordiales de la entrevista son poder obtener información acerca de: estrategias de enseñanza que utilizan los profesores universitarios para enseñar los cursos de Matemáticas, así como las herramientas y actividades metodológicas que utilizan y modelan los profesores universitarios para desarrollar las destrezas matemáticas en los cursos de futuros docentes. Se entrevistaron a los profesores que dictan los cursos de contenido matemático y a los que ofrecen los cursos de metodologías de enseñanza matemática en los tres entornos universitarios.

De esta manera cuando se planifica el análisis de información se pretenden identificar los patrones o temas que surgen de la información que se obtiene de las tres técnicas de recopilación de datos.

Dado que es un estudio de casos múltiples se realizó una descripción detallada de cada uno de los casos independientemente para construir cada uno de los escenarios. Para analizar la información recopilada se utilizó el modelo de análisis cualitativo de Harry F. Wolcott (1994). El modelo se resume en tres componentes: descripción, análisis e interpretación. El componente de descripción se refiere al relato de lo que ocurrió y se observó (Lucca-Irizarry & Berrios-Rivera, 2009). Bajo este componente se presenta todo el proceso de observación que ocurrió en la sala de clases. La observación permitió relatar lo que estaba ocurriendo en la sala de clase mientras se llevaba a cabo la técnica de recopilación de información. En el componente de análisis se atienden los aspectos esenciales y las relaciones que surgen entre las descripciones. Por último, la interpretación como última fase del modelo se dirigió a comprender el significado de toda la información recopilada (Wolcott, 1994). Las distintas formas de obtener la información dirigieron el proceso de triangulación. La triangulación se refiere a la práctica de utilizar múltiples fuentes de datos para mejorar la credibilidad de un estudio de investigación (Creswell 2012; Hastings 2012).

Resultados

Según McCrory y sus colegas (2009), las clases de Matemáticas que se imparten en los programas de educación constituyen la única ocasión en la que el futuro educador podrá ser impactado por el conocimiento matemático. La formación de maestros de Matemáticas a nivel elemental contempla cursos de contenido matemático y cursos de metodología de enseñanza en Matemática. En lo que respecta al curso de contenido matemático, nuestros hallazgos indican que la cantidad de cursos requeridos difiere entre las universidades. En el Caso 1 solamente se requiere un curso de contenido matemático, mientras que en los Casos 2 y 3 se requieren dos cursos de este tipo. Según la NCTM (2020, 2005), la formación de docentes debe de incluir un mínimo de tres cursos enfocados en estructuras matemáticas. Es evidente que un año académico completo permite abordar un mayor contenido matemático y así lo corroboran los documentos oficiales. También se observó que la distribución de contenidos no es proporcional al tiempo de dedicación recomendado en el Marco Curricular del Programa de Matemáticas del Departamento de Educación de Puerto Rico (DEPR, 2022) que indica que, en el nivel elemental, los estándares que se consideran prioritarios son Numeración y Operación, Álgebra y Geometría. En lo que respecta al conocimiento pedagógico en el curso de contenido matemático, los documentos únicamente mencionan las estrategias instruccionales empleadas. En relación con el conocimiento curricular, no se establece una conexión en ninguno de los tres casos analizados.

En el curso de metodología de enseñanza de Matemáticas, el conocimiento pedagógico en el Caso 1 se refleja en la inclusión de herramientas y estrategias, así como en su integración en la planificación para el desarrollo del concepto matemático. En el Caso 3, el conocimiento pedagógico se manifiesta en los temas relacionados con fundamentos, estrategias y metodologías. En cuanto al conocimiento curricular presente en el curso de metodología, todo se

vincula con los documentos normativos del DEPR, en lo que respecta a los estándares de contenido, expectativas y el marco curricular.

En las visitas a las salas de clases, se observó que los profesores de los cursos de contenido matemático y de metodología, le están creando a los futuros docentes ambientes de aprendizaje donde estos puedan aprender a integrar estrategias y herramientas. Las estrategias que se implementaron durante las visitas a la sala de clases, por ejemplo en el Caso 1, se destaca el uso de la herramienta de manipulativos en la enseñanza de los conceptos matemáticos, tanto en el curso de contenido como en el de metodología. De acuerdo con uno de los participantes el uso de manipulativos, “es la manera de hacer visible los conceptos matemáticos”. Durante las observaciones en los salones de clase, se constató que los profesores estructuraban sus lecciones con el objetivo de facilitar la integración, empleando materiales manipulativos o representaciones visuales para captar la atención de los futuros docentes y darle significado matemático al concepto presentado. Asimismo, se destaca la utilización de errores en el análisis de los conceptos matemáticos por parte de los profesores como una estrategia. En los casos analizados, los futuros docentes fueron sometidos a diversas estrategias pedagógicas con el fin de que pudieran comprender los conceptos matemáticos y, en consecuencia, enseñarlos en el futuro. Es fundamental resaltar que los profesores de los Casos 1 y 3 mencionaron durante la entrevista la relevancia de utilizar herramientas manipulativas, las cuales aportan significado al concepto matemático y permiten al estudiante regresar a la experiencia cuando olvida la acción mental o el algoritmo. Las estrategias que utilice el profesor en los cursos de contenido matemático y de metodología serán la base científica para ese futuro docente. Es necesario que los futuros docentes sean expuestos a este tipo de enseñanza porque será lo que les permitirá poder enseñar la Matemática con entendimiento.

Según Muñoz-Catalán et al. (2015), el conocimiento especializado en la enseñanza de las Matemáticas se basa en diversas suposiciones. Se considera que la especialización en el ámbito matemático proviene de la profesión del docente en esta materia y se sostiene también que la especificidad en la enseñanza de las Matemáticas se refiere al tipo de conocimiento que un profesor de Matemáticas emplea para facilitar la comprensión de esta disciplina. El énfasis en el desarrollo del contenido para la enseñanza de la Matemática es diferente en los tres casos. En el Caso 1 se enfatizó el desarrollo de los conceptos; el Caso 2 en la adquisición de conocimientos y su aprendizaje y el Caso 3 en el conocimiento matemático en las distintas áreas y resolución de problemas.

Los hallazgos de esta investigación indican que es necesario establecer una comunicación efectiva entre los departamentos de Matemáticas y pedagogía.

En los tres casos analizados, esta comunicación no se lleva a cabo, hallazgo que coincide con lo que documentado por Hart et al. (2013). Es importante que los educadores, tanto en el ámbito del contenido matemático como en el de la metodología de enseñanza, colaboren de manera conjunta. Las experiencias educativas que se desarrollen para los futuros docentes deben integrar ambos tipos de conocimiento. Según Moreira y David (2008), en los programas de formación docente es fundamental fomentar ambientes de aprendizaje donde el docente en formación pueda integrar el conocimiento matemático con el conocimiento pedagógico para la enseñanza de la Matemática. Asimismo, Llinares (2007), los programas de formación docente

deben de crear ambientes de aprendizaje que faciliten a los futuros docentes la construcción de conocimientos sobre la enseñanza de las Matemáticas, al mismo tiempo que fomenten el desarrollo de su capacidad para generarlos.

El diseño del curso de contenido matemático debe orientarse y centrarse en la Matemática que los futuros docentes impartirán en la educación primaria. Amerita, por tanto, que estos futuros docentes reciban una formación inicial en la enseñanza de la Matemática de forma concreta. Esto facilitará la comprensión del concepto, tal y como señalaron durante las entrevistas los profesores de los Casos 1 y 3. La utilización de manipulativos tiene como objetivo ayudar al estudiante a formar una representación mental que le sirva de apoyo en caso de que olvide el algoritmo.

De acuerdo con Hart et al. (2013), es fundamental ofrecer experiencias en los programas de formación docente que fortalezcan de manera efectiva el conocimiento matemático de los futuros docentes de primaria, incluso el conocimiento especializado de enseñanza. En los casos analizados, los futuros docentes fueron sometidos a diversas estrategias pedagógicas con el fin de que pudieran comprender los conceptos matemáticos y, en consecuencia, enseñarlos en el futuro. Estas estrategias se mencionaron durante la entrevista y algunas pudieron ser confirmadas en las clases observadas. De acuerdo con Quintero (2014), un curso de contenido enseñado apropiadamente cumple con dos objetivos: apoya el aprendizaje de la asignatura con sentido e ilustra los métodos de enseñarla”. Finalmente los hallazgos de esta investigación servirán para comenzar a establecer los enlaces entre los departamentos de Matemática y de pedagogía en las universidades, para que la enseñanza sea un proceso integrado entre ambos departamentos. Así como también comenzar a establecer comunicación con el DEPR y los cambios que se realizan al currículo en los programas de formación docente.

Referencias y bibliografía

- Association of Mathematics Teacher Educator. (2017). *Standards for preparing teachers of mathematics*.
<https://amte.net/sites/default/files/SPTM.pdf>
- Ball, D. L. (1990). The mathematical understandings that prospective teachers bring to teacher education. *The Elementary School Journal*, 90(4), 449-466. <https://doi.org/10.1086/461626>
- Ball, D. L., Hoover, M., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Conference Board of the Mathematical Sciences. (2012). The mathematical education of teachers II. *Issues in Mathematics Education*, 17. American Mathematical Society.
<https://www.cbmsweb.org/archive/MET2/met2.pdf>
- Creswell, J. W. (2009). *Research design: Qualitative, quantitative and mixed methods approaches*. (3rd ed.). SAGE Publications.
- Creswell, J. W. (2012). *Educational research: Planning, conducting, and evaluating quantitative and qualitative research* (4th ed.). Pearson Education.
- Departamento de Educación de Puerto Rico. (2022). *Marco curricular de matemáticas*. Autor.
https://dedigital.dde.pr/pluginfile.php/147953/mod_resource/content/6/Marco%20Curricular%20Matematicas.pdf
- Hart, L. C., Oesterle, S., & Swars, S. L. (2013). The juxtaposition of instructor and student perspectives on mathematics courses for elementary teachers. *Educational Studies in Mathematics*, 83(3), 429-451.
<https://doi.org/10.1007/s10649-012-9464-0>
- Hastings, S. L. (2012). Triangulation. *Encyclopedia of research design* (pp. 1538-1540). SAGE Publications.
<https://dx.doi.org/10.4135/9781412961288>

- Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, M. (2014). *Metodología de la investigación* (6ta ed.). McGraw-Hill / Interamericana Editores.
- Humarán, Y. (2012). *El entendimiento del concepto de la fracción que poseen los maestros en formación para el nivel elemental* (Publication No. 3545795) [Disertación doctoral, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras]. ProQuest Dissertations & Theses Global.
- Li, W., & Castro Superfine, A. (2018). Mathematics teacher educators' perspectives on their design of content courses for elementary preservice teachers. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 21(2), 179–201. <https://doi.org/10.1007/s10857-016-9356-9>
- Llinares, S. (2007). *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional*. XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas – JAEM.
- Llinares, S. (2013). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educación en Revista*, 50, 117-133. <https://www.scielo.br/j/er/a/6sLmzjdmLmGHWvYPvj3SyfB/?format=pdf&lang=es>
- Ma, L. (2010). *Knowing and teaching elementary mathematics: Teachers' understanding of fundamental mathematics in China and the United States* (2nd ed). Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203856345>
- McCrory, R., Zhang, C., Francis, A. P., Ploucher, A. F., & Young, S. (2009). Factors in the achievement of preservice elementary teachers in mathematics classes. In S. L. Swars, D. W. Stinson, & S. Lemons-Smith (Eds.), *Proceedings of the 31st annual meeting of the North American chapter of the international group for the psychology of mathematics education* (Vol. 5, pp. 1179-1187). Georgia State University. http://meet.educ.msu.edu/pubs/pmena09/McCrory_Zhang_HLM_PMENA09.pdf
- Moreira, P. C., & David, M. M. (2008). Academic mathematics and mathematical knowledge needed in school teaching practice: some conflicting elements. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 11, 23-40. <https://doi.org/10.1007/s10857-007-9057-5>
- Muñoz-Catalán, M. C., Contreras, L. C., Carrillo, J., Rojas, N., Montes, M. A., & Climent, N. (2015). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas (MTSK): un modelo analítico para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas. *La Gaceta de la RSME*, 18(3), 1801-1817. <http://hdl.handle.net/11441/51501>
- National Council of Teachers Mathematics. (2005). *Highly qualified teachers. A position of the National Council of Teachers of Mathematics*.
- National Council of Teachers Mathematics. (2020). *NCTM Standards for Teacher Preparation Programs*. <https://www.nctm.org/Standards-and-Positions/CAEP-Standards/>
- Philipp, R. A., Ambrose, R., Lamb, L. L., Sowder, J. T., Schappelle, B. P., Sowder, L., Thanheiser, E., & Chauvot, J. (2007). Effects of early field experiences on the mathematical content knowledge and beliefs of prospective elementary school teachers: An experimental study. *Journal of Research in Mathematics Education*, 38(5), 438-476. https://www.nctm.org/Publications/journal-for-research-in-mathematics-education/2007/Vol38/Issue5/Effects-of-Early-Field-Experiences-on-the-Mathematical-Content-Knowledge-and-Beliefs-of-Pro prospective-Elementary-School-Teachers_-An-Experimental-Study/
- Quintero, A. H. (2014). *Hacia un plan educacional de Puerto Rico: retos y posibilidades*. Publicaciones Puertorriqueñas.
- Stake, R. E. (2006). *Multiple case study analysis*. The Guilford Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14.
- van Es, E. A., & Conroy, J. (2009). Using the performance assessment for California teachers to examine pre-services teachers' conceptions of teaching mathematics for understanding. *Issues in Teacher Education*, 18(1), 83-102. <https://www.itejournal.org/wp-content/pdfs-issues/spring-2009/10vanes&conroy.pdf>
- Wolcott, H. F. (1994). *Transforming qualitative data: Description, analysis, and interpretation*. SAGE Publications.
- Wu, H. (2009). What's sophisticated about elementary mathematics? Plenty – That's why elementary schools need math teachers. *American Educator*, 33(3), 4-14. <https://math.berkeley.edu/~wu/wu2009.pdf>



Modelos TPACK y CCDM: Algunas claves para promover la reflexión docente

Yuri Morales-López

Escuela de Matemática, Universidad Nacional

Costa Rica

ymorales@una.ac.cr

Adriana Breda

Universitat de Barcelona

España

adriana.breda@ub.edu

Vicenç Font

Universitat de Barcelona

España

vfont@ub.edu

Resumen

El objetivo de este estudio fue explorar posibles conexiones entre los modelos TPACK y CCDM para organizar la reflexión de los futuros profesores sobre el proceso de instrucción de las funciones con el uso de recursos tecnológicos. Para lograrlo, se realizó una investigación cualitativa exploratoria que examinó la capacidad de reflexión de los docentes cuando analizan situaciones ocurridas en una clase virtual de matemáticas sobre funciones desde dos miradas distintas. Los resultados muestran que, mediante la idoneidad didáctica, el CCDM puede proporcionar criterios que fomentan capacidades de valoración (y también de descripción y explicación), mientras que el TPACK, a través del estudio de sus dominios y subdominios de conocimientos, puede ofrecer mayor especificidad en las evidencias que permiten inferir conocimientos relacionados con el uso de recursos tecnológicos.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación superior; Formación docente inicial; TPACK; CCDM.

Introducción

Reflexionar sobre lo que sucede en el aula es una habilidad crucial en la formación de profesores. Es fundamental que los profesores sean capaces de analizar y comprender lo que sucede antes, durante y después de una clase, así como de describir y explicar los acontecimientos. Sin esta capacidad, resulta difícil identificar áreas de mejora en la enseñanza (Mason, 2002). En el ámbito de la Educación Matemática, se ha considerado que para que los futuros profesores adquieran esta habilidad, es necesario proporcionarles un apoyo constante y actividades estructuradas que faciliten la identificación de situaciones relevantes (Santagata, 2011).

Además de lo mencionado, nos encontramos en una era posterior a la pandemia que ha planteado desafíos significativos y ha abierto la puerta a la exploración de estrategias emergentes. Aunque muchas de las acciones tomadas durante la pandemia fueron reactivas, también expusieron a los docentes a nuevos desafíos en términos de planificación, gestión educativa y tecnología para los cuales no estaban previamente preparados (Ledezma y otros, 2023).

En este trabajo se investiga sobre la capacidad de reflexión de los docentes cuando se les pide analizar situaciones ocurridas en una clase virtual de matemáticas desde dos miradas distintas, creando y utilizando indicadores. Una de las profesoras de matemáticas de secundaria en formación (PMSF) desarrolló sus indicadores a partir del modelo Conocimiento Tecnológico Pedagógico del Contenido (TPACK, por sus siglas en inglés) (Mishra y Koehler, 2006) y posteriormente realizó un análisis de la clase. La otra participante realizó una actividad similar, creando y utilizando indicadores, y analizando desde el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticos del profesor de Matemáticas (CCDM) (Godino y otros, 2016) derivado del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino y otros, 2007).

El objetivo de esto fue contrastar las similitudes, diferencias y posibles articulaciones entre ambos modelos, desde el estudio de las producciones realizadas por las PMSF, en búsqueda de nuevas herramientas y consideraciones para la reflexión profesional sobre la incorporación inteligente y oportuna de tecnología en la clase de matemáticas. A continuación, se describen los modelos TPACK y CCDM.

Marco de referencia

Desde hace algunas décadas, el conocimiento del profesor ha sido prioritario en la investigación educativa de múltiples países pues podría permitir una mejor comprensión de la labor docente. En particular, en Estados Unidos se han realizado numerosos esfuerzos para entender la enseñanza como una actividad profesional. En 1986 y 1987, los trabajos de Lee Shulman introdujeron la idea de establecer esquemas o sistemas para organizar el conocimiento de los profesores. Shulman propuso que, además del conocimiento pedagógico (PK) y del conocimiento del contenido (CK), era necesario un conocimiento específico del profesor que involucrara el concepto de la enseñanza de manera profesional; esto lo llamó conocimiento pedagógico del contenido (PCK). A partir de esta propuesta, se desarrollaron modelos más complejos y adaptados a diferentes disciplinas.

Junto a esto, dada la creciente importancia de estudiar el papel de las tecnologías en la educación, se han realizado esfuerzos considerables para entender sus posibles impactos. Mishra y Koehler (2006) destacan el papel crucial del conocimiento docente, argumentando que los profesores son los principales agentes que determinan cómo se emplean apropiadamente las tecnologías en el aula. Estos autores proponen la existencia de tres dominios de conocimiento en esta área: conocimiento tecnológico (TK), conocimiento pedagógico (PK) y conocimiento del contenido (CK).

Además, identifican tres subdominios que surgen de las intersecciones entre estos dominios: conocimiento tecnológico pedagógico (TPK), conocimiento tecnológico del contenido (TCK) y conocimiento pedagógico del contenido, que coincide con el PCK de Shulman (1986; 1987). Finalmente, señalan un subdominio que surge de la intersección de los tres dominios, denominado conocimiento tecnológico pedagógico del contenido (TPCK, posteriormente renombrado como TPACK). En 2019, Punya Mishra enuncia un nuevo conocimiento llamado Conocimiento contextual (XK), que se deriva de concebir al manejo y comprensión del contexto como un conocimiento del docente.

Por otro lado, a partir del EOS surgió el modelo CCDM, el cual busca integrar las competencias y conocimientos didácticos-matemáticos del profesorado de matemáticas, haciendo hincapié en la interrelación entre competencias y conocimientos. El CCDM considera dos competencias clave para que los profesores pueden desarrollar su actividad: 1) competencia matemática; y 2) competencia de análisis e intervención didáctica. Esta segunda competencia consiste en diseñar, implementar, valorar y rediseñar secuencias de tareas a través de técnicas de análisis didáctico (Breda y otros, 2017); y está formada por cuatro subcompetencias: 1) competencia en el análisis de la actividad matemática; 2) competencia en el análisis y gestión de la interacción; (3) competencia en el uso d recursos; y 4) competencia en la valoración de la idoneidad didáctica Los tipos de análisis didácticos que permiten las tres primeras competencias permiten una descripción (y en algunos casos una explicación) de lo que ha pasado, que sirve de base para la valoración de la idoneidad didáctica (cuarta competencia). De estas cuatro competencias la que más se relacionan con la reflexión del profesorado es la cuarta. Esta última competencia se desarrolla enseñando al profesorado el uso del constructo idoneidad didáctica (ID) como herramienta para valorar la idoneidad del proceso de instrucción realizado.

Esta competencia se define como la capacidad de analizar y valorar la ID, buscando realizar juicios profesionales fundamentados sobre diversas situaciones relacionadas con la planificación, ejecución y evaluación de los procesos de instrucción. En los términos de Godino y otros (2023, p. 7), la ID se comprende de la siguiente manera:

Grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como óptimo o adecuado para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales pretendidos o implementados (enseñanza), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (entorno) (Godino y otros, 2023, p. 7).

Asimismo, la idoneidad didáctica está compuesta por seis criterios de idoneidad: Epistémico (CE), Cognitiva (CC), Interaccional (CI), Mediacional (CM), Afectivo (CA) y Ecológico (CEc).

Metodología

El enfoque de investigación adoptado es cualitativo. La recopilación de datos se llevó a cabo durante el período comprendido entre agosto y noviembre de 2022, involucrando a dos estudiantes de quinto año de Licenciatura en Enseñanza de Matemáticas en una universidad en Costa Rica. Esta selección se realizó de manera conveniente, considerando su interés en participar en el estudio. Las estudiantes leyeron y firmaron un consentimiento informado.

Respecto al protocolo de la investigación se establecieron dos grandes bloques formativos de ocho semanas. Durante el primer bloque se les instruyó a las participantes el sistema de organización de conocimiento del Shulman (1986; 1987) y otros sistemas vinculados a la educación matemática. En un segundo bloque formativo, se abordó el TPACK exclusivamente con la primera estudiante, y de manera independiente, se desarrollaron temas propios del EOS, el CCDM y los criterios de ID con la segunda participante. Se enfatizó en posibles aspectos, descriptores e indicadores para cada criterio en la ID, profundizando en los de Breda y Lima (2016), y para cada dominio y subdominio en el TPACK se estudiaron los aspectos considerados en Chacón y Vargas (2021).

Posteriormente se les solicitó a las participantes que observaran una grabación de una clase virtual de matemáticas sobre el tema de funciones que se ejecutó durante la pandemia COVID-19. Respecto al material videograbado corresponde a una clase impartida por tres docentes de 120 minutos de duración sobre la introducción a elementos generales del tema de funciones. Se emplearon herramientas como Zoom para la organización de la clase, GeoGebra y Nearpod para desarrollar contenido matemático, y AwwApp como pizarra virtual. Durante la misma se llevaron a cabo diversas actividades, incluyendo un problema inicial, trabajo independiente, discusiones, ejercicios, cierre de conceptos y una actividad para relacionar lo aprendido con el contexto de la pandemia de COVID-19.

De esta manera, se diseñaron dos actividades para las estudiantes (instrumentos). En la primera tarea, se les pidió que elaboraran indicadores específicos para evaluar una clase virtual de matemáticas sobre funciones, teniendo la opción de utilizar o adaptar indicadores conforme al modelo estudiado, o bien crear nuevos indicadores para destacar aspectos relevantes presentes en el video observado. El resultado de esta actividad fue la elaboración de una tabla que contenía los aspectos o indicadores creados por cada estudiante. Por otro lado, la segunda tarea consistió en redactar una reflexión de entre 3 y 4 páginas de longitud, centrada en el video de la clase virtual y utilizando exclusivamente los indicadores previamente desarrollados. El análisis de estas dos actividades se basó en el enfoque de análisis de contenido propuesto por Bardin (1996).

Análisis

Para llevar a cabo la reflexión, la primera participante propuso ocho aspectos para PK, cinco para el CK, TK, TPK y TPACK, siete para el PCK, cuatro para el TCK. En el caso de la segunda participante, a partir de los criterios ID, diseñó seis aspectos para el CE, cuatro para el CC y el CM, cinco para el CA y CI, y tres para el CEc. En la Tabla 1, se muestra la distribución completa de los aspectos que tomaron textualmente, los que adaptaron de su modelo (en algunos

casos la adaptación consistía en adaptarlos a las funciones) y los que produjeron de forma original, según las participantes. Asimismo, en la Tabla 2 se muestran dos ejemplos de las producciones de las profesoras, una de creación propia y otra de adaptación de cada modelo.

Tabla 1.

Aspectos y criterios creados, adaptados o copiados respecto a cada modelo, según las participantes

Participante 1 (TPACK)			Participante 2 (CCDM)		
Dominio y subdominio	Creación propia	Adaptación o copia textual (indicador)	Criterio	Creación propia	Adaptación o copia textual (indicador)
CK	2	3	CE	2	4
PK	5	3	CC	2	2
TK	3	2	CM	2	2
PCK	2	5	CI	3	2
TCK	1	3	CA	1	3
TPK	3	2	CEc	0	4
TPACK	2	3			

Fuente: elaboración propia a partir del estudio (en la primera columna la C es contenido y en la cuarta es criterio).

Nota: La C en la columna 1 refiere a contenido y en la cuarta columna refiere a criterio.

Tabla 2.

Ejemplos de los aspectos creados, adaptados o copiados respecto a cada modelo, según las participantes

Participante 1 (TPACK)			Participante 2 (CCDM)		
Dominio y subdominio	Creación propia	Adaptación o copia textual (indicador)	Criterio	Creación propia	Adaptación o copia textual (indicador)
Conocimiento pedagógico	Capacidad de adaptar la enseñanza de acuerdo con las bases previas de los estudiantes.	Maneja adecuadamente los errores, para generar un nuevo punto de partida para el aprendizaje.	Mediacional	Utiliza recursos tecnológicos de acuerdo con la clase virtual y libres.	Utilización de software dinámicos como GeoGebra para promover la visualización.

Fuente: elaboración propia a partir del estudio.

Un aspecto relevante para destacar en la creación o adaptación de estos elementos es la identificación de dos niveles o modalidades diferentes en los mismos. En primer lugar, la mayoría de los elementos creados en el TPACK se centraron en verificar o demostrar la presencia de ciertas situaciones, lo cual está vinculado a la capacidad de reconocer y registrar eventos, así como explicarlos, representando un nivel más superficial. Por otro lado, en los criterios de ID, los elementos que emergen son mayoritariamente criterios que impulsan el análisis, y esto va más allá de la mera presencia de un fenómeno, enfocándose en una habilidad más compleja relacionada con la reflexión y la evaluación de situaciones con el propósito de mejorar, mediante criterios orientados hacia la mejora (criterios sobre lo que debería hacerse).

Comunicación; Superior

IV CEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana, 2025.

Así, aunque hay una diferencia en la cantidad de elementos, la evidencia muestra que no es algo significativo.

Esto también se evidencia en las reflexiones individuales de cada participante. En el caso de la participante 1, ella estructuró su reflexión en dos partes distintas. En la primera parte, se limitó a describir lo que consideraba más relevante durante la clase. En la segunda sección, indicó que había redactado una reflexión sobre lo acontecido. En la parte descriptiva inicial, detalló el problema introductorio planteado y las herramientas tecnológicas utilizadas, enfatizando la capacidad del personal docente para visualizar las respuestas de todos los estudiantes en el software, buscando una respuesta consensuada que se vinculara con el tema tratado.

La participante 1 resaltó el uso del GeoGebra para la presentación y explicación de los conceptos de funciones, describiendo la manipulación realizada para ilustrar diferentes casos. Resumió los conceptos abordados en la clase, lo cual coincidió con sus intenciones al diseñar su conjunto de indicadores. Luego, describió la siguiente actividad, los ejercicios y el tiempo asignado para su realización, destacando la detección de errores o elementos faltantes que podrían generar confusiones en ciertos momentos, ejemplificando con capturas de pantalla de la videograbación. Señaló que la actividad permitió al docente identificar errores en los estudiantes al intentar esbozar una gráfica de la situación explicada. En la sección que ella denominó análisis de la clase, la PMSF estructuró su análisis directamente con los tres dominios y cuatro subdominios del TPACK; a diferencia de la sección anterior, empleó muchos de los indicadores que había definido en su batería (aunque en la sección descriptiva previa no los mencionó explícitamente, algunos de ellos pueden ser vinculados de manera indirecta). Esto puede explicarse por el hecho de que el TPACK en sí mismo no proporciona herramientas para un análisis descriptivo.

Debido a lo anterior, el análisis que ella desarrolló consiste principalmente en la enumeración de los indicadores junto con conectores gramaticales de adición, lógicos y de ejemplificación, y cuenta con escasas justificaciones, tales como relaciones causa-consecuencia, contrastes, o posibles explicaciones. Esto es en esencia, una redacción que argumenta la existencia o carencia de evidencia para justificar un indicador.

Respecto a la participante 2, aunque no dividió explícitamente las secciones, ha realizado algo similar y fue que primero efectuó una descripción y, posteriormente intentó reflexionar.

En términos del CE, la PMSF intentó abordar todos los aspectos que mencionó, haciendo hincapié en la gestión de errores, ambigüedades y representatividad de la complejidad de la noción a enseñar. La evidencia sugiere que comprendió adecuadamente la naturaleza de este criterio, ya que se centra en la calidad de la enseñanza de las matemáticas en cada uno de sus componentes. Por ejemplo, destacó que el profesor aprovechó los errores para mejorar la calidad de la explicación de los conceptos. Se debe mencionar una situación particularmente relevante en este criterio. Después de ver el video y crear su conjunto de indicadores, la PMSF incluyó uno muy pertinente sobre el uso del lenguaje matemático por parte del profesor. Observó que, aunque el lenguaje era correcto, no era adecuado y esto representaba un obstáculo para los estudiantes, especialmente en el tema de los intervalos.

En cuanto al CC, señaló que había evidencia de que los profesores tenían en cuenta los conocimientos previos de los estudiantes según el programa, pero a pesar de ello, los estudiantes aún tenían dificultades y consignó posibles formas de abordar esto. Con relación al criterio interaccional, la PMSF indicó que, aunque la presentación era adecuada, no siempre se enfatizaban los conceptos clave, señalando en cuáles debía darse más importancia. Además, resaltó en su reflexión que los profesores promovían la inclusión, pero no todos los estudiantes lograban participar activamente en las actividades. En este caso, intentó justificar todos los indicadores que había propuesto en su conjunto.

En cuanto a criterios de idoneidad afectiva y ecológica, la PMSF estrictamente señaló la presencia o ausencia del indicador. En estos dos últimos aspectos, de alguna manera, combinó sus indicadores para analizar el impacto que tuvo en los estudiantes la presentación de actividades contextualizadas.

Discusión y conclusiones

Los resultados de este estudio sugieren que el TPACK por sí solo, incluyendo sus dominios y subdominios, no proporciona suficiente orientación a un PMSF para reflexionar adecuadamente sobre una clase de matemáticas; trabajos como Niess (2014) tratan de atender esta limitación. Estas baterías de indicadores derivadas de un modelo de organización del conocimiento, que se estructuran en base a dominios y subdominios, presentan limitaciones significativas para abarcar criterios de evaluación y reflexión sobre la totalidad de la actividad desarrollada en la clase. De esta manera, aunque el modelo TPACK ofrece una guía específica para inferir diversos tipos de conocimiento, se requieren otras herramientas teóricas y metodológicas para observar y evaluar adecuadamente una clase de matemáticas. En contraparte, el uso directo de los criterios de ID, evidenció la posibilidad de que un PMSF logre realizar una descripción y un análisis más pertinentes de lo que ocurre en la clase, sin embargo, sin guía parece ser que es difícil que los PMSF concreten indicadores de análisis más específicos para clases virtuales y todo lo que un entorno como este puede contener. Las limitaciones de ambas guías sugieren generar complementariedades entre ambos.

Respecto a las posibles articulaciones de los dominios del TPACK y el CCDM, el CK está vinculado directamente con el CE en el entendido que el conocimiento que se ha pretendido valorar es el conocimiento matemático. Al igual que ocurrió con nuestras participantes, los autores Koehler y Mishra, recurren directamente a Shulman (1986) para indicar que en el CK están comprendidos el conocimiento sobre los conceptos, teorías, ideas, evidencias y pruebas, así como prácticas y enfoques ante este conocimiento. En el caso del CE, se lograron encontrar similitudes pues aborda elementos como los contenidos específicos, problemas, lenguajes, argumentos, procesos y relaciones. En el caso del PK su principal relación parece estar definida con el CC pues ambos abordan la problemática sobre los procesos y prácticas educativas, manejo de la clase, planeamiento e implementación y evaluación. Incluso, el PK hace alusión a la necesidad de comprender distintas teorías del aprendizaje y cómo emplearlas. De lo anterior se deriva directamente una relación muy estrecha entre los CE y CC con el PCK del TPACK, que en síntesis se preocupa por la comprensión del conocimiento y la forma de poder ser enseñado. En el caso del XK, la literatura permite establecer una relación directa con el CEc, aunque

debido a que no hay indicadores explícitos del XK, es posible que el CEc nutra al XK de sus propios indicadores para la reflexión.

En lo que respecta a los subdominios, las relaciones no parecieron ser tan inmediatas pues, según las estructuras, el TK, TCK y TPK parecieron ser utilizados como elementos dentro del CM. Esto, más allá de ser una dificultad, más bien permitió un desarrollo específico de los argumentos alrededor del CM. Es decir, el conocimiento específico sobre las tecnologías en general, las tecnologías orientadas a la enseñanza y las tecnologías orientadas al desarrollo de la matemática permiten aproximarse a la problemática del uso de la tecnología de forma más detallada, incluso permitiendo la generación de nuevos aspectos e indicadores que promuevan la reflexión profesional sobre la tecnología en la instrucción matemática. Este resultado podría enriquecer y aportar argumentos a los hallazgos de González-Ruiz (2017) y el análisis tecnológico didáctico de González y otros (2018).

De la comparación realizada a ambos modelos y los hallazgos en las producciones de las participantes no fue posible hacer una relación, al menos cercana, del TPACK, y los CI y CA. Es decir, una preocupación importante es que no se ve claramente qué dominios y subdominios del TPACK estudian las interacciones entre los participantes, las normas entre ellos, la negociación de significados, ni las emociones, actitudes, creencias, intereses, entre otros. Esta carencia mencionada ya ha sido detectada tanto en educación matemática (por ejemplo, Kartal, y Çinar, 2018), así como en otras disciplinas (por ejemplo, Zhang y Chen, 2022). Esto puede representar una importante oportunidad para que el CCDM aporte constructos para el estudio de estos elementos de interés, dado que el TPACK no los contiene de forma tan explícita en la definición de sus dominios y subdominios.

En conclusión, hay posibilidad de crear articulaciones entre el TPACK y el CCDM, a través de la idoneidad didáctica, pues se pueden establecer relaciones y vínculos teóricos directos entre los dominios del conocimiento pedagógico, conocimiento del contenido matemático, del conocimiento pedagógico del contenido matemático y los componentes e indicadores del criterio epistémico y, además, entre el conocimiento contextual y el criterio ecológico. En el caso del criterio mediacional, este puede verse enriquecido del estudio de los conocimientos tecnológicos, pedagógicos tecnológicos y tecnológicos del contenido matemático. Por lo que respecta a los criterios interaccional y afectivo, estos no tienen una conexión tan evidente dentro del TPACK y su combinación e integración dentro de este modelo puede enriquecer fuertemente la capacidad del modelo TPACK como herramienta para realizar una reflexión más amplia del papel de la tecnología en la educación matemática.

Referencias

- Bardin, L. (1996). *Análisis de contenido* (2.ª Ed.). Ediciones Akal.
- Breda, A. y Lima, V. (2016). Estudio de caso sobre el análisis didáctico realizado en un trabajo final de un máster para profesores de matemáticas en servicio. *Redimat*, 5(1), 74–103. <https://doi.org/10.17583/redimat.2016.1955>
- Breda, A., Pino-Fan, L. R., y Font, V. (2017). Meta Didactic-Mathematical Knowledge of Teachers: Criteria for The Reflection and Assessment on Teaching Practice. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893–1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>

- Chacón, Y. y Vargas, W. (2021). *Perfil de los estudiantes de la carrera Bachillerato y Licenciatura en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Nacional sobre los conocimientos tecnológicos, pedagógicos y del contenido función cuadrática* [Tesis]. Universidad Nacional. www.bit.ly/3MZy524
- Godino, J. D., Batanero, C. y Burgos, M. (2023). Theory of didactical suitability: An enlarged view of the quality of mathematics instruction. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 19(6), em2270. <https://doi.org/10.29333/ejmste/13187>
- Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1–2), 127–135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: El modelo CCDM. In C. Fernández, J. L. González, F. J. Ruiz, Juan A. Macías, A. Jiménez, M. T. Sánchez, P. Hernández, T. Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX*, (pp. 257–265). Málaga: SEIEM.
- González, C., Montes de Oca, N. y Guerrero, S. (2018). El análisis didáctico-tecnológico del proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática. *Transformación*, 14(2), 202–213.
- González-Ruiz, I. (2017). Idoneidad mediacional y selección de tareas matemáticas TIC. Un estudio de caso desde las perspectivas TPB y TPACK. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*.
- Kartal, B. y Çinar, C. (2018). Examining Pre-Service Mathematics Teachers' Beliefs of TPACK during a Method Course and Field Experience. *Malaysian Online Journal of Educational Technology*, 6(3), 11–37.
- Ledezma, C., Breda, A., y Font, V. (2023). Prospective Teachers' Reflections on the Inclusion of Mathematical Modelling During the Transition Period Between the Face-to-Face and Virtual Teaching Contexts. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-023-10412-8>
- Mason, J. (2002). *Researching your own practice: The discipline of noticing*. Routledge.
- Mishra, P. (2019). Considering Contextual Knowledge: The TPACK Diagram Gets an Upgrade. *Journal of Digital Learning in Teacher Education*. <https://doi.org/10.1080/21532974.2019.1588611>
- Mishra, P. y Koehler, J. (2006). Technological Pedagogical Content Knowledge: A framework for Teacher Knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017–1054. <https://doi.org/10.1111/j.1467-9620.2006.00684>
- Niess, M. L. (2014). Guiding preservice teachers in developing TPCK. In *Handbook of technological pedagogical content knowledge (TPCK) for educators* (pp. 233–260). Routledge.
- Santagata, R. (2011). From teacher noticing to a framework for analyzing and improving classroom lessons. In *Mathematics teacher noticing* (pp. 182–198). Routledge.
- Shulman, L. S. (1986). Those Who Understand: Knowledge Growth in Teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14. <https://doi.org/10.3102/0013189x015002004>
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching: Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1–23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Zhang, M. y Chen, S. (2022). Modeling dichotomous technology use among university EFL teachers in China: The roles of TPACK, affective and evaluative attitudes towards technology. *Cogent Education*, 9(1), 2013396. <https://doi.org/10.1080/2331186X.2021.2013396>



Pensamiento matemático estructural con problemas retadores de la teoría de números y la Matemática recreativa

Leonardo Favio **Trujillo** Díaz

Universidad Surcolombiana

Colombia

leonardotrujillo@usco.edu.co

Alexander **Paredes** Martínez

Universidad Surcolombiana

Colombia

alexander.paredes@usco.edu.co

Resumen

En este taller se trabajará la resolución de problemas retadores de la teoría de números y juegos matemáticos para categorizar el pensamiento matemático estructural, se aplicarán dos sistemas de actividades que involucran: el juego del SET y la aritmética congruencial. Con la aplicación de la ingeniería didáctica como metodología de la investigación y diseño, la estrategia de resolución de problemas por indagación y las orientaciones del maestro se favorece el desarrollo de este pensamiento, el cual se evidencia al alcanzar al menos una de las cuatro categorías: Hallar conexiones y patrones; reconocer relaciones; entender propiedades; generalizar y razonar. Este marco emergente es el resultado de la reorganización de los aportes de investigadores como Mason y Johnston (2004), Mulligan y Mitchelmore (2009), Harel y Soto (2017) y Gronow (2021).

Palabras clave: Pensamiento matemático estructural; resolución de problemas; teoría de números; Ingeniería didáctica.

Introducción

En la comunidad educativa el uso e identificación de estructuras es un concepto importante que no está bien explicado, pero se espera que sea enseñado; según Harel & Soto (2017) estructura es un término aplicado en muchas áreas de investigación de diversas maneras, pero en la mayoría de los casos, los investigadores no sienten la necesidad de definirlo. Los

investigadores Hoch y Dreyfus (2004) han utilizado el "sentido estructural", Mason, Stephens y Watson (2009); Mulligan y Mitchelmore (2012); Gronow (2021) el "pensamiento estructural", mientras que Harel y Soto (2017) abordan el estudio desde el "razonamiento estructural".

Según Richland (2012) muchos profesores de Matemáticas no entienden claramente el concepto de pensamiento estructural en matemáticas, en Mason (2009) se afirma que la conciencia de los profesores sobre las relaciones estructurales transforma el pensamiento y la disposición de los estudiantes para participar, los profesores deben centrarse en la estructura para que los estudiantes puedan pensar estructuralmente. Harel y Soto (2017) conceptualizan el razonamiento estructural como un grupo de habilidades para buscar y reconocer estructuras, investigar y actuar sobre estructuras, razonar en términos de estructuras generales y formar justificaciones epistemológicas.

1. Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

Este taller surge a partir de la investigación desarrollada en la tesis de doctorado “Avances en la caracterización del pensamiento matemático estructural en la resolución de problemas retadores de la teoría de números en estudiantes de educación básica secundaria”. La importancia de las estructuras en la enseñanza aprendizaje de la Matemática está más que justificada, a través de este pensamiento se identifican estructuras, se utilizan estructuras conocidas y se reconocen nuevas estructuras, pero ¿cómo desarrollar el pensamiento matemático estructural de manera que no sea un proceso instrumental y no solamente formal?, como se ha intentado enseñarlo.

Se compartirá con los participantes una forma apropiada de trabajar el desarrollo de este pensamiento matemático través de la resolución de problemas retadores de congruencias modulares y el juego de mesa SET y se dará respuesta al interrogante ¿Cuáles son las características del pensamiento matemático estructural que emergen en el contexto de la resolución de problemas retadores de la teoría de números y los juegos matemáticos en los estudiantes?

2. Referencial teórico

La teoría de números y el currículo de las olimpiadas matemáticas.

Cuando nos enfrentamos al reto de la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, en gran medida queremos lograr que los estudiantes desarrollen su pensamiento matemático dirigido a la resolución de problemas no rutinarios, que realicen conjeturas, prueben hipótesis y planteen nuevos problemas, la teoría de números que encierra problemas complejos de la aritmética permite generar una gama inagotable para desarrollar la imaginación y la creatividad. De acuerdo con Nieto y Sánchez (2022), la teoría de números hace parte de ese currículo oculto de las olimpiadas de matemáticas.

Pensamiento matemático estructural y la educación matemática.

De acuerdo con la investigación un estudiante realiza pensamiento matemático estructural si está en la capacidad de alcanzar una de las cuatro categorías que se ilustran al lado derecho de

la tabla 1, que corresponde a un enfoque relacional, donde esta categorización es el resultado de analizar las diferentes posturas y enfoques de los autores más representativos, como se muestra en la tabla, de manera que el marco utilizado es una reorganización de todos estos aportes, en contraste se puede observar este marco en la última columna de la derecha.

Tabla 1

Desempeños observables en la categorización del pensamiento matemático estructural

Mason (2003), Mason & Johnston-Wilder (2004)	Mulligan & Mitchelmore (2009)	Harel & Soto (2017)	Gronow M (2021)	
Sosteniendo Totalidades	Nivel pre-estructural		Conexiones	
Discernir detalles	Nivel de emergente	Generalización de patrones	Reconocer patrones	Hallar conexiones y patrones
Reconocer relaciones				Identifica todos los elementos de manera individual y grupal (conjunto) presentes en el problema. Reconoce los elementos del conjunto que se relacionan, identifica las variables de control y de respuesta. Encuentra regularidades, ordenaciones o secuencias.
Percibir propiedades, como generalidades que pueden ejemplificadas	Nivel estructural parcial	Reducción de una estructura desconocida a una familiar		Reconocer relaciones
				Describe y reproduce de manera matemática el tipo de conexión o asociación entre los elementos o subconjuntos particulares. Comprueba las relaciones haciendo uso de la expresión matemática. Reduce una estructura desconocida a una estructura conocida.
Razonamiento a partir de propiedades identificadas	Nivel estructural	El reconocimiento y la operación con estructuras en el pensamiento La formación de justificación epistemológica.	Identificar similitudes y diferencias.	Entender propiedades
				Detecta similitudes y diferencias en las relaciones matemáticas y los patrones involucrados. Manipula las relaciones mediante con nuevas ejemplificaciones. Descubre atributos, cualidades, características y particularidades de las operaciones que determinan la relación
	Nivel avanzado	El razonamiento en términos de estructuras generales	Generalizar y razonar	Generalizar y razonar
				Conecta relaciones matemáticas concretas con ideas abstractas Establece comparaciones de similitud con otros elementos, subconjuntos y relaciones.

Fuente: Tabla de elaboración propia, con el objetivo de contrastar las categorías expuestas encuesta privada.

Resolución de problemas.

En Dorier y Maass, (2020) se menciona que la estrategia de resolución de problemas por indagación, hace parte de la educación matemática basada en la investigación por indagación (IBME), centrada en el estudiante, en el que se les invita a trabajar de forma similar a como trabajan los matemáticos y los científicos, por lo tanto, el estudiante tiene que observar fenómenos, hacer preguntas, buscar formas matemáticas y científicas de cómo responder estas preguntas (como realizar experimentos, controlar variables sistemáticamente, dibujar diagramas, calcular, buscar patrones y relaciones, hacer conjeturas y generalizaciones), interpretar y evaluar sus soluciones, comunicar y discutir sus soluciones de manera efectiva.

Matemáticas recreativas y el pensamiento estructural. Juego de mesa SET y la congruencia modular.

De acuerdo con la investigación existe mucha relación entre la matemática recreativa o juegos matemáticos y el pensamiento estructural, puesto que la resolución de estos problemas con mucha frecuencia estimula la creatividad, la exploración de patrones, el desarrollo de estrategias y la identificación de estructuras.

El SET es un juego, como se ilustra en la figura 1. Se da inicio al juego colocando 12 cartas sobre la mesa y entre los jugadores, el primero que identifique un SET lo anunciará, posteriormente se remplazan las cartas hasta agotarlas.

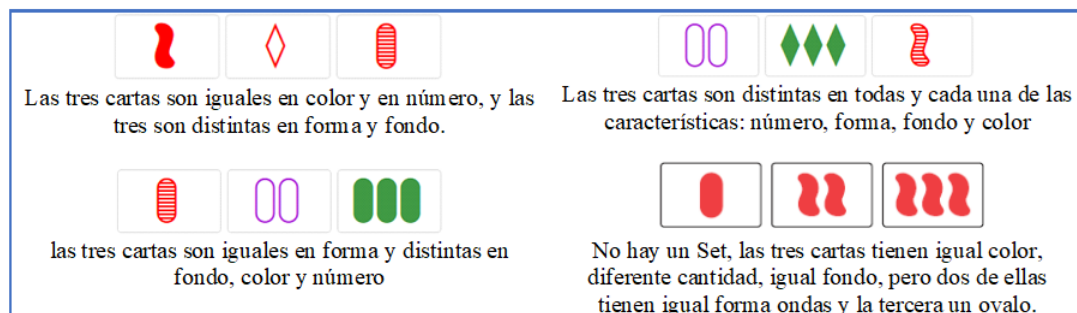


Figura 1. Ejemplos de SET y de no SET

3. Estrategia para desarrollar el taller

Descripción del trabajo a realizar

Se desarrollarán dos sesiones con la metodología de la ingeniería didáctica y la estrategia de problemas por indagación, por lo tanto, se plantea la situación y a partir de las posibles soluciones orientadas se construirá la teoría alrededor de la temática.

La primera sesión se iniciará con el juego del SET, donde junto con los participantes se analizarán todos los interrogantes que surgirán del juego. Este permite introducir a las clases de equivalencia residuales modulo tres, como se muestra en la tabla 2. Se concluye con la deducción de clase de equivalencia congruencial modulo cualquier entero y en la segunda sesión se abordarán problemas de la teoría de números en donde deban utilizar las congruencias modulares, entonces se abordará la aritmética congruencial y se hará énfasis en la categoría de pensamiento estructural alcanzado a manera de autoevaluación.

Tabla 2

Codificación de las cartas del set

Atributo				Valor	Coordinar
Número	3,1,2	?	0, 1, 2		
Color	verde, morado, rojo	?	0, 1, 2		
Sombreado	vacio, rayado, sólido	?	0, 1, 2		
Forma	diamantes, óvalos, garabatos	?	0, 1, 2		

Cartas del set igual número, diferente color, igual sombreado e igual forma	Codificación de las cartas	Suma de las coordenadas	Residuos de dividir por 3
	(2, rojo, rayado, diamantes) → (2,2,1,0)	1eras coordenadas: 2 + 2 + 2 = 6	6 residuo 3 = 0.
	(2, morado, rayado, diamantes) → (2,1,1,0)	2das coordenadas: 2 + 1 + 0 = 3	3 residuo 3 = 0
	(2, verde, rayado, diamantes) → (2,0,1,0).	3eras coordenadas: 1 + 1 + 1 = 3	3 residuo 3 = 0
		4tas coordenadas: 0 + 0 + 0 = 0	0 residuo 3 = 0
		(6,3,3,0)	(0,0,0,0)

Fuente: Tabla de elaboración propia, Al lado izquierdo se observa la codificación de acuerdo con la categoría y valor, al lado derecho se presenta la codificación de un SET cuyo modulo tres es cero.

Reflexiones finales

En la tabla 3, se propone que cada participante se autoevalúe, esto permitirá realizar unos análisis y reflexiones finales que permitirá determinar los niveles de categorías alcanzados.

Tabla 3

Nivel del pensamiento estructural en el juego del SET y la aritmética congruencial.

		Analisis SET	Analisis Congruencias	Asignación de color
Hallar conexiones	Identifica todos los elementos de manera individual y grupal (conjunto) presentes en el problema	Explora por primera vez las cartas del juego	Identifica los elementos de una clase residual Z_n	
	Reconoce los elementos del conjunto que se relacionan, es decir cual es la variable de control y cual de respuesta.	Identifica las diferentes características de las cartas: Color, forma, cantidad y relleno	Reconoce que cada número entero corresponde a un elemento en clase residual, por ejemplo en Z_7 $10 = 3$ y $-2 = 5$	
	Encuentra regularidades, ordenaciones o secuencias sin descubrir la regla.	Identifica Cuantas cartas de cada categoría existen, cuantas hay en total, si existen cartas repetidas y realiza conjeturas acerca de cómo se puede jugar	Realiza las operaciones de suma y multiplicación entre los elementos de una clase residual, además construye tablas de doble entrada operativas.	
Reconocer relaciones	Describe y reproduce el tipo de conexión o asociación entre los elementos o subconjuntos particulares.	Reconoce un set: conjunto de tres cartas donde las cuatro características son todas iguales o todas diferentes	Dada cualquier clase residual, reconoce las propiedades de Z , como son: conmutativa, asociativa, existencia del elemento neutro de la suma, existencia del elemento identidad del producto, el inverso aditivo, inverso multiplicativo y la propiedad distributiva del producto	
	Detecta similitudes y diferencias en las relaciones matemáticas y los patrones involucrados	Identifica los diferentes tipos de SET: Tres atributos iguales y uno diferente, todas las categorías diferentes, 2 iguales 2 diferentes, 1 igual y tres diferentes, 1 diferente y tres iguales.	Después de construir e identificar propiedades. Identifica las diferencias cuando la clase residual corresponde a un primo.	
Entender propiedades	Manipula las relaciones mediante con nuevas ejemplificaciones	Construye un cuadrado mágico con nueve cartas colocadas en un arreglo 3×3 de tal manera que de todas las formas (verticales, horizontales, diagonales) se forme un SET	soluciona ecuaciones congruenciales	
	descubre atributos, cualidades, características y particularidades de las operaciones que determinan la relación	Comprueba cualitativamente el teorema que dadas dos cartas existe una única carta que forma el SET	Resuelve problemas que involucran ecuaciones congruenciales	
Generalizar	Conecta relaciones matemáticas concretas con ideas abstractas	Codifican las cartas de tal manera que cada una se puede representar numericamente con cuatro coordenadas, las opera como vectores y reconoce este conjunto como la clase de equivalencia módulo 3	Identifica el teorema chino del resto	
	Establece comparaciones de similitud con otros elementos, subconjuntos y relaciones	Realizando operaciones numéricas módulo tres comprueba el teorema del SET, descubre una carta que se esconda al inicio del juego	Resuelve problemas aplicando el problema chino del resto	
			Alcanza satisfactoriamente la categoría	
			Con dificultad alcanza la categoría	
			No alcanza la categoría	

Fuente: Tabla de elaboración propia para categorizar el pensamiento matemático estructural

Organización de las actividades

A continuación, en la tabla 4 se describen las dos sesiones a trabajar y la distribución de los tiempos

Tabla 4
Organización del taller a desarrollar

Nombre de la actividad	Descripción de la actividad	Duración
Introducción y Presentación de la sesión 1	Objetivos y metodología para seguir Motivación mediante la resolución problema como conducta de entrada	30 minutos
sesión 1. Pensamiento matemático estructural mediante el juego set.	Trabajo en grupos de 5 personas Presentación del juego SET; jugar y analizar el juego SET; codificar el juego SET; El juego final, deducir la carta escondida al inicio del juego; Qué una clase de equivalencia residual; Compartir experiencias de la investigación y categorizar el pensamiento estructural	60 minutos
Conclusiones de la sesión 1	Reflexiones acerca del juego realizado para deducir los conceptos de congruencia modular.	20 minutos
Introducción y Presentación de la sesión 2	Estructura formada por las clases de equivalencias residuales.	20 minutos
sesión 2. Pensamiento matemático estructural con congruencias modulares	Trabajo en grupos de 3 personas Resolver problemas relacionados con las clases residuales; construir tablas operacionales (sumas y multiplicación) con clases de equivalencias residuales, aritmética congruencial y resolución de problemas.	50 minutos
Conclusiones de la sesión 2	Reflexiones acerca de los problemas solucionados, los cuales corresponden a la categoría de olimpiadas de matemáticas.	20 minutos
Cierre y clausura del taller.	Reflexiones finales de las dos sesiones y evaluación ¿Se cumplió con los objetivos propuestos? ¿Es Factible aplicar estas actividades para favorecer el pensamiento matemático estructural en los estudiantes?	20 minutos

Fuente: Tabla de elaboración propia

Referencias y bibliografía

- Gronow, M. (2021). *Noticing Structural Thinking through the CRIG Framework of Mathematical Structure*. Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Gronow, M. (2020). Teachers' understanding and use of mathematical structure. *Mathematics Education Research Journal*, 1-26.
- Harel, G y Soto, O. (2017). *Structural reasoning*. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 225-242.
- Harel, G. (2013). *Intellectual need*. Vital directions for mathematics education research, Springer, New York, NY., 119-151.
- Mason, J. y Johnston S. (2009). Appreciating mathematical structure for all. *Mathematics Education Research Journal*, 21(2), 10-32.
- Michèle Artigue, R. D. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogota: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Nieto S y Sanchez R. (2022). *A curriculum for mathematical competitions*. *ZDM–Mathematics Education*, 54(5), 1043-1057.

Taller; Primaria

IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.

- McMahon, L. G. (2019). *The joy of SET: The many mathematical dimensions of a seemingly simple card game*. Princeton University Press: Princeton University Press.
- Mulligan, J. y Mitchelmore, M. (2009). *Awareness of pattern and structure in early mathematical development*. Mathematics Education Research Journal, 21(2), 33-49.
- Trujillo, L (16 de septiembre de 2024). Avances en la caracterización del pensamiento matemático estructural en la resolución de problemas retadores de la teoría de números en estudiantes de educación básica secundaria [tesis de doctorado, Universidad Antonio Nariño].
- Trujillo, L y Chacón G (2024). Caracterización del pensamiento matemático estructural a partir de la resolución de problemas retadores de la teoría de números y la matemática recreativa en estudiantes de educación básica secundaria. Revista contribuciones a las ciencias sociales, São José dos Pinhais, 17(7).



Praticando a construção e o desenvolvimento de uma tarefa matemática exploratória na formação inicial de professores

Raquel Carneiro **Dörr**

Universidade de Brasília

Brasil

raqueldorr@unb.br

Regina da Silva **Pina Neves**

Universidade de Brasília

reginapina@gmail.com

Luciana Maria Dias **Ávila**

Universidade de Brasília

luavila@unb.br

Fernanda Drummond Pequeno **Valadão**

Universidade de Brasília

Brasil

nandadrummond09@gmail.com

Mikael Cristopher Souza de **Barros**

Universidade de Brasília

mikaelcristopher1@gmail.com

Milena de Souza **Mangueira**

Universidade de Brasília

milena01016@hotmail.com

Resumo

Esta comunicação científica apresenta uma tarefa matemática de Geometria, criada por licenciandos em Matemática no contexto de uma pesquisa de iniciação científica e desenvolvida entre estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola brasileira, segundo a abordagem do Ensino Exploratório. Destaca-se, nessa prática, a vivência oportunizada aos licenciandos no estudo, na construção e na implementação de uma tarefa matemática, observando, na prática, a maioria dos elementos do Ensino Exploratório como uma maneira de favorecer a aproximação entre a Matemática acadêmica e a escolar e ainda possibilitar a vivência de uma abordagem de sala de aula alternativa ao ensino expositivo.

Palavras-chave: Ensino Exploratório; Formação inicial de professores de Matemática; Geometria; Tangram; Tarefas matemáticas.

Introdução

O Ensino Exploratório no âmbito da Educação Matemática tem como objetivo principal sistematizar, em discussões coletivas, as ideias matemáticas e possibilitar aos alunos o desenvolvimento de habilidades como, por exemplo, o raciocínio lógico e a comunicação de pensamentos matemáticos diante da resolução de tarefas matemáticas valiosas (Canavarro, 2011). Sendo assim, a utilização de tarefas com natureza exploratória desempenha um papel essencial no ensino e aprendizagem da Matemática já que podem promover um aprendizado mais significativo para os alunos. Isso se deve à sua capacidade de os envolver no trabalho com as ações propostas pelas tarefas e de permitir, assim, uma maior conexão com o conteúdo matemático, objeto da tarefa. Além disso, as tarefas exploratórias auxiliam os professores a desenvolverem uma visão mais reflexiva sobre o ensino da Matemática na medida em que exigem deles um envolvimento peculiar em todo o processo, desde o planejamento até a sua implementação (Canavarro et al., 2012; Ponte 2005).

As tarefas tradicionais no ensino da Matemática, em geral, estão centradas no processo realizado pelo aluno, podendo ser consideradas atividades matemáticas, pois seu foco está relacionado à ação realizada pelo aluno durante o trabalho com a tarefa (Ponte, 2005). Nesse contexto, as tarefas propostas pelos docentes possuem um procedimento mecânico e memorizado que não favorecem a oportunidade para o aluno pensar, diferente das tarefas exploratórias que têm o potencial de fomentar nos alunos o desenvolvimento do seu pensamento matemático (Estevam et al., 2018).

Os estudos sobre o Ensino Exploratório evidenciam a importância da utilização desse tipo de tarefa, uma vez que os problemas matemáticos tradicionais propostos em sala de aula se baseiam em um ensino no qual o professor é o principal agente do ensino, e o papel ativo do aluno na aprendizagem não é valorizado, pois o foco está na exposição dos conceitos pelo professor e na repetição de procedimentos por parte dos estudantes (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). De fato, conforme Skovsmose (2000), ainda predomina, em salas de aula de Matemática, o chamado paradigma do exercício, ou seja, um modelo expositivo de ensino em que o professor apresenta ideias e técnicas matemáticas, e os alunos resolvem exercícios selecionados por ele extraídos geralmente de livros didáticos.

Na abordagem do Ensino Exploratório, por outro lado, as tarefas podem ser utilizadas para a criação de ambientes de sala de aula com engajamento da maior parte dos estudantes onde eles são convidados a explorar e formular suas próprias perguntas, promovendo um ambiente de investigação e argumentação matemáticas (Ponte, 2005; Ponte et al., 2014; Skovsmose, 2000).

Estudos sobre a formação de professores de Matemática têm evidenciado a persistente distância entre a universidade e a escola, criando dois espaços de conhecimentos denominados Matemática acadêmica e Matemática escolar, respectivamente. Associadas a esses espaços, a teoria e a prática nos processos formativos, também continuam desconectadas, tanto na formação

inicial quanto na continuada (Fiorentini, 2005). Diante desse cenário, pesquisas apontam a necessidade de investigações que priorizem a prática docente (Ponte, Chapman, 2008).

É fundamental que os futuros professores de Matemática tenham contato com essas práticas para compreender a dinâmica da sala de aula real e poder estabelecer conexões entre a Matemática acadêmica e a escolar. Para favorecer essa aproximação, uma alternativa viável é a adoção de tarefas exploratórias como objeto de estudo e prática na formação inicial dos licenciandos em Matemática, possibilitando uma aprendizagem profissional que lhes proporcione alternativas metodológicas como preparação para sua futura prática (Ribeiro; Ponte, 2020).

Fundamentado nessas ideias, foi construído um projeto de pesquisa em nível de iniciação científica composto por professoras do ensino superior e três futuros professores de Matemática, que teve como uma das questões investigativas norteadoras a seguinte pergunta: Como tarefas matemáticas de cunho exploratório podem promover aprendizagem matemática no ensino básico?

A partir dessa questão investigativa, estabeleceu-se como objetivo geral promover uma aproximação entre as Matemáticas escolar e acadêmica, utilizando as tarefas matemáticas de cunho exploratório como instrumentos de desenvolvimento profissional para esses futuros professores.

Esse objetivo se justifica pelo entendimento de que o espaço da formação inicial de futuros professores que ensinarão Matemática tem potencial para o desenvolvimento da sua aprendizagem profissional e a consequente preparação para a atuação em ambiente escolar. Isso significa que a busca de vivências com metodologias e processos voltados para a investigação, cooperação, comunicação e desenvolvimento do raciocínio matemático, propiciadas pelas tarefas exploratórias auxiliará no processo de preparação para o ensino desse componente curricular (Quaresma et al., 2024).

A partir desse objetivo geral, esta comunicação científica apresenta o referencial teórico que tem sido objeto de estudo pelos participantes nesse processo de investigação, bem como introduz uma tarefa matemática criada por eles e desenvolvida entre estudantes do nono ano do ensino fundamental de uma escola brasileira, segundo a abordagem do Ensino Exploratório. Dessa prática, destacamos a vivência proporcionada aos licenciandos no estudo, construção e implementação de uma tarefa matemática, observando, na prática, alguns dos elementos componentes do Ensino Exploratório como uma maneira de favorecer a aproximação entre a Matemática acadêmica e a escolar.

Referencial teórico

Abrantes (1988), em seu artigo que distingue os diferentes tipos de problema em Matemática, argumenta que um bom problema não deve ser visto apenas como um exercício para encontrar uma solução, mas como um recurso pedagógico que estimula o raciocínio, a criatividade e a compreensão profunda dos conceitos matemáticos. Ele destaca ainda que problemas bem escolhidos podem despertar o interesse dos alunos, incentivá-los a explorar diferentes estratégias de resolução e promover uma aprendizagem mais significativa. Além disso,

ênfatiza a necessidade de os professores selecionarem e utilizarem problemas que desafiem e estimulem os estudantes à investigação matemática, em vez de apenas reforçarem procedimentos mecânicos.

Embora Abrantes (1988) não use o termo “tarefa” em seu artigo, ao caracterizar diferentes tipos de problemas matemáticos, ele reforça a ideia de que todos os tipos devem ser usados em momentos apropriados, considerando o objetivo de aprendizagem a ser alcançado na escolha do problema. Para esse autor, essa escolha não deve visar apenas uma questão a ser resolvida, mas uma tarefa que seja essencial para desenvolver o pensamento matemático, a autonomia dos alunos e uma atitude investigativa diante da Matemática.

Ponte (2005) tipifica as tarefas matemáticas e, entre as caracterizações propostas, considera que uma tarefa é o objetivo de uma atividade, já que a execução prática de uma tarefa envolve a atividade. No mesmo texto, ele salienta a importância das tarefas na construção do conhecimento matemático e destaca que, pelo modo como são conduzidas, podem levar ao estreitamento da relação entre professor e aluno.

Já Stein et al. (2008), ao tratarem da condução de discussões coletivas, componente essencial do Ensino Exploratório, destacam que a reflexão sobre as tarefas aplicadas em sala de aula permite ao professor compreender os processos cognitivos dos alunos e aprimorar suas estratégias pedagógicas. Afinal, cada aluno está em níveis de aprendizagens diferentes, e o professor deve, com sabedoria, saber lidar com essas situações.

Canavarro (2011), em seu estudo sobre o Ensino Exploratório em conexão com tarefas matemáticas, argumenta que o Ensino Exploratório possibilita que os alunos sejam protagonistas de sua aprendizagem, o que deve ser, de fato, o objetivo final, pois quem ficará com esses conhecimentos e fará uso deles é o próprio aluno.

Entre os desafios a serem vencidos pelos futuros professores em sua formação, está a construção do conhecimento necessário para a atuação em sala de aula. É fato que a preparação sobre os conhecimentos matemáticos tem sido consolidada pelos cursos de Licenciatura, já que muitos deles ainda têm ênfase nos conteúdos matemáticos, ou seja, ainda há um distanciamento entre a teoria contida nos currículos desses cursos e a prática da sala de aula (Ponte & Chapman, 2008; Zaidan et al., 2021). Por conseguinte, para os futuros professores, as práticas com o Ensino Exploratório de selecionar tarefas adequadas para cada grupo, antecipar as dificuldades e os questionamentos dos alunos e preparar as intervenções do professor são desafios, assim como colocar em práticas as estratégias escolhidas (Martins et al., 2023).

Metodologia da Pesquisa e as Tarefas desenvolvidas

Neste estudo, interessa-nos a compreensão de fenômenos associados à formação inicial de professores. Dessa forma, ele pode ser classificado como uma pesquisa qualitativa de caráter tanto exploratório quanto descritivo, utilizando a pesquisa bibliográfica e documental como mecanismos de recolhimento de dados e informações (Borba, 2019). A investigação aqui descrita é parte de um projeto de iniciação científica em andamento na Universidade de Brasília e coordenado por docentes formadoras de professores de Matemática.

A metodologia da pesquisa proposta no projeto original pretende ser executada em três etapas, e implementada com a colaboração, cooperação e participação de três estudantes de Licenciatura em Matemática, selecionados por entrevista. Os estudantes participantes da pesquisa já cumpriram mais da metade do curso, e dois deles pretendem finalizar a graduação no ano corrente.

Como se trata de um projeto iniciado no segundo semestre de 2024 e ainda em andamento, nesta comunicação será compartilhada sua primeira parte na qual foram pesquisados, selecionados e fichados os artigos que estão sendo usados na fundamentação teórica. Ou seja, durante o período de um semestre, foram feitos estudos de artigos científicos que tratam das tarefas matemáticas exploratórias com foco em produções atuais brasileiras e internacionais. Paralelamente, os estudantes analisaram os dados recolhidos a partir da aplicação de uma tarefa matemática, desenvolvida e implementada por eles entre estudantes do 9º ano do ensino fundamental, observando as fases do Ensino Exploratório.

Apresentação e desenvolvimento da Tarefa Matemática

A tarefa matemática construída pelos estudantes foi baseada na ideia de uso do conhecido jogo de *Tangram*. O objetivo da tarefa era explorar conceitos geométricos, como formas e simetria, através da construção e resolução de desafios com esse jogo. A oficina de *Tangram* foi realizada presencialmente e contou com a participação de 24 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, sendo 13 meninas e 11 meninos.

A aplicação da tarefa matemática foi conduzida durante um período de 50 minutos, tempo escolhido para permitir a exploração dos conceitos teóricos, a prática com o *Tangram* e uma discussão sobre as soluções encontradas pelos alunos.

A oficina teve início com uma breve explicação sobre o *Tangram*, abordando sua origem e as sete peças que o compõem, conhecidas como *tans*. Essa introdução teórica incluiu uma demonstração prática de como as peças podem ser combinadas para formar diferentes figuras geométricas, e durou aproximadamente 10 minutos. Durante a apresentação, foram abordados também temas como a caracterização de figuras geométricas, os polígonos côncavos e os polígonos convexos. A intenção era familiarizar os alunos com o material e estabelecer uma base para as atividades subsequentes.

Em seguida, os alunos foram divididos em grupos de quatro e receberam um conjunto de *Tangram*, além de perguntas direcionadas para analisar as peças em relação às simetrias nelas existentes e às suas áreas. As perguntas foram as seguintes:

Observando as peças do *Tangram*, responda às solicitações:

- 1-Todas as peças são polígonos. Indique o nome de cada um deles.
- 2- Separe, dentre as peças do *Tangram*: a) dois polígonos congruentes; b) dois polígonos semelhantes, mas não congruentes, indicando a razão de semelhança de área do menor para o maior; c) dois polígonos diferentes de mesma área.
- 3-Usando como unidade de área o triângulo menor, qual a medida de área:
a) do quadrado pequeno; b) do paralelogramo; c) do triângulo médio; d) de cada um dos triângulos grandes; e) do quadrado grande que constitui o *Tangram*.

Esse momento de discussão e resolução de problemas durou cerca de 10 minutos e visou promover uma compreensão mais profunda dos conceitos geométricos através da interação com as peças do *Tangram*.

Após essa fase de trabalho voltada às questões das formas e propriedades das peças geométricas que compõem o *Tangram*, os grupos foram desafiados a montar figuras específicas utilizando as peças do *Tangram*, como um gato, um barco e uma vela. Essa prática, com duração de 10 minutos, proporcionou uma aplicação direta dos conceitos discutidos, permitindo que os alunos explorassem a criatividade e a resolução de problemas ao montar as figuras propostas.

Nos últimos 10 minutos, foi realizado um encerramento em forma de discussão coletiva, momento em que foram resumidas as principais aprendizagens e reflexões sobre a atividade desenvolvida. Os alunos tiveram a oportunidade de expressar suas descobertas e discutir como a tarefa contribuiu para uma melhor compreensão dos conceitos geométricos.

Alguns dos registros orais coletados serão apresentados na seção seguinte, buscando destacar como os alunos utilizaram o *Tangram* para explorar conceitos geométricos e as principais descobertas feitas durante a oficina.

Alguns resultados da prática em sala de aula

Após a apresentação introdutória, já nos grupos, passou-se para a resolução que tinha como objetivo trabalhar conceitos de semelhança e, ao final, verificar a criatividade dos alunos nas construções pedidas.

Em geral, os estudantes não apresentaram dificuldades na construção de suas respostas e mostraram-se engajados na participação em todos os momentos. Isso pode ser explicado pelo fato de se sentirem à vontade no ambiente fora da escola e por poderem trabalhar colaborativamente nos pequenos grupos.

Foi gratificante observar a criatividade deles, por exemplo, quando foram calcular quantos triângulos pequenos cabiam no triângulo grande. Para isso, dois grupos utilizaram dois triângulos pequenos e um paralelogramo. Sabendo que no paralelogramo cabiam dois triângulos pequenos, chegaram à conclusão de que a resposta seria quatro. Nenhum outro grupo usou essa estratégia, pois, a maioria usou apenas os triângulos pequenos.

Após essa parte da tarefa, foi realizado um jogo em que cada aluno recebeu um *Tangram* e uma palavra com o nome de um objeto. A proposta era que eles utilizassem as peças para montar uma figura que representasse a palavra recebida. Em seguida, os colegas do grupo teriam a tarefa de tentar adivinhar qual era a figura representada. Esse jogo não apenas estimulou a criatividade e o raciocínio espacial dos alunos, mas também promoveu a interação entre eles, tornando o aprendizado mais lúdico e envolvente.

Encerramos a atividade com um desafio final: os alunos deveriam usar as peças do *Tangram* para tentar montar a figura de um gato exibida em um slide. O desafio foi uma maneira

divertida e desafiadora de consolidar o aprendizado, estimulando a concentração e a resolução de problemas de maneira criativa.

No contexto do planejamento usando a abordagem exploratória, foram feitas algumas antecipações acerca das possíveis dúvidas e dificuldades dos estudantes quando da resolução da tarefa matemática, como por exemplo:

- 1- Não conseguirem responder as perguntas visualizando o *Tangram*;
- 2- Não reconhecerem as figuras geométricas côncavas na imagem;
- 3- Dificuldade em reorganizar o *Tangram* após a atividade.

Considerações Finais

A tarefa desenvolvida entre estudantes do ensino básico por futuros professores de Matemática possui características que a qualificam como uma tarefa matemática exploratória, principalmente por promover a interação ativa dos alunos com o conteúdo e incentivá-los a investigar e descobrir soluções por conta própria (Canavarro, 2011; Ponte, 2005). O uso do *Tangram*, por exemplo, favoreceu o desenvolvimento do raciocínio espacial e permitiu que os estudantes manipulassem as peças para construir figuras geométricas planas, o que reforça a exploração de conceitos geométricos de maneira prática. Além disso, a proposta de montar figuras com base em palavras e o desafio final de montar a figura de um gato a partir de uma imagem projetada são exemplos claros de tarefas que instigam os alunos ao desenvolvimento do seu pensamento geométrico, possibilitando a testagem de diferentes abordagens e estratégias de resolver problemas. Em vez de seguirem um roteiro pré-definido, os estudantes precisam investigar e encontrar soluções por si mesmos, o que contribui para um aprendizado mais significativo.

A experiência vivenciada revelou aos futuros professores de Matemática que tarefas exploratórias dessa natureza geram um engajamento maior por parte dos alunos, os quais se envolvem mais ativamente quando têm a oportunidade de explorar conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa.

O desenvolvimento prático também mostrou que o uso de materiais concretos, como o *Tangram*, pode auxiliar na compreensão de conceitos abstratos, como formas geométricas e relações espaciais.

Para estudos complementares, seria interessante investigar como a introdução de mais tarefas desse tipo influencia a autonomia dos alunos na resolução de problemas matemáticos, além de explorar como o uso do *Tangram* pode contribuir para o desenvolvimento do pensamento lógico em outras áreas da Matemática.

Do ponto de vista da experiência para os futuros professores, foi um momento em que puderam praticar uma aula não tradicional, planejada e executada em cooperação com a equipe.

Dessa prática, destacamos a vivência oportunizada aos licenciandos no estudo, construção e implementação de uma tarefa matemática, observando na prática os elementos componentes do Ensino Exploratório como uma maneira de favorecer a aproximação entre a Matemática

acadêmica e a escolar uma vez que foram instigados, a partir de um conteúdo matemático de Geometria, a planejar em colaborativamente uma tarefa valiosa, conforme termos de Canavarro (2011), que pudesse proporcionar momentos de resoluções de desafios matemáticos em conexão com o lúdico.

Por fim, a implementação prática mostrou que, selecionar, adaptar, ou criar tarefas exploratórias, os futuros professores aprimoraram suas compreensões acerca da produção matemática dos estudantes. Como esse novo olhar, passaram a valorizá-las como instrumentos importantes que indicam direções para o trabalho de busca da aprendizagem dos seus estudantes (Dörr; Pina Neves; Ribeiro, 2023).

Referências e bibliografia

- Abrantes, P. (1988). Um (bom) problema (não) é (só)... *Educação e Matemática*, (8), 7-35.
- Borba, M. C. (org.). *Pesquisa qualitativa em educação matemática*. Autêntica, 2019.
- Canavarro, A. F. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. En Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios*. Associação de Professores de Matemática.
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2012). *Actas do Encontro de Investigação em Práticas de Ensino Exploratório da matemática: o caso de Célia*. Sociedade Portuguesa de Investigação em Educação Matemática.
- Dörr, R. C., Pina Neves, R. da S., & Ribeiro, A. J. (2023). Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. *Perspectivas Da Educação Matemática*, 16(42), 1-27.
- Estevam, E. J. G., Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. (2018). Desenvolvimento do conhecimento estatístico para ensinar a partir da análise de tarefas em uma comunidade de professores de Matemática. *REnCiMa*, 9(2), 32-51.
- Fiorentini, D. (2005). A formação matemática e didático-pedagógica nas disciplinas da licenciatura em matemática. *Revista de Educação PUC-Campinas*, (18).
- Martins, M., Duarte, N., & da Ponte, J. P. (2023). Estudo de aula na formação inicial de professores de matemática: Aspectos-chave que promovem o desenvolvimento do conhecimento didático dos futuros professores. *Quadrante*, 32(1), 120-141.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Quaresma, M. (2014). Atividade exploratória na sala de aula de matemática. In Transformando o ensino de matemática: Múltiplas abordagens e práticas (pp. 103-125).
- Ponte, J., & Chapman, O. (2008). Pre-Service Mathematics Teachers' Knowledge and Development. En L. D. English (Ed.), *Handbook of International Research in Mathematics Education* (2nd ed., Vol. 1, pp. 223-261). Routledge.
- Quaresma, M. A. F., Macedo, A., Pina Neves, R. S., & Ponte, J. P. M. da. (2024). Apropriação pelos Futuros Professores de Matemática da abordagem do Ensino Exploratório em processo de Estudo de Aula. *Zetetike*, 32(00), e024005. <https://doi.org/10.20396/zet.v32i00.8676684>
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema*, 14, 66-91.
- Stein, M. K., Engle, R. A., Smith, M., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Five practices for helping teachers move beyond show and tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10, 313-340.
- Zaidan, S., Ferreira, A. C., Paula, E. F. D., Santana, F. C. D. M., Coura, F. C. F., Pereira, P. S., & Stormowski, V. (2021). *A Licenciatura em Matemática no Brasil em 2019: análises dos projetos dos cursos que se adequaram à Resolução CNE/CP 02/2015*. SBEM.33

- Rodríguez, M. (2020). La educación matemática decolonial transcompleja como antropolítica. *Utopía y Praxis Latinoamericana*, 25(4), 125-137. <https://doi.org/10.5281/zenodo.3931056>
- San Martín, D. (2014). Teoría fundamentada y Atlas.ti: recursos metodológicos para la investigación educativa. *Revista Electrónica de Investigación Educativa*, 16(1), 104-122. <http://redie.uabc.mx/vol16no1/contenido-sanmartin.html>
- Scheafer, L. y Clandinin, J. (2011). Stories of sustaining: A narrative inquiry into the experiences of two beginning teachers. *Learning Landscapes*, 4(2), 275-295. <https://www.learninglandscapes.ca/index.php/learnland/article/download/Stories-of-Sustaining-A-Narrative-Inquiry-Into-the-Experiences-of-Two-Beginning-Teachers/400>
- Schoenfeld, A. (2023). A Theory of Teaching. En K. Praetorius y C. Charalambous (Eds.), *Theorizing Teaching* (pp. 159-187). Springer International Publishing. https://doi.org/10.1007/978-3-031-25613-4_6
- Strauss, A. y Corbin, J. (2002). *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la Teoría Fundamentada*. Universidad de Antioquia.
- Trueba, L. (2020). La ruptura de la temporalidad en la investigación (auto)biográfico narrativa. En L. Porta (Ed), *La expansión biográfica* (pp. 371-390). Facultad de Filosofía y Letras Universidad de Buenos Aires
- Valero, P. (2017). El deseo de acceso y equidad en la educación matemática. *Revista Colombiana de Educación*, 73, 97. <https://doi.org/10.17227/01203916.73rce97.126>
- Williamson, G., Torres, T. y Castro, Y. (2017). Educación rural: Proyecto educativo institucional desde un enfoque participativo. *Sinéctica*, 49, 1-16. <https://sinectica.iteso.mx/index.php/SINECTICA/article/view/710/721>
- Yolcu, A. (2019). Research on equitable mathematics teaching practices: Insights into its divergences and convergences. *Review of Education*, 7(3), 701-730. <https://doi.org/10.1002/rev3.3163>



Profesores de Matemáticas: Una mirada desde la investigación narrativa

Elizabeth **Torres** Puentes
 Universidad Pedagógica
 Nacional Colombia
etorresp@pedagogica.edu.co

Resumen

La presente ponencia muestra los resultados de dos trabajos de pregrado vinculados a una investigación institucional, donde se rastrearon los sentidos que otorgan a la enseñanza de las Matemáticas, y las trayectorias de formación, de un grupo ocho estudiantes para profesor de Educación Básica Primaria, que enseñan Matemáticas en sus prácticas pedagógicas. Se usó la perspectiva de la investigación narrativa y a partir de la entrevista narrativa, se recabaron relatos que permiten mostrar el impacto de la formación de la Licenciatura en Educación Básica Primaria de la Universidad pedagógica Nacional.

Los principales hallazgos, reconocen que para que los futuros profesores reflexionen sobre sus estrategias de enseñanza de esta disciplina en las aulas de primaria, se requiere que sus experiencias de formación sean distintas de tal manera que les permita romper con prácticas tradicionales. Además, que es importante que el programa ofrezca la posibilidad de reconciliarse, con las Matemáticas.

Palabras clave: Formación de profesores; Enseñanza de las Matemáticas; Sentidos; Trayectorias.

Definición y relevancia del problema

El problema que quiere exponer esta comunicación breve se configura a partir de tres elementos que se tuvieron en cuenta en la investigación titulada “Identidades narrativas de profesores de Matemáticas vinculados a programas de formación de la Universidad Pedagógica Nacional” (Colombia) y desarrollada durante el 2022. En particular el propósito de esta ponencia es mostrar los resultados que ha tenido la Investigación narrativa, para pensar la formación de

profesores que enseñan Matemáticas en la educación básica primaria. Para ello se han considerado los resultados de dos trabajos de grado vinculados a dicha investigación. El primer elemento que configura el problema que aquí se quiere develar, es el desconocimiento que surge en la experiencia formativa, por la que atraviesan los educadores de la básica primaria que enseñan matemáticas. Durante este proceso, emergen diversas narrativas que moldean la identidad del profesor de Matemáticas, pero que se desconoce en los currículos. Consideramos que tener en cuenta dicha experiencia permitiría superar los currículos centrados en el profesor (su práctica), el conocimiento (las Matemáticas) y el estudiante (el aprendizaje) y reconocer que se deben integrar aspectos como las prácticas socioculturales o de comunidades específicas para el desarrollo del conocimiento matemático (socioepistemología y teoría de la objetivación), las redes de prácticas sociales en las que las Matemáticas contribuyen a construir la "realidad" y las relaciones de poder que estas ayudan a establecer o perpetuar (Educación Matemática Crítica), entre otros.

El segundo elemento del problema es el debilitamiento del uso de las narrativas como herramienta para reconocer la experiencia humana, y en particular la experiencia del profesor que enseña Matemáticas. Algunas investigaciones (Arias y Alvarado, 2015; Blanco, 2011) señalan que el empleo de las narrativas como práctica investigativa aún no está plenamente generalizado, sin embargo, reconocemos que, pese al desdibujamiento de las narrativas en la comprensión de la experiencia humana, estas contienen un enorme potencial investigativo. Es crucial explorar las narrativas de los estudiantes en formación docente, especialmente en el área de Matemáticas, para reflexionar sobre la relevancia de la experiencia dentro de la comunidad académica. Estas narrativas permiten identificar aspectos que no siempre son estrictamente disciplinares, pero que influyen en el desarrollo profesional y contribuyen al diseño de currículos para la formación de educadores matemáticos. El tercer elemento del problema se relaciona con el no reconocimiento del significado que los estudiantes en formación docente atribuyen a sus experiencias de aprendizaje en relación con las prácticas de enseñanza de las Matemáticas y por lo tanto determinan ciertas trayectorias. Esto podría estar vinculado a la relevancia del papel del maestro en dichas prácticas, con el objetivo de fomentar un aprendizaje significativo en los estudiantes. Tal como se mencionó en la primera tensión, las Matemáticas suelen ser la asignatura que genera mayores emociones negativas en los individuos, por esta razón, a medida que los estudiantes avanzan en su formación, pueden surgir desmotivación y vacíos conceptuales. En este contexto, otorgar sentido a lo que se enseña cobra especial importancia, implicando la necesidad de implementar diversas estrategias didácticas que faciliten una comprensión profunda y significativa de los conceptos matemáticos.

En relación con los antecedentes para la investigación, se realizó una búsqueda exhaustiva de trabajos que hubieran abordado categorías como i) narrativas de maestros de Matemáticas, ii) sentidos de enseñanza de las Matemáticas, iii) trayectorias de formación de profesores que enseñan Matemática. En la primera categoría, se identificaron investigaciones que dan cuenta de narrativas de maestros respecto a la Educación Matemática, el análisis de su formación y sus experiencias en la enseñanza de las Matemáticas (Carrillo, et al. 2019; Bohórquez, 2019; Salazar, 2021; Guerrero, 2019). Dichas investigaciones están relacionadas con la formación y el ejercicio profesional de los maestros de Matemáticas a través del uso de narrativas. Estas narrativas resultan valiosas al permitir reflexionar, proponer ideas y analizar las vivencias asociadas al

aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas escolares, y ponen en relieve la relación entre Educación Matemática e investigación narrativa.

Ahora bien, en cuanto la tercera categoría de los antecedentes, los sentidos de la enseñanza de las Matemáticas, se ubicaron trabajos (Bonilla y Medina, 2014; Castellanos, 2018), los cuales coinciden en la importancia de estudiar cómo a partir de sus experiencias pedagógicas, los profesores, suscitan procesos de reflexión, motivación y autoestima en la enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Finalmente, en relación con las trayectorias de formación de profesores de Matemáticas, los trabajos, que ubicamos (Rendón, 2017; Parada y Peña, 2018; Sicuamía, 2017), se interesan por el diseño e implementación de instrumentos que permitan enriquecer las trayectorias de formación de los profesores de Matemáticas, algunos de ellos hacen centro en trayectorias hipotéticas de aprendizaje.

Referencial teórico

Dado el propósito de esta ponencia, se desarrollan a continuación las categorías teóricas que orientaron los trabajos de grado en vínculo con la investigación institucional. La primera categoría es la investigación narrativa como una forma de dar cuenta de las trayectorias de formación de los profesores. Partimos que los profesores son narradores innatos como lo plantean McEgan (2005) y Gudmundsdottir (2005), narran sus experiencias en relación con las prácticas pedagógicas, con las relaciones con los otros, con el sistema educativo, etc., lo que permite comprender las dinámicas de la escuela. Salazar (2019) destaca que tanto maestros como estudiantes "viven la clase", ya que experimentan el tiempo y el espacio en el contexto de las Matemáticas, otorgando sentido a sus acciones y expresando emociones. Según la autora, "la narrativa se utiliza como una herramienta para reconocer y superar las impresiones negativas asociadas a las Matemáticas y sus procesos de enseñanza y aprendizaje" (p. 84). Esto permite profundizar en la comprensión de las prácticas matemáticas a través de las perspectivas y voces de quienes participan directamente en ellas. La investigación de esta autora nos permite reconocer que lo que narran los profesores de Matemáticas, tiene que ver con:

- Sus experiencias en la clase, las cuales están enriquecidas por una identidad y saberes particulares.
- El cuerpo del maestro de Matemáticas también narra, con su corporalidad dice mucho de las interacciones sociales entre estudiante y profesor en clase de Matemáticas.
- Las reflexiones narradas de los profesores retoman los diseños de sus clases, su gestión y los criterios que usan para evaluar.

Una segunda categoría teórica tenida en cuenta es el sentido que se le otorga a la enseñanza de las Matemáticas. Ordoñez, Mondragón y Muñoz (citado en Cerquera et al, 2016), reconocen que "el sentido alude a las connotaciones que evoca una palabra en nuestra mente; es diferente en cada persona, dependiendo de sus experiencias y de los contextos en los que se desenvuelve, razón por la cual podría caracterizarse como cambiante" (p. 275). Por su parte, González Rey (2010) afirma que el concepto de sentido "aparece solo en el último período de la obra de Vygotsky y su presencia fue efímera. Sin embargo, fue una idea que en poco tiempo tuvo una interesante evolución" (p.242). Identificar el sentido que le otorgan a sus experiencias de aprendizaje los docentes en formación de la licenciatura en educación básica primaria, permite reflexionar sobre el papel del educador en Matemáticas. Según lo planteado por Cerquera et al.

(2016), la diversidad de narrativas de los maestros refleja las condiciones de vida de cada individuo, las cuales configuran un sentido que los impulsa tanto a transformarse personalmente como a influir en el grupo al que pertenecen, facilitando así la reconstrucción de su realidad. Los autores señalan que, al revelar sus vivencias junto con el contexto en el que están inmersos, los docentes muestran los significados que le otorgan a la docencia. Este proceso favorece una interpretación reflexiva de su realidad, dotando de sentido a su labor y consolidando su identidad como educadores.

La tercera categoría del marco teórico que se expone es las trayectorias, las cuales tienen una relación con las identidades que se encuentran en constante construcción a lo largo de la vida, y que “a medida que se pasa por una sucesión de formas de participación, las identidades forman trayectorias” (Cacho, 2004, p.80), se puede entender que las trayectorias formativas en el ámbito de la educación son tan únicas como la singularidad de cada individuo. En este sentido, el concepto de trayectoria “no implica un camino o destino fijo; no es un recorrido predecible ni un esquema definido de antemano, sino un proceso dinámico, con un impulso propio y condicionado por diversas influencias”. (p.81). Otros investigadores, como Panes y Lazzaro (2018), destacan que las trayectorias formativas de los docentes están moldeadas por diversos factores. Según estos autores, “la práctica docente y la orientación pedagógica de un profesor se definen a partir de una serie de acontecimientos, saberes, experiencias, creencias y valores que se desarrollan a lo largo de su formación” (p.10). Esto implica que las trayectorias no solo se construyen a partir de los conocimientos adquiridos formalmente durante la formación docente, sino también a través de otros saberes que se acumulan y transforman con el tiempo, enriqueciendo el desarrollo profesional.

Al igual que las narrativas, las trayectorias formativas poseen un carácter temporal, ya que integran el pasado, el presente y el futuro, permitiendo valorar y dar sentido al proceso de formación. Cacho (2004) propone que las trayectorias se estructuran en tres dimensiones temporales: Dimensión del tiempo biográfico, en la que se organizan secuencias según los ciclos de vida; Dimensión del tiempo educativo, determinada por los ciclos y dinámicas escolares; Dimensión del tiempo histórico, que refleja las oportunidades y limitaciones del contexto social, así como las políticas laborales y educativas. De acuerdo con este autor, “el análisis de las trayectorias formativas permite reconstruir una parte del proceso de configuración de la identidad profesional de los profesores, así como del imaginario sobre lo que implica ser docente” (Cacho, 2004, p.81). Este enfoque no solo brinda una visión amplia de los conocimientos esenciales para la práctica en el aula, sino también de aquellos que necesitan adquirirse o transformarse para mejorar continuamente la labor educativa.

Método y desarrollo conceptual

Las dos tesis que se vincularon al proyecto se apoyaron en una perspectiva cualitativa, en el marco de la investigación narrativa, la cual implica reconocer que este enfoque “tiene como eje de su análisis a la experiencia humana” (Blanco, 2011, p. 139) pues su propósito es “entender y dar sentido a la experiencia” (Connelly y Clandinin, 1990, p. 139). Dichos trabajos recabaron las narrativas de un grupo de estudiantes para profesor para la básica primaria, con la intención de rastrear los sentidos que ellos le otorgan a la enseñanza de las Matemáticas y las trayectorias que construyeron durante el tiempo de formación. También los dos trabajos hicieron uso de la

entrevista narrativa, entendida como, una forma particular de la entrevista en profundidad (Riessman, 1993; Flick, 1998, Schütze, 2010; Appel, 2005) que resulta idónea para reconstruir procesos subjetivos que se desarrollan en el tiempo. Una diferencia importante entre la entrevista narrativa y la entrevista en profundidad o la entrevista es que no posee un guion de preguntas establecido de antemano y por lo tanto no se preocupa como aquéllas, por determinar tres aspectos fundamentales de la interacción entre el entrevistador y su sujeto de investigación: 1) la selección de los temas; 2) el orden de las preguntas, y 3) el lenguaje utilizado. En la entrevista narrativa, la participación del entrevistador es mínima, y especialmente se deja hablar al entrevistado sobre su experiencia con sus propias palabras. Éstas son una vía privilegiada de acceso a procesos subjetivos de significación que a su vez se nutren de discursos sociales, normas y valores culturales. El relato de vida se dirige a otro. Por ello la calidad de la escucha es clave y ésta debe prevalecer sobre lo “sabido”. (Agoff y Herrera, 2019, p. 315)

Cada trabajo entrevistó 4 estudiantes para profesor de la Licenciatura en Educación Básica primaria de la Universidad Pedagógica Nacional (Colombia), que en sus prácticas pedagógicas se han inclinado en la enseñanza de las Matemáticas, es decir, que se contó con los relatos de 8 maestros en formación. Dichos relatos se sistematizaron en matrices de análisis a partir de la triangulación de la información con la teoría y los aspectos metodológicos. A partir de dicha triangulación se ubicaron las cláusulas narrativas correspondientes.

Así en uno de los trabajos se analizaron las cláusulas narrativas que muestran las creencias/concepciones/identificación con la importancia o no del porque se enseña Matemáticas, y en el otro trabajo se analizaron las narrativas que muestran las dimensiones propias de una trayectoria de formación (Cacho, 2004).

Resultados / conclusiones

En relación con el sentido que otorgan los maestros en formación, a la enseñanza de las Matemáticas se presentan relatos en los que los entrevistados comparten experiencias relacionadas con la enseñanza de las Matemáticas, destacando las creencias, percepciones, que tienen de esta disciplina. Los estudiantes para profesor consideran que enseñar Matemáticas cobra sentido cuando se desaprende, lo que quiere decir que como profesores en formación son conscientes que para enseñar los contenidos deben re-aprenderlos de otra forma, de tal suerte que reconcilien a sus estudiantes con esta área, tal como se evidencia en el siguiente relato,

Pienso que se ha venido transformando ese pensamiento de las matemáticas y reconociendo su utilidad en la vida. Yo quiero lograr eso, que mis estudiantes descubran, a través de las clases de matemáticas, que son importantes, que las necesitan en sus vidas, que no son tan difíciles como pueden pensar, que sepan que no son malos, que no son negados para las matemáticas. (Entrevista publicada en Muñoz y Romero, 2023)

En el relato se evidencia que, para los estudiantes de la licenciatura, es importante que el currículo le aporte otras miradas sobre la enseñanza de las Matemáticas, y se potencie experiencias de enseñanza que permita un cambio en la cultura de considerar las Matemáticas como una disciplina “coco”. Los maestros en formación asumen que la implementación del currículo de las Matemáticas implica construir propuestas de innovación, para superar prácticas que los lleven a enseñar las Matemáticas, tal como ellos en otrora las aprendieron. Al respecto el siguiente relato,

Hoy en día, pienso que es bonito poder hacer algo diferente para enseñar las matemáticas, contrario a lo que pasé en la básica primaria, pues yo no veía lo útil de aprender matemáticas, solo pensaba en lo aburrida y difícil que era y en pasar la materia y ya, no me gustaba, me frustraba. Entonces como profe debo buscar maneras diferentes de enseñar y no caer en lo mismo de siempre llegar a usar el tablero y ya. (Entrevista publicada en Muñoz y Romero, 2023)

El entrevistado reconoce que él no puede enseñar las Matemáticas de la manera como las aprendió, ya que los métodos empleados no fueron los más funcionales, ni motivantes, por tanto, reconoce que el maestro que enseñe Matemáticas requiere plantear experiencias desde donde el estudiante sea quien construya conocimiento matemático.

Los resultados de estos trabajos también muestran cómo es necesaria una reconciliación de los maestros en formación con las Matemáticas, para que le encuentren sentido a su enseñanza. De acuerdo con esta idea el siguiente relato,

Totalmente, cambió [la entrevistada se refiere a su relación con las matemáticas]. Ya no me dan miedo las matemáticas. Siento que cambió la forma de ver las matemáticas a una manera más tranquila, creativa, más linda, gracias precisamente a la formación en matemáticas de la licenciatura, y me permitió reflexionar sobre la manera como el maestro siempre ha de influir en nuestro crecimiento como personas. (Entrevista publicada en Muñoz y Romero, 2023)

La entrevistada alude al cambio de perspectiva frente a las Matemáticas, a partir de las experiencias propiciadas en la licenciatura, donde se describe un nuevo sentido a la enseñanza de las Matemáticas. Los relatos, en el marco de la investigación narrativa, permitieron ver que no se requiere un gusto o afinidad con las Matemáticas, sino que en el programa de formación se debe incentivar una relación distinta con las Matemáticas que empodere y no reivindique que hay “personas buenas o personas malas para las Matemáticas”, tal como se muestra en el siguiente relato,

Hoy en día, haciendo la licenciatura en la Pedagógica, renació en mí un amor por las matemáticas que tengo escondido desde chiquita, pero no sabía que existía. Sí, me gustan las matemáticas, me encantan. Ya confirmé que soy buena para las matemáticas y que puedo hacer bien las cosas en mis clases cuando las enseño. (Entrevista publicada en Muñoz y Romero, 2023)

La entrevistada descubre que ama la Matemática gracias a la formación que recibió en la Licenciatura y sus experiencias de enseñanza, reconciliándose frente a sus experiencias en el aprendizaje poco gratas.

Ahora bien, en relación con la categoría que aborda las trayectorias, se ha considerado la dimensión educativa (Cacho, 2004), pues en ella se evidencia el aporte de la Licenciatura a la formación de los profesores de Matemáticas en formación. En dicha dimensión encontramos tres elementos que marcan a los entrevistados desde la formación en la licenciatura: el uso del material didáctico, la gestión de las clases de Matemáticas y el saber propio de las Matemáticas. Para los entrevistados, la implementación de material didáctico en las clases y la forma como enriquece la experiencia del conocimiento del estudiante no es un asunto menor. En relación con la anterior afirmación encontramos el siguiente relato,

digamos ella nos explicaba cómo utilizar el material y uno lo utiliza uno mismo, pero ya cuando llega a repartirlo con los estudiantes (...) como que llegan a haber confusiones, entonces sería bueno que todo lo que ella nos explica del material lo pudiéramos implementar en una práctica experimental con

nosotros mismos. [...] les decía entonces como que ellos siguen con eso, entonces siento que el haber implementado ese material de fracciones que nos lo enseñó, la misma profesora [de la licenciatura] ha sido como el momento más satisfactorio... (Entrevista publicada en Jiménez y Herrera, 2023)

En el relato, se evidencia cómo el material didáctico impactó su trayectoria de formación, pues considera que tiene ahora más elementos para enseñar de manera adecuada, y lo ha podido experimentar en su práctica pedagógica.

Otro elemento es la formación que recibe el estudiante para gestionar una clase de Matemáticas. Una de las entrevistadas expresa en su relato que efectivamente en su trayectoria se hizo presente la formación en la gestión del aula,

y pues ya las clases de matemáticas que nos daba la profe que siento que desde ahí también uno seguir retomando todo lo que ella nos decía y todo lo que pues debemos aprender para poderle dar las clases bien a los niños (4 - 48) [...] como ella nos enseñaba, cómo poder llegar a los estudiantes de una manera diferente, entonces siento que todo eso ha funcionado para las prácticas después de la pandemia también, porque pues apenas se siguió el mismo recorrido con el material didáctico. (Entrevista publicada en Jiménez y Herrera, 2023)

Lo que aporta el anterior relato, refiere a que, en su trayectoria, la estudiante reconoce que es importante que la formen para la gestión en el aula, con el fin de tener resultados en el aprendizaje de sus estudiantes. En relación con el saber en Matemáticas, encontramos que para los entrevistados es necesario el comprender los objetos matemáticos para poder enseñarlos de una manera distinta a la que ellos los aprendieron, muchas veces sin un sentido o aplicación relevante, esto tiene relación con lo ya expuesto en la categoría sobre los sentidos, tal como se observa en el siguiente relato,

entonces lo que es sumar, lo que es restar, los números, el conteo entonces eso me ha servido mucho, todo lo que aprendemos en matemáticas es para nuestra vida que es lo que nos enseñó la profesora en la Licenciatura. (Entrevista publicada en Jiménez y Herrera, 2023)

En este sentido, se reconoce que enseñar Matemáticas en la educación básica primaria requiere un conocimiento tanto de las Matemáticas como de los procesos de aprendizaje y enseñanza de sus nociones. Comprender los conceptos adecuados durante el proceso de formación implica que el docente sea capaz de diseñar actividades que permitan construir dichos conceptos junto a los niños de manera lógica y precisa.

El hecho que los entrevistados reflexionen sobre cómo el programa les ha aportado para desarrollar una clase innovadora, con un saber robusto y el uso de materiales, nos lleva a considerar que sus trayectorias de formación se fortalecen en el manejo de las didácticas específicas. Además, se reivindica que, con la perspectiva de investigación narrativa, se pueda acceder a la experiencia de los sujetos, en este caso profesores en formación, quienes son reflejo de los propósitos de formación del programa.

Referencias y bibliografía

Agoff, C., y Herrera, C. (2019). *Entrevistas narrativas y grupos de discusión en el estudio de la violencia de pareja. Estudios sociológicos*. 37(110), 309-338.: <https://doi.org/10.24201/es.2019v37n110.1636>

- Arias Cardona, AM y Alvarado Salgado, SV (2015). Investigación narrativa: apuesta metodológica para la construcción social de conocimientos científicos. *CES Psicología*, 8 (2), 171-181.
- Blanco, M. (2011). Investigación narrativa: una forma de generación de conocimientos. *Argumentos*, 24(67), 135-156.
- Bohórquez, S. (2019). *Reflexionando sobre mi experiencia docente con los números enteros a través de narrativas*. Tesis para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Bonilla, C. y Medina, J. (2014). *Sentidos otorgados a las estrategias pedagógicas para incentivar la motivación en un proceso de aprendizaje de matemáticas en quinto de primaria del Colegio Unidad Pedagógica*. Tesis para optar al título de psicólogo. Bogotá: Pontificia Universidad Javeriana.
- Cacho Alfaro, M. (2004). *Profesores, trayectoria e identidades*. Revista Latinoamericana de Estudios Educativos (México), XXXIV(3), 69-11
- Carrillo H., González L., y Quesada L. (2019). *Una mirada retrospectiva a la evolución del docente de Matemáticas desde la perspectiva narratológica*. Tesis para optar por el título de magister en docencia de la matemática. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Castellanos Sánchez, M. T. (2018). *IB079 Sentido otorgado a las situaciones de la práctica docente: Un estudio con profesores en formación. Tecné, Episteme y Didaxis: TED*, (Extraordin). <https://revistas.pedagogica.edu.co/index.php/TED/article/view/8851>
- Conelly, F. y Clandinin, D. (1990). Stories of Experience and Narrative Inquiry. *Educational Researcher*, 19(5), 2-14.
- Cerquera, A, Corredor F., Cuero C, y Rivera, V. (2016). *Sentido y Significado de ser Docente: Reflexiones para repensar la educación*. *Plumilla Educativa*, 18(2), pp. 303–317. <https://doi.org/10.30554/plumillaedu.18.1970.2016>
- Guerrero, N. (2019). *Narrativas civilizatorias de la enseñanza de las matemáticas en Colombia*. Tesis para optar al título de Doctor en educación. Bogotá: Universidad
- Gudmundsdottir, S. (2005). La narrativa del saber pedagógico sobre los contenidos. En McEgan, H., y Egan, K. (comps). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación*. Amorrortu editores.
- González-Rey, F. L. (2010). *Las categorías de sentido, sentido personal y sentido subjetivo en una perspectiva histórico-cultural: un camino hacia una nueva definición de subjetividad*. *Universitas Psychologica*, 9(1), 241-253.
- Jiménez, YS y Herrera, B. (2023). *Narrativas sobre las prácticas educativas en pandemia: trayectorias de formación en matemáticas para la primaria básica*. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/18628>
- McEgan, H. (2005). Las narrativas en el estudio de la docencia. En McEgan, H., y Egan, K. (comps). *La narrativa en la enseñanza, el aprendizaje y la investigación*. Amorrortu editores.
- Muñoz, C. X. y Romero, L. M. (2023). *Una mirada narrativa sobre el sentido de la experiencia de ser docente de primaria que enseña matemáticas..* Recuperado de: <http://hdl.handle.net/20.500.12209/19054>
- Panes Chavarria, R., y Lazzaro-Salazar, M. (2018). *Trayectorias formativas y la identidad profesional de futuros profesores de matemática*. UCMaule, (54), 9-34: <http://revistaucmaule.ucm.cl/article/view/51>
- Parada Pacheco, E. F., y Peña Saza, W. (2018). *Interdisciplinariedad, una exhortación a la formación del profesor de Matemáticas*. Bogotá. [Trabajo de grado de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional]: <http://200.119.126.32/handle/20.500.12209/10980>.
- Rendón Mayorga, C. G. (2017). *Diseño de tareas mediadas por la historia del concepto de límite dirigidas a la formación del profesor de Matemáticas*. Bogotá. [Trabajo de grado de Maestría, Universidad Pedagógica Nacional]: <http://200.119.126.32/handle/20.500.12209/9457>
- Salazar, C. (2021). *Narrativas de profesores de matemáticas sobre su experiencia profesional y de formación: Aproximación a las subjetividades emergentes*. Tesis para optar al título de doctor en Educación. Bogotá: Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Salazar, Claudia (2019). Una perspectiva de investigación narrativa en matemática educativa. *Investigación e Innovación en Matemática Educativa*, 4, 79-100.
- Sicuamía Pineda, G. E. (2017). *Trayectorias de aprendizaje en la orientación espacial para la formación de profesores de básica primaria en ejercicio*. Bogotá. [Trabajo de grado de Maestría, Universidad Distrital Francisco José de Caldas]: <https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/8882>



Promoción de la argumentación en geometría: Un análisis de las intervenciones de futuros docentes de Matemática

Andrea Araya

Centro de Investigación en Matemáticas y Meta-Matemáticas, Universidad de Costa Rica
Costa Rica

andrea.arayachacon@ucr.ac.cr

Rebeca M. Ventura

Centro de Investigación en Matemáticas y Meta-Matemáticas, Universidad de Costa Rica
Costa Rica

rebeca.ventura@ucr.ac.cr

Resumen

La argumentación es fundamental en el aprendizaje de la Matemática, ya que está estrechamente vinculada con la elaboración de argumentos, la movilización de justificaciones y el fortalecimiento del razonamiento matemático. Un futuro educador matemático debe fomentar intercambios discursivos argumentativos en sus clases para construir conocimiento matemático y facilitar el acceso a las justificaciones que permitan al estudiantado consolidar su comprensión de los conceptos. En esta ponencia, se presenta la identificación de acciones para promover la argumentación utilizadas por futuros educadores en su práctica profesional en una clase de geometría. Se llevó a cabo una investigación cualitativa, en la que se analizaron grabaciones de clases de geometría en secundaria. Utilizando el marco conceptual de argumentación colectiva TSCA, se identificaron gestos específicos que fomentan la argumentación, que son limitados por las tareas matemáticas en las que se desarrollan.

Palabras clave: Argumentación Colectiva; Argumentación Matemática; Costa Rica; Formación de Profesores; Razonamiento.

Definición y relevancia del problema

Las actividades argumentativas en el aula de Matemática promueven el desarrollo conceptual matemático y favorecen un acercamiento a la Matemática como disciplina (Staples y Newton, 2016). Esto debido a sus vínculos con el establecimiento de conjeturas, la realización de justificaciones, la exploración y la evaluación de proposiciones matemáticas. Además, el valor de la argumentación en las clases de Matemáticas va más allá del ámbito escolar, ya que contribuye a la formación de ciudadanos críticos y reflexivos. Este proceso ocurre dentro de una estructura discursiva que considera premisas y condiciones para la movilización y organización del conocimiento (Schwarz, 2009).

El rol matemático y formativo de la argumentación justifica que actualmente, se haya incorporado de forma explícita en distintos planes de estudios de diversos programas de Matemática a nivel mundial (e.g. MEN, 2006). En Costa Rica, la reforma curricular del 2012 incorpora razonar y argumentar en los Programas de Estudio de Matemática (PEM) como uno de los cinco procesos matemáticos (MEP, 2012). Según los PEM, estos procesos matemáticos plantean una acción docente explícita para la mayoría de las actividades que se realizan en clase, relacionadas con la resolución de problemas, que se encuentran de forma transversal en todas las áreas (MEP, 2012). Bajo este panorama, la formación de futuros docentes de Matemática (FDM) debe capacitarlos para diseñar y gestionar actividades en las que los estudiantes tengan la oportunidad de construir y discutir argumentos matemáticos, entre otros.

Diversas investigaciones en Educación Matemática han evidenciado la importancia del rol del docente en el desarrollo de la argumentación en el aula (e.g. Bayindir et al., 2024; Solar y Deulofeu, 2016). En particular, los resultados del estudio de Mueller et al. (2014) destacan que el docente de Matemáticas emplea una combinación de acciones al promover la argumentación, entre ellas hacer públicas las ideas de los estudiantes y extender las ideas de los estudiantes. Dada la relevancia del docente en la gestión de actividades argumentativas y la explícita instrucción ministerial en Costa Rica, el objetivo de esta investigación es identificar y analizar los distintos apoyos que utilizan los futuros profesores de Matemáticas en la promoción de la argumentación en sus clases de Matemática. Los datos y resultados presentados en esta ponencia pertenecen a un estudio más amplio sobre la incidencia de la formación de docentes en la promoción de la argumentación.

Referencial teórico

En la Investigación en Educación Matemática, existen diversas posturas teóricas sobre el concepto de argumentación (ver la revisión que realiza Molina et al. (2024)). La argumentación se enmarca dentro de las diversas interacciones discursivas que se desarrollan dentro del aula de Matemáticas, la cual se distingue al hacer disponibles proposiciones matemáticas acompañadas con las justificaciones que respaldan la aserción. Esta involucra un intercambio verbal para llegar a una conclusión a partir de la creación y evaluación de argumentos (Hanna, 2020) y busca que los participantes se convenzan del razonamiento empleado; dicho en palabras de Molina et al. (2024) busca aumentar o disminuir la aceptación de la afirmación en cuestión.

Para esta comunicación, se entenderá *argumentación* desde la perspectiva de Krummheuer (1995), el cual la define como un proceso social y discursivo donde se hacen disponibles las razones que respaldan una proposición cuando ésta es retada o puesta en duda. El producto de la argumentación es un argumento y dentro del proceso argumentativo se pueden generar distintos argumentos. El argumento, como producto, es una representación del razonamiento seguido por las personas que participan de los intercambios discursivos (Nussbaum, 2008). Para identificar un argumento, se seguirá el esquema básico de Toulmin (2003), el cual ha sido utilizado en investigaciones en Educación Matemática (e.g. Conner et al., 2014; Molina et al., 2024). El esquema básico de un argumento que propone Toulmin tiene tres partes: datos, conclusión y garantía. Los datos son aquellas proposiciones que fundamentan la conclusión enunciada, la garantía son las proposiciones que justifican la relación entre los datos con la conclusión y la conclusión es la proposición cuya aceptabilidad está en cuestión. Según Krummheuer (1995), durante el proceso argumentativo es retadora la identificación de la tipología de estas proposiciones puesto que no se desarrollan, necesariamente, en un orden particular. De manera que, es una herramienta que cobra relevancia teórica y metodológica una vez que se tienen los diálogos para comprender y mejorar futuras actividades argumentativas en clases de Matemática.

En el contexto educativo, cuando se hace referencia a la argumentación es relevante referirse a la argumentación colectiva. El nombre sugiere que se trata de un proceso social donde en conjunto se construyen y evalúan argumentos (Nussbaum, 2008). En el caso de clases de Matemáticas, la argumentación colectiva es entendida como una argumentación donde el docente y/o los estudiantes intercambian proposiciones matemáticas y sus respectivos respaldos (Conner et al., 2014). Para analizar las distintas acciones que los docentes realizan durante la argumentación colectiva, Conner et al. (2014) proponen el referente teórico conocido como Teacher Support of Collective Argumentation (TSCA en inglés), el cual fue construido analizando clases de futuros profesores de Matemática. Asimismo, dicha propuesta utiliza el modelo de Toulmin para analizar la actividad argumentativa para identificar los distintos apoyos docentes.

Dicho modelo contempla tres tipos de acciones. El primer tipo son las *contribuciones directas* del docente a una parte del argumento, esto es cuando el docente brinda explícitamente el dato, la conclusión o la garantía. Conner et al. (2014) amplían estos apoyos directos a las otras partes del esquema de Toulmin. Estos últimos no se utilizaron en esta investigación pues se delimitó al esquema básico del Toulmin (2003), el cual Krummhueuer (1995) define como el núcleo del argumento. El segundo tipo de apoyo son las *preguntas* que promueven que el estudiante contribuya a partes del argumento. Por último, la tercera categoría de apoyos incluye *otras acciones* que pueden apoyar el desarrollo y exploración según los objetivos de la clase. En Tabla 1 se describen estos dos últimos apoyos.

Tabla 1
Apoyo docente en la actividad argumentativa según el marco TSCA

Tipos de preguntas	Descripción	Otras acciones	Descripción
Solicita información o un hecho matemático	Solicita calcular algo, identificar, recordar el conocimiento previo, recordar definiciones de términos.	Brinda directrices	Acciones para enfocar la atención del estudiante y/o argumento. Incluye resaltar partes, reenfocar a los estudiantes a un aspecto importante de la tarea.
Solicita una idea	Solicita comparar, conjeturar, generar una idea matemática. Preguntas como: ¿Qué tienen en común?	Informa	Acciones que brindan información para un argumento. Incluye clarificar una proposición con descripciones o gestos. Extender la respuesta de un estudiante para completarla. Resumir los principales elementos de la contribución del estudiante.
Solicita un método	Solicita demostrar o describir cómo hizo algo. Preguntas e indicaciones tipo “¿Cómo lo hizo?”	Repite o Recapitula	Acciones que repiten lo que ya fue declarado. Incluye explorar la contribución de alguien en la pizarra y parafrasear la contribución del estudiante.
Solicita una elaboración	Solicita elaborar una explicación, una explicación alternativa, interpretación, justificación de una idea, proposición o diagrama. Preguntas e indicaciones tipo “¿Por qué?”	Motiva y promueve la exploración	Acciones que contribuyen a la exploración matemática. Incluye motivar y hacer sugerencias.
Solicita una evaluación	Le pide evaluar o reconsiderar una idea matemática. Preguntas del tipo “¿Están de acuerdo con...?”	Evalúa aspectos matemáticos	Acciones que permiten corregir aspectos matemáticos. Incluye corregir un dato erróneo, validar, verificar la veracidad de una contribución en la clase.

Fuente: Adaptado de Conner et. al (2014). Traducción realizada por las ponentes.

Método y desarrollo conceptual

Con el fin de identificar los distintos apoyos que utilizan los futuros profesores de Matemáticas en la promoción de la argumentación en sus clases de Matemática, se realizó una investigación cualitativa. Se utilizó la técnica de observación no participante para recolectar los datos. Las grabaciones se realizaron en una institución pública de secundaria en Costa Rica, en la grabación no aparecen los rostros de los estudiantes, únicamente se capturó el audio de la discusión y en la imagen aparecen los estudiantes practicantes. Se contó con el consentimiento firmado de los practicantes para realizar esta investigación.

Se grabaron dos clases de Matemáticas de geometría de 9no, 10mo y 11mo respectivamente. Las temáticas incluyeron Polígonos Irregulares, Geometría del Espacio y Simetría Axial. La investigación cuenta con 7 participantes estudiantes del programa de Bachillerato en Educación Matemática de la Universidad de Costa Rica. Por la naturaleza del programa, la práctica fue realizada en el curso Didáctica de la Geometría y en equipos de trabajo se diseñó y gestionó la implementación de la clase. Para esta comunicación, se presentan los resultados de la clase de dos practicantes de la temática Simetría Axial de undécimo nivel (jóvenes de 17 años).

Para realizar el análisis, las clases grabadas fueron transcritas e ilustradas con las imágenes de las fotografías de lo que el practicante presentaba en la pizarra o tenía proyectado, como la presentación u hojas de trabajo. Una vez transcritas las clases, el análisis se llevó a cabo de la siguiente manera. En primer lugar, se leyeron varias veces las transcripciones de clases y se utilizaron las grabaciones como apoyo para comprender su desarrollo. Luego, se identificaron los momentos de la clase en donde se reconoció un episodio de argumentación, esto incluyó diálogos donde el docente y/o los estudiantes formulaban justificaciones, conjeturas, explicaciones, proposiciones matemáticas y donde se exponía explícitamente el razonamiento empleado. Tercero, utilizando esos posibles episodios se identificó el argumento que se construyó a partir de los intercambios discursivos, para luego identificar en la transcripción las acciones docentes que promovieron la construcción de dicho argumento. Las acciones docentes fueron clasificadas según la Tabla 1.

Resultados

Se identificó que los participantes promovieron diversos espacios de diálogo con los estudiantes, en los que se construyeron argumentos a partir de la tarea matemática planteada por el docente. Para ilustrar esto, se presentan dos episodios. El primero muestra la discusión de la tarea matemática inicial exploratoria, mientras que el segundo presenta la actividad argumentativa durante la sesión práctica de lo visto en clase.

Primer episodio

Para introducir el tema de Simetría Axial, los practicantes proporcionaron a los estudiantes una cuadrícula con puntos dados y una recta (que sería el eje de simetría). Los estudiantes debían trazar los puntos homólogos y luego unir los puntos, de cada lado, mediante segmentos, siguiendo el orden alfabético según el color. Durante esta tarea, los estudiantes trabajaron de

forma independiente. Al concluir, durante la discusión, el practicante planteó una serie de preguntas para caracterizar el resultado obtenido de la tarea. En este espacio, surgieron descripciones de los estudiantes que incluían la palabra "igual". El practicante, para indagar a qué se referían con eso, les consultó qué significaba, y los estudiantes brindaron algunas ideas. A continuación, el practicante procedió a plantear una tarea que parecía revisar el significado que los estudiantes le daban a un punto homólogo. En la Tabla 2, se presenta el diálogo correspondiente.

Tabla 2

Diálogo entre el docente y los estudiantes. Primer episodio.

Participante	Dialogo	Gesto de TSCA
Practicante 1	Es como un ejemplo, si yo les pido a ustedes en ambas figuras que tracen el punto homólogo de A, ¿cuál sería?	Solicita una idea.
Estudiante 1	El A prima.	
Practicante 1	¿Ah?, en este caso, ¿cómo lo trazarían, dónde lo pondrían?	Solicita una idea.
Estudiante 1	El A prima.	
Practicante 1	Ah y también viendo sus figuras... Tomando como referencia el eje, este eje de simetría (<i>El practicante señala el eje de simetría de la figura</i>) ¿Adónde queda el A?	Solicita una idea.
Estudiante 2	(<i>inaudible, el estudiante señala algo en su cuaderno</i>)	
Practicante 1	¿Ahí?, ¿y por qué iría ahí?	Solicita una elaboración. En este caso, una justificación.
Estudiante 2	Porque es el mismo.	
Practicante 1	Exactamente, ve, ahí podemos referir que, sí es igual, es porque es el mismo par.	Evalúa aspectos matemáticos. En este caso, verifica la veracidad de la contribución del estudiante.
		Repite la contribución del estudiante

Se identifica un argumento que se reconstruyó en la Figura 1. Al aplicar el esquema de Toulmin (2003), se reconoce que se trata de la proposición “El punto homólogo de A es A, porque es el mismo”. El dato es la imagen que el docente proyecta con el producto de la tarea exploratoria; el estudiantado es el que brinda la conclusión, y el docente promueve la aparición de una garantía para justificar que A sea el punto homólogo de A. En los diálogos, se reconoce que los practicantes utilizan una serie de preguntas para construir con el estudiantado el argumento.

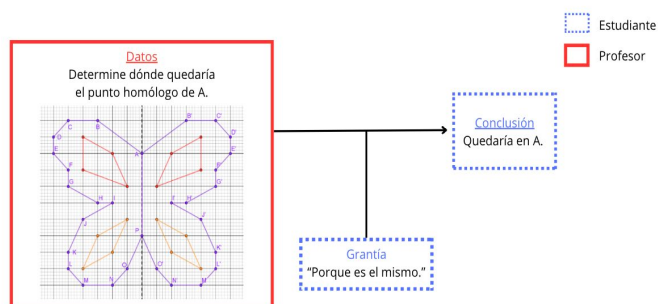


Figura 1. Esquema del argumento identificado durante la discusión. Diseño adaptado de Conner et al. (2014).

En un momento inicial, el practicante realiza varias preguntas solicitando datos, según las respuestas que van brindando los estudiantes. Primero, solicita la identificación de dicho punto; al no obtener la respuesta esperada, procede a plantear otra pregunta del mismo tipo, para identificar la posición del punto. El estudiante responde “A prima”, y el practicante propone otra pregunta solicitando la identificación del punto. Nótese que, hasta este punto, el practicante sigue movilizandando el mismo tipo de preguntas, solicitando la identificación del punto, sin explorar por qué el estudiante propone “A prima” como respuesta.

Cuando el practicante obtiene la respuesta esperada, por parte de otro estudiante, plantea una pregunta solicitando una elaboración del tipo “por qué”. El docente cierra validando la garantía brindada por el estudiante y repitiendo lo que éste comentó. De aquí se identifica que la movilización de una garantía que no favorece fortalecer los conceptos matemáticos relacionados con la temática. El MEP (2012), en su glosario, define que “Una figura tiene simetría axial si hay una recta L , llamada eje de simetría, tal que la reflexión de la figura con respecto a L es la misma figura” (p. 478). Durante la discusión el docente no movilizó el concepto de eje de simetría, el de reflexión ni tampoco señaló que A es un punto particular que es homólogo consigo mismo al estar sobre el eje de simetría. La realización de evaluaciones de las contribuciones del estudiante, por parte del docente, ha sido señalado como una acción que contribuye a la discusión en clases de Matemáticas (e.g. Bayindir et al., 2024). Sin embargo, se observa en los practicantes una escasa movilización de garantías matemáticas explícitas en devolución a la solicitud de una elaboración y al realizar una evaluación.

Segundo episodio

Los practicantes entregaron a los estudiantes una hoja de trabajo para realizarla individualmente, con el fin de discutirla después. El segundo practicante asume la revisión. En la Tabla 3, se muestra el diálogo correspondiente a la revisión del segundo ítem de la práctica en el cual se solicita el ángulo homólogo al ángulo RQP dado el eje de simetría V .

Tabla 3
Diálogo entre el docente y los estudiantes. Segundo episodio.

Participante	Dialogo	Gesto de TSCA
Practicante 2	¿La 2?	
Estudiante	Ángulo TAB	
Practicante 2	Sí muy bien, perfecto, porque... nos piden RQP (lo señala en las hojas), que RQP está en esta partecita de arriba. Y nos dicen que reflejamos con el V, que es este de aquí (señala en la hoja). Muy bien. Si entonces va a ser... este... TBA.	Brinda la garantía. Evalúa aspectos matemáticos. En este caso, valida la respuesta del estudiante.

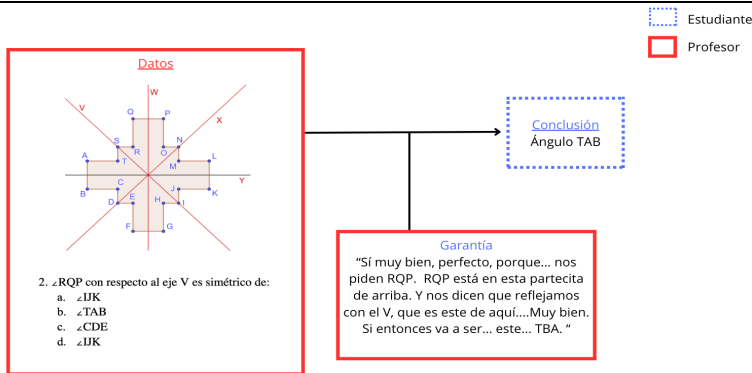


Figura 2. Esquema del argumento identificado durante la discusión. Diseño adaptado de Conner et al. (2014).

Similarmente, el dato es la imagen proporcionada por el docente en la tarea, la conclusión es la respuesta dada por el estudiantado (“ángulo TAB”) y la garantía es explícitamente brindada por el practicante (Ver Figura 2). Por el carácter social de la argumentación colectiva, el docente debería promover que el estudiante contribuya con partes del argumento en lugar de brindarlas (Bayindir et al., 2024). Esta acción, en un espacio de discusión de resultados, podría reforzar la idea de que el docente es quien brinda las justificaciones en clase e indica la respuesta correcta. Sin embargo, el brindar dichas partes podría modelarle al estudiantado las distintas formas de justificar (Conner et al., 2014) que son aceptadas en ese contexto. En este caso, la garantía brindada está limitada por la tarea matemática, ya que la información se puede extraer directamente de la imagen y por el tiempo limitado con el que cuentan los practicantes, dado que esta actividad la realizaron para finalizar la clase.

Conclusiones

Durante las lecciones observadas se reconocen argumentos que fueron contruidos colectivamente. En la gestión de la clase, los practicantes ejecutan algunos gestos del referente

brindado por el TSCA. No obstante, el desarrollo de la actividad argumentativa está acotada por la baja demanda cognitiva de las tareas matemáticas propuestas y el contenido de las distintas garantías que se promueven. Se observaron varios momentos donde el practicante brinda la garantía. Como practicantes, en un periodo limitado de tiempo en una institución, donde se rigen varias demandas externas como el avance de los contenidos y las evaluaciones sumativas, es posible que exista el interés y preocupación que los estudiantes tengan respuestas correctas de los ejercicios en lugar de que esta provenga de un proceso reflexivo que propicia la argumentación. En el contexto costarricense, es necesario investigar más las implicaciones de brindar explícitas partes del argumento y los elementos que toman en cuenta los practicantes para determinar cuándo brindan explícitamente las garantías y cuándo promueven la discusión.

Referencias y bibliografía

- Bayindir, N., Dede, A. T., Aydin, E., y Kocaman, K. (2024). A Framework to Examine the Ways Mathematics Teachers Participate in and Support Collective Argumentation. *International Journal of Science and Mathematics Education*. <https://doi.org/10.1007/s10763-024-10522-x>
- Conner, A., Singletary, L. M., Smith, R. C., Wagner, P. A., y Francisco, R. T. (2014). Teacher support for collective argumentation: A framework for examining how teachers support students' engagement in mathematical activities. *Educational Studies in Mathematics*, 86(3), 401-429. <https://doi.org/10.1007/s10649-014-9532-8>
- Hanna, G. (2020). Mathematical proof, argumentation, and reasoning. In Lerman S. (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 561–566). SpringerLink.
- Krummheuer, G. (1995). The Ethnography of Argumentation. In *The emergence of mathematical meaning* (pp. 229-269). Taylor & Francis Group.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas, lenguaje, ciencias y ciudadanas*. Gobierno de Colombia. Recuperado de https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Molina, O., Camargo, L., Vargas, C., Samper, C., y Perry, P. (2024). Una propuesta para la formación de profesores de matemáticas: el caso de la argumentación matemática. *Revista de Investigación en Matemática y su Enseñanza*, 1(1), 151-185. <https://doi.org/10.32735/s2810-7187202400013356>.
- Mueller, M., Yankewitz, D., y Maher, C. (2014). Teachers Promoting Student Mathematical Reasoning. *Investigations in mathematics learning*, 7(2), 1-20. <https://doi.org/10.1080/24727466.2014.11790339>
- Nussbaum, E. M. (2008). Collaborative discourse, argumentation, and learning: Preface and literature review. *Contemporary educational psychology*, 33(3), 345-359. <https://doi.org/10.1016/j.cedpsych.2008.06.001>
- Staples, M., y Newton, J. (2016). Teachers' Contextualization of Argumentation in the Mathematics Classroom. *Theory Into Practice*, 55(4), 294-301. <https://doi.org/10.1080/00405841.2016.1208070>
- Toulmin, S. (2003). *The uses of argument*. Cambridge University Press.



Proyectos STEAM en Preescolar, experiencias documentadas en las Jornadas de Práctica Docente

Blanca Esthela **Ledezma** Durán

Escuela Normal “Miguel F. Martínez” Centenaria y Benemérita
México

blanca.ledezma@enmfpm.edu.mx

Juan Víctor Alejandro **Meléndez** Gómez

Escuela Normal “Miguel F. Martínez” Centenaria y Benemérita
México

victor.melendez@enmfpm.edu.mx

Mayela **Vargas** Ramos

Escuela Normal “Miguel F. Martínez” Centenaria y Benemérita
México

mayela.vargas@enmfpm.edu.mx

Resumen

La presente investigación tiene como objetivo explorar la implementación de proyectos STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) en la educación preescolar, documentando las experiencias docentes mediante la creación de un eBook. Recurso que sirvió como herramienta para evaluar los proyectos implementados y sistematizar los aprendizajes. Se emplea la metodología cualitativa con enfoque exploratorio, trabajando con una muestra de 256 estudiantes de quinto semestre de la Licenciatura en Educación Preescolar. A través de observaciones, entrevistas y análisis de materiales didácticos, se identifican las estrategias didácticas empleadas, los recursos utilizados y los impactos en el desarrollo de los niños. Los resultados evidencian que las estrategias basadas en el aprendizaje activo y el uso de recursos didácticos variados fomentan el pensamiento crítico y la creatividad en los niños. El eBook se consolidó como una herramienta para la reflexión y mejora de la práctica docente, sirviendo como referente para futuras implementaciones de proyectos STEAM.

Palabras clave: Formación docente; Práctica Profesional; Innovación; Aprendizaje basado en indagación; proyectos STEAM.

Definición y relevancia del problema

La educación preescolar contemporánea enfrenta el reto de preparar a los niños para un entorno cada vez más tecnológico, dinámico e interconectado. Ante este panorama, el enfoque STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) ha emergido como una propuesta pedagógica que permite potenciar habilidades esenciales como el pensamiento crítico, la resolución de problemas, la creatividad y la colaboración desde edades tempranas (García Fuentes, et al., 2022).

La aplicación del enfoque STEAM en la educación infantil ha sido abordada en distintas investigaciones en el ámbito hispano. Estas destacan su potencial para integrar el aprendizaje significativo a través de metodologías activas como el aprendizaje basado en proyectos y la experimentación lúdica (Botero, 2018). No obstante, también se identifican retos importantes: falta de formación específica en el enfoque STEAM, escasez de recursos adaptados al nivel infantil y dificultades en la evaluación de sus resultados.

Pese a los avances, aún persiste una brecha entre el marco teórico y la práctica cotidiana en las aulas de preescolar. La escasa sistematización de experiencias docentes en contextos reales y la limitada disponibilidad de recursos adaptados dificultan el fortalecimiento de este enfoque. Por ello, resulta fundamental documentar y analizar experiencias educativas que permitan identificar buenas prácticas y contribuir a la formación de futuros docentes en STEAM desde una perspectiva integral.

Esta investigación surge en respuesta a la necesidad de fortalecer la aplicación del enfoque STEAM en la educación preescolar y tiene como objetivo general analizar la integración de proyectos STEAM mediante el estudio de experiencias documentadas durante las Jornadas de Observación y Práctica Profesional (JOPP) de estudiantes de la Licenciatura en Educación Preescolar (LEPree). Como producto de este análisis, se diseñó un eBook que sistematiza dichas experiencias, constituyéndose en una herramienta pedagógica orientada a la reflexión, evaluación y mejora de la práctica docente. Los objetivos específicos de esta investigación son los siguientes:

1. *Identificar las estrategias didácticas efectivas en la implementación de proyectos STEAM en el aula preescolar.* Se analizarán metodologías activas utilizadas en el aula, tales como el aprendizaje basado en proyectos, el trabajo cooperativo y la enseñanza multisensorial. A través del análisis de experiencias reales, se evaluará el impacto de estas prácticas en la participación, creatividad y habilidades cognitivas de los niños, permitiendo identificar las estrategias más efectivas para el desarrollo del enfoque STEAM (García Fuentes et al., 2022).
2. *Analizar los recursos y materiales utilizados en la ejecución de proyectos STEAM en preescolar.* Esta investigación explora los materiales físicos y digitales empleados en los proyectos STEAM, con el objetivo de clasificar aquellos que favorecen la experimentación, la lógica y la indagación en los niños de nivel preescolar. Se tomaron como referencia experiencias reales y estudios recientes que analizan la adaptabilidad y accesibilidad de recursos en entornos educativos infantiles (Manarelli & Rodríguez, 2023).
3. *Diseñar un eBook como herramienta de evaluación y reflexión de la práctica docente.* Como producto final, se elaboró un eBook que documenta las estrategias, recursos y

aprendizajes derivados de la implementación de proyectos STEAM. Este recurso no sólo sistematiza experiencias, sino que actúa como una herramienta pedagógica de consulta, evaluación y mejora para futuras prácticas docentes.

Diversos estudios en el ámbito hispano han mostrado que los eBooks enriquecen el aprendizaje al permitir integrar contenidos de forma visual, interactiva y accesible, favoreciendo la reflexión tanto en el alumnado como en el profesorado (Peralta, 2004; Castillo, 2015). Además, su carácter digital responde a las nuevas demandas de formación docente en contextos tecnológicos, funcionando como repositorio de buenas prácticas y facilitador de procesos metacognitivos (Manarelli & Rodríguez, 2023). En este sentido, el eBook trasciende su función como producto final para convertirse en un recurso valioso en el desarrollo profesional docente.

Marco teórico o conceptual

Fundamentos Teóricos de la Metodología STEAM

La metodología STEAM (Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemáticas) ha adquirido relevancia en la educación debido a su enfoque transdisciplinario y su capacidad para fomentar el pensamiento crítico y la resolución de problemas (Honey et al., 2014). Su implementación en el nivel preescolar permite que los niños exploren conceptos científicos y tecnológicos desde una edad temprana, promoviendo la curiosidad y el aprendizaje basado en la indagación (Luna, 2013). En consonancia con los principios de la Nueva Escuela Mexicana (NEM), que busca una educación inclusiva y equitativa, centrada en el desarrollo integral de los estudiantes.

El enfoque STEAM se originó como una evolución de STEM, incluyendo el arte como un elemento clave para potenciar la creatividad y la expresión en los procesos de enseñanza y aprendizaje. La integración del arte facilita el aprendizaje significativo, ya que permite a los estudiantes conectar sus experiencias cotidianas con los contenidos académicos (Sousa & Pilecki, 2013). En el contexto de la educación preescolar, la metodología STEAM se basa en la experimentación activa y el juego, promoviendo la exploración y la creatividad (Rodríguez Palmero et al., 2008). A través del aprendizaje basado en proyectos, los estudiantes pueden desarrollar habilidades de colaboración y pensamiento lógico-matemático.

La perspectiva transdisciplinaria de STEAM permite la conexión entre diferentes disciplinas, rompiendo las barreras tradicionales de la educación segmentada y promoviendo una comprensión integral del conocimiento. Además, su implementación ha demostrado mejorar la alfabetización científica y tecnológica en los primeros años de educación.

STEAM en el Contexto de las Jornadas de Práctica Docente

El Plan 2022 de la Licenciatura en Educación Preescolar (LEPree) tiene como objetivo central ofrecer a las estudiantes una formación integral que responda a las demandas y particularidades de la práctica educativa en el contexto del nivel preescolar. Esta formación busca desarrollar dominios y desempeños detallados en el perfil de egreso, garantizando que las futuras docentes puedan enfrentar de manera efectiva los retos del entorno educativo. En este

sentido, la observación y la práctica docente en las instituciones preescolares juegan un papel fundamental, ocupando un lugar destacado dentro de este plan de estudios, ya que permiten a los estudiantes consolidar los conocimientos adquiridos y vincularlos con la realidad educativa (Secretaría de Educación Pública [SEP], 2022).

Es por ello, que las JOPP representan una oportunidad clave para la aplicación de proyectos STEAM en el aula preescolar, ya que permiten a los futuros docentes experimentar estrategias innovadoras en un entorno real de aprendizaje (Honey et al., 2014). Durante estas jornadas, los estudiantes de licenciatura pueden aplicar metodologías activas que fomenten la exploración y el descubrimiento, favoreciendo la participación activa de los niños. Uno de los principales beneficios de implementar STEAM en la práctica docente es la mejora en la motivación de los estudiantes. Según Ausubel (2002), el aprendizaje significativo ocurre cuando el nuevo conocimiento se conecta con experiencias previas, lo que es posible gracias a la naturaleza interdisciplinaria de STEAM.

La planificación de actividades en las jornadas de práctica docente debe considerar principios de diseño de aprendizaje como la indagación guiada, el aprendizaje cooperativo y el uso de tecnologías emergentes (Bybee, 2013). De esta manera, los futuros docentes pueden desarrollar competencias digitales y metodológicas que les permitirán enfrentar los desafíos del aula actual.

Los proyectos STEAM también ofrecen la posibilidad de evaluar el impacto de estas estrategias en el desarrollo de habilidades en los niños. El uso de herramientas de evaluación formativa, como el aprendizaje basado en la observación y la autoevaluación, permite identificar avances y áreas de mejora en la implementación de estas metodologías (Aguilera & Ortiz-Revilla, 2021).

Impacto de los Proyectos STEAM en la Formación Docente

La incorporación de STEAM en la formación docente transforma la manera en que los futuros maestros perciben la enseñanza y el aprendizaje. McComas y Burgin (2020) destacan que el pensamiento crítico y la resolución de problemas se potencian cuando los docentes en formación aplican metodologías activas en contextos reales.

El impacto de estos proyectos se refleja en la capacidad de los docentes para diseñar experiencias de aprendizaje innovadoras y adaptadas a las necesidades de los estudiantes preescolares. Kang (2019) enfatiza que la metodología STEAM no solo desarrolla conocimientos disciplinares, sino también habilidades socioemocionales como el trabajo en equipo y la comunicación efectiva. Además, la implementación de proyectos STEAM durante la formación docente fomenta una mayor comprensión sobre la importancia de la alfabetización científica y digital en la educación preescolar (Aguilera & Ortiz-Revilla, 2021). Al aplicar estrategias basadas en la experimentación, los futuros docentes pueden mejorar su confianza y autonomía en la enseñanza de contenidos STEAM.

De acuerdo con el Plan de Estudios 2022, los proyectos STEAM juegan un papel fundamental en la formación docente, ya que promueven el desarrollo de competencias pedagógicas esenciales para generar ambientes de aprendizaje innovadores y dinámicos. Estos

proyectos fomentan no solo el dominio de los contenidos disciplinares, sino también habilidades esenciales como la resolución de problemas, la colaboración y la creatividad. Al integrar la metodología STEAM en la formación de los futuros educadores, se promueve una enseñanza más reflexiva y participativa, alineada con los retos del siglo XXI, especialmente en el contexto de la educación preescolar (SEP, 2022).

Metodología de la investigación

La investigación adoptó un enfoque cualitativo con diseño exploratorio, centrado en el análisis de experiencias documentadas sobre la implementación de proyectos STEAM en educación preescolar. Este enfoque permitió comprender a profundidad las prácticas docentes, estrategias didácticas y materiales utilizados en el aula, así como los desafíos que enfrentaron los maestros al aplicar este enfoque educativo, a través de la exploración de experiencias en contextos reales.

La población de estudio estuvo conformada por estudiantes de la Licenciatura de Educación preescolar, la muestra por 256 estudiantes de la Normal Miguel F. Martínez, quienes cursan el quinto semestre y realizaban su práctica en 52 jardines de niños del área metropolitana de Monterrey. La selección de los participantes se basó en las características del trayecto de práctica profesional para la aplicación de proyectos STEAM, lo que permitió documentar estrategias, materiales y reflexiones sobre su práctica educativa.

Para la recolección de datos, se utilizaron entrevistas semiestructuradas y análisis de documentos, lo que permitió obtener información detallada sobre las metodologías empleadas. Además, se llevó a cabo una observación indirecta mediante la documentación fotográfica y narrativas de los proyectos implementados, lo que contribuyó a un análisis más profundo de las experiencias en el aula.

Como producto final de la investigación, se desarrolló un eBook que sistematizó los datos recopilados, presentando casos de estudio, estrategias didácticas, recursos recomendados y reflexiones sobre la enseñanza STEAM en preescolar. Este material se diseñó como una herramienta de evaluación y referencia para docentes en formación y en ejercicio, facilitando la difusión de buenas prácticas y promoviendo la mejora de la enseñanza basada en STEAM en el contexto preescolar.

Resultados

En este capítulo se presentan los resultados obtenidos de la investigación sobre la implementación de proyectos STEAM en el aula preescolar, centrándose en las estrategias didácticas utilizadas, los recursos y materiales empleados, así como los desafíos enfrentados durante su ejecución. A través del análisis de tres estrategias clave se ha podido identificar el impacto positivo que estas metodologías tienen en la participación, el desarrollo cognitivo y las habilidades sociales de los niños.

Además, se explora la efectividad de diversos recursos, como materiales físicos, digitales, naturales y reciclados, destacando sus beneficios y limitaciones en el contexto del aula preescolar. Estos hallazgos proporcionan una visión integral sobre los factores que influyen en la ejecución de estos proyectos y su impacto en el desarrollo infantil (ver Tabla 1).

Tabla 1

Identificación de estrategias didácticas efectivas en la implementación de proyectos STEAM en el aula preescolar

<i>Estrategia Didáctica</i>	<i>Descripción</i>	<i>Resultados Positivos</i>	<i>Retos Identificados</i>
Aprendizaje Basado en Proyectos (ABP)	Proyectos prácticos y significativos para los niños	Mayor participación en el desarrollo del pensamiento crítico (habilidades de resolución de problemas)	Dificultad para crear proyectos que aborden todas las áreas STEAM, acompañada de retos en la gestión del tiempo
Aprendizaje Cooperativo	Trabajo en grupos, colaboración y aprendizaje mutuo	Fomenta la colaboración, el respeto y la comunicación	Algunos niños enfrentan dificultades para trabajar en equipo debido a la falta de liderazgo en ciertos grupos
Enseñanza Multisensorial	Uso de múltiples sentidos para el aprendizaje	Mejora la comprensión, la memoria y el interés	Requiere muchos recursos y materiales y algunos niños se distraen con facilidad

Nota. Elaboración propia.

La implementación de proyectos STEAM en el aula preescolar permite a los niños trabajar en proyectos prácticos y significativos que estimulan su participación activa, favoreciendo el desarrollo del pensamiento crítico y las habilidades de resolución de problemas. No obstante, uno de los principales retos es la dificultad para diseñar proyectos que integren equilibradamente todas las áreas STEAM, lo que complica su planificación y ejecución, sumado a la gestión del tiempo.

Otra estrategia clave es el Aprendizaje Cooperativo, que fomenta el trabajo en equipo, la colaboración y el aprendizaje mutuo, mejorando la comunicación y el respeto entre los niños. Sin embargo, algunos presentan dificultades para trabajar en grupo y la falta de liderazgo en ciertos equipos puede afectar la dinámica de trabajo. Finalmente, la Enseñanza Multisensorial, al involucrar varios sentidos en el aprendizaje, potencia la comprensión, la memoria y el interés de los niños, aunque su implementación requiere una amplia variedad de recursos y materiales, además de estrategias para evitar distracciones (ver Tabla 2).

Tabla 2

Análisis de los recursos y materiales utilizados en la ejecución de proyectos STEAM en preescolar

<i>Recurso/Material</i>	<i>Descripción</i>	<i>Efectividad Percibida</i>
Materiales físicos	Objetos tangibles para la exploración	Alta
Recursos digitales	Plataformas, apps y herramientas tecnológicas	Media
Materiales naturales	Elementos de la naturaleza	Alta
Materiales reciclados	Objetos reutilizados	Media

Nota. Elaboración propia.

En el desarrollo de proyectos STEAM en educación preescolar, los materiales físicos son los más empleados, ya que promueven la participación activa y la comprensión conceptual a través de la manipulación directa. Aunque los recursos digitales también se utilizan, su efectividad es moderada debido a la necesidad de experiencias sensoriales en esta etapa. Los materiales naturales favorecen el aprendizaje experiencial y el vínculo con el entorno, mientras que los reciclados estimulan la creatividad y la conciencia ambiental, aunque exige mayor planificación docente. Para interpretar la efectividad percibida, se propone una clasificación basada en una muestra de 256 estudiantes: *alta*, cuando más de 170 estudiantes expresan una valoración positiva; *media*, entre 86 y 169 estudiantes; y *baja*, cuando 85 o menos manifiestan dicha percepción.

La investigación resalta que los proyectos STEAM promueven un aprendizaje significativo y el desarrollo de habilidades en los niños a través de estrategias como el Aprendizaje Basado en Proyectos, el Aprendizaje Cooperativo y la Enseñanza Multisensorial. No obstante, su implementación enfrenta desafíos como la falta de tiempo, la escasez de recursos y la necesidad de capacitación docente. A pesar de ello, estos proyectos generan resultados positivos al incentivar la participación infantil y fortalecer habilidades clave. Para optimizar su aplicación, es fundamental la reflexión y mejora continua de la práctica docente, motivo por el cual se ha desarrollado un eBook como herramienta de apoyo (ver Tabla 3).

Tabla 3
Creación de un eBook como herramienta de evaluación y reflexión de la práctica docente

<i>Desafío</i>	<i>Descripción</i>
Falta de tiempo	Dificultad para integrar STEAM debido a la carga de trabajo.
Recursos limitados	Escasez de materiales o equipos adecuados.
Capacitación docente	Necesidad de formación especializada en STEAM.
Evaluación	Complejidad para evaluar el aprendizaje de los niños en STEAM.
Resistencia al cambio	Dificultad para adoptar nuevas metodologías.
Desafíos Adicionales	Descripción
Gestión del aula	Mantener el orden y la disciplina durante actividades prácticas.
Diversidad de aprendizaje	Adaptar las actividades a las necesidades individuales.
Participación familiar	Involucrar a los padres en el aprendizaje de sus hijos.

Nota. Elaboración propia.

La implementación de proyectos STEAM en el aula preescolar enfrenta diversos desafíos que deben ser abordados para garantizar su éxito. La falta de tiempo, debido a la carga de trabajo y las exigencias del currículo, dificulta la integración efectiva de las áreas STEAM, mientras que la escasez de recursos y materiales adecuados limita la ejecución de los proyectos. La capacitación docente es otro reto fundamental, ya que requiere formación especializada para aplicar estrategias efectivas. Además, la evaluación del aprendizaje en STEAM es compleja, pues demanda una perspectiva integral que contemple todas las dimensiones del desarrollo infantil. La gestión del aula también representa un desafío, ya que mantener el orden y la

disciplina en actividades prácticas puede resultar complicado, especialmente en un grupo diverso con diferentes estilos de aprendizaje.

Conclusiones

La investigación ha demostrado que la implementación de proyectos STEAM en la educación preescolar es una estrategia efectiva para fomentar un aprendizaje significativo, ya que permite a los niños participar activamente en la resolución de problemas, la exploración científica y la expresión creativa. Este enfoque promueve el desarrollo de habilidades cognitivas, socioemocionales y de pensamiento crítico desde una edad temprana. Sin embargo, su aplicación enfrenta desafíos importantes, como la falta de formación especializada en los docentes y la escasez de recursos didácticos adecuados, lo que dificulta la realización óptima de estas actividades en el aula. Para superar estas limitaciones, es necesario fortalecer la capacitación docente y asegurar la disponibilidad de materiales accesibles y adecuados para la enseñanza de STEAM en preescolar.

El uso de estrategias didácticas activas, como el aprendizaje basado en proyectos y la integración de materiales diversos, ha demostrado ser fundamental para una implementación efectiva del enfoque STEAM, promoviendo competencias clave en los niños, como la colaboración, la resolución de problemas y la creatividad. En este contexto, la creación de un eBook ha constituido una herramienta valiosa para documentar experiencias, evaluar metodologías y reflexionar sobre la práctica docente, facilitando la sistematización y mejora continua de las estrategias pedagógicas.

Estos hallazgos coinciden con investigaciones internacionales que resaltan la efectividad del enfoque STEAM en la educación infantil, particularmente cuando se aplican metodologías activas y se favorece la participación del docente como mediador del aprendizaje. Por ejemplo, una revisión sistemática realizada por Briñez Leyton et al. (2025) evidenció que el uso de estrategias didácticas en educación infantil relaciona STEAM con el aprendizaje basado en juegos, el desarrollo de la creatividad, pensamiento computacional, el arte y la robótica. Asimismo, Castro-Zubizarreta et al. (2024) identificaron efectos positivos del enfoque STEAM en la creatividad, el pensamiento científico y las habilidades de resolución de problemas en niños de educación infantil. Se recomienda continuar documentando nuevas experiencias en este campo y fortalecer la formación docente en innovación pedagógica y uso de recursos tecnológicos, con el fin de garantizar una integración sostenible, contextualizada y transformadora en el aula preescolar.

Referencias

- Aguilera, D., & Ortiz-Revilla, J. (2021). *STEAM education and teacher training*. Springer.
- Ausubel, D. P. (2002). *The acquisition and retention of knowledge: A cognitive view*. Springer.
- Botero, M. (2018). Educación STEAM en educación infantil: Un acercamiento a la ingeniería. *Didacticae: Revista de Investigación en Didácticas Específicas*, (4), 1–20.
<https://revistes.ub.edu/index.php/didacticae/article/download/32897/35637/93306>
- Briñez Leyton, M., Peña Rodríguez, N. A., & Ríos Contreras, S. (2025). *Estrategias STEAM en educación infantil: una revisión sistemática*. ResearchGate.
https://www.researchgate.net/publication/391348081_Estrategias_STEAM_en_educacion_infantil_una_revision_sistemica

- Bybee, R. W. (2013). *The case for STEM education: Challenges and opportunities*. NSTA Press.
- Castillo, M. (2015). Uso de herramientas digitales en Educación Inicial frente a pandemia. *Revista de Educación y Tecnología*, (8), 25–40. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/8312656.pdf>
- Castro-Zubizarreta, A., Estévez, I., & Bravo, M. (2024). Impacto del enfoque STEAM en la educación infantil: Estudio de casos múltiples en aulas de 5 años. *Educación y Futuro: Revista de Investigación Aplicada y Experiencias Educativas*, (50), 69–89. <https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/9767100.pdf>
- García Fuentes, O., Raposo Rivas, M., & Martínez Figueira, M. E. (2022). STEAM en Educación Infantil: un análisis de contenido del currículum oficial. *Profesorado, Revista de Currículum y Formación del Profesorado*, 26(3), 505–524. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v26i3.21571>
- Honey, M., Pearson, G., & Schweingruber, H. (2014). *STEM integration in K-12 education: Status, prospects, and an agenda for research*. National Academies Press.
- Kang, J. (2019). *STEAM and interdisciplinary learning*. Springer.
- Luna, M. (2013). *Transdisciplinary approaches in education*. Routledge.
- Manarelli, A., & Rodríguez, M. (2023). Los recursos digitales en la Educación Infantil: ¿Cómo son y qué opinan el profesorado y las familias? *Revista de Tecnología Educativa*, (15), 45–60. <https://www.researchgate.net/publication/361994143>
- McComas, W. F., & Burgin, S. R. (2020). *Science teaching and STEAM methodologies*. Springer.
- Peralta, M. V. (2004). Los niños y los libros en un mundo digital. *Revista de Psicología y Educación*, (5), 15–30. <https://www.revistadepsicologiayeducacion.es/pdf/212.pdf>
- Rodríguez Palmero, M. A., Moreira, M. A., Caballero Sahelices, J., & Greca, I. M. (2008). *La educación preescolar y el enfoque STEAM: Desarrollando la creatividad mediante el juego y la experimentación*. Editorial Educativa.
- Secretaría de Educación Pública. (2022). *Plan 2022: Licenciatura en educación preescolar. Anexo 3 del Acuerdo 16/08/22*. <https://bit.ly/402vJX0>
- Sousa, D., & Pilecki, T. (2013). *From STEM to STEAM: Using brain-compatible strategies to integrate the arts*. Corwin.



Reforzar el sentido de la demostración en un curso de Análisis Matemático vía el teorema del valor intermedio

Analía Bergé

Université du Québec à Rimouski

Canadá

analia_berge@uqar.ca

Alexandra Fregueiro

Consejo de Formación en Educación (CFE)

Uruguay

suresmeralda@hotmail.com

Resumen

Este taller está dirigido a docentes de matemática del nivel postsecundario, especialmente a quienes enseñan a futuros matemáticos o profesores. Se centra en la transición del Cálculo al Análisis, un momento en el que los estudiantes deben modificar sus prácticas pasando de enfoques operatorios a razonamientos más rigurosos y abstractos. En el taller se abordará una dificultad de los estudiantes, documentada, que se pone de manifiesto cuando tienen que probar, en un curso de Análisis, afirmaciones que admitirían una validación apoyada en representaciones gráficas en cursos de Cálculo. A menudo esta situación se hace presente cuando está en juego la propiedad de completitud del sistema de números reales. Durante el taller, se propondrán actividades para explorar esta propiedad y se analizarán tres demostraciones distintas de un teorema que requiere de esa propiedad para su demostración, haciendo explícita la necesidad de pasar de la intuición gráfica a la formalización rigurosa.

Palabras clave: Didáctica del Análisis; Educación postsecundaria; Formación docente; Propiedad de completitud; Rigor matemático; Transición Cálculo-Análisis; Validación sin gráficos.

1. Introducción y objetivo general del taller

Varias investigaciones en didáctica de la matemática (Bergé 2008, 2010; Durand-Guerrier 2016, 2022; Fregueiro 2024), destacan la dificultad que representa, para la mayoría de los estudiantes, la transición del Cálculo al Análisis, esto es, la disposición que supone el aprendizaje de los aspectos más bien operatorios del Análisis matemático en contraste con el aprendizaje de los aspectos más teóricos, abstractos y rigurosos del mismo. En efecto, la entrada al Análisis superior implica nuevas exigencias de abstracción, precisión y formalidad matemáticas que los cursos de Cálculo que habitualmente los preceden.

Para ilustrar con ejemplos, en Análisis superior ya no es el objetivo calcular una integral definida, sino entender la validación de su definición y su posible generalización a otras definiciones de integral; los estudiantes siguen tal vez calculando límites pero la utilización de la definición de límite en términos de ϵ y δ marca un estándar de validación más exigente y refinado; considerar un esbozo de una sucesión y decidir que un cierto valor es el límite u apoyar una respuesta en una representación gráfica ya no es considerado como una justificación válida, entre otros.

Para estudiantes que han apoyado sus respuestas en representaciones gráficas en los primeros cursos, elevar el estándar de rigor con el objetivo de escribir la demostración de un resultado que puede deducirse de un gráfico, puede ser percibido como innecesario, carente de sentido. Asumimos que es posible recuperar ese sentido si la demostración ayuda a entender tanto el proceso de demostrar como el contexto matemático en juego.

En Análisis de variable real, tomar distancia de las representaciones gráficas para entrar en modos de validación basados en la aritmética, está relacionado con la comprensión de la propiedad de completitud del conjunto de los números reales; esta idea, con diferentes matices, se encuentra en varios artículos y trabajos didácticos Bergé y Sessa (2003), Bergé (2008), Durand-Guerrier (2022), Fregueiro (2024), Fregueiro y Bergé (2024). Recordemos la definición del sistema de números reales $\mathbb{R}$: es un cuerpo ordenado y completo. Los axiomas de cuerpo (suma y multiplicación: cada una de esas operaciones es conmutativa, asociativa, tiene un elemento neutro y un elemento inverso, salvo en el caso de la multiplicación para el elemento neutro de la suma, y la propiedad distributiva que relaciona ambas operaciones) y de orden (compatibles con las operaciones de cuerpo) son verificados igualmente por el sistema de los números racionales ($\mathbb{Q}$). La propiedad de completitud distingue esos dos cuerpos ordenados. Esta propiedad admite muchas maneras diferentes de ser expresada en $\mathbb{R}$, siendo las más frecuentes:

- Todo subconjunto $A \subset \mathbb{R}$, no vacío y acotado superiormente, tiene un supremo real
- Toda sucesión real fundamental (o de Cauchy) es convergente a un valor real.

El objetivo general de este taller es proponer a los participantes actividades matemáticas organizadas que han sido pensadas para reforzar el sentido de la demostración en Análisis matemático cuando se trata, justamente, de probar resultados que “se ven” en el marco de una representación gráfica y cuya demostración analítica está lejos de ser evidente. La propiedad de completitud del sistema de los números reales será puesta en evidencia a lo largo del trabajo propuesto.

2. Referencias teóricas

Michèle Artigue (1998) afirmó que, en Cálculo, como en otros dominios matemáticos, se trabaja al principio sobre objetos preconstruidos, a los que se trata de dar un sentido por un conjunto de prácticas. Para esta investigadora, es solamente al final de un cierto recorrido que esos objetos tomarán el estatus de objetos construidos sujetos a definiciones. Podemos tener presente esa afirmación cuando observamos que las primeras materias de Cálculo se apoyan a menudo en una idea preconstruida del sistema de números reales que es eficiente en relación con el tipo de tareas que en general se demandan (Bergé 2010). En efecto, las ideas de que los números reales son todos los números (rationales e irracionales), que son los números que sirven para denotar las medidas de las longitudes y sus opuestos, y, finalmente, que son los que se pueden representar por una recta numérica, alcanzan para poder pasar a través de un curso de Cálculo, de una o varias variables. Una reconstrucción del sistema real y una significación de su definición son necesarias cuando se busca otro tipo de validación en los cursos de Análisis.

Precisamente, en un escrito reciente, Balacheff (2019) reafirma la importancia de la validación como cimiento de la cultura científica y ciudadana, resaltando que la demostración, que forma parte de esta problemática, está en el corazón de la actividad matemática misma. Con una mirada epistemológica, el interés de demostrar afirmaciones del Análisis más allá de su evidencia gráfica llevó a los matemáticos del pasado a precisar las condiciones necesarias para poder producir una prueba. Ese trabajo dio nacimiento, en la segunda mitad del siglo 19, a las definiciones del sistema de números reales elaboradas por Dedekind (a partir de cortaduras racionales) y por Cantor (a partir de sucesiones racionales fundamentales) que sentaron las bases de la definición del sistema de los números reales que utilizamos actualmente, como cuerpo ordenado completo, tal como es descrito en los trabajos de Durand-Guerrier (2016, 2024) y de Bergé y Sessa (2003) entre otros.

Durand-Guerrier (2024) menciona que en el sistema francés se da poca atención a lo que puede ser probado en un cuerpo ordenado no completo, como es el caso de $\mathbb{Q}$. Para esta investigadora, este hecho puede explicar por qué entender la noción de completitud es muy difícil para una proporción importante de estudiantes. Ella destaca que la evidencia gráfica de la recta refuerza la idea de que, para los conjuntos numéricos, sólo hay dos posibilidades, son discretos o continuos, excluyendo así los conjuntos que son densos en sí mismos. Como Durand-Guerrier (2016) menciona, no existe una representación adecuada del conjunto de números decimales ni del conjunto de números racionales en la recta numérica: unos puntos aislados sugieren un conjunto discreto, una línea sugiere la continuidad; pero no hay una representación intermedia.

Con respecto al aprendizaje de la propiedad de completitud del sistema real, investigaciones recientes han tomado como hipótesis que la comprensión de esta propiedad favorece el trabajo en Análisis (Fregueiro, 2024; Fregueiro y Bergé, 2024; Vivier y Durand-Guerrier, 2016). Otros trabajos constatan que los estudiantes no retienen el carácter de herramienta de esta propiedad, (Bergé, 2010, 2016). Por su parte, Fregueiro (2024) habiendo propuesto y testeado, en el marco de su tesis doctoral, una secuencia de enseñanza de la completitud mediante la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, se centra en la

distinción del carácter de herramienta y el carácter de objeto de esta propiedad, ampliando estas categorías.

La cuestión que nos interesa puede pensarse como un cambio de racionalidad de empírica a teórica en el sentido de Lecorre (2016). Este investigador distingue tres tipos de racionalidades: pragmática, empírica y teórica. La racionalidad pragmática, que consiste en examinar de cerca casos específicos, sin intentar generalizar las observaciones se basa en la no-contradicción y la validación de afirmaciones pasa por la verificación concreta. Para la racionalidad empírica, no hace falta precisar los objetos matemáticos mediante definiciones; en esta racionalidad se usan los hechos para deducir generalizaciones, la misma responde a un modelo inductivista. Finalmente, en el marco de la racionalidad teórica se definen los objetos y se establece la veracidad o falsedad de las afirmaciones a partir de axiomas o resultados ya instituidos, y de una lógica matemática dada. Interpretamos la validación de afirmaciones mediante una representación gráfica incluida en la esfera de la racionalidad empírica, distinguiéndola del tipo de validación que observamos en un curso de Análisis correspondiente a una racionalidad teórica.

Para cerrar esta sección, deseamos mencionar que Brousseau (1994) modeliza el trabajo del profesor, haciendo énfasis en el hecho de que su trabajo va en sentido inverso del trabajo del científico: el profesor contextualiza un saber, para después descontextualizarlo. En este taller la propiedad de completitud será contextualizada en la demostración en Análisis de enunciados que pueden parecer evidentes, dando lugar, esperamos, a reflexiones y aprendizajes significativos para la práctica docente y matemática de los participantes.

3. Desarrollo del taller

Trabajaremos sobre el Teorema del Valor Intermedio (TVI). El enunciado del TVI que será utilizado en el taller es: Sea $f: A^{\text{TM}} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua y sean $a, b \in A$ tal que $f(a) \cdot f(b) < 0$; existe entonces un $c \in A$ para el que $f(c) = 0$. La elección de este teorema no es al azar: es justamente un resultado que parece evidente o transparente a partir de la lectura que se puede hacer de una representación gráfica. Como docentes, buscamos convencer a los estudiantes de que una prueba de este teorema es necesaria, que lo que una representación gráfica deja ver no es fiable o no se adapta a un cierto valor de precisión; buscamos igualmente hacer explícita la riqueza de la prueba de este teorema, que permite potencialmente percibir la propiedad de completitud como una condición necesaria para desarrollar el Análisis. Esto dos aspectos serán considerados en el taller.

Propondremos entonces, en un primer momento, actividades para percibir la necesidad de producir una prueba del teorema separándose de la certeza empírica que puede procurar una representación gráfica del mismo. En un segundo momento analizaremos tres demostraciones distintas del teorema, comparando las distintas estrategias que despliegan, destacando las nociones que cada una pone en juego y analizando la relación entre ellas. Nos parece importante que un futuro profesor o matemático pueda acceder a este uso flexible de las nociones como herramienta de demostración rescatando la importancia de la validación. Necesariamente la propiedad de completitud del sistema real se hará explícita como herramienta para confeccionar las pruebas como fruto del trabajo en el taller.

Para el segundo tiempo nos inspiramos en Battie (2021), quien designa mediante la expresión “actividad multidemostración” [*multipreuve*, en el original] a un tipo de trabajo en clase de matemática sobre la base de proponer a los estudiantes el estudio de varias demostraciones de un mismo enunciado. El trabajo de esta investigadora inspiró igualmente a Durand-Guerrier (2024) quien, con el objetivo de profundizar la comprensión conceptual de la completitud de $\mathbb{R}$, propone una actividad *multidemostración* para el Teorema de Bolzano-Weierstrass. A nuestro conocimiento, esa actividad no ha sido experimentada en clase aún. Sus hipótesis son que el análisis lógico de una demostración cumple tres funciones principales: controlar su validez, comprender la estrategia del autor de la demostración y contribuir tanto al desarrollo de habilidades de demostración como a la apropiación del contenido matemático en cuestión; hipótesis a las que hemos adherido en la concepción de este taller.

El taller comenzará con una presentación de los participantes y de su estructura (máximo 10 minutos); será seguida de la presentación del TVI y del análisis didáctico interactivo de actividades que tienen por objetivo convencer(se) de la pertinencia de elaborar una prueba del teorema (40 minutos). El taller continuará con la actividad “multidemostración”: siguiendo una guía de análisis que será propuesta y explicada, los participantes analizarán, completarán y compararán las pruebas que serán distribuidas por las personas responsables del taller, y podrán producir sus propias pruebas si lo desean (40 minutos). Las dos personas responsables del taller responderán preguntas y guiarán a los participantes. El taller finalizará con una discusión general (20 minutos) en la que se pondrán de relevancia los aspectos de la completitud y de la definición de $\mathbb{R}$ trabajados. Los participantes podrán conservar el material que se les entregue.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1998). L'évolution des problématiques en didactique de l'Analyse. *Recherches en didactique des Mathématiques*, Vol 18, n°2, (231-262)
- Battie, V. (2021). *Pouvoir générique d'une preuve*. [Actes du colloque CORFEM 2021](#), Strasbourg, France.
- Balacheff, N. (2019). L'argumentation mathématique, précurseur problématique de la démonstration. *XXVIe Colloque CORFEM*, Jun 2019, Strasbourg, France. [hal-02981131](#)
- Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 217–235. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5>
- Bergé, A. (2010). Students' perceptions of the completeness property of the set of real numbers. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 41(2), 217–227. <https://doi.org/10.1080/00207390903399638>
- Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos: aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, vol. 6, núm. 3, noviembre, 2003, pp. 163-197
- Brousseau, G. (1994). Los diferentes roles del maestro. En Parra C. y Saiz, I. (comps) *Didáctica de matemáticas. Aportes y reflexiones*. Buenos Aires: Paidós Educador.
- Durand-Guerrier, V. (2016). Conceptualization of the continuum an educational challenge for undergraduate students. *International Journal of Research in Undergraduate Mathematics Education*, 2(3), 338–361. <https://doi.org/10.1007/s40753-016-0033-2>
- Durand-Guerrier, V. (2022) Analysing proofs of the Bolzano-Weierstrass theorem. A mean to improve proof skills and understanding of completeness. *Fourth conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics*, Leibnitz Universität (Hanover), Oct 2022, Hannover, Germany. pp.283-292. [hal-04026543](#)
- Durand-Guerrier, V. (2024). Contribution to didactic research on the completeness/incompleteness of ordered fields of numbers. *ZDM Mathematics Education* 56, 1503–1515. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01635-2>

- Fregueiro, A. (2024). Una propuesta para el aprendizaje de la propiedad de completitud del sistema de los números reales (Tesis de doctorado). Instituto Politécnico Nacional. CICATA, México
https://www.researchgate.net/publication/379086283_Una_propuesta_para_el_aprendizaje_de_la_propiedad_de_completitud_del_sistema_de_los_numeros_reales_Tesis_de_doctorado
- Fregueiro, A. & Bergé, A. (2024). La propiedad de completitud del sistema real: una introducción vía la convergencia de sucesiones. *Boletim de Educação Matemática* Vol 38. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38a230005>
- Lecorre, T. (2016, March). Rationality and concept of limit. In *First conference of International Network for Didactic Research in University Mathematics*. <https://indrum2016.sciencesconf.org/>
- Vivier y Durand-Guerrier (2016). Densité de $\mathbb{D}$, Complétude de $\mathbb{R}$ et analyse réelle. En E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds). *Proceedings of the First Conference of the International Network for Didactic Research in University Mathematics (INDRUM 2016, 31 March-2 April 2016)* (pp 143-152). Montpellier, France: Université de Montpellier and INDRUM



Significados atribuidos a las variables aleatorias. Un estudio con futuros profesores

Federico **De Olivera** Lamas
Consejo de Formación en Educación
Uruguay
fededeo@gmail.com

Luciana **Olesker** Pérez
Consejo de Formación en Educación
Uruguay
lucianao05@gmail.com

Daniela **Pagés** Rostán
Universidad de la República
Uruguay
danielapages@gmail.com

Resumen

Se presentan resultados de un estudio que indagó qué significados construyen futuros profesores de matemática de Uruguay sobre el concepto de variable aleatoria. Se realizó una revisión bibliográfica sobre la conceptualización de las variables aleatorias y las principales dificultades reportadas por la investigación sobre su enseñanza. Con base en esta revisión se diseñó un cuestionario, que se aplicó a estudiantes de profesorado que habían cursado la asignatura Probabilidad y Estadística. Se presenta, como resultado del análisis del cuestionario y de la revisión bibliográfica, una secuencia de enseñanza diseñada para la primera parte de la unidad de variable aleatoria, basada en el análisis de las respuestas al cuestionario y en la revisión bibliográfica. Se describen y fundamentan las distintas actividades de la secuencia y se analiza su potencialidad para superar las dificultades encontradas.

Palabras clave: Futuros profesores de Matemática; Variables aleatorias; Enseñanza de la Probabilidad; Secuencia didáctica.

Introducción

En este artículo reportamos una investigación vinculada con la enseñanza del concepto de variable aleatoria en la formación de profesores. Las variables aleatorias tienen el potencial de modelizar situaciones de la realidad. Existen situaciones muy cercanas que dan lugar a variables discretas y absolutamente continuas. Sin embargo, hay otros problemas en los que los modelos discretos o absolutamente continuos resultan insuficientes, y se debe recurrir a modelos de variables aleatorias mixtas para describirlos. Por lo tanto, la distinción entre variables absolutamente continuas y mixtas es un contenido importante dentro de la unidad y aporta a una mejor comprensión del trabajo con variables aleatorias.

Los autores de este trabajo, formadores de profesores, notaron ciertas dificultades vinculadas al concepto de variable aleatoria. En especial en el manejo no algorítmico de conceptos asociados a variables aleatorias, por ejemplo, al momento de modelizar situaciones. Esto motivó la necesidad de realizar una investigación que diera cuenta de qué ideas tienen los futuros profesores sobre la variable aleatoria, si se evidencian las dificultades que reseñan investigaciones en otros países o emergen dificultades no reportadas. A partir de este estudio se podría rediseñar la enseñanza de este concepto.

Fundamentación teórica y objetivos del estudio

A continuación, presentamos, a modo de fundamentación teórica del estudio, los principales trabajos analizados en la revisión bibliográfica. Heitele (1975) señala tres aspectos esenciales sobre el funcionamiento del concepto de variable aleatoria como modelo explicativo: la distribución de una variable aleatoria, su esperanza, y la composición de variables aleatorias para obtener nuevas variables.

Los significados del concepto de variable aleatoria

Ortiz (2002) reporta un estudio de los significados del concepto de variable aleatoria (entre otros conceptos probabilísticos) en los libros de texto, basándose en la teoría de significados institucionales y personales (Godino y Batanero, 1994). Como elementos intensionales (atributos o rasgos) del concepto de variable aleatoria enumera los siguientes:

VA1: La variable aleatoria toma sus valores dependiendo de los resultados de un experimento aleatorio.

VA2: Es una función del espacio muestral en R .

VA3: Queda caracterizada mediante la distribución de probabilidad, que es el conjunto de valores que toma junto con su probabilidad.

VA4: Se requiere que, para cada intervalo I de R , el conjunto original a dicho intervalo sea un suceso del espacio muestral.

VA5: Una variable aleatoria define una medida de probabilidad sobre el conjunto de números reales.

VA6: Para cada variable aleatoria podemos definir una función de distribución de la forma siguiente:

$$R \rightarrow [0, 1]$$

$$x \rightarrow F(x) = P(\zeta \leq x)$$

VA7: La función de distribución de una variable aleatoria es una función real de variable real, monótona no decreciente.

VA8: La función de distribución de una variable aleatoria determina en forma biunívoca la distribución de probabilidad.

VA9: Sea (x_i, p_i) con $i \in I$ la distribución de probabilidad de una variable aleatoria discreta. Se define la media o esperanza matemática como $E(\zeta) = \sum_{i \in I} x_i p_i$. Este concepto extiende la idea de media en una variable estadística.

VA10: La moda es el valor más probable de la variable.

VA11: La mediana es el valor de la variable para el cual la función de distribución toma el valor $\frac{1}{2}$. Por tanto, la probabilidad de que una variable aleatoria tome un valor menor o igual que la mediana es exactamente $\frac{1}{2}$. (Ortiz, 2002, p. 121)

Dificultades reportadas sobre la enseñanza del concepto de variable aleatoria

El primer problema señalado en relación con la comprensión del concepto de variable aleatoria es su propia definición (Kachapova, 2012; Ruiz, 2006; Ruiz et al., 2006). En particular, Kachapova (2012) afirma que la definición de variable aleatoria genera la concepción errónea en los estudiantes de que toda función de un espacio muestral en el conjunto de los reales es una variable aleatoria. Agrega que esta concepción errónea surge del hecho de considerar que un suceso es cualquier subconjunto de un espacio muestral, generalizando así algo que es cierto para un espacio muestral finito, pero no en el caso general. Kachapova recomienda un enfoque axiomático de la probabilidad, bajo el que un subconjunto del espacio muestral es considerado un suceso si existe la medida de su probabilidad. Por otra parte, Ruiz et al. (2006) y Ruiz (2006) plantean que, para que una función de un espacio muestral en $\mathbb{R}$ sea una variable aleatoria se requiere que el inverso de un intervalo en dicha relación sea un conjunto medible. Este hecho se vincula de forma directa con los significados intensionales VA1, VA2 y VA4 (Ortiz, 2002). Pero también se relaciona con los significados VA3 y VA5, que establecen el nexo entre el concepto de variable aleatoria y el de función de distribución.

Ruiz et al. (2006), en relación con la necesidad de que el inverso de un intervalo sea un suceso en la definición de variable aleatoria, explicitan que esto es necesario para poder definir una función de distribución a partir de cierta variable aleatoria. Esta relación entre los dos conceptos aporta sentido a la condición mencionada, y podría llevar a pensar en definir y enfatizar por igual los dos conceptos al mismo tiempo (Kachapova, 2012).

Kachapova (2012) describe algunas concepciones erróneas acerca de las definiciones de los distintos tipos de variables aleatorias. En particular, la definición de variable aleatoria continua como aquella cuyo conjunto de valores es no numerable, lleva a la concepción de que toda variable aleatoria es discreta o continua, no considerando las variables aleatorias mixtas. La autora propone, para ayudar a los estudiantes a superar esta concepción errónea, hacer énfasis en la siguiente definición de variable aleatoria continua: “Una variable aleatoria X es continua si su función de distribución F puede ser expresada como $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$ para cierta función f no negativa, llamada la función de densidad de X .” (Kachapova, 2012, p. 5). Cabe aclarar que en este trabajo, a este tipo de variable le llamamos absolutamente continua por poseer densidad. La autora afirma que es necesario trabajar con variables aleatorias mixtas para clarificar más aún esta concepción errónea.

Otra concepción errónea sobre las variables aleatorias continuas es la de que una variable aleatoria continua es aquella que tiene una función de distribución continua, condición que es necesaria pero no suficiente (Kachapova, 2012). En este sentido, se propone el trabajo con contraejemplos.

En relación con la formación de profesores, Pérez y Parraguez (2013) presentan algunas consideraciones acerca de las dificultades del concepto de variable aleatoria en la formación de profesores. Sobre el estudio de los fenómenos aleatorios destacan como factor esencial para su comprensión, la identificación del tipo de variable en juego. También señalan que la noción de variable aleatoria tiende a identificarse con la de variable algebraica, y no con una función; que los textos se focalizan en un tratamiento cuantitativo de la variable y fuera de contexto; y que los profesores de matemática están poco preparados en la enseñanza de la estadística, lo que influye en las dificultades sobre este concepto en la educación secundaria.

Con base en el estudio de antecedentes, formulamos los siguientes objetivos para el estudio:

- 1) Determinar los significados que los futuros profesores de matemática asignan al concepto de variable aleatoria, a partir de cuál definición consideran válida y en qué contextos la aplican.
- 2) Identificar ideas erróneas vinculadas a los tipos de variables, en particular a las discretas y absolutamente continuas.
- 3) Indagar sobre el reconocimiento de las variables mixtas, en especial si las diferencian de las absolutamente continuas en contextos de aplicación.

Metodología

El estudio fue cualitativo y exploratorio. Se llevó adelante a través de un cuestionario que se aplicó a estudiantes de profesorado de matemática que ya habían cursado la asignatura Probabilidad y Estadística. Esta asignatura es parte del tercer año de la formación, y es un curso anual, cuyo programa prevé 6 horas semanales de clase. La primera unidad del programa se propone trabajar con la teoría axiomática de la probabilidad, y la segunda unidad está destinada al estudio de las variables aleatorias. Se contactó a los estudiantes compartiendo el enlace al formulario con los profesores de los distintos centros de formación. El cuestionario se estructuró en tres bloques de preguntas. Fue compartido a través de un formulario de Google y fue respondido por 18 estudiantes, quienes respondieron de forma voluntaria (https://docs.google.com/forms/d/1-UKdH1fICZ61SABXFbb-5_6LC9K2p_hPA1qjKaGpL6E/edit).

Descripción del cuestionario y categorías de análisis

El primer bloque hace referencia a la definición de variable aleatoria. El segundo bloque, en formato verdadero o falso, recorre aspectos como el concepto de variable aleatoria, el vínculo entre el recorrido y las probabilidades y algunas cuestiones relacionadas con la función de probabilidad de variables aleatorias discretas y absolutamente continuas, ya sea cuantía, densidad o la propia función de distribución. El tercer bloque indaga sobre los significados asociados a variables aleatorias discretas, absolutamente continuas y en qué medida los estudiantes manejan la noción de variables aleatorias mixtas.

Las categorías de análisis para el primer bloque de preguntas se presentan en la Tabla 1.

Tabla 1
Categorías primer bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C1: Reconoce el carácter funcional de la variable aleatoria	Se elige alguna de las tres primeras definiciones y se rechaza la cuarta explícitamente porque no es una función.
C2: Reconoce la necesidad de exigirle a esta función que la preimagen de un boreliano sea un elemento de A .	Se elige como correcta la definición dos, o la definición tres o ambas.
C3: Comprende la equivalencia entre la definición 2 y 3.	Esto implica una comprensión del concepto de σ -álgebra y tener en cuenta que los intervalos $(-\infty, x]$ con $x \in \mathbb{R}$ engendran una σ -álgebra que es, justamente, la σ -álgebra de Borel. Se elegirán las definiciones 2 y 3.

En el segundo bloque se plantean una serie de enunciados, y el estudiante debe señalar, para cada uno, si lo considera verdadero o falso. Los enunciados se vinculan con las ideas acerca del concepto de variable aleatoria, la relación entre el valor que da una variable y la probabilidad, el recorrido de una variable aleatoria discreta, las funciones de densidad y de distribución. En la Tabla 2 presentamos las categorías para el análisis.

Tabla 2
Categorías del segundo bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C2: Reconoce la necesidad de exigirle a esta función que la preimagen de un boreliano sea un elemento de A .	Indican como falsa la primera proposición.
C4: Percibe el carácter funcional de la variable aleatoria, distingue la variable de la función de probabilidad.	Indican como falsas las proposiciones 2 (<i>Una variable aleatoria es una función que a cada resultado de un experimento aleatorio le hace corresponder su probabilidad</i>) y 5 (<i>Dado un experimento aleatorio que consiste en tirar 2 dados, es correcto definir una variable aleatoria como "al tirar los dados la suma de los puntos es 4"</i>).
C5: Maneja una visión limitada de las variables discretas.	Indican como verdaderos los enunciados 3 y/o 6.
C6: Maneja una visión limitada de las variables absolutamente continuas.	Indican como verdaderas las proposiciones 4 y/o 7.

Finalmente, en el tercer bloque se presentan experiencias aleatorias y se define una variable aleatoria. En cada una de ellas los estudiantes deben indicar si se trata de una variable discreta, absolutamente continua o ninguna de las dos. En la tabla 3 presentamos las categorías de análisis correspondientes.

Tabla 3
Categorías tercer bloque del cuestionario

Categorías	Descripción
C7: Reconoce las variables discretas con recorrido finito e infinito.	Indican que las variables planteadas en la 3 y la 4 son variables discretas.
C8: Reconoce una variable absolutamente continua.	Señalan como absolutamente continua la situación 1: <i>Una persona está esperando a ser atendida en un negocio, sea X la variable que mide el tiempo que transcurre hasta que la persona sea atendida.</i>
C9: Reconoce las variables mixtas, esto es, variables que en el formulario indicamos como ni discretas ni absolutamente continuas.	Eligen la opción “ninguna de las dos” en la experiencia planteada en el punto 2 y 5.

Las distintas respuestas a las preguntas del cuestionario fueron analizadas con base en las categorías anteriores.

Análisis de las respuestas al cuestionario

Por razones de espacio, presentamos una tabla donde se muestra la concordancia entre el significado institucional de referencia, expresado en términos de las categorías presentadas, y el significado personal declarado por cada estudiante de la muestra manifestado en sus respuestas al cuestionario de investigación.

Tabla 4
Concordancia de significados

Concordancia entre el significado institucional de referencia y el personal declarado										
Estudiante	<i>Categorías primer bloque del cuestionario</i>			<i>Categorías segundo bloque del cuestionario</i>				<i>Categorías tercer bloque del cuestionario</i>		
	C1	C2	C3	C2	C4	C5	C6	C7	C8	C9
E1	x	x		x		x		x	x	
E2	x	x	x	x		x			x	

E3	x	x		x	x		x	x	x	
E4	x			x	x	x	x	x	x	
E5				x		x	x		x	
E6	x	x				x	x	x	x	
E7	x			x		x	x	x	x	
E8	x	x		x			x	x	x	
E9	x			x	x	x	x	x	x	
E10	x	x	x			x	x	x	x	
E11	x	x		x			x	x	x	
E12	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
E13				x		x	x	x	x	
E14	x	x	x	x				x	x	
E15	x	x	x	x		x				
E16	x	x	x	x		x	x	x		
E17	x	x	x	x	x	x	x	x	x	
E18		x	x	x		x	x	x	x	

Uno de los primeros aspectos a evaluar fue si los estudiantes reconocen la necesidad de imponerle a la variable aleatoria la condición de que la preimagen de un boreliano debe pertenecer a la σ -álgebra. Al igual que las investigaciones reportadas, se notó que una proporción importante de los estudiantes (72%) manifiestan la creencia de que cualquier función de Ω en $\mathbb{R}$ sería una variable aleatoria. Esto lleva al convencimiento de insistir en esta condición y sobre todo en su necesidad, para luego poder definir de forma coherente y consistente los conceptos asociados como el de probabilidad inducida y función de distribución. Se considera también que sería apropiado mostrar algún no ejemplo, es decir, una función de Ω en $\mathbb{R}$ que no sea variable aleatoria, al menos en contextos teóricos.

Otro aspecto que quedó evidenciado es la dificultad de reconocer variables que no sean discretas ni absolutamente continuas. Las respuestas de la mayoría de los estudiantes (89%) parecen mostrar la creencia de que solo existen dos categorías para las variables aleatorias. La gran mayoría de los estudiantes que contestaron el cuestionario no lograron reconocer las variables mixtas. Se sugiere entonces que, a la hora de la enseñanza de los tipos de variables

aleatorias, se analicen en profundidad las definiciones de variable discreta y de variable absolutamente continua, reflexionando sobre el hecho de que sus definiciones implican que hay otros tipos de variables aleatorias. En segundo lugar, se propone incluir más ejemplos y problemas con variables mixtas, que surgen naturalmente en contextos de transformaciones.

Finalmente se buscaba una aproximación al significado personal que los estudiantes atribuyen a las variables discretas y a las absolutamente continuas. En el caso de las variables discretas algunas respuestas parecen mostrar que los estudiantes las reducen a las que tienen recorrido finito. En cuanto a las variables absolutamente continuas, los futuros profesores parecen no manejar una definición matemáticamente adecuada. Esto queda al descubierto en algunas afirmaciones sobre que la función densidad es siempre continua o que basta con tener un recorrido continuo.

La secuencia diseñada

A partir de la revisión bibliográfica realizada, y del análisis de las respuestas al cuestionario, se elaboró un REA para trabajar con las variables aleatorias en el curso de Probabilidad y Estadística de la formación de profesores de matemática en Uruguay.

La idea que subyace a este recurso es aproximarse al concepto de variable aleatoria a partir de funciones con dominio el espacio muestral de un experimento y codominio el conjunto de los reales, para proponer una definición provisoria. Esta se complementará más adelante en el recurso para llegar a una definición más completa.

La secuencia se puede encontrar completa en: <https://semur.edu.uy/recursos/VA/>.

Esta parte del recurso culmina con una definición provisoria de variable aleatoria, y el comentario de que se necesitarán más condiciones para definirla de forma definitiva. Este primer bloque de actividades que hemos diseñado se vincula con el desarrollo de las categorías C1 y C4, definidas anteriormente. Estas implican reconocer el carácter funcional de la variable aleatoria, donde a cada elemento del espacio muestral se le asigna un real, y también diferenciarla de una función de probabilidad.

Conclusiones

El estudio exploratorio realizado permitió profundizar en las dificultades que conlleva el concepto de variable aleatoria y su enseñanza. Esto llevó al equipo investigador a reflexionar acerca de qué tareas son adecuadas para trabajar esta temática. Se buscó considerar todas las dificultades reportadas, así como diseñar actividades que permitieran que estas salieran a la luz al tiempo que los estudiantes las resuelven.

Se tomó como punto de partida el concepto de espacio muestral, conocido por los estudiantes, para introducir a través de ejemplos el concepto de variable aleatoria, a través de ciertas funciones de dominio Ω . Se destacan las tareas de similitudes y diferencias, que apuntan a determinar las propiedades de la función de distribución, y que permiten construir su definición.

Se espera que este abordaje lleve a los estudiantes a conceptualizar mejor las ideas vinculadas con el concepto de variable aleatoria.

Finalmente, cabe señalar que este recurso no ha sido puesto en práctica en la clase, se espera poder hacerlo en un estudio posterior.

Referencias y bibliografía

- Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14 (3), 325-355.
- Heitele, D. (1975). An epistemological view of fundamental stochastic ideas. *Educational Studies of Mathematics*, 6, 187 - 205. Dordrecht, D. Reydel Publishing Company. <https://doi.org/10.1007/BF00302543>
- Kachapova, F. (2012). A general approach to teaching random variables. *Mathematics teaching research journal online*, 5(2), 1 - 16.
- Ortiz, J.J. (2002). *La Probabilidad en los Libros de Texto [Probability in Textbooks]*; Departamento de Didáctica de la Matemática Universidad de Granada: Servicio de Reprografía de la Facultad de Ciencias.
- Pérez, B. y Parraguez, M. (2013). Construcciones mentales de los conceptos aleatorio y determinista a partir de la regresión lineal. En R. Flores (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 26, pp. 589 - 598). México D. F.: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Ruiz, B. (2006). *Un acercamiento cognitivo y epistemológico a la didáctica del concepto de variable aleatoria*. Tesis de maestría (no publicada). Instituto Politécnico Nacional de México.
- Ruiz, B., Albert, J. y Batanero, C. (2006). An exploratory study of students' difficulties with random variables. En A. Rossman y B. Chance (Eds), *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador (Bahía). International Association of Statistical Education.



Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) na formação inicial de professores de Matemática no Brasil

Regina da Silva **Pina Neves**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

reginapina@mat.unb.br

Raquel Carneiro **Dörr**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

raqueldorr@unb.br

Juliana França Viol **Paulin**

Faculdade SESI-SP de Educação
Brasil

viol.juliana@gmail.com

Lemerton Matos **Nogueira**

Universidade de Pernambuco
Brasil

Lemerton.nogueira@upe.br

Alessandro Jacques **Ribeiro**

Universidade Federal do ABC
Brasil

alessandro.ribeiro@ufabc.edu.br

Resumo

As Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) desempenham função primordial na aprendizagem da prática docente, uma vez que são desenhadas de modo a integrar insumos provenientes da prática docente, como resoluções de estudantes, vídeos com momentos da aula, entre outros. Neste texto apresentamos parte de um estudo com o objetivo de compreender as aprendizagens profissionais, em termos dos conhecimentos matemáticos e didáticos mobilizados por futuros professores (FP), ao longo do processo de implementação de uma TAP e como estes as vislumbram/percebem em sua futura prática docente. Participaram do estudo FP da

Universidade de Brasília, Brasil, discentes das disciplinas de Geometria para Ensino I e II, os quais realizaram as ações de leitura, resolução e, posteriormente, discussão coletiva de uma TAP sobre geometria plana. Os resultados evidenciam que as discussões apresentadas revelam aspectos relacionados às oportunidades de aprendizagem vivenciadas por FP de Matemática, ao mesmo tempo em que demarcam a necessidade de ampliar a adoção das TAP em componentes curriculares de conteúdo matemático e prática profissional que integram a formação inicial.

Palavras-chave: Formação Inicial; Tarefas de Aprendizagem Profissional; Geometria Plana; Educação Básica.

Introdução

Estudos atuais na área de formação de professores destacam a relevância das Tarefas Matemáticas (TM), especialmente as de natureza exploratória e investigativa, desenvolvidas a partir dos pressupostos do Ensino Exploratório para a aprendizagem matemática do aluno (Canavarro, 2011; Ponte, 2005) e para a aprendizagem profissional de professores (Ribeiro & Ponte, 2020; Dörr, Pina Neves & Ribeiro, 2023). Igualmente, defendem o potencial das Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) para a aprendizagem da prática docente, devido aos registros de prática e às oportunidades de problematização, reflexão e reconstrução dessas práticas que eles suscitam (Aguiar; Ponte; Ribeiro, 2021).

Cientes disso, apresentamos neste texto parte de uma investigação desenvolvida no âmbito do projeto de pesquisa “*Aprendizagem profissional de formadores e de futuros professores de matemática: constituindo comunidades de prática e de investigação*”¹, o qual conta com a participação de pesquisadores vinculados aos grupos de pesquisa Formação Matemática para o Ensino (ForMatE) e Grupo de Investigação em Ensino de Matemática (GIEM), bem como formadores de professores em universidades das Regiões Sul, Sudeste, Centro-Oeste e Nordeste do Brasil. O objetivo do projeto é compreender como decorre a aprendizagem de futuros professores de Matemática e de seus formadores, quando estes constroem um ambiente de colaboração, interação e investigação, mediado por tarefas formativas que tematizam a prática letiva de Matemática, contemplando aspectos conceituais e didático-pedagógicos com vistas ao ofício futuro de ensinar essa disciplina na Educação Básica. Para tanto, os formadores têm desenvolvido as disciplinas, integrando as Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) no processo formativo, tanto em cursos do núcleo de formação matemática quanto de formação didático-pedagógica. Ao longo desse processo, os futuros professores (FP) acessam as TM, resolvendo-as; têm contato com resoluções feitas por estudantes da educação básica em situação de aula reais; refletem sobre tais resoluções na companhia de seus colegas de turma e em interação com o formador de professor que a propôs, ampliando seu contato com registros de prática e modelando possíveis intervenções de modo a ampliar a conceituação matemática dos estudantes da educação básica.

¹ Pesquisa desenvolvida com apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) no âmbito do Projeto Universal 2023- Processo 405631/2023-5.

Neste texto, focamos momentos do processo formativo organizado em componentes curriculares da formação inicial em universidades públicas brasileiras junto a FP de Matemática na vivência de uma TAP que aborda conceitos de Geometria Plana e aspectos relativos ao seu ensino na educação básica (estudantes de 11 a 17 anos). Logo, intenta-se compreender as aprendizagens profissionais, em termos dos conhecimentos matemáticos e didáticos mobilizados pelos FP ao longo do processo de implementação da TAP e como estes as vislumbram/percebem em sua futura prática docente.

Enquadramento Teórico

Parece-nos consensual na literatura em Educação Matemática, que as Tarefas Matemáticas propostas aos estudantes em sala de aula influenciam, sobremaneira, suas aprendizagens, sendo essenciais nos processos de ensino (Stein et al., 2008). Todavia, escolher as tarefas, adaptá-las para o uso em sala e/ou tomar decisões a seu respeito são ações de alta complexidade para as quais os FP precisam se preparar e ter apoio ao longo de sua formação. Isso porque elas envolvem processos cognitivos, construção de estratégias e procedimentos, além de validação de opções relativas aos conteúdos matemáticos que congregam (Estevam et al., 2018). Nesse sentido, espera-se que os FP possam vivenciar, ao longo de sua formação inicial, experiências formativas que propiciem Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) relativas à escolha, elaboração e ao desenvolvimento de Tarefas Matemáticas em sala de aula (Ponte, 2005). Essas experiências serão enriquecidas à medida que a formação inicial promova a vivência em situações que aproximem o FP de sua futura prática profissional, permitindo que este conheça ações e produtos da prática docente. Nesse sentido, as Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP) ocupam lugar de destaque, visto que envolvem professores “no trabalho do ensino, [que] podem ser desenvolvidas a fim de encontrar um objetivo específico para a aprendizagem do professor e levam em consideração o conhecimento prévio e a experiência que os professores trazem de sua atividade” (Ball & Cohen, 1999, p. 27).

Assim, buscamos compreender a aprendizagem do professor de Matemática nos fundamentamos no modelo PLOT (Ribeiro & Ponte, 2020), que discute as "Oportunidades de Aprendizagem do Professor". Trata-se de um modelo teórico-metodológico que visa: (i) organizar o design de processos formativos que objetivem promover aprendizagem aos professores e (ii) gerar oportunidades para os professores aprenderem durante esses processos formativos. O modelo PLOT é constituído por três domínios: (a) Papel e Ações do Formador (PAF), (b) Tarefas de Aprendizagem Profissional (TAP), e (c) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP). As TAP são tarefas elaboradas com o intuito de promover discussões didático-pedagógicas e discussões matemáticas, de modo a criar/favorecer/organizar oportunidades de aprendizagem profissional. Elas reúnem elementos da prática docente, tais como: produção matemática, falas e explicações de escolares e de professores; áudios e vídeos com trechos do trabalho discente e docente, de gravações de momentos de discussão coletiva, entre outros artefatos (Ball et al., 2014; Ribeiro et al., 2020).

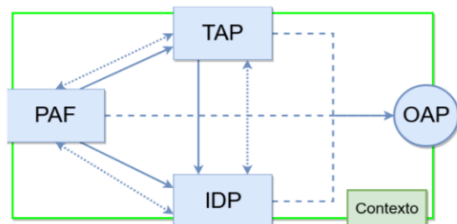


Figura 1. Modelo PLOT

Fonte: Ribeiro e Ponte (2020, p. 4).

Cada domínio possui quatro componentes distribuídos em duas dimensões (Conceitual e Operacional). Dentro do domínio do PAF, existem as componentes Aproximação e Articulação, na dimensão conceitual, e as componentes Gestão e Orquestração, na dimensão operacional. O domínio TAP contém os componentes Conhecimento Profissional e Ensino Exploratório na dimensão conceitual e Tarefa Matemática e Registros de Prática na dimensão operacional. Por fim, o domínio IDP inclui as componentes Discussões Matemáticas e Didáticas, e Apresentação e Justificação, na dimensão conceitual e as componentes Linguagem mobilizada e Comunicação dialógica na dimensão Operacional (Ribeiro & Ponte, 2020).

Nesta investigação, priorizamos o domínio TAP, assumindo as tarefas matemáticas e de aprendizagem profissional como elemento formativo primordial e o Ensino Exploratório (Canavarro, 2011) enquanto abordagem didática. Essas tarefas são construídas de modo a integrar insumos provenientes da prática docente, como a resolução fornecida por estudantes às TM propostas a eles; falas dos estudantes da educação básica sobre como entenderam ou como se sentiram em relação à resolução de uma TM ou ao ensino praticado pelo professor; vídeos com momentos da aula ou da discussão dos estudantes da educação básica sobre os processos de resolução de TM; materiais didáticos e seus usos em sala de aula; entre outros. A este conjunto de insumos dá-se o nome de *registros de prática*, constituindo-se em artefatos que reproduzem a realidade e contribuem com que os professores ou futuros professores reflitam sobre a prática (Ball et al., 2014). Logo, ao fazer uso das TAP em situações formativas com os FP, promove-se o contato destes com elementos/fragmentos da prática docente, o que pode suscitar, a depender da qualidade e da regularidade da intervenção do formador de professores ou responsável, processos de observação, discussão, reflexão e construção de conhecimentos (didáticos e matemáticos) que os conectam com a realidade da sala de aula (Aguilar et al., 2021; Jardim et al., 2023). De modo particular, as reflexões geradas têm o potencial de auxiliar os FP no entendimento de elementos conceituais da Matemática, bem como da didática (Ponte & Quaresma, 2016; Jardim et al., 2023).

Metodologia

Trata-se de uma investigação de natureza qualitativa-interpretativa, com o intuito de propiciar aos FP e formadores, de maneira colaborativa e cooperativa, oportunidades de aprendizagens que lhes possibilitem implementar práticas de ensino inovadoras em suas salas de aula. Participaram deste estudo, estudantes da Universidade de Brasília, cursistas das disciplinas de Geometria para Ensino I e II. Nesse contexto, enquanto formadores, propusemos aos cursistas

a leitura, a resolução e, posterior, discussão coletiva de uma TAP elaborada por Aguiar e Ribeiro (2024).

A TAP reúne, inicialmente, uma TM sobre a soma dos ângulos internos (TM 1) apresentada na Figura 2.

1ª Tarefa Matemática – Soma dos ângulos internos
a) Qual é o valor da soma dos ângulos internos de um triângulo? Justifique sua resposta.
b) Como você calcula o valor da soma dos ângulos internos de um quadrilátero convexo? Justifique sua resposta.
c) A partir das respostas anteriores, como você calcularia a soma dos ângulos internos de um pentágono (5 lados) convexo? Explique sua resposta.
d) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um hexágono (6 lados) convexo? Explique sua resposta.
e) Como você calcularia a soma dos ângulos internos de um polígono de 25 lados convexo? Explique sua resposta.
f) É possível observar alguma regra que relacione a quantidade de lados de um polígono convexo e a soma de seus ângulos internos? Explique sua resposta.
g) Escreva uma expressão algébrica para calcular o valor da soma dos ângulos internos de um polígono convexo de n lados.

Figura 2. Tarefa Matemática 1 - TM1.

Fonte: Aguiar e Ribeiro (2024)

Compõe ainda a TAP, uma segunda TM sobre o cálculo do número de diagonais de diferentes polígonos (TM 2), ilustrada na Figura 3.

2ª Tarefa Matemática – Contando Diagonais
a) Desenhe uma sequência dos seguintes polígonos: triângulo, quadrilátero, pentágono e hexágono. Marque em cada um desses polígonos todas as suas diagonais.
b) Observe a construção anterior e descreva como será construído um polígono de 7 lados com todas as suas diagonais.
c) Encontre uma relação que permita calcular o número de diagonais de um polígono qualquer a partir do seu número de lados.
d) Escreva essa relação de forma algébrica. Explique como você fez.

Figura 3. Tarefa Matemática 2 - TM2

Fonte: Aguiar e Ribeiro (2024)

Em seguida, ela apresenta a produção matemática de estudantes do nono ano do ensino fundamental às duas tarefas e, provoca a observação e a análise desta produção com o intuito de gerar entre os FP: a) compreensão sobre o desenvolvimento do raciocínio destes estudantes e, b) antecipação de possíveis intervenções com vistas à conceituação matemática dos estudantes. Para tanto, apresenta dois questionamentos acerca da produção dos estudantes em relação à TM 1 e três questionamentos relativos à TM 2. A Figura 4 a seguir ilustra um destes questionamentos:

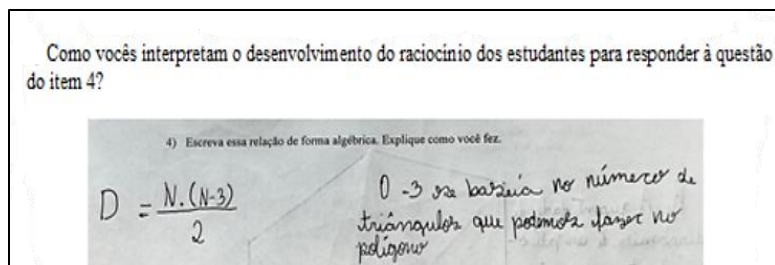


Figura 4. Exemplo de questionamento
Fonte: Aguiar e Ribeiro (2024)

A seguir, descrevemos aspectos relacionados à vivência desta TAP durante as aulas de Geometria para o Ensino I e II, articulado ao modo como os conhecimentos matemáticos e didáticos foram mobilizados pelos FP ao longo do processo de implementação da TAP e as possíveis relações destes conhecimentos com as suas futuras práticas docentes.

Análise dos dados e Discussão dos Resultados

A TAP foi desenvolvida nas referidas turmas em 3 momentos, a saber: no *primeiro* momento, os FP receberam somente as TM 1 e 2 e as resolveram individualmente, tendo a oportunidade de revisitar tópicos curriculares do ensino fundamental; em seguida, os FP foram organizados em duplas para a análise de suas produções matemáticas, observação de estratégias, erros, decisões quanto à escrita da resposta (linguagem matemática mais formal ou informal). No *segundo* momento, mantiveram as duplas para a resolução do restante da TAP, registrando suas respostas consensualmente nas duplas. No *terceiro* momento, os FP foram convidados a socializarem suas produções junto à turma e a debaterem suas respostas tendo como parâmetro suas produções matemáticas, a produção dos estudantes de ensino fundamental que integravam a TAP, os documentos curriculares e as leituras sobre a docência em Geometria, desenvolvidas durante a disciplina. As produções seguintes ilustram as respostas dos FP. A produção da Figura 5 traz uma análise fundamentada em conhecimentos matemáticos acerca do tema “diagonais de um polígono” buscando destacar que, apesar da generalização para a quantidade de diagonais de um polígono de n lados estar correta, a justificativa do estudante da educação básica não está correta, pois o $n - 3$ está relacionado ao número de diagonais que partem de um único vértice.

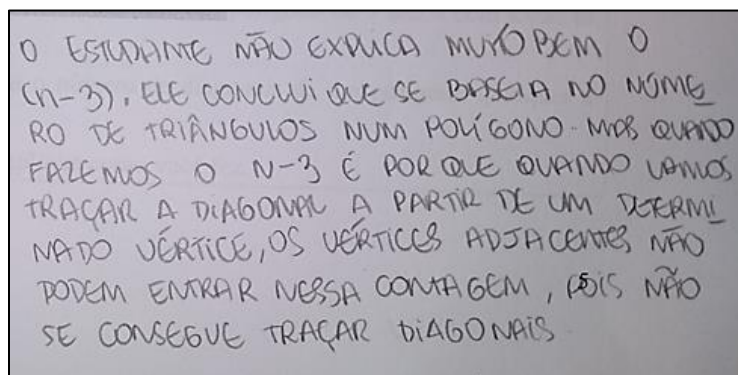


Figura 5. Produção de um FP da turma de Geometria para Ensino II, UnB.
Fonte: Acervo da pesquisa.

Nessa produção, o FP mobiliza seu conhecimento matemático para compreender o porquê da resposta do estudante, demonstrando capacidade de analisar as produções escritas à luz dos conhecimentos já construídos, possivelmente nas experiências com a disciplina de Geometria para o Ensino I. Como essa forma de leitura e interpretação de registros de estudantes, podemos perceber como tal tipo de tarefa pode contribuir para o desenvolvimento de seu conhecimento didático. De modo geral, as produções do FP mostram que a TAP cumpriu um papel relevante na problematização do distanciamento, ainda vigente, nos cursos de formação inicial de professores entre a Matemática que se ensina na licenciatura e a Matemática Escolar, objeto central da prática docente na educação básica. Como interseções, observaram-se nas produções do FP dificuldades em conceitos basilares de Geometria Plana e pouca experiência na análise da produção matemática de estudantes da educação básica.

Considerações Finais

As discussões apresentadas mostram-nos aspectos relacionados às oportunidades de aprendizagem vivenciadas por FP de Matemática por meio de uma TAP. Pudemos identificar a necessidade de que se ampliem momentos como este, que problematizem a prática docente, por meio da análise e discussão de aspectos matemáticos e didáticos que permeiam a aula de Matemática. Acreditamos que estas vivências, qualificam os FT de modo que possam avançar em termos de ampliar seu repertório, mobilizando conhecimentos prévios e refletindo acerca de sua futura prática docente. No que se refere ao trabalho docente do formador de professores, a adoção da TAP amplia suas possibilidades de organizar a prática docente, qualificando as ações deste formador. Ademais, ao adotá-las em diálogo com outros formadores de diferentes regiões do país, integrados em um projeto de pesquisa, fortalece-se a perspectiva de criação de “comunidades de prática” de modo a identificar convergências e divergências na produção dos FP, permitindo a construção coletiva de estratégias de intervenção em disciplinas específicas e/ou mesmo na estrutura curricular e no modo de desenvolver os componentes curriculares. Nesse âmbito, será possível conhecer e analisar quais são as aprendizagens profissionais que os formadores desenvolvem nessas comunidades. Além disso, entendemos a necessidade de ampliar a adoção das TAP em outros componentes curriculares que integram a formação inicial – de modo que formadores dos diferentes grupos de componentes (conteúdo matemático, conteúdo didático pedagógico e de prática profissional) possam estabelecer diálogos, reestruturando toda uma dinâmica formativa já ancorada na prática docente futura dos FP.

Referências e bibliografia

- Aguiar, M., & Ribeiro, A., J. (2024, maio). Oportunidades de Aprendizagem Vivenciadas por Professores Acerca do Raciocínio Matemático [comunicação científica]. *6º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Campina Grande, PB.
- Aguiar, M., Ponte, J. P. da., & Ribeiro, A. J. (2021). Conhecimento Matemático e Didático de Professores da Escola Básica acerca de Padrões e Regularidades em um Processo Formativo Ancorado na Prática. *Bolema: Boletim De Educação Matemática*, 35(70), 794–814.
- Ball, D. L., & Cohen, D. K. (1999). Developing practice, developing practitioners: Toward a practice-based theory of professional education. En G. Sykes & L. Darling-Hammond (Eds.), *Teaching as the learning profession: Handbook of policy and practice* (pp. 3-32). San Francisco, CA: Jossey Bass.

- Ball, D. L., Ben-Peretz, M., & Cohen, R. B. (2014). Records of practice and the development of collective professional knowledge. *British Journal of Educational Studies*, 62(3), 317-335.
- Canavarro, A. F. (2011). Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios. En Associação de Professores de Matemática (Ed.), *Ensino Exploratório da Matemática: Práticas e desafios*. Associação de Professores de Matemática.
- Dörr, R. C., Pina Neves, R. da S., & Ribeiro, A. J. (2023). Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. *Perspectivas Da Educação Matemática*, 16(42), 1-27.
- Estevam, E. J. G., Cyrino, M. C. C. T., & Oliveira, H. (2018). Desenvolvimento do conhecimento estatístico para ensinar a partir da análise de tarefas em uma comunidade de professores de Matemática. *REnCiMa*, 9(2), 32-51.
- Jardim, V. B. F., Ribeiro, A. J., & Aguiar, M. (2023). O uso de Tarefas de Aprendizagem Profissional para o ensino da estrutura algébrica de Grupos na Licenciatura em Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16(42), 1-21.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. En GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P., & Quaresma, M. (2016). Teachers' professional practice conducting mathematical discussions. *Educational Studies in mathematics*, 93, 51-66.
- Ribeiro, A. J., Aguiar, M., & Trevisan, A. L. (2020). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores ao discutir coletivamente uma aula sobre padrões e regularidades. *Quadrante*, 29(1), 52-73.
- Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetiké*, 28, e020027.
- Stein, M. K., Engle, R. A. Smith, M. S., & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating Productive Mathematical Discussions: Five Practices for Helping Teachers Move Beyond Show and Tell. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.



Trabajo formativo-colaborativo entre formadores y futuros profesores de Matemática en el desarrollo de un Estudio de Clase (Lesson Study)

Guillermo **Ramírez-Montes**
 Universidad de Costa Rica
 Costa Rica
guillermo.ramirez_m@ucr.ac.cr
 Yuriko **Yamamoto-Baldin**
 Universidade de São Carlos
 Brasil
yuriko@ufscar.br
 Regina **Pina-Neves**
 Universidade de Brasilia
 Brasil
reginapina@gmail.com
 Fabián **Gutiérrez-Fallas**
 Universidad de Costa Rica
luisfabian.gutierrez@ucr.ac.cr

Resumen

Este estudio explora el trabajo formativo-colaborativo entre formadores y futuros profesores de Matemática a través del desarrollo de un Estudio de Clase (Lesson Study, LS). La investigación busca caracterizar las interacciones entre ambos actores en las distintas fases del LS y su impacto en el desarrollo profesional docente. Se adopta una metodología cualitativa con enfoque interpretativo, basada en la recolección y análisis de datos de un proceso formativo desarrollado en la Universidad de Costa Rica. Los hallazgos destacan la relevancia del trabajo colaborativo en la planificación, implementación y reflexión de la práctica docente. Se concluye que el LS es una estrategia efectiva para integrar teoría y práctica en la formación inicial de profesores de Matemática, fomentando aprendizajes significativos y el desarrollo profesional.

Palabras clave: San José; Costa Rica; Desarrollo profesional; Educación Matemática; Educación superior; Enseñanza híbrida; Formación docente inicial; Investigación cualitativa; Lesson Study; Pensamiento geométrico.

Introducción

La comprensión del Estudio de Clase (EC) evidencia la conexión del Lesson Study (LS) japonés con diversos campos de la Educación Matemática, superando así su reducción a un método de enseñanza en etapas o entrenamiento docente en el aula (Isoda, 2015). Este riesgo ha sido contrarrestado por análisis críticos que destacan el impacto del LS en la práctica educativa (Fujii, 2019), mostrando su potencial en dos líneas de investigación bien marcadas: a) formación de profesores de Matemática, y b) prácticas didácticas en el aula con evidencias de mejora en el aprendizaje (Baldin et al., 2023). En países fuera de Japón, cursos de formación inicial están integrando los principios del EC, destacando el LS como una herramienta eficiente para el desarrollo profesional desde la formación inicial hasta la práctica continua en escuelas. Propuestas internacionales, como World Association of Lesson Studies (WALS- <https://www.walsnet.org/>) y el Seminário Internacional de Lesson Study no Ensino de Matemática (SILSEM- <https://www.even3.com.br/iisilsem>), subrayan la importancia de formar también a los formadores de profesores, quienes frecuentemente carecen de conocimiento y apoyo en procesos de EC.

En este contexto, esta comunicación se deriva de un proceso formativo de EC que reunió a formadores, futuros profesores y especialistas en LS, en lo que fue el comienzo de un proyecto más amplio con personas formadoras de profesores de Matemática en Costa Rica. La experiencia del proceso formativo condujo a la publicación de un artículo (Baldin et al., 2024), en el cual se describe y analiza todo el proceso vivido en términos de contribuciones para el desarrollo profesional docente. En esta comunicación se analiza con mayor rigor el trabajo desarrollado por uno de los equipos participantes de dicho proceso formativo de EC, integrado por formadores y una futura profesora de Matemática. Siendo así, el objetivo de este estudio es caracterizar el trabajo formativo-colaborativo entre formadores y futuros profesores de Matemática durante el desarrollo de un EC, analizando sus interacciones en las distintas fases del EC y su impacto en el desarrollo profesional docente de los participantes. Para tal fin, se plantea la interrogante ¿cómo se caracterizan cada una de las fases del EC vivenciadas entre los miembros del equipo en estudio? ¿qué elementos se desprenden del proceso formativo vivenciado por el equipo que aportan al desarrollo profesional docente?

Formación Inicial de Profesores de Matemática

La formación inicial de profesores de Matemática es un proceso clave en la construcción del conocimiento profesional docente, influenciado por factores como la reflexión sobre la enseñanza, las creencias pedagógicas y el contexto de la futura práctica profesional (Ponte & Chapman, 2008). En este marco, se reconoce la importancia del conocimiento didáctico del contenido como elemento esencial para organizar la enseñanza de las Matemáticas, integrando conocimientos sobre el currículo, la práctica docente y el aprendizaje de los estudiantes (Ponte, 2017).

El formador de profesores juega un rol fundamental en este proceso, ya que su práctica influye directamente en la calidad de la formación docente y, en consecuencia, en el aprendizaje matemático de los estudiantes (Cochran-Smith, 2003). No obstante, la conceptualización del formador es diversa, pues estos pueden provenir de distintas trayectorias académicas y profesionales, desde matemáticos hasta especialistas en Educación Matemática. Esta diversidad ha llevado a la discusión de modelos de conocimiento específicos para formadores de profesores que resaltan la necesidad de que los formadores no solo dominen el conocimiento matemático, sino que también comprendan los desafíos de la enseñanza y el aprendizaje de la disciplina en diferentes niveles educativos (Contreras, 2021).

La interacción entre formador, conocimiento didáctico y futuro docente ocurre en un espacio donde se construyen y reconstruyen conocimientos. Ponte y Chapman (2008) subrayan la importancia de brindar oportunidades formativas que permitan a los futuros docentes comprender la complejidad de la enseñanza como base para su desarrollo profesional. En este sentido, modelos de aprendizaje profesional como el de Prediger, Roesken-Winter y Leuders (2019) destacan dos dimensiones clave: el aprendizaje del formador en la creación de oportunidades formativas y el aprendizaje del formador mediante propuestas estructuradas de desarrollo profesional. Desde esta perspectiva, se ha reconocido la importancia de enfoques colaborativos como el Lesson Study, aplicado en diversos contextos de formación inicial (Pina Neves, Fiorentini & Silva, 2022; Ponte, 2017). Estos enfoques promueven la reflexión sobre la enseñanza, permiten identificar dificultades conceptuales y fomentan la colaboración entre formadores, futuros docentes e investigadores.

Principios y elementos orientadores de Lesson Study

El término Lesson Study proviene del japonés jugyo, que significa “lección”, y kenkyu, que significa “estudio” o “investigación”. En ese sentido, el LS desde sus orígenes se caracteriza como un espacio profesional que busca promover la investigación a través de la reflexión en un contexto de aula (Ermeling & Graff-Ermeling, 2014).

El desarrollo de un proceso formativo de LS implica considerar ciertos principios, los cuales, según Stigler y Hiebert (1999), son: a) El LS debe mantener constancia en el tiempo, aportando a la mejora por medio de la reflexión; b) la razón de ser del LS debe ser el aprendizaje de los estudiantes como un todo, no limitándose al aprendizaje de los contenidos; c) la observación en el LS no se debe centrar en el profesor, sino en el proceso de enseñanza planificado y desarrollado; d) las mejoras a realizar a la lección planificada deben ser aterrizadas al contexto local de enseñanza; e) el trabajo colaborativo de los profesores en el LS debe ser el punto de partida de las mejoras en el aula; y f) el conocimiento generado a partir de las reflexiones debe servir para ser compartido, a fin de que se promueva la mejora de la enseñanza a nivel macro.

Aunque estos principios han sido adaptados en diferentes países, basados en aspectos como la cultura y el contexto escolar, en general, un proceso tradicional de LS sigue la siguiente secuencia de etapas: inicialmente, un equipo de profesores selecciona un tema de investigación con objetivos a largo plazo, indagan investigaciones respecto al tema y estudian el programa de la asignatura donde aparece el tema. Después, el equipo planea una lección para un tema

específico de la unidad temática seleccionada, reuniéndose en varias ocasiones, y considerando en su planeamiento el aporte de todos los miembros del equipo, además de posibles reacciones de los estudiantes. Teniendo el plan, un miembro del equipo implementa la lección mientras los colegas observan y recolectan datos sobre el aprendizaje de los estudiantes. Acabada la implementación, se realiza una discusión colectiva enfocada en los datos recolectados y las revisiones de la lección propuesta, donde participa el profesor implementador, y los profesores observadores. Como opcional, el equipo rediseña la propuesta basada en las reflexiones y selecciona nuevamente un miembro para la implementación. El proceso termina con la contribución de un especialista externo en LS, *koshi* (en la terminología de LS), quien brinda aportes a partir de lo observado y lo comentado por otros observadores, a fin de aportar al proceso de planeamiento, observación e implementación de la lección con su conocimiento especializado. (Seleznyov, 2018). Importante será socializar los resultados con otros grupos de LS y redes.

Parte de las adaptaciones que se realizan en a estas etapas del LS en otros países es realizar un proceso de LS en pocos días, inclusive en un día, o inclusive no considerar el Kyozaikenkyu (el estudio de los materiales instruccionales) en la fase del planeamiento (Kitada, 2022). En el caso del presente estudio, el tiempo destinado al proceso formativo permitió cubrir los elementos referidos en las fases, pero no llegando a realizar el rediseño de la propuesta.

Aspectos Metodológicos

Participantes y contexto

En el proceso formativo de EC, del cual se deriva esta comunicación, participaron 20 personas: 13 formadores de profesores de Matemática, 5 futuros profesores de Matemática y 2 especialistas en LS (*koshi*). Los formadores contaban con experiencia en cursos de didáctica matemática y práctica docente; por su lado, los futuros profesores, 3 cursaban el cuarto año (bachillerato) y 2 el quinto año (licenciatura). Previo al proceso formativo, los participantes respondieron a un formulario sobre experiencia profesional y conocimiento relativo al LS; además, atendieron a tres lecturas asignadas sobre LS, tres *lives* y una entrevista sobre LS en la formación inicial y continua de profesores; archivos colocados en un entorno virtual de *GoogleClassroom*. Posterior al proceso formativo, los participantes llenaron un formulario sobre reflexiones sobre el proceso formativo de EC vivido. El proyecto que tiene como punto de partida este proceso formativo, plantea como foco el estudio de la viabilidad y la efectividad de la implementación de LS con personas formadoras de docentes de Matemática de una Sede de la Universidad de Costa Rica.

Cabe destacar también que los participantes declararon tener poco o ningún conocimiento previo con relación a LS y las especialistas actuaron como formadoras durante la coordinación del proceso que se llevó a cabo. Para fines de esta comunicación, el proceso formativo en LS se llevó a cabo en el contexto de la IV Escuela de Verano en Didáctica de la Matemática, de la Universidad de Costa Rica, un espacio coordinado y gestionado por el Departamento de Educación Matemática y el Centro de Investigación en Matemática y Metamatemática de dicha universidad. Para esta experiencia formativa, se contó con la participación de dos investigadoras especialistas en LS de universidades públicas de Brasil, quienes lideraron la Escuela de Verano

integrando a futuros profesores y formadores en un modelo teórico-práctico pionero, que marcó el inicio de una colaboración interinstitucional para fortalecer la formación inicial en Educación Matemática.

Esta formación tuvo una extensión de 10 semanas organizadas en cuatro momentos diferentes:

- **Momento 1 (4 semanas, virtual y asincrónico).** Se dio inicio al proceso con la inscripción de los participantes mediante un formulario que recopiló información personal, experiencia profesional y conocimiento previo sobre LS. Este momento sirvió para preparar a los participantes y establecer un punto de partida en su comprensión del LS.
- **Momento 2 (2 semanas, virtual y asincrónico).** Se proporcionaron lecturas clave sobre el LS, incluidas referencias teóricas y casos de implementación. A través de foros y actividades en *Google Classroom*, los participantes discutieron estas lecturas, enriqueciendo su comprensión y estableciendo bases para la aplicación práctica.
- **Momento 3 (1 semana, presencial).** Durante cinco días intensivos en la Universidad de Costa Rica, los participantes trabajaron en sesiones teórico-prácticas, durante mañana y tarde. Estas incluyeron exposiciones sobre el desarrollo y expansión del LS, la planificación de clases en equipos según áreas temáticas, simulaciones de clases y reflexiones grupales.
- **Momento 4 (3 semanas, virtual y asincrónico).** Este cierre consistió en una reflexión individual sobre el proceso formativo, facilitada mediante un formulario en *Google Forms*. Los participantes evaluaron su experiencia y su impacto en su desarrollo profesional y en la formación inicial docente.

El proceso integró enfoques teóricos y prácticos, enfatizando la colaboración y la reflexión crítica como herramientas para el aprendizaje profesional.

Los datos fueron recolectados de diversas fuentes: (i) respuestas a los formularios de *Google*; (ii) diseño de los planeamientos de clase; (iii) videos de simulaciones y análisis crítico de la clase implementada, y (iv) videos de análisis crítico sobre el proceso formativo.

Abordaje metodológico

En el caso de la presente comunicación, se presenta un estudio cualitativo-interpretativo (Erickson, 1986), en el cual se considera el proceso formativo base del proyecto referido, enfocando la metodología a seguir en los datos recogidos y analizados de uno de los equipos de trabajo, conformado por tres docentes formadoras (F1, F2, F3) y una futura profesora (fP), quienes trabajaron la temática de *área de polígonos*, dirigido para un curso de formación inicial de profesores de Matemática, con el objetivo de “diagnosticar conocimientos geométricos en estudiantes universitarios matriculados en su primer curso de geometría formal”.

Los datos mostrados fueron recolectados a partir de las fuentes ii, iii, y iv, referidas en párrafos anteriores. El análisis de los datos se ha organizado en tres categorías, referentes a fases del EC vivenciado por los participantes del equipo de trabajo, y con el propósito de analizar las interacciones en cada fase y su impacto en el desarrollo profesional docente.

Principales Resultados

Diseño del planeamiento de clase

En el caso aquí analizado, el equipo de trabajo elaboró un planeamiento de clase que tiene como propósito diagnosticar conocimientos geométricos básicos en estudiantes universitarios durante la primera sesión de cursos iniciales de geometría para la carrera de formación de profesores de Matemática. A través de dos tareas matemáticas principales, los estudiantes deben explorar formas de dividir un rectángulo en partes iguales y justificar la fórmula del área del triángulo. Estas actividades buscan fomentar habilidades de análisis, resolución de problemas y aplicación de conocimientos previos de forma colaborativa.

Durante el proceso del diseño de la clase, se elaboraron tres propuestas, la primera corresponde a una lluvia de ideas generales, cuya tarea central fue orientada por la pregunta: “¿De cuántas maneras distintas podemos dividir un rectángulo en dos partes de igual área?”

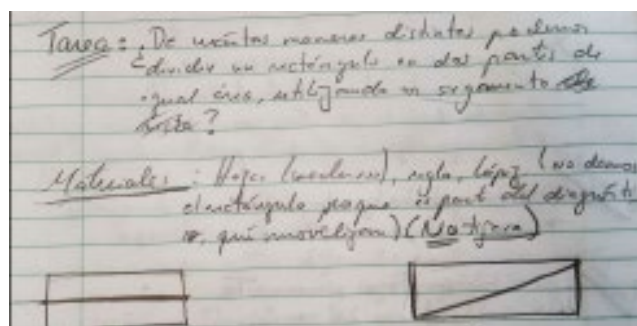


Figura 1. Tarea central del planeamiento de clase.

Posteriormente, las siguientes dos versiones del planeamiento ampliaron las ideas, detallando la duración prevista de la clase, materiales y recursos a utilizar, así como las habilidades y conocimientos que se pretenden desarrollar. En estas versiones, se busca orientar la clase hacia la exploración de la fórmula del área del triángulo. Ya en la tercera versión del planeamiento, se logra establecer preguntas generadoras más desarrolladas para guiar la reflexión y discusión en clase, como “¿Cuántas alturas tiene un triángulo?” o “¿Qué características tienen un cuadrado y un rectángulo?”, acompañado de notas detalladas para el docente; y se incluyen posibles soluciones a cada tarea con menciones específicas a propiedades geométricas.

El planeamiento se identificó como una de las fases más exigentes del proceso formativo en LS. Las interacciones entre formadores y futuros profesores resultaron fundamentales para adaptar contenidos y estrategias de enseñanza según las necesidades de los estudiantes. Estas interacciones facilitaron el intercambio de perspectivas y la construcción colaborativa de metas claras, promoviendo el desarrollo de habilidades como la planificación pedagógica y el trabajo en equipo. Los participantes resaltaron que las discusiones en esta etapa les permitieron identificar fortalezas individuales y colectivas, así como áreas de mejora en sus prácticas docentes.

Implementación de la clase

Durante esta fase, las interacciones se intensificaron al surgir rutas no previstas en el planeamiento. Este dinamismo fomentó la colaboración activa y el aprendizaje mutuo entre los participantes. Los futuros profesores destacaron cómo la retroalimentación inmediata y las ideas de los formadores les ayudaron a ajustar su desempeño docente en tiempo real. Estas experiencias impulsaron el desarrollo profesional al fortalecer la capacidad de los participantes para liderar clases, tomar decisiones pedagógicas bajo condiciones reales y gestionar de manera efectiva las dinámicas del aula.

Además, esta fase permitió que la fP de este grupo en estudio asumiera el rol de docente implementadora de la clase, donde se puede destacar que las interacciones por parte de las formadoras consistieron en dar soporte, apoyo y orientación a la fP para dirigir la clase. Por ejemplo, una formadora argumentó que en la implementación se trató de “considerar dificultades, y temores de dicha persona, e intentar ayudar a superarlos” (F1_ *reflexión final*).

Análisis reflexivo de la experiencia de implementación

El análisis crítico posterior a la implementación fue clave para reflexionar sobre las interacciones ocurridas en todas las fases del EC. Los participantes subrayaron la importancia de las discusiones grupales y la retroalimentación constructiva como herramientas para profundizar en el entendimiento de las prácticas docentes; tal como reconocido por la futura profesora, quien, refiriéndose a las personas formadoras del grupo, indicó:

Me brindaron consejos sobre control de clase y realización de preguntas guía antes de realizar la simulación. Además, a pesar de que mis compañeras son profesoras profesionales con amplio conocimiento, siempre me incluyeron en el proceso y tomaron en cuenta mis comentarios y aportes.
(fP_ *reflexión final*)

Este ejercicio de reflexión constante permitió una mayor conexión entre la teoría y la práctica, desarrollando competencias como la autocrítica, la evaluación de estrategias pedagógicas y la capacidad de integrar aprendizajes en su futura labor docente.

Conclusiones

Los resultados mostrados evidencian que el trabajo desarrollado entre formadores y futuros profesores de Matemática, durante el desarrollo del EC objeto de este estudio, se caracterizó por el diálogo constructivo en equipo para la toma de decisiones durante la fase del planeamiento de la clase, aportando en esta etapa a la adaptación de contenidos y estrategias de enseñanza para la ejecución de la lección. Además, las interacciones fruto de este diálogo permitieron que los futuros profesores de Matemática aprendieran de la experiencia de los formadores, y viceversa, dándose un aprendizaje mutuo en términos de fortalezas individuales y colectivas para la mejora de la práctica docente. El intercambio de diálogo entre los participantes del equipo de trabajo en la fase del planeamiento evidencia dar confianza a la futura profesora para implementar la clase, a partir de las orientaciones dadas por los profesores formadores y la reflexión de la futura formadora sobre sus propias fortalezas y debilidades. La fase de reflexión posterior a la implementación se caracteriza como un momento rico para profundizar sobre los aportes

significativos que la futura profesora implementadora reconoce sobre todo el trabajo realizado previo a la implementación.

En términos de desarrollo profesional docente, se desprende que el proceso formativo de LS desarrollado permitió un crecimiento profesional en la futura profesora y en los formadores de profesores, caracterizado por el trabajo colaborativo, reflexivo y fundamentado en la indagación de lecturas seleccionadas que se aterrizaron al contexto de implementación a través del diálogo integrado entre formadores y futuros profesores.

Referencias y bibliografía

- Baldin, Y. Y., Silva, A. F., & Felix, T. F. (2023). Introducción de los Principios del Estudio de Clases en Brasil: primeros pasos y grupos de estudio. *Paradigma*, 44(2), 131–158. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p131-158.id1415>
- Baldin, Y.Y., Ramirez, G.E., Pina Neves, R.S., & Gutiérrez, L.F. (2024). Colaboración Brasil-Costa Rica en la construcción de Estudios de Clase integrando formadores y futuros profesores de Matemática, *Zetetike*, 32, 1–24. <https://doi.org/10.20396/zet.v32i00.8677101>
- Cochran-Smith, M. (2003). Learning and unlearning: The education of teacher educators. *Teaching and Teacher Education*, 19(1), 5-28. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/S0742051X02000914>
- Contreras, L. C. (2021). Una aproximación a un modelo de conocimiento del formador de profesores de matemáticas. *Revista Venezolana de Investigación En Educación Matemática*, 1(1), 1–26. <https://doi.org/10.54541/review.v1i1.1>
- Erickson, F. (1986). Qualitative methods in research on teaching. In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching* (pp.119-161). MacMillan.
- Ermeling, B., & Graff-Ermeling, G. (2014). Learning to learn from teaching: a first-hand account of lesson study in Japan. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 3(2), 170-191. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-07-2013-0041>
- Fujii, T. (2019). Designing and adapting tasks in lesson planning: A critical process of Lesson Study. In R. Huang, A. Takahashi, & J. Da Ponte (Eds.), *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics: An International Perspective* (pp. 681–704). Cham, Switzerland: Springer.
- Isoda, M. (2015). The Science of Lesson Study in the Problem-Solving Approach. In M.Inprasitha, M. Isoda, P. Wang-Iverson & B.H. Yeap (Eds.), *Lesson Study: Challenges in Mathematics Education* (pp. 81-108). New Jersey: World Scientific.
- Kitada, Y. (2022). Teacher Agency in the Modification of Japanese Lesson Study in the United States. *Educational Studies in Japan: International Yearbook*, 16, 45-57. <https://doi.org/10.7571/esjkyoiku.16.45>
- Pina Neves, R. S., Fiorentini, D., & Silva, J. M. P. (2022). Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: Contribuições á Aprendizagem Docente. *PARADIGMA*, 43(1), 409–442. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p409-442.id1178>
- Ponte, J. P. (2017). Lesson studies in initial mathematics teacher education. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, 6(2), 169-181. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-08-2016-0021>



Un análisis cuasiexperimental del desempeño académico en Geometría con futuros maestros: Estudio de revisión

Vienbenida **Igualada Cortez**

Escuela de Matemática, Universidad de Panamá

Panamá

vienbenida.igualada@up.ac.pa

Tatiana María **Portugal**

Escuela de Matemática, Universidad de Panamá

Panamá

Tatiana.portugal@up.ac.pa

Rodrigo Yoel **Combe**

Escuela de Matemática, Universidad de Panamá

Panamá

rodrigo.combe@up.ac.pa

Olmedo **Aparicio Batista**

Escuela de Matemática, Universidad de Panamá

Panamá

olmedo.aparicio@up.ac.pa

Resumen

El presente estudio se enfoca en la formación matemática en la licenciatura en Educación Primaria, donde la asignatura de Matemática se distribuye en tres cursos obligatorios durante los dos primeros años. Esta presentación corresponde a la Fase 1, centrada en los fundamentos teóricos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Para ello, se realizó una revisión bibliográfica en bases como Scielo y Google Académico, con el fin de analizar modelos, enfoques y hallazgos relevantes en la formación geométrica de futuros docentes. La revisión consideró el desempeño académico en conocimientos conceptuales, procedimentales y de visualización. Se incluyeron teorías y modelos de Van Hiele, Hoffer, Shulman y Godino, además de enfoques de evaluación presentes en estudios internacionales como PISA y ERCE. Este análisis permitió identificar los principales retos en la enseñanza de la geometría y ofrecer un marco teórico útil para diseñar estrategias pedagógicas que fortalezcan la formación docente.

Palabras clave: Desempeño académico; Educación primaria; Formación docente; Geometría; Modelos; Nivel superior; visualización.

Introducción

El desempeño académico en geometría de los docentes en formación es un factor clave en la calidad educativa. Diversos estudios han evidenciado la necesidad de fortalecer el desempeño académico de los docentes en el área de Matemáticas, especialmente en lo relacionado con la geometría. Los resultados obtenidos en evaluaciones nacionales e internacionales reflejan importantes dificultades tanto en la comprensión como en la enseñanza de estos contenidos. No obstante, los resultados de diversas evaluaciones nacionales e internacionales han evidenciado un bajo rendimiento en esta disciplina. En particular, los datos del ERCE-2019 y las pruebas nacionales indican que Panamá se encuentra por debajo del promedio regional en Matemática (UNESCO-OREALC, 2021; Sánchez y Carmona, 2021). Además, los resultados de PISA-2018 reflejan que solo el 19% de los estudiantes alcanzaron los niveles mínimos de desempeño, lo que refuerza la necesidad de intervenir en la enseñanza de esta área. Uno de los aspectos críticos identificados en estas evaluaciones es la geometría, un contenido fundamental dentro del currículo matemático. Según Igualada (2023), el 56,7% de los docentes en ejercicio presentan un nivel de conocimiento muy bajo o bajo en geometría, lo que sugiere una deficiencia que podría afectar la calidad de la enseñanza en la educación primaria.

Ante este panorama, surge la necesidad de realizar un estudio enfocado en los estudiantes de la licenciatura en Educación Primaria, específicamente en el curso de geometría. Al respecto Castro (2016) señala que al momento de acceder al grado de maestro hay conocimientos matemáticos básicos que se deben conocer, es decir, conceptos, procedimientos y resolución de problemas “que deberían haber aprendido durante su etapa de escolarización y que necesitan al iniciar su formación” (p. 9). La formación de los maestros es esencial porque su tarea es formar niños con aptitudes y actitudes necesarias para su desenvolvimiento. Es importante hacer referencia de algunos antecedentes.

En este contexto, resulta pertinente hacer referencia a algunos **antecedentes investigativos relacionados con el dominio que tienen los maestros en formación y en ejercicio en el área de la geometría**

Desde la antigüedad, la geometría ha sido considerada una disciplina esencial en la Educación Matemática, proporcionando las bases para el desarrollo del pensamiento lógico y espacial. En este sentido, el conocimiento en geometría juega un papel crucial en la formación académica, pues permite a los estudiantes desarrollar habilidades espaciales desde edades tempranas.

En este contexto, Saito y González (2020) señalan “que existe un bajo dominio de temas fundamentales como operaciones básicas, geometría, medidas, las cuales son esenciales dentro del currículo y deben estar correlacionados en el proceso de enseñanza aprendizaje” p. (221). Asimismo, los autores destacan que, en el nivel primario en Panamá, la geometría recibe poca atención en el aula debido a que los maestros en ejercicio dedican más tiempo a la enseñanza de la aritmética, lo que limita el desarrollo de esta área del conocimiento. Esta situación coincide

con lo expuesto por Morris (1986) quien afirma que, en América Latina “la realidad, es que más de la mitad de los maestros dedican menos del 10% del tiempo de clase disponible para Matemática, durante el año escolar, para trabajar en geometría” (p. 29). Por su parte, Barrantes y Blanco, (2004) señala que muchos estudiantes aún ingresan a las facultades con experiencias similares, una falta de conocimiento y concepciones erróneas sobre la geometría, además de mostrar apatía e inseguridad y emplear de manera incorrecta técnicas e instrumentos en los procesos de construcción geométrica. En esta misma línea, García, Bufo y Torregrosa (2014) destacan que la enseñanza de la geometría en los niveles de educación primaria y secundaria suele ser insuficiente o abordada de manera superficial, lo que limita el desarrollo del pensamiento espacial y la comprensión profunda de sus conceptos fundamentales.

La geometría, como parte esencial del currículo de Matemáticas en la educación primaria y secundaria, contribuye significativamente al desarrollo de competencias matemáticas. Sin embargo, estudios antes mencionados evidencian que muchos maestros enfrentan dificultades significativas en esta área, lo que repercute negativamente en su confianza y competencia para enseñar geometría de manera adecuada.

Por tanto, el propósito de este estudio es analizar modelos, enfoques y hallazgos de investigaciones previas que abordan la formación geométrica en futuros docentes.

Marco Teórico

Modelos y perspectivas teóricas en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría

En este contexto, es relevante mencionar algunos modelos y perspectivas teóricas que han contribuido al estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría.

Por un lado, Godino, Gonzalo, Cajaraville y Fernández (2012) subrayan la importancia de abordar la representación de los objetos geométricos a través de la dualidad entre expresión y contenido. Este enfoque conceptualiza la relación entre los objetos y sus expresiones, las cuales pueden manifestarse en imágenes, dibujos, diagramas o estructuras conceptuales, vinculados a los registros de representación semiótica.

De manera complementaria, Crompton, Grant y Shraim (2018) señalan que la geometría se enfoca en el análisis de las propiedades, relaciones y transformaciones de los objetos espaciales dentro de un sistema determinado. Esta disciplina puede vincularse directamente con elementos del entorno cotidiano y, al situar sus conceptos en un contexto concreto, se facilita su comprensión.

Por su parte, Aray, Párraga y Chun (2019) sostienen que pensar geométricamente implica razonar sobre un objeto geométrico mediante procesos de pensamiento como representar, visualizar, interpretar, clasificar, abstraer, conjeturar, analizar, probar hipótesis y generalizar. Estas habilidades, basadas en métodos inductivos y deductivos, permiten establecer conjeturas relacionadas con líneas, ángulos y figuras.

Asimismo, Hoffer (1981) clasifica las habilidades geométricas en tres categorías principales: visualización, habilidades verbales y habilidades de dibujo. Este modelo refuerza la

importancia de desarrollar en los estudiantes competencias que les permitan interpretar, comunicar y construir conceptos geométricos de manera efectiva. Desde otra perspectiva, Shulman (1986) introduce dos dominios fundamentales en la formación docente: el conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico del contenido. Sobre el primero, señala que: “No sólo es necesario comprender que algo es así; el maestro debe comprender además por qué es así, sobre qué bases se puede afirmar su justificación y bajo qué circunstancias nuestra creencia en su justificación puede debilitarse e incluso negarse” (p. 9). Por otro lado, el conocimiento pedagógico del contenido se define como una: “Amalgama especial de contenido y pedagogía que es únicamente competencia de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional” (Shulman, 1987, p. 8).

Finalmente, desde una perspectiva teórica, Van Hiele (1957) desarrollaron un modelo que explica el desarrollo de la comprensión geométrica a través de cinco niveles secuenciales: visualización, análisis, clasificación, deducción formal y rigor. Según este modelo, el aprendizaje geométrico transita desde una estructuración perceptiva inicial hasta una estructuración lingüística autónoma, permitiendo la construcción de razonamientos más complejos. Esta teoría constituye una base fundamental para comprender cómo se desarrolla el pensamiento geométrico en los estudiantes.

Metodología

El presente estudio corresponde a una **investigación teórica y documental**, basada en una revisión bibliográfica sistemática sobre el desempeño académico en geometría de futuros docentes de educación primaria. Para ello, se han consultado bases de datos indexadas y de acceso abierto, tales como Scielo, Dialnet, Latindex, Redalyc, Google Académico, entre otras plataformas especializadas en Educación Matemática, con el propósito de analizar modelos, enfoques y hallazgos de investigaciones previas que abordan la formación geométrica en futuros docentes.

La estrategia metodológica utilizada en esta fase se fundamenta en los siguientes criterios:

1. Para seleccionar las fuentes, se consideró artículos científicos, libros, tesis y documentos oficiales relacionadas con la enseñanza y aprendizaje de la geometría en la formación.
2. Criterios de inclusión: Se buscaron artículos publicados en los últimos 10 años, No obstante, se incluyeron referencias clásicas consideradas fundamentales para el área, entre los cuales se seleccionaron investigaciones que abordan el desarrollo del pensamiento geométrico, los modelos teóricos relevantes (Van Hiele, Hoffer, Shulman, Godino) y estudios internacionales sobre evaluación en Matemática (PISA, ERCE).
3. Asimismo, la revisión se centró en el desempeño académico de los estudiantes universitarios en geometría, considerando los conocimientos conceptuales, procedimentales y de visualización.
4. Criterio de exclusión: se excluyeron trabajos que no tuvieron relación directa con la educación Matemática en el área de geometría.
5. Para el análisis de la información se aplicó una triangulación de datos, agrupando los autores seleccionados según tres dimensiones con sus categorías temáticas, como se muestra en la Figura 1.

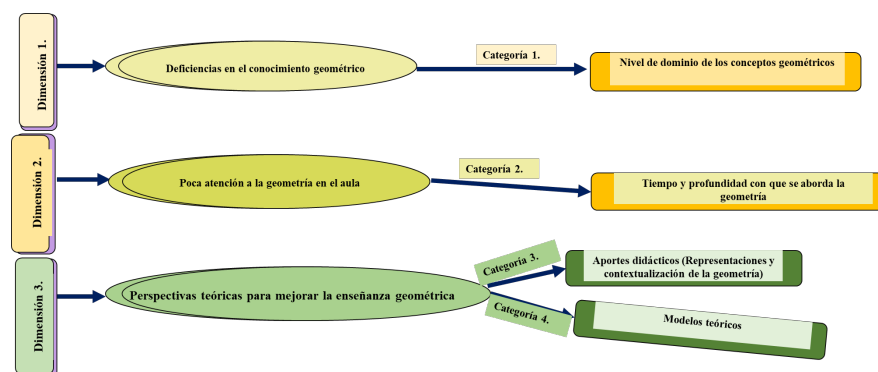


Figura 1. Dimensiones y categorías según evidencias de los autores seleccionados

6. El proceso de investigación se desarrolla por etapas, representadas en la Figura 2; sin embargo, en esta presentación se expone únicamente la fase 1-2.

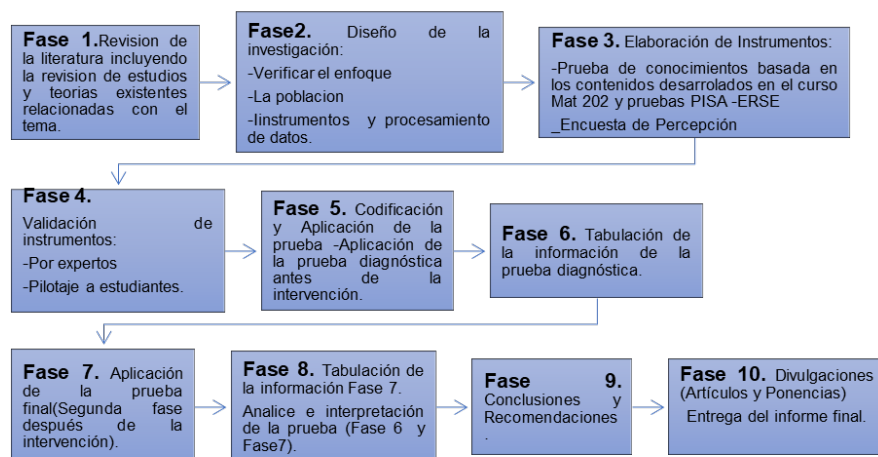


Figura 2. Fase de la investigación

Tabla 1

Distribución de preguntas según las áreas y procesos cognitivos

MAT 202					
Áreas	Procesos cognitivos			Total	%
	Reconocimientos de objetos matemáticos	Problemas simples	Problemas complejos		
%	32%	40%	28%	100%	
Visualización	4	2	-----		
Análisis	2	4	4		
Clasificación	2	4	-----		
Deducción	-----	-----	3		
Formal					

Es importante señalar que, en el presente estudio, la prueba estará enfocada exclusivamente en contenidos de geometría plana. Para su diseño y análisis, se tomarán como referencia las cuatro primeras fases del modelo de Van Hiele, que describen la progresión en el razonamiento geométrico, así como los procesos cognitivos propuestos por PISA y ERCE, los cuales evalúan la comprensión, el razonamiento y la aplicación de conceptos geométricos en distintos contextos.

Resultados

En el análisis de la enseñanza de la geometría en contextos escolares, diversos estudios coinciden en señalar limitaciones significativas tanto en el dominio conceptual como en la práctica pedagógica y modelos teóricos. La Tabla 2 y 3 sintetiza estos hallazgos mediante una triangulación de evidencias empíricas, permitiendo una comprensión más precisa del aporte de los autores. Los resultados se organizan según las dimensiones y categorías presentadas en la Figura 1.

Tabla 2

Triangulación de Evidencias empíricas de deficiencias en el dominio Geométrica

Dimensión	Categorías	autores
Deficiencias en el conocimiento geométrico	Nivel de dominio de los conceptos geométricos	Saito y González (2020) Existe un bajo dominio de conceptos fundamentales, incluyendo la geometría, en los maestros. Esto se debe, en parte, a que, en Panamá, los docentes en formación dedican más tiempo a la aritmética que a la geometría. Igualada (2023) Destaca que más de la mitad de los docentes en ejercicio (56,7%) tienen un dominio insuficiente en geometría, lo que podría afectar la calidad de la enseñanza en primaria. Barrantes y Blanco (2004) Refuerzan esta idea, señalando que los estudiantes que ingresan a las facultades de educación muestran conocimientos insuficientes, concepciones erróneas, apatía e inseguridad al abordar temas geométricos.
Poca atención a la geometría en el aula	Tiempo y profundidad con que se aborda la geometría	Morris (1986) destaca que, en América Latina, más del 50% de los maestros dedican menos del 10% del tiempo de clase de Matemática a la geometría, lo que limita el desarrollo del pensamiento geométrico. García, Bufo y Torregrosa (2014) subrayan que la enseñanza de la geometría en primaria y secundaria suele ser insuficiente o tratada de forma superficial, lo que provoca lagunas conceptuales que se arrastran a lo largo de la formación educativa.

Tabla 3

Triangulación de Evidencias de aportes pedagógicos y modelos que ofrecen soluciones para una mejor comprensión y enseñanza de la geometría.

Dimensión	Categorías	autores
Perspectivas teóricas para mejorar la enseñanza geométrica	Aportes didácticos (Representaciones y contextualización de la geometría)	Godino et al. (2012) enfatizan la relevancia de relacionar el contenido geométrico con sus representaciones semióticas (imágenes, diagramas, estructuras conceptuales). Este enfoque mejora la comprensión al vincular las expresiones visuales con el contenido matemático. Hoffer (1981) identifica tres categorías de habilidades geométricas esenciales: la visualización, las habilidades verbales y las habilidades de dibujo, las cuales deben trabajarse de manera integrada para fortalecer el aprendizaje geométrico. Crompton, Grant y Shraim (2018) aportan una visión contextual, la geometría se entiende mejor cuando se vincula al entorno cotidiano. Aray, Párraga y Chun (2019) proponen un enfoque basado en habilidades cognitivas que favorecen el pensamiento geométrico estructurado y profundo, abordando desde una perspectiva de desarrollo del razonamiento matemático utilizando los métodos deductivos e inductivos.
	Modelos teóricos	Van Hiele (1957) propone un modelo de cinco niveles de razonamiento geométrico, de los cuales este estudio se basa en las cuatro primeras fases. Este modelo destaca la importancia de un aprendizaje secuencial y del uso de experiencias concretas para avanzar en la comprensión geométrica. Shulman (1986, 1987) resalta la importancia de que los maestros no solo dominen el contenido matemático, sino que también tengan un conocimiento pedagógico especializado que les permita traducir ese conocimiento en estrategias efectivas para el aula, aspecto clave en la formación del profesorado.

Conclusiones

En primer lugar, es crucial que los programas de formación docente asignen más tiempo y recursos a la geometría, superando el enfoque excesivo en la aritmética señalado por los autores (Morris, 1986; Saito y González, 2020). Los futuros maestros y maestros en ejercicio presentan deficiencias en geometría (Igualada, 2023), lo que refleja la necesidad de revisar y reforzar los programas formativos en este campo.

Segundo lugar es fundamental implementar estrategias que trabajen los procesos cognitivos definidos por PISA y ERCE (formulación, aplicación e interpretación) para garantizar una comprensión más profunda de los conceptos geométricos. Por otro lado, las habilidades de visualización, verbales y de dibujo (Hoffer, 1981) deben trabajarse conjuntamente para mejorar la comprensión geométrica y facilitar la traducción entre representaciones visuales y conceptuales (Godino et al., 2012).

Tercer lugar el modelo de Van Hiele (1957) es un recurso valioso para guiar el aprendizaje geométrico, ya que permite comprender cómo los estudiantes avanzan de niveles básicos a un pensamiento más abstracto. Asimismo, la combinación del conocimiento del contenido y el conocimiento pedagógico (Shulman, 1986-1987) es esencial para que los futuros maestros puedan explicar conceptos geométricos complejos de manera clara y accesible.

Referencias y bibliografía

- Aray, C.A., Párraga, O., y Chun, R. (2019). La falta de enseñanza de la geometría en el nivel medio y su repercusión en el nivel universitario: *análisis del proceso de nivelación de la Universidad Técnica de Manabí. Rehuso*, 4(1), 23 - 36. <https://doi.org/10.33936/rehuso.v4i1.1622>
http://scielo.senescyt.gob.ec/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S2550-65872019000100023
- Barrantes, M., & Blanco, L. J. (2004). Recuerdos, expectativas y concepciones de los estudiantes para maestro sobre la geometría escolar. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 22(2), 241-250. <https://ensciencias.uab.cat/article/view/v22-n2-barrantes-blanco/1793>
- Castro Inostroza, A. (2016). Conocimiento matemático fundamental para el Grado de Educación Primaria: *perfiles de conocimiento conceptual aditivo [Tesis doctoral]*.
https://ddd.uab.cat/pub/tesis/2016/hdl_10803_400645/aci1de1.pdf
- Crompton, H., Grant, M., y Shraim, K. (2018). Technologies to Enhance and Extend Children's Understanding of Geometry: A Configurative Thematic Synthesis of the Literature. *Educational Technology & Society*, 21(1), 59-69. <https://www.jstor.org/stable/26273868>
- García, A., Buforn, A. y Torregrosa, G. (2014). Un módulo de enseñanza centrado en desarrollar el razonamiento configuracional: características desde una perspectiva cognitiva. En M.T Tortosa, J.D. Álvarez y N. Pellín (coord.), XII Jornadas de Redes de Investigación en Docencia Universitaria. Alicante: Universidad de Alicante. https://rua.ua.es/dspace/bitstream/10045/41884/1/2014_XII_Jornadas_Redes_65.pdf
- Godino, J., Gonzalo, M., Cajaraville, J. y Fernández, T. (2012). Una aproximación ontosemiótica a la visualización en educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 30(2), pp. 109-130.
<http://ensciencias.uab.es/article/view/653>
- González, J. y Saito, Y. (2020). Deficiencias en la enseñanza de las matemáticas en el nivel primario de la educación básica general de Panamá. *Acción y Reflexión Educativa*, (45), 207-223.
- Hoffer, A. (1981). Geometry is More Than Proof. *Mathematics Teacher*, enero 1981, 11 – 18. Traducción de Ricardo Barroso. <http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/apregeom/apregeorefer.html>
- Igualada, V. (30 de julio-4 de agosto de 2023). Nivel de conocimientos en geometría de los maestros en primaria: un estudio descriptivo. [Presentación de póster]. In XVI Conferencia Interamericana de Educación Matemática. Lima, Perú. <https://xvi-ponencias.ciaem-iacme.org/index.php/xviciaem/xviciaem/paper/viewPaper/2124>
- Morris, Robert W. (1986). Estudios en educación matemática, v. 5: *La Geometría en las escuelas*. 2-255.
https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000124809_spa
- OECD (2019). "What can students do in mathematics?", in PISA 2018 Results (Volume I): *What Students Know and Can Do*, OECD Publishing, Paris. DOI: <https://doi.org/10.1787/f649d3c2-en>.
- Sánchez-Restrepo, H. & Carmona-Soto, M.B. (2021). Crecer 2018 en Panamá: Resultados del aprendizaje en Matemática y Español en los primeros años (Informe). *Ministerio de Educación. Panamá*.
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: *Foundations of the new reform*. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-23. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>

- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.
<https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- UNESCO-OREALC. 2021 ¿Qué se espera que aprendan los estudiantes de América Latina y el Caribe? Análisis curricular del Estudio Regional Comparativo y Explicativo (ERCE -2019) a la luz de las metas de *la Agenda 2030 para el Desarrollo Sostenible*.
- Van Hiele, P.M. (1957). El problema de la comprensión. En conexión con la comprensión de los escolares en el aprendizaje de la geometría. (Universidad Real de Utrecht: Utrecht, Holanda). *Director: Hans Freudenthal*.
<http://www.uv.es/Angel.Gutierrez/aprenggeom/archivos2/VanHiele57.pdf>



Un camino alternativo para presentar la propiedad de completitud del sistema de los números reales

Alexandra **Fregueiro**

Consejo de Formación en Educación (CFE)

Uruguay

suresmeralda@hotmail.com

Analía **Bergé**

Université du Québec à Rimouski

Canadá

analia_berge@uqar.ca

Resumen

El sistema de los números reales es el dominio numérico en el cual se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático vinculadas a sucesiones y series numéricas, funciones continuas, funciones derivables y la noción de integrabilidad, entre otros. Estos desarrollos teóricos son posibles en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$ debido a una propiedad que distingue a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud. En este taller, nos proponemos abordar el trabajo con dos actividades pensadas para generar la necesidad e introducir la propiedad de completitud vía la convergencia de las sucesiones monótonas crecientes y acotadas superiormente. Las actividades fueron experimentadas en el marco de una tesis doctoral reciente; serán retomadas en el taller y se analizará su potencial didáctico con los participantes.

Palabras clave: Consejo de Formación en Educación; Educación Matemática; Educación Superior; Enseñanza; Enseñanza del análisis matemático; Formación docente inicial; Investigación educativa; Uruguay.

Introducción

El sistema de los números reales, $\mathbb{R}$, es el sistema numérico en el que se desarrollan conceptos y se validan propiedades del Análisis Matemático, relacionados con sucesiones y

Taller; Superior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

series numéricas, funciones continuas, funciones derivables y la idea de integrabilidad, entre otros temas. Estos desarrollos teóricos son posibles en $\mathbb{R}$ y no en el sistema de los números racionales, $\mathbb{Q}$, debido a una propiedad que diferencia a estos dos cuerpos totalmente ordenados: la propiedad de completitud que verifica $\mathbb{R}$ y no $\mathbb{Q}$.

Nos ha interesado investigar hasta qué punto los estudiantes universitarios comprenden por qué estos desarrollos teóricos son viables en $\mathbb{R}$ y no en $\mathbb{Q}$. En particular, en el curso de análisis de variable real del profesorado de Matemáticas en Uruguay, llamado Análisis 1, la propiedad de completitud del sistema de números reales se presenta a través del enunciado que establece que todo subconjunto de números reales, que no esté vacío y esté acotado superiormente, tiene un supremo real, conocido como la propiedad o el axioma del supremo. Existen investigaciones, que se mencionarán en la siguiente sección, que indican que solo una pequeña proporción de estudiantes comprende la noción de supremo. Por lo tanto, deducimos que la comprensión de la propiedad de completitud en el ámbito del análisis matemático se dificulta cuando se introduce a través de la propiedad del supremo. El propósito de este taller es explorar un enfoque alternativo a la propiedad del supremo para presentar la propiedad de completitud del sistema de números reales. Con este propósito hemos diseñado y probado una secuencia de enseñanza y aprendizaje que busca resaltar la importancia de esta propiedad, así como aprovechar su doble función como herramienta (utilizar la noción para resolver ciertos problemas) y objeto de estudio, basándonos en la dialéctica herramienta – objeto propuesto por Douady (1992). Las actividades han mostrado su eficacia en una experimentación en laboratorio en el marco de una tesis doctoral (Fregueiro 2024). En este taller trabajaremos con las dos primeras actividades de esta secuencia que buscan explorar otro camino para introducir la propiedad de completitud del sistema real en la formación de futuros profesores de Matemática (Fregueiro y Bergé 2024).

Estado del arte

Para abordar la enseñanza y el aprendizaje de la completitud de $\mathbb{R}$ como un problema, es fundamental distanciarse de esta noción y comprender cómo, por qué y en qué contexto se hizo necesaria en el ámbito matemático. Nos basamos en el trabajo de Bergé y Sessa (2003), quienes identifican tres estados epistemológicos de la propiedad de completitud a lo largo de la historia de las Matemáticas: como un atributo implícito, como un atributo explícito que se acepta de manera natural, y como una propiedad que es explícita y demostrable. Este recorrido histórico nos ayuda a entender qué problemas resuelve la completitud, su relevancia en la construcción de conocimientos matemáticos en Análisis, y la insuficiencia de los números racionales para abordar ciertos problemas. La convergencia de sucesiones monótonas y acotadas, así como el teorema del valor intermedio (o Teorema de Bolzano), son ejemplos de la necesidad de formalizar esta propiedad a principios del siglo XIX. Los problemas que requieren la completitud están relacionados con la creación de pruebas formales que aseguran la existencia de elementos en el sistema numérico real, muchas de las cuales son evidentes desde una perspectiva gráfica. La propiedad de completitud es esencial para fundamentar el Análisis y para resolver problemas de existencia, como límites, raíces de funciones o intersecciones de intervalos.

En cuanto a la enseñanza y el aprendizaje de la completitud, hemos observado que diversas investigaciones abordan temas relacionados, ya sea de manera directa o indirecta. Los estudios de Bergé (2016, 2008), Acevedo (2011) y Bills y Tall (1998) nos brindan información sobre las

ideas que los estudiantes construyen cuando se presenta la completitud en cursos iniciales de Análisis a partir del Axioma del supremo; el tipo de trabajo en el aula descrito en estos estudios es similar al de los cursos de Análisis 1 del profesorado uruguayo. De estos trabajos se deduce que este enfoque genera una visión naturalizada de la propiedad, lo que no parece ayudar a los estudiantes a utilizar la completitud como una herramienta explícita. Las actividades y preguntas planteadas en estas investigaciones sugieren que los cursos típicos de Análisis tienden a tratar el supremo de manera aislada, sin vincularlo a contextos específicos y enfocándose en analizar sus propiedades, sin hacer evidente la necesidad de su existencia. Interpretamos que presentar la completitud a través del concepto de supremo no facilita que los estudiantes puedan aplicar esta propiedad en la demostración de otras propiedades o en la definición de otros conceptos matemáticos. Esto bloquea el acceso a la completitud, y en el mejor de los casos, los alumnos solo retienen la definición formal de supremo y la demostración de propiedades generales de los supremos de subconjuntos de números reales.

Existen investigaciones que evidencian las dificultades que los estudiantes pueden enfrentar al conceptualizar la noción de supremo. Algunas de estas dificultades están relacionadas con la comprensión de las estructuras, objetos y relaciones lógicas involucradas en la construcción de su definición formal (Chellougui, 2016), así como con la realización de ejercicios para determinar y justificar la existencia de cotas superiores, inferiores, supremos e ínfimos de conjuntos dados (Sari et al., 2018; Hernández & Trigueros, 2012). Las actividades y preguntas propuestas en estas investigaciones nos llevan a concluir que en los cursos típicos de Análisis se da un tratamiento objetivo a la noción de supremo, sin hacer explícita la necesidad de su existencia.

A partir de la reflexión sobre lo expuesto, decidimos desarrollar una propuesta de enseñanza para introducir la propiedad de completitud, que evidencie su necesidad y muestre que trabajar con ciertas nociones matemáticas no es posible en el conjunto de los números racionales. Tomamos de Bergé (2016) la sugerencia de presentar la propiedad de completitud a través de situaciones que trasciendan lo estrictamente numérico e incluyan sucesiones o funciones, recreando condiciones similares a las que llevaron a la definición de esta propiedad. Nuestra propuesta se centra en introducir la completitud a través de la convergencia de sucesiones monótonas y acotadas. En la siguiente sección, detallaremos las nociones teóricas que respaldan nuestro trabajo.

Marco conceptual

Las nociones matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje

Según Douady (1992, 1995), es útil distinguir entre el carácter de herramienta (H) y el carácter de objeto (O) de un concepto matemático. El carácter de herramienta de la completitud se observa cuando se aplica para resolver situaciones específicas, como demostrar la convergencia de sucesiones o la existencia de raíces o extremos de funciones bajo condiciones particulares. Por otro lado, el carácter de objeto se revela cuando se estudia la completitud de manera general, desligada de contextos específicos, o cuando se analiza su interrelación con otras nociones matemáticas. Tomamos de Douady (1995) las siguientes caracterizaciones: un alumno ha aprendido cierta noción matemática si es capaz de hacerla funcionar en su doble

carácter de herramienta y de objeto. Para el docente, enseñar un concepto matemático implica crear las condiciones que permitirán la apropiación del mismo por parte del alumno, lo que requiere cierta organización en su enseñanza.

Hay nociones matemáticas cuyo aprendizaje representa, en buena medida, un salto con respecto a los conocimientos previos de los estudiantes: su presentación en el aula involucra la definición de nuevos objetos matemáticos o la introducción de un nuevo formalismo, o de nueva simbología, o responden a la necesidad de unificar o generalizar conocimientos. Las nociones con estas características han sido denominadas nociones o conceptos FUG (Robert, 1998; Dorier, 1995) justamente por su carácter formalizador, unificador y generalizador. Pensamos que la propiedad de completitud puede ser interpretada como una noción FUG por las razones que detallamos a continuación.

En los cursos universitarios donde la completitud se introduce con el enunciado de la propiedad del supremo, se hace necesario definir nuevos objetos matemáticos, nuevas palabras e introducir una nueva simbología, característica formalizadora de la noción en el sentido de Robert (1998). La completitud permite unificar nociones ya conocidas de manera compartimentada por los estudiantes, como ser el comportamiento de ciertas sucesiones numéricas y las propiedades de ciertas funciones continuas en intervalos cerrados. El trabajo matemático, en un cuerpo ordenado y completo, posibilita asegurar y generalizar la convergencia de las sucesiones monótonas y acotadas, y ciertas características de todas las funciones continuas en intervalos cerrados. Considerar la completitud como una noción FUG nos posibilita tomar en cuenta las recomendaciones didácticas de autores que han trabajado en la enseñanza y el aprendizaje de este tipo de nociones. Estos investigadores consideran que las nociones FUG difícilmente pueden ser introducidas en el aula a partir de una situación fundamental en el sentido de Brousseau (1986), afirman que son nociones que requieren de una enseñanza a largo plazo y de la elaboración de un discurso particular por parte del docente (metadiscurso) para generar la reflexión en el aula sobre las nociones puestas en juego (Dorier, 1995).

Estrategia para desarrollar el taller

En el taller se propondrán dos actividades matemáticas que se entregarán en distintos momentos. Previo a la entrega de las actividades se explicará con detalle la dinámica del taller, que consiste en una instancia de trabajo individual seguida de una instancia de trabajo grupal para luego cerrar con una discusión general. Pensamos que esta estrategia privilegia la participación activa de los talleristas favoreciendo la apropiación de nuevas ideas asociadas a los saberes a transponer al aula y generando espacios de discusión, de análisis y de reflexión. Para realizar este taller se requiere que los participantes estén familiarizados con las pruebas de acotación, monotonía y cálculo de límites de sucesiones reales (o racionales) definidas por recurrencia.

Primer momento

Se entrega la primera actividad que consiste en completar una tabla con las propiedades que verifican ciertas estructuras algebraicas y de orden. La idea es relacionar la propiedad que distingue a cada estructura algebraica con la existencia de nuevos elementos numéricos y luego

analizar qué es lo que diferencia a los sistemas numéricos $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$. Luego de unos minutos de trabajo individual los talleristas compartirán y discutirán sus resultados con el resto de los integrantes del grupo al que pertenecen. Durante la puesta en común se analizará la relación entre los elementos de cada sistema numérico y las propiedades que distinguen a cada estructura algebraica.

Segundo momento

Se entrega la segunda actividad, en la que se estudiará, en $(\mathbb{Q}, +, \times, \leq)$, el comportamiento de una sucesión racional definida por recurrencia, monótona creciente y acotada superiormente en $\mathbb{Q}$, que no es convergente en $\mathbb{Q}$. Los talleristas trabajarán unos minutos de forma individual para luego compartir y discutir sus producciones con el resto del grupo que integra. Durante la puesta en común se analizará el potencial de esta actividad para presentar un enunciado de la propiedad de completitud vía la convergencia de sucesiones monótonas, tomando los aportes de los participantes.

Tercer momento

En esta instancia se pretende realizar un análisis reflexivo sobre el potencial de presentar en el aula la propiedad de completitud a partir del trabajo con sucesiones monótonas racionales. El análisis reflexivo se estructurará teniendo en cuenta los saberes previos que la propuesta requiere, las dificultades que podrían surgir en el aula, los puntos de claridad y las certezas que permite deducir, así como también, una institucionalización posible. Analizaremos los conocimientos previos que se requieren para presentar la propiedad de completitud vía la convergencia de sucesiones racionales monótonas crecientes y acotadas superiormente y los contrastaremos con los conocimientos previos necesarios para enunciar dicha propiedad vía la propiedad del supremo. También organizaremos una discusión grupal con el propósito de dirimir si una de estas dos presentaciones puede ser más significativa para los estudiantes.

Temporalidad del taller

Introducción: 5 minutos

Primer momento: trabajo individual 10 minutos, discusión grupal 10 minutos, puesta en común y cierre 15 minutos.

Segundo momento: trabajo individual 20 minutos, discusión grupal 15 minutos, puesta en común y cierre 25 minutos.

Tercer momento: análisis reflexivo conjunto 10 minutos.

Referencias y bibliografía

- Acevedo, C. (2011). Una secuencia didáctica para el concepto del Supremo basado en la teoría APOE (Tesis de Licenciatura. Benemérita Universidad Autónoma de Puebla, México).
- Bergé, A., & Sessa, C. (2003). Completitud y continuidad revisadas a través de 23 siglos. Aportes a una investigación didáctica. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 6(3), 163-197.
- Bergé, A. (2008). The completeness property of the set of real numbers in the transition from calculus to analysis. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 217-235. <https://doi.org/10.1007/s10649-007-9101-5>

- Bergé, A. (2016). Le rôle de la borne supérieure (ou supremum) dans l'apprentissage du système des nombres réels, TWG1: Calculus and analysis. In E. Nardi, C. Winslow, & T. Hausberger (Eds.), Proceedings of the First International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2016 (pp. 33-42). University of Montpellier and INDRUM. <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016>
- Bills, L. y Tall, V. (1998). Operable Definitions in Advanced Mathematics: The Case of the Least Upper Bound. En A. Olivier y K. Newstead (Eds.), Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 104–111). Stellenbosch: Program Committee of the 22nd PME Conference.
- Brousseau, G. (1986). Teoría de las situaciones didácticas. Grupal Logística y Distribución.
- Chellougui, F (2016). Approfondissement du questionnement didactique autour du concept de « borne supérieure », TWG3: Logic, Numbers and Algebra. In E. Nardi, C. Winslow & T. Hausberger (Eds.), Proceedings of the First International Network for Didactic Research in University Mathematics, INDRUM2016 (pp. 266–275). University of Montpellier and INDRUM. <https://hal.archives-ouvertes.fr/INDRUM2016>
- Dorier, J. L. (1995). Meta level in the teaching of unifying and generalizing concepts in mathematics. Educational Studies in Mathematics, 29(2), 175–197.
- Douady, R. (1992). Contribución de la didáctica de las matemáticas a la docencia. Referencias Irem, 6, 132–158.
- Douady, R. (1995). La ingeniería didáctica y la evolución de la relación con el conocimiento matemático. En M. Artigue, R. Douady, R. Moreno & P. Gómez (Eds.). Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Fregueiro, A. (2024). *Una propuesta para el aprendizaje de la propiedad de completitud del sistema de los números reales*. [Tesis de doctorado no publicada]. CICATA-IPN.
- Fregueiro, A. & Bergé, A. (2024). La propiedad de completitud del sistema real: Una introducción vía la convergencia de sucesiones. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 38, e230005. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v38n230005>
- Hernández, L. A., & Trigueros, M. (2012). Acerca de la comprensión del concepto del supremo. *Educación Matemática*, 24(3), 99 –119.
- Robert. A. (1998). Outils d'analyse des contenus mathématiques à enseigner au lycée et à l'université. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 139–190.
- Sari, C. K., Machromah, U. & Purnomo, M.E. R. (2018). Finding and proving supremum and infimum: students' misconceptions. *Journal of Physics: Conference Series*. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/1180/1/012007>



Una propuesta queer con enfoque interseccional para la formación inicial de profesores de Matemáticas

Mateo **Pinillos-Zapata**
Universidad de Antioquia
Colombia
mateo.pinillos@udea.edu.co

Sara Milena **Soto** Vanegas
Universidad de Antioquia
Colombia
milena.soto@udea.edu.co

Zaida Margot **Santa-Ramírez**
Universidad de Antioquia
Colombia
zaida.santa@udea.edu.co

Resumen

Esta comunicación tiene como propósito mostrar los resultados del objetivo específico relacionado con evidenciar las categorías que interseccionan a mujeres que hacen parte de la educación matemática, desde su propio relato y experiencias. Este objetivo hace parte del proyecto de investigación: Una propuesta queer con enfoque interseccional para la formación inicial de profesores de Matemáticas. La población estuvo conformada por mujeres relacionadas con la educación matemática: alumnas y profesoras, de educación superior. Para la recolección de la información se utilizaron entrevistas, y, para el análisis se utilizaron las técnicas de la codificación y la categorización. Los resultados sugieren que, en algunos procesos en educación matemática, se puede llegar a reproducir ideologías opresivas: binarismo de género, heteronormatividad; lo que subraya la necesidad de integrar discusiones sobre género y sexualidad en la formación matemática para crear entornos más inclusivos y equitativos desde enfoques como el de la teoría queer y la interseccionalidad.

Palabras clave: Educación Matemática; Formación inicial de maestros; Género y sexualidad; Interseccionalidad; Pedagogía queer.

Definición y relevancia del problema

Se ha visibilizado la necesidad de relacionar los contextos de aprendizaje matemático con las múltiples realidades, culturas e identidades de los estudiantes. Más aún, se hace imperativo promover una enseñanza de las matemáticas que esté orientada a la inclusión de los estudiantes al permitirles reconocerse dentro de su cultura para visibilizar otras perspectivas distintas a las eurocéntricas y anglo céntricas en la educación, en particular, en la enseñanza de las matemáticas.

Algunos trabajos realizados en educación matemática con base en esos objetivos son, por ejemplo, el de Parra et al. (2016), que sostienen que el estudio de las matemáticas debe atender a los fenómenos culturales, pues su desarrollo y el de la sociedad están fuertemente vinculados. Además, se han hecho grandes esfuerzos desde la etnomatemática para educar a los estudiantes en esta disciplina, considerando las perspectivas de las diversas culturas sin sobreponer una a la otra (Milton y Orey, 2019). Pero ¿qué sucede cuando la inclusión de los estudiantes en la educación matemática no depende únicamente de aspectos socioculturales?, ¿cómo podrían formarse los profesores para incluir a esos estudiantes que, aún inmersos en sus culturas, se siguen sintiendo raros, extraños y diferentes? Vázquez (2020) argumenta que más que la inclusión, la no deserción de los estudiantes de la educación depende no solo de factores socioculturales, sino también políticos, religiosos, raciales, económicos y, por supuesto, de género.

Sin embargo, el discurso matemático escolar no se ha centrado en responder a las características y necesidades de estos seres raros (queer) de la sociedad, para que puedan desarrollar al máximo su potencial (Dubbs, 2016). Un claro ejemplo de esto se puede ver en la relación entre el discurso escolar y el discurso de la corporeidad. El cuerpo, tal y como lo hemos concebido y estudiado en las escuelas, ha sido objeto de sumisión, imposición, “docilización” y negación, producto de la tiranía de una norma corporal sexuada (Llamas, 1998).

Lo anterior implica la necesidad de construir escenarios educativos matemáticos en los que todos los estudiantes se puedan reconocer y expresar. Ante esto, Cantoral et al. (2014) resaltan la importancia del papel del profesor en la democratización del aprendizaje, es decir, en la construcción de escenarios donde los estudiantes disfruten y participen de la cultura matemática enraizada en sus propias vidas. Por lo tanto, esta investigación pretende favorecer la formación de profesores mediante una propuesta educativa que permita la diversidad y el reconocimiento de sí mismo, del otro, de lo raro, lo diferente y lo queer, atacando, principalmente, los discursos heteronormativos impuestos en la educación matemática.

Referencial teórico

Se tiene como base teórica las reflexiones planteadas por la teoría queer, en especial las relacionadas con los procesos educativos (Butler, 2007; Britzman, 2016; Sánchez, 2019; Hurtado-García, 2011), entendiendo esta como una propuesta transgresora frente a la cis-heteronormatividad que se impone en las prácticas educativas tradicionales; esta teoría pretende deconstruir el binomio normal/anormal, ya que, con base en este, se empiezan a producir discursos de discriminación y exclusión. Al respecto, Planella y Pié (2012) plantean:

A través de un ejercicio sutil, aquellos sujetos que no encajan en la definición de normal son enviados a la nueva categoría de a-normales. No encontramos únicamente sujetos con determinadas tendencias sexuales, sino que cada vez más encontraremos un conjunto importante de sujetos que «escapan» a la definición de normales, debido a múltiples factores. (pp. 268-269)

Estas categorizaciones promueven, cada vez más, la deserción de los estudiantes en procesos educativos. Más aún, se ha podido reconocer dentro de la formación en matemáticas grandes tensiones frente al binarismo hombre/mujer, otorgándoles el término queer a mujeres decididas a formarse en el campo matemático. Sin embargo, el objetivo de la pedagogía queer dentro de la educación matemática no está encaminado a aceptar y sensibilizar acerca de “los raros” sino que, por el contrario, la cuestión central y trascendental es preguntarse por qué esta elección de objeto despierta tantas ansiedades, y cómo se relaciona esto con el proceso educativo (Planella y Pie, 2012).

Por otra parte, la normatividad no se expresa únicamente en términos de género y sexualidad, también se ve atravesada por factores como clase social, etnia, cultura, religión, entre otros; por eso nos basamos en un enfoque interseccional. Como menciona Vázquez (2020), la interseccionalidad es una herramienta que nos sirve para abordar la complejidad del mundo y la experiencia humana, en la cual observamos que las discriminaciones y las opresiones se dan en un marco de interdependencias y conexiones en las que se entrecruzan o intersecan más de una categoría identitaria, tal como lo fue el caso de las reflexiones planteadas por el movimiento feminista de mujeres negras. Es decir, la interseccionalidad nos permite, en este caso, visualizar escenarios normativos y opresivos dentro de la educación matemática, desde múltiples enfoques conectados entre sí. Por ende, en este trabajo se pretende abordar la pedagogía queer con un enfoque interseccional mediante una propuesta formativa que promueva el reconocimiento, por parte de profesores de matemáticas en formación inicial, de la importancia de relacionar sus clases con las temáticas de género y sexualidad desde una perspectiva queer e interseccional.

Método y desarrollo conceptual

Esta investigación está en desarrollo con algunos estudiantes en formación de la licenciatura en matemáticas de una universidad pública de Medellín. Se diseñó una propuesta formativa que busca permitir la diversidad y el reconocimiento de sí mismo, del otro, de lo raro, y lo diferente, y se busca analizar las maneras en las que estas “propuestas queer” les permiten a los maestros en formación visibilizar y contrarrestar discursos e ideologías cis-heteronormativas impuestas en la educación matemática. Por ende, este trabajo se enmarca en un enfoque cualitativo y en el método de estudio de casos descriptivo-interpretativo (Pérez-Serrano, 2000), el cual está basado en el análisis de los productos finales de cada una de las fases que componen la propuesta educativa. Para recolectar la información, se utilizarán registros fotográficos y audiovisuales, cuestionarios iniciales y finales, entrevistas, y observación participante; para el análisis, se utilizarán las técnicas de la categorización y la codificación las cuales se entienden como un mismo proceso analítico, sin embargo, autores como Bustingorry et al. (2006) distinguen que la categorización es la clasificación conceptual de unidades de datos bajo temas comunes, abarcando aspectos como situaciones, comportamientos o perspectivas; y, por otro lado, la codificación es la acción práctica de asignar un indicativo (numérico, visual o textual) a cada unidad para vincularla con una categoría específica.

La propuesta formativa está constituida por seis fases. En las primeras dos, mediante entrevistas individuales a doce mujeres se busca explorar la interseccionalidad como el enfoque que permite visibilizar a las personas y sus experiencias, así como sensibilizar a los profesores en formación de matemáticas en cuanto a las problemáticas de género y las relaciones que se puedan establecer con los procesos de la teoría queer en la educación. Las siguientes dos fases buscan vincular, directamente, las problemáticas de género y la educación matemática analizando, con los profesores en formación, discursos heteronormativos presentes en las aulas y los textos de matemáticas, y desarrollando algunas propuestas formativas que vinculan ambos aspectos. El momento final de la propuesta está pensado para proponer y retroalimentar. En la fase propositiva se desarrolla una actividad de modelación de cuerpos queer, que busca incluir cuestiones de género en el aula de matemáticas; se espera que en esta fase los profesores en formación esbocen rutas metodológicas para sus propuestas formativas queer, que se analizarán grupalmente en la última fase de retroalimentación. A su vez, esta fase permitirá evaluar todo el proceso realizado, permitiendo reconocer aspectos a mejorar y futuras ideas que alimentan los estudios de género dentro de la educación matemática. En la Tabla 1 se presenta la propuesta formativa. Se pueden notar las fases de la propuesta, su objetivo principal, la metodología realizada y el producto final esperado en cada una.

Tabla 1
Fases de la propuesta formativa. Elaboración propia.

Fase	Objetivo	Metodología	Producto final
Exploratoria	Evidenciar las categorías que interseccionan a mujeres que hacen parte de la educación matemática, desde su propio relato y experiencias.	Entrevistas individuales a mujeres que hacen parte de la educación matemática (estudiantes o profesoras).	Material audiovisual.
	Problematizar la temática del género y las sexualidades en educación matemática usando la interseccionalidad como marco interpretativo.	Conversatorio abierto teniendo en cuenta un análisis profundo del material audiovisual producido en la fase exploratoria.	
Central	Explorar el campo de los estudios de género y sexualidades en educación matemática mediante el análisis de una propuesta pedagógica.	Desarrollo de la propuesta presentada por Rosa (2021) sobre los números binarios y la interpretación del binarismo en la sociedad.	Registro fotográfico y de audio.

Analítica	Analizar discursos normativos presentes en la enseñanza de las matemáticas.	Análisis del artículo de Parise (2021) sobre la heteronormatividad presente en libros escolares de estadística.	Escritos por parte de los profesores en formación a raíz de lo analizado en el artículo.
Propositiva	Crear una propuesta didáctica que articule temáticas de género y sexualidades para la enseñanza de las matemáticas.	Orientación personalizada para la creación de la propuesta.	Propuestas didácticas por parte de los profesores en formación.
Retroalimentación	Evaluar, críticamente, la propuesta formativa diseñada por los profesores en formación.	Conversatorio abierto y presentación de reflexiones finales.	Escritos por parte de los profesores en formación.

Resultados parciales

En los resultados parciales de este proyecto se presentan los hallazgos de la primera fase de la investigación. La población estuvo conformada por mujeres relacionadas con la educación matemática, entre ellas, estudiantes de la licenciatura en matemáticas, y, otras, profesoras del mismo programa, de una universidad pública en Medellín. Para la recolección de la información se utilizó la técnica de la entrevista, y para su análisis se utilizaron las técnicas de la codificación y la categorización (Bustingorry et al., 2006). Después de la transcripción de las entrevistas, se realizó el análisis a partir de la identificación de temáticas y de categorías. A continuación, se presenta un ensayo en el que se integra la percepción de los investigadores y la teoría formal.

Una primera categoría destaca logros y avances de las mujeres en la sociedad y la educación matemática. Las entrevistadas mencionaron sentirse valoradas y auténticas en su rol, encontrando dinámicas que las hacen sentirse cómodas y queridas; dedicarse a la formación en matemáticas las ha empoderado significativamente; además, el liderazgo femenino es notable, con muchas coordinadoras de las licenciaturas en la facultad siendo mujeres. Una de las entrevistadas destacó su identidad como lesbiana, mencionando que se ha sentido libre y cómoda con su orientación sexual, sin ser categorizada ni sentirse fuera de lo normal, lo que le ha permitido aceptarse y quererse tal como es.

Según la Unesco (2019), la participación de las mujeres en las matemáticas enriquece y amplía la visión en esta área, puesto que desde distintas perspectivas agregan creatividad, reducen los sesgos potenciales y generan conocimientos y soluciones más sólidas, lo cual promueve la excelencia científica. Se podría decir que la sociedad ha avanzado al punto de construir escenarios educativos, donde hombres y mujeres se puedan formar y aportar al desarrollo de las ciencias, sin que su género sea una condición para hacerlo. Sin embargo, bajo un enfoque interseccional, las mujeres están atravesadas por múltiples relaciones que pueden

causar discriminaciones y espacios de subordinación a causa de ideologías cis-heteronormativas. Entonces, ¿cuáles son los desafíos que siguen enfrentando las mujeres, aún después de ser aceptadas en los espacios formativos en matemáticas?

En línea con el interrogante anterior, Una segunda categoría que emerge revela desafíos persistentes. Algunas mujeres mencionaron enfrentar prejuicios, tanto de comunidades indígenas como dentro de la educación matemática, donde se cree que los hombres tienen más habilidad para los números. Además, comentaron sobre cómo pueden llegar a ser consideradas como un objeto y la necesidad de demostrar su inteligencia sobre su apariencia física. También señalaron la presencia de actitudes inapropiadas de algunos profesores y la menor representación de mujeres en las aulas de matemáticas, lo que refleja la tendencia social a considerar a los hombres como mejores en esta disciplina.

Las respuestas dadas por las participantes dejan entrever dos problemáticas de género muy arraigadas en la educación matemática. Por un lado, aunque hombres y mujeres tienen acceso igualitario a esta formación, hay una escasa participación de mujeres en las matemáticas y otras disciplinas STEAM. Según Simón-Ramos et al. (2022):

Dicha segregación es producto de brechas que están presentes a lo largo de la vida, en el entorno familiar, en el ámbito social y, por supuesto, dentro del sistema escolar donde se reproducen estereotipos de género que hacen que ciertas profesiones se categoricen como masculinas y otras como femeninas, y que operan como determinantes al momento de decidir una carrera. (p. 238)

Así mismo, autores como Guse y Esquincalha (2022) se preguntan por cuáles son los cuerpos que pueden hacer o aprender matemáticas al reconocer que, en la manera como se nos han mostrado y enseñado, ha predominado el imaginario de que los cuerpos de hombres, blancos, heterosexuales, cristianos y eurocéntricos son los más aptos y correctos para esta disciplina. Ernest (2000) nos ayuda a concluir que, gracias a los valores y las imágenes que tienen las matemáticas como frías, abstractas y desapasionadas, pareciera ser que, si las mujeres quieren participar dentro de la formación matemática, deben renunciar a las expresiones de su género. Esto lo realizarían para encajar dentro de las ideologías cis-heteronormativas impuestas por la sociedad, lo cual, tal como lo manifestaron en la primera sección del video, no están dispuestas a hacer.

Estos enfrentamientos de paradigmas nos llevan, por ejemplo, a la tercera categoría, en la que se evidencia una problemática de género arraigada en la educación matemática que pudimos notar en las respuestas de las profesoras en formación: considerar a la mujer como un objeto sexual. Bartky (2015) defiende que entre las formas de opresión psicológica social se encuentran los estereotipos, la dominación cultural y la cosificación sexual; las mujeres son víctimas de las tres. Es decir, los procesos de formación matemática se pueden convertir en escenarios de opresión y exclusión para las mujeres al reproducir ideologías cis-heteronormativas frente al binarismo cuerpo-mujer que se caracterizan por definir una persona según sus partes o funciones sexuales, separándolas del resto de su personalidad, de sus conocimientos y de sus habilidades (Bartky, 2015).

Conclusiones

Con los resultados obtenidos de la primera fase de esta investigación hemos logrado tener algunas conclusiones, entre ellas, podemos destacar las reflexiones que nos trae el análisis interseccional de los discursos de algunas mujeres que se identifican como tal, en especial, aquellos comentarios que muestran una posible tensión entre la feminidad y la educación matemática; como también, la importancia de seguir abordando estas temáticas en los procesos iniciales de formación de educadores matemáticos.

Consideramos que la fase exploratoria nos ayuda a hacer evidente la interseccionalidad que está presente en la categoría de “las mujeres”. Butler (2007) explica que la identidad de una persona no se limita, únicamente, a «ser» mujer: “el género no siempre se constituye de manera coherente o consistente en contextos históricos distintos, y porque se entrecruza con modalidades raciales, de clase, étnicas, sexuales y regionales de identidades discursivamente constituidas” (p. 49). Reconocemos que esta fase exploratoria permitió llevar al campo de la educación matemática una reflexión crítica sobre los discursos cis-heteronormativos que intentan imponer binarismos como mujer-madre o mujer-cuerpo sobre las entrevistadas, y cómo han afectado o, quizás, han sido indiferentes con ellas.

Respecto a la idea que manifiesta que la feminidad va en contravía a una formación en matemáticas, postulamos que es de especial relevancia analizarla y abordarla en la formación inicial de educadores matemáticos; en especial, reconocer cuáles son los discursos y las formas en las que presentamos el conocimiento matemático, ya que, de manera silenciosa, podríamos estar poniendo unos cuerpos y unas maneras de ser por encima de otras.

Esperamos que el desarrollo de este proyecto de investigación orientado al diseño de una propuesta formativa permita seguir movilizando reflexiones, aprendizajes y directrices para tener en cuenta en nuestra práctica como educadores matemáticos, dejando a un lado la idea de la neutralidad del conocimiento y la enseñanza de las matemáticas y, por el contrario, favorecer un discurso mucho más plural, que vaya en contra de toda (cis-hetero) normatividad en el aula de clase.

Referencias y bibliografía

- Bartky, S. L. (2015). *Femininity and domination*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203825259>
- Bustingorry, S. O., Tapia, I. S., & Mansilla, F. M. I. (2006). Investigación cualitativa en educación: hacia la generación de teoría a través del proceso analítico. *Estudios Pedagógicos*, 32(1). <https://doi.org/10.4067/s0718-07052006000100007>
- Butler, J. (2007). *El género en disputa: El feminismo y la subversión de la identidad*. Paidós.
- Cantoral, R., & Soto, D. (2014). Discurso matemático escolar y exclusión: Una visión socioepistemológica. *Bolema: Boletín de Educación Matemática*, 29(50), 1525–1544.
- Dubbs, C. (2016). *A queer turn in mathematics education research: Centering the experience of marginalized queer students*. North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.
- Ernest, P. (2000). Los valores y la imagen de las matemáticas: Una perspectiva filosófica. *Uno: Revista Didáctica de las Matemáticas*, 23, 1–27.
- Guse, H. B., & Esquinca, A. da C. (2022). Por uma Educação Matemática Desviante das (Cis-hetero)normas: O que dizem as pesquisas envolvendo pessoas LGBTI+?. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36(74), 944–970. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a01>
- Hurtado-García, I. (2011). Una propuesta transgresora. *Cuadernos de Pedagogía*, 414, 62–64.

- La Barbera, M. (2016). Interseccionalidad, un “concepto viajero”: Orígenes, desarrollo e implementación en la Unión Europea. *Inter Disciplina*, 4(8). <https://doi.org/10.22201/ceiich.24485705e.2016.8.54971>
- Llamas, R. (1998). *Teoría torcida: Prejuicios y discursos en torno a "la homosexualidad"* (1ª ed.). Siglo XXI de España Editores.
- Milton, R., & Orey, D. C. (2019). Ethnomathematics and the responsible subversion of its pedagogical action: An investigation based on three anthropological approaches. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 100(254), 191–209. <https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254.3939>
- Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura. (2019). *Descifrar el código: La educación de las niñas y mujeres en ciencias, tecnología, ingeniería y matemáticas (STEM)*. <https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000366649>
- Parise, M. M. (2021). Gender, sex, and heteronormativity in high school statistics textbooks. *Mathematics Education Research Journal*. <https://doi.org/10.1007/s13394-021-00390-x>
- Parra, A., Mendes, J. R., Valero, P., & Villavicencio Ubillús, M. (2016). Mathematics education in multilingual contexts for the indigenous population in Latin America. En R. Barwell et al. (Eds.), *Mathematics education and language diversity* (pp. 1–20). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-14511-2_4
- Pérez Serrano, G. (2000). *Modelos de investigación cualitativa en educación social y animación sociocultural: Aplicaciones prácticas*. Narcea.
- Planella, J., & Pie, A. (2012). Pedagoqueer: Resistencias y subversiones educativas. *Educación XXI*, 15(1), 265–283.
- Rosa, M. (2021). Teoria queer, números binários e educação matemática: Estranhando a matemática em prol de uma héxis política. *Educação Matemática em Revista-RS*, 2(2), 70–87.
- Sánchez, M. (2019). *Pedagogías queer: ¿Nos arriesgamos a hacer otra educación?*. Los Libros de la Catarata.
- Simón-Ramos, M. G., Rodríguez-Muñoz, C., & Farfán-Márquez, R. M. (2022). Una perspectiva de género en matemática educativa. *Revista Colombiana de Educación*, 86, 235–254. <https://doi.org/10.17227/rce.num86-12093>
- Vázquez, R. (2020). La interseccionalidad como herramienta de análisis del fracaso escolar y del abandono educativo: Claves para la equidad. *Revista Internacional de Educación para la Justicia Social*, 9(2), 267–283.

Índice alfabético de autores

Adriana Breda, 176
Alberto Zapatera, 117
Alessandro Jacques Ribeiro, 242
Alexander Paredes Martínez, 185
Alexandra Fregueiro, 227, 267
Alma Soto Castillo, 107
Analía Bergé, 227, 267
Andrea Araya, 209
Andrea Pinto-Vergara, 89
Àngela Buform, 29, 117
Blanca Esthela Ledezma Durán, 218
Christian Alfaro Carvajal, 46
Claudia Matus-Zúñiga, 89
Daniela Pagés Rostán, 233
Dannael Carrero Pellicier, 168
Domingo Felipe Araújo Chévez, 19
Eduardo Quevedo, 117
Elizabeth Torres Puentes, 201
Eulalia Calle, 63
Fabián Gutiérrez-Fallas, 250
Federico De Olivera Lamas, 233
Fernanda Drummond Pequeno Valadão, 192
Gilberto Santos Cerqueira, 1
Guillermo Ramírez-Montes, 250
Héctor Alonso Rosas Álvarez, 98
Helen Alfaro, 152
Helen Guillén Oviedo, 54
Hilario Ernesto Gallo Cajina, 19
Igor dos Santos Lima, 87
Ivette Anel Delgado Valdez, 37
Jennifer Fonseca Castro, 46, 54
Jonathan Espinoza González, 29
José Antonio Juárez López, 107
José Armando Ortiz Ruiz, 98
José David Vargas, 152
José Romilio Loría Fernández, 125
Juan Víctor Alejandro Meléndez Gómez, 218
Julián Félix, 161
Juliana França Viol Paulin, 242
Karla Contreras, 152
Lemerton Matos Nogueira, 242
Leonardo Favio Trujillo Díaz, 185
Lorena Alejandra Medina Hernández, 37
Luciana Maria Dias Ávila, 192
Luciana Olesker Pérez, 233

Luis Adrián Miranda Pérez, 98
 Luis Manuel Aguayo Rendón, 37
 Magdalena Waleska Aldana Segura, 161
 Mar Moreno Moreno, 134
 Marco Jácome, 63
 Maria Alice Veiga Ferreira de Souza, 79
 Maria José Costa dos Santos, 1
 Maria Madalena Dullius, 71
 Martha Lima Soares Martins, 9
 Mateo Pinillos-Zapata, 273
 Mayela Vargas Ramos, 218
 Miguel Picado Alfaro, 125
 Mikael Christopher Souza de Barros, 192
 Milena de Souza Manguiera, 192
 Noelia Saleme, 165
 Olmedo Aparicio Batista, 258
 Paloma Santonja Serrano, 134
 Pedro Luiz Alves Gomes, 87
 Poliana Figueiredo Cardoso Rodrigues, 79
 Raquel Carneiro Dörr, 192, 242
 Rebeca M. Ventura, 209
 Regina da Silva Pina Neves, 192, 242, 250
 Reina San Martín, 143
 Rodrigo Yoel Combe, 258
 Rubén Lijó, 117
 Rui Seimetz, 87
 Ruth Coronel, 63
 Salvador Llinares Ciscar, 29, 134
 Sara Milena Soto Vanegas, 273
 Soraya Eugenia Pol, 165
 Tatiana María Portugal, 258
 Thaís Rodrigues Ferreira Machado, 9
 Vicenç Font, 176
 Vienbenida Igualada Cortez, 258
 Vladiana Costa dos Santos, 1
 Wilbertt José de Oliveira Moura, 71
 Yuri Morales-López, 176
 Yuriko Yamamoto-Baldin, 250
 Zaida Margot Santa-Ramírez, 273

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025



ISBN: 978-9945-30-193-9



www.redumate.org