

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

**Formación continua y desarrollo
profesional**



**Volumen 3. *Memorias IV CEMACYC*
República Dominicana, 2025**

**Patrick Scott, Yuri Morales y Angel Ruiz
Editores**



© 2025

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE)

www.redumate.org

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025

[Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz. Colaboradora: Sarah González

Volumen 3: Formación continua y desarrollo profesional

ISBN Obra Completa: 978-9945-30-168-7

ISBN Volumen: 978-9945-30-184-6

Todos los materiales incluidos en esta publicación pertenecen a la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe.

Estos materiales están bajo una [licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

En la reproducción de cualquier parte de este libro se deben consignar: los créditos a los autores y a la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera a REDUMATE y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no ha sido publicado previamente y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Para citar la obra completa

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc>

Ejemplo para citar un volumen

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC*. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1>

Ejemplo para citar un artículo

Artigue, M. (2025). La enseñanza de las Matemáticas frente a los retos del mundo actual. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC* (pp. 18-29). Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1>

Contenidos

<u>Presentación</u>	i
<u>A aproximação e a compreensão da abordagem do Ensino Exploratório por professores da Educação Básica do Distrito Federal</u> Regina da Silva Pina Neves, Raquel Carneiro Dörr, Márcia Rodrigues Leal, Luciana Lemos	1
<u>Características del aprendizaje de la práctica profesional de planificar una lección usando una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la magnitud superficie</u> Marianela Alpízar Vargas, Ceneida Fernández Verdú, Salvador Llinares Ciscar	10
<u>Causas de los errores de estudiantes en Matemática universitaria: Cambios en las concepciones de un grupo de profesores</u> Henry Alexander Ramírez Bernal	19
<u>Conocimiento del Profesorado de Básica Primaria para la Enseñanza de la Probabilidad</u> David Fernando Méndez Vargas, Zaida Margot Santa-Ramírez, Carlos Mario Jaramillo López	29
<u>El desarrollo del pensamiento proporcional en los niveles primario y medio inferior utilizando los registros semióticos de representación</u> Celia Elizabeth Villagra, Edith Marcela Chorolque, Isabel Hortensia Miguez	37
<u>Formular problemas y la competencia profesional</u> Augusta Osorio Gonzales, Elizabeth Advíncula Clemente, Maritza Luna Valenzuela, Miluska Osorio Martínez	45
<u>Gráficos estadísticos accesibles: Desarrollo profesional utilizando datos reales</u> Lizbeth Alvarado Vargas, Ariana Rodríguez Flores	53
<u>La creación de problemas realizada por el profesor</u> Amador Augusto Paredes Chavez, Augusta Osorio Gonzales	60
<u>La geometría a través de las artes visuales: Diseño de una propuesta didáctica en educación básica</u> Isabella Revelo Mera, Evelio Bedoya Moreno	68
<u>Laboratorio de Matemáticas en la formación continua del docente de la educación básica primaria</u> Alfonso Romero Huertas	77
<u>Lesson Study com Professores de Matemática e Física: Aprendizagens na exploração das múltiplas representações</u> Mauri Luís Tomkelski, Adriana Richit	85

<u>Lesson Study em três regiões brasileiras: Em busca da institucionalização</u>	94
Yuriko Yamamoto Baldin, Regina da Silva Pina Neves, Aluska Dias Ramos de Macedo Silva	
<u>Liderazgo distribuido como predictor de cambio en las prácticas docentes</u>	102
Brigitte Johana Sánchez Robayo	
<u>Los sentimientos: Una barrera frente al conocimiento de la práctica educativa del profesorado que enseña Matemáticas en educación básica primaria</u>	111
José Luis Bossio Vélez, Zaida Margot Santa-Ramírez, Carlos Mario Jaramillo López	
<u>Matemáticas en Movimiento: Impacto de MateMóvil</u>	119
Ana Paola Castillo Domenech, Jorge Luis Gutiérrez Villegas, Saúl E. Méndez Larios	
<u>Metodologia Lesson Study e Teaching Research Group: Lições e Práticas de Xangai</u>	121
Silmara Louise da Silva, Marcela Luciano Vilela de Souza	
<u>Modelo para la enseñanza de la resolución colaborativa de problemas matemáticos: Aprendizajes de una investigación</u>	123
Omar Hernández Rodríguez, Eric Figueroa González, Yamily Colón Negrón	
<u>O Formador Articulador: Observação e Registro na Formação de Professores de Matemática</u>	131
Paulo Eugênio da Silva, Caíque Oliveira, Fabiana Ramos Savani	
<u>Oficinas Matemáticas desenvolvidas com Alunos com Altas Habilidades e Superdotação no Projeto Residência Pedagógica na Universidade de Brasília</u>	139
Igor dos Santos Lima, Lucas Marinho Mendonça Dos Santos, Rui Seimetz	
<u>Perspectivas docentes y relaciones entre pensamiento matemático y la formación integral</u>	146
Helmer Jesús Ruiz Díaz, Yilton Riascos Forero	
<u>Posición y valor de las cifras en la escritura convencional de los números: Reflexiones de maestras de primaria de Quebec</u>	154
Mireia Saboya, Lily Bacon, Nadine Bednarz, Sabrina Héroux, Caroline Lajoie, Jean-François Maheux	
<u>Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da região Sul do Brasil: Um olhar para a formação de professores</u>	162
Kauê Monteiro Pascotto, Luis Fernando Pizzatto, Lucas Flores Lehnhart, Silvia Maria de Aguiar Isaia, Luis Sebastião Barbosa Bemme	
<u>Raciocínio Matemático e as Oportunidades de Aprendizagem Profissional do Professor que Ensina Matemática: Práticas e ações do formador</u>	169
Giane Fernanda Schneider Gross, André Luis Trevisan, Eliane Maria de Oliveira Araman	

<u>Saberes construidos en formación de maestros en servicio en el área de Matemática. Estudio comparativo entre dos dispositivos: curso y territorio.</u>	178
Mariana Corujo Zubelso	
<u>Sobre el diseño de un espacio de formación posgradual de profesores de Matemáticas para el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente”</u>	186
Luis Ángel Bohórquez Arenas	
<u>Uma proposta de jogo digital de adição no Scratch para crianças com Transtorno do Espectro Autista atendidas em Sala de Recursos</u>	193
Inácio Antônio Athayde-Oliveira, Kamila Alves de Moraes, Rui Seimetz	
<u>Índice alfabético de autores</u>	201

Presentación

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 es el título de las *Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (IV CEMACYC) que se llevó a cabo en Santo Domingo, República Dominicana, del 2 al 7 de noviembre de 2025.

Este congreso fue organizado por la [Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe](#) (REDUMATE) y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM). Este cuarto congreso tuvo un gran éxito con más de 300 ponencias con ponentes de 29 países que decidieron venir a esta región. Esto duplica la cantidad de ponencias que se suelen presentar en los CEMACYC. Es ahora un congreso consolidado, con mucho prestigio. La comunidad internacional decidió integrarse a este evento. El impacto regional es impresionante.

El congreso tuvo casi 800 participantes. Más de 400 docentes de la República Dominicana se beneficiaron directamente de conferencias, talleres, comunicaciones, carteles, sesiones informativas, reuniones de grupo, exposiciones de libros.

Varias instituciones dominicanas, con lucidez, apoyaron a sus maestros (incluso de lugares alejados del país) y aprovecharon esta valiosa oportunidad. Esto constituye un impacto formidable para la educación local.

En 2013 REDUMATE y la PUCMM organizaron el I CEMACYC. Muchos docentes aún recuerdan con orgullo el primer congreso y agradecen haber estado también en este. Hay una relación estratégica entre REDUMATE y PUCMM. República Dominicana es un foco clave para apoyar los esfuerzos regionales.

Esos días de noviembre completaron un proceso de tres años de preparación internacional y local, con autores, revisores, coordinadores de temas, equipos de plataforma (casi 200 personas), que ha apoyado cuidadosamente el fortalecimiento de capacidades en esta región.

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de los CEMACYC es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, los CEMACYC piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden leerse y descargarse en nuestras plataformas varios meses antes del congreso).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Científico Internacional* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, y a los casi 200 *Revisores científicos*.

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y

articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencia con base en *Open Journal Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

Agradecemos el valioso patrocinio de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). Debe recordarse que REDUMATE nació en Costa Rica, en el año 2012, dentro del *Capacity and Networking Project* (CANP) de ICMI. Con ya cuatro congresos exitosos y múltiples acciones educativas en la región, de impacto internacional, esta Red CANP es un ejemplo y un modelo.

En el IV CEMACYC fueron esenciales los apoyos del [*Comité Interamericano de Educación Matemática*](#) y del [*Proyecto Reforma Matemática*](#) en Costa Rica en la organización científica y en la logística tecnológica del congreso.

El *Comité Organizador Local* en la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente humano muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de este congreso, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.



Foto de grupo del IV CEMACYC

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 tiene 11 volúmenes con base en los temas del congreso:

1. Trabajos invitados del IV CEMACYC
2. Formación inicial de profesores
3. Formación continua y desarrollo profesional
4. Dimensiones culturales, políticas, económicas, y ambientales, de las Matemáticas y de la Educación Matemática
5. Currículo y evaluación
6. Historia y filosofía de las Matemáticas y de la Educación Matemática
7. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática
8. Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática
9. Investigación en Educación Matemática.
10. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar y Primaria
11. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, mesa redonda, minicursos, homenaje a Eduardo Mancera) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, pósteres en papel y digitales), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes. *REDUMATE* desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en el IV CEMACYC.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos), con el apoyo de Yuri Morales (Costa Rica). Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el respaldo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las página web oficial de REDUMATE: <https://redumate.org/>.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la Educación Matemática en América Central y El Caribe.

Saludos afectuosos



Ángel Ruiz

Presidente

Consejo Internacional

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe

16 diciembre 2025



A aproximação e a compreensão da abordagem do Ensino Exploratório por professores da Educação Básica do Distrito Federal

Regina da Silva **Pina Neves**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

reginapina@mat.unb.br

Raquel Carneiro **Dörr**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

raqueldorr@unb.br

Márcia Rodrigues **Leal**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
Brasil

marcialeal629@gmail.com

Luciana **Lemos**

Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal
Brasil

lulemos54@gmail.com

Resumo

Este artigo apresenta uma investigação que tem como foco investigar os processos de aproximação e compreensão da abordagem do Ensino Exploratório (EE) por professores da Educação Básica, desenvolvida no contexto de um mestrado profissional em Matemática em uma universidade pública do Distrito Federal. O estudo enquadra-se na perspectiva qualitativo-interpretativa, sendo os dados constituídos de escritas reflexivas, falas, tarefas matemáticas, planejamento e desenvolvimento de aulas. Os resultados evidenciam que o EE é uma prática complexa que exige muito do professor que a desenvolve, mas que ela é transformadora, ao alterar favoravelmente as relações que os estudantes estabelecem entre si, com o professor e com a Matemática.

Palavras-chave: Educação Básica; Ensino Exploratório; Escola Pública; Formação Continuada; Matemática.

Introdução

A literatura sobre formação de professores de Matemática denuncia o distanciamento, ainda vigente, nos processos formativos entre a Matemática acadêmica e escolar, a teoria e a prática e entre a universidade e a escola (Fiorentini et al., 2018; Ribeiro & Ponte, 2020, entre outros). Assim, observam-se, cada vez mais, a construção de propostas formativas que defendem “a concepção do professor como profissional que produz conhecimentos docentes a partir do estudo de sua prática, tendo por base uma epistemologia da *práxis*” (Pina Neves & Fiorentini, 2021, p. 3), organizando situações de formação continuada ou inicial no sentido de criar, cultivar e consolidar coletivos de práticas que integram universidade e escola, que respeitam a cultura escolar e os conhecimentos prévios dos licenciandos(as) e dos professores (Aguiar et al., 2021, Teixeira & Cyrino, 2015, entre outros).

De posse dessas compreensões e cientes de que ensinar é um desafio de alta complexidade que exige diálogo, colaboração e competência profissional, temos estruturado nossa prática docente e de pesquisa, enquanto formadoras de professores junto a professores da educação básica que atuam na rede pública de ensino no Distrito Federal, tendo como objetivo compreender como estes se aproximam e compreendem a abordagem do Ensino Exploratório enquanto alternativa ante ao Paradigma do Exercício (Skovsmose, 2000).

Tais práticas têm sido desenvolvidas, também, de modo colaborativo, integrando formadores de professores da Universidade de Brasília, Universidade Federal do ABC, da Secretaria de Estado e Educação do Distrito Federal em encontros presenciais e remotos, de modo a qualificar uma disciplina optativa, ofertada a professores de Matemática em formação continuada, no Mestrado Profissional em Matemática, por meio de uma ação interventiva, a partir do estudo das tipologias de Tarefas Matemáticas (Ponte, 2005), do Ensino Exploratório (Canavarro, 2011) e de Tarefas de Aprendizagem Profissional (Aguiar et al., 2021).

Enquadramento Teórico

Estar preparado para a docência em Matemática exige respostas a inúmeras perguntas, entre elas: Quais tarefas matemáticas selecionar e por quê? Como é que os estudantes vão interpretar e resolver as tarefas matemáticas? Quais dificuldades terão? Como estabelecer a comunicação em sala de aula, construindo uma linguagem matemática adequada aos estudantes sem perder o rigor conceitual, assegurando que eles compreendam o que está sendo explorado? Entre muitas outras.

Em busca de respostas a estes questionamentos, é importante registrar que o termo Tarefa Matemática (TM) tem um amplo uso na literatura, principalmente no campo da Educação Matemática. Ao utilizá-lo, se faz necessário, também, diferenciá-lo do termo Atividade. Por vezes, os dois conceitos são abordados em situações formativas na universidade ou na sala de aula como sinônimos ou sem a devida diferenciação. A TM é proposta pelo professor com o intuito de ter a atenção dos estudantes em torno de uma determinada ideia matemática; assim, que ela é socializada pelo professor ao estudante e passa a ser objeto para a atividade dele (Stein et al., 2009). Todavia, a proposição da TM pelo professor não garante que ela tenha a adesão/aceitação dos estudantes a ponto de deflagrar a atividade matemática.

Logo, assumimos a definição de TM abordada por Ponte (2005) ao considerá-la um conjunto de ações relacionadas ao professor, constituindo um meio pelo qual a Matemática possa ser ensinada aos estudantes. Para o autor, existem vários tipos de tarefas que podem ser organizadas de acordo com o seu desafio cognitivo e grau de abertura que pode variar, dependendo dos objetivos pretendidos pelo professor (Ponte, 2005). A partir da intersecção destas duas dimensões, o autor apresenta um esquema organizado em quatro quadrantes, situando neles os seguintes tipos de tarefas:

(a) Exploração que são tarefas relativamente abertas e fáceis (1º quadrante); (b) Investigação tarefas com alto grau cognitivo, sendo uma tarefa aberta (2º quadrante); (c) Problema, trata-se de uma tarefa fechada e desafio elevado (3º quadrante); (d) Exercício, sendo uma tarefa fechada com desafio reduzido (4º quadrante) (Ponte, 2005, p. 8).

Para que os professores façam escolhas pertinentes, se faz necessário que eles vivenciem a resolução e análise de diferentes tipologias de TM; a seleção, a adequação e a construção de TM; a análise de respostas fornecidas por eles (professores) e por estudantes da educação básica a diferentes tipologias de TM. A partir dessas vivências, eles ampliarão seus conhecimentos sobre o raciocínio matemático expresso nas diferentes estratégias de resolução e, ao mesmo tempo, refletirão sobre a pertinência do seu uso para os processos de ensino e aprendizagem na educação básica (Maggioni & Estevam, 2021).

A prática de ensinar Matemática centrada na exposição dos conteúdos por parte do professor, seguida da resolução de TM do tipo exercícios com vistas à repetição de procedimentos pelos estudantes - *Paradigma do Exercício* - perdeu seu sentido, deixando latente a necessidade de abordagens de ensino que deem mais espaço para a interação entre os estudantes, entre estes e os professores, entre estes e o próprio conhecimento matemático (Ponte, 2005). Nesse ensejo, o Ensino Exploratório tem conquistado espaço uma vez que muda o modo como estudantes e os professores se relacionam entre si e com o conhecimento matemático, permitindo ao estudante mais espaço de fala, socialização e discussão coletiva (Oliveira et al. 2013, p. 3).

Geralmente, uma aula de acordo com essa abordagem é organizada em três fases: a apresentação da tarefa, a exploração dela pelos estudantes e a discussão e sistematização (Stein et al., 2009). A este respeito, Canavarro (2011) complementa que, na primeira fase, o professor propõe uma tarefa aos alunos e assegura-se que todos vão interpretá-la corretamente; na segunda fase, os alunos trabalham autonomamente, de forma individual ou em pequenos grupos, e o professor acompanha esse trabalho, observando e anotando as estratégias de resolução que os alunos estão desenvolvendo, bem como os erros que cometem ao longo dessas tentativas, já buscando apoiá-los nas suas dificuldades, mas sem reduzir o grau de desafio da tarefa; na fase final, o professor promove uma discussão coletiva, a partir de um conjunto de estratégias de resolução que considera ser interessante discutir, pedindo aos alunos que expliquem e justifiquem as suas respostas e que estabeleçam relações para sintetizar as ideias matemáticas exploradas.

Apesar de ainda ser uma prática pouco usual entre professores de Matemática no Brasil, o EE tem alcançado resultados promissores no tocante à aprendizagem dos estudantes. Do mesmo modo, ele tem sido responsável, em processos formativos, seja na formação inicial ou continuada

de professores de Matemática, por problematizar a estrutura da aula de Matemática. Ele tem contribuído, sobretudo, no entendimento de que a dinâmica da aula promove um ambiente de interação e de diálogo entre alunos e professor; que a aula desenvolvida em três fases amplia a percepção que os alunos têm sobre si, passando a sentirem-se mais capazes e mais propensos a tentar, falar, ouvir etc.; que os professores, ao perceberem seus alunos mais engajados, sentem-se mais motivados a seguir na abordagem, mesmo que ela seja de difícil realização (Canavarro & Prieto, 2017; Cyrino & Estevam, 2023).

Metodologia

A presente pesquisa é de natureza qualitativa-interpretativa (Crotty, 2003) e teve os dados construídos em um processo formativo no contexto de uma disciplina optativa do Mestrado Profissional em Matemática em Rede (Profmat), em uma universidade pública do Centro-Oeste brasileiro. Estes foram organizados a partir da recolha da produção de três de seus participantes, constituindo-se de falas, textos reflexivos, tarefas matemáticas, planejamento de aulas, relato e análise do desenvolvimento de aulas e, especialmente, as dissertações produzidas por eles.

Neste texto, focamos na escrita reflexiva produzida em formato de *Carta a um(a) Amigo(a)* sobre a prática docente desenvolvida por eles e a perspectiva de prática ao EE. A análise dos dados ocorreu por meio da codificação dos materiais produzidos pelos professores participantes em diálogo com anotações de campo e reflexões escritas pelas formadoras. Trata-se, portanto, de uma análise interpretativa do material disponível (Gil, 1999).

Neste texto, intenta-se compreender como três professores da educação básica pública do Distrito Federal, participantes do processo formativo, aproximaram da abordagem do EE e como compreenderam-na. As formadoras adotaram a docência compartilhada e colaborativa na organização do trabalho pedagógico, mantendo encontros semanais para planejamento e avaliação dos encontros, a partir da seguinte ementa: Profissão Docente: identidade, formação e práticas; Tarefas matemáticas; Tarefas de Aprendizagem Profissional; Aprendizagem Dialógica e Exploratória: abordagens didáticas na Educação Básica e no Ensino Superior.

Ao longo de 16 encontros, de 4h cada, aos sábados de manhã, as formadoras organizaram ações de natureza teórica e prática, individual e coletiva; realizadas tanto na universidade quanto nas escolas; envolvendo ações de leitura, fala e escrita, entre outras, de modo a estimular que os professores (re)conhecessem a si e aos colegas, enquanto profissionais que atuam na educação básica e que desempenham práticas docentes ancoradas, conscientemente ou não, em aportes pedagógicos, sociais, culturais, psicológicos etc. Tudo isso, valorizando a compreensão da experiência que os professores traziam para o estudo dos referenciais adotados na disciplina.

Apresentação e discussão dos dados

A docência compartilhada teve plena aceitação entre os professores, motivando-os a iniciarem processos similares no âmbito do mestrado e das escolas nas quais atuavam. Em muitos momentos, os professores foram convidados a expressarem suas percepções, angústias e produções, ao mesmo tempo que aprendiam a ouvir, a escutar e a respeitar os entendimentos dos colegas. A proposta da escrita individual de uma *Carta a um(a) amigo(a)* que cursou a licenciatura em Matemática foi desenvolvida no décimo encontro, despertando emoções, descobertas, tensões e a consciência da prática docente que desenvolviam naquele momento e a

que vislumbravam desenvolver na ação empírica no contexto da dissertação e, posteriormente, a finalização do curso de mestrado.

Tabela 1

Template da Carta ao Amigo(a).

Minhas palavras
Meu amigo, minha amiga.
Faz tanto tempo que não nos encontramos () 5 anos () 10 anos () 15 anos () 20 anos.
Recordo - como se fosse ontem - da nossa turma de graduação em matemática (<i>instituição, período em que cursou</i>), das nossas conversas, da nossa convivência naquele grupo social. Lembro das nossas dúvidas quanto à escolha entre bacharelado ou licenciatura? Eu escolhi (<i>descrever e justificar</i>)
Recorda como avaliávamos o nosso curso? Você falava que(<i>descrever</i>)Eu argumentava que.....(<i>descrever</i>)
Ao final do curso, recordo das nossas conclusões em tom de brincadeira. Aprendemos muito sobre (<i>descrever</i>) Aprendemos pouco sobre (<i>descrever</i>) Não aprendemos a (<i>descrever</i>)
Lembro que encerramos o curso pensando que para ser um(uma) excelente professor(a) de matemática - deveríamos.... (<i>descrever</i>) Estávamos preparados para a prática docente em matemática (<i>descrever</i>)
Por outro lado, recordo que tínhamos receios quanto (<i>descrever</i>)
Ao final dos primeiros 3 anos de docência, pensei muito sobre o(a) professor(a) que eu estava me tornando. Gostei de ver que eu (<i>descrever</i>) Todavia, fiquei incomodado(a) ao perceber que eu... (<i>descrever</i>)
Hoje, depois de () 5 anos () 10 anos () 15 anos () 20 anos de docência em matemática percebo que sou um(a) professor(a) de matemática (<i>descrever</i>)
Tenho uma novidade para contar! Decidi cursar o mestrado em busca de (<i>descrever</i>). Ao final do curso, ...(<i>descrever</i>)

Fonte: Acervo da pesquisa.

A ação de escrever rememorando a vivência enquanto estudante da licenciatura, os primeiros anos de docência, o amadurecimento na carreira, a busca pelo mestrado e o que vislumbravam quando do seu encerramento foi reveladora, tanto individualmente, quanto coletivamente. A ação demandou das formadoras destinar tempo a mais do que estabelecido no planejamento, tamanho o envolvimento dos professores com as suas memórias, especialmente, pelo fato de dar a elas significado ante os referenciais teóricos em estudo na disciplina. As escritas seguintes ilustram este momento.

No final do curso, recordo das nossas conclusões em tom de brincadeira. Aprendemos muito sobre a matemática pura, seus conceitos e história. Aprendemos pouco sobre a parte de educação, como nos preparamos para ser professores e ser matemáticos.	Ao final dos primeiros 3 anos de docência, pensei muito sobre a professora que eu estava me tornando. Gostei de ver que eu me espelhava nos melhores professores que eu tive. Todavia, fiquei incomodada ao perceber que eu quase um robô que todos os dias despejava conteúdos e me estressava com o mau comportamento dos alunos.
Hoje depois de 10 anos de docência em matemática percebo que sou uma professora de matemática que precisa melhorar sua prática, que ainda tem muitos questionamentos e quer melhorar.	Tenho uma novidade para contar! Decidi cursar o mestrado em busca de me aperfeiçoar. Ao final do curso, espero ser uma professora melhor e que vai colocar em prática tudo o que aprendeu e que vai continuar buscando se aprofundar, estudar e ler cada dia mais.

Figura 1. Registro da professora 1.

De acordo com o registro da *professora 1* na Figura 1, se aprendeu muito sobre Matemática pura e pouco sobre Educação, ressaltando que não se aprende a ser professor, e sim matemáticos. Essa percepção ocorre após longos oito anos de docência, com a constatação de que é preciso melhorar a prática da sala de aula. A professora destaca, ainda, que, após os primeiros três anos de docência, se via reproduzindo o espelhamento dos seus melhores professores, ficando incomodada ao notar que era quase um robô, que despejava conteúdos e se estressava com o mau comportamento dos alunos. E, diante dessas reflexões, decidiu cursar o mestrado na expectativa de se aperfeiçoar, de ser uma professora melhor, de colocar em prática tudo que aprendeu e continuar buscando, estudando, lendo cada vez mais.

Assim, as dificuldades da formação inicial em equilibrar e relacionar conhecimentos matemáticos e didático-pedagógicos ou ainda inserir o licenciando em seu futuro campo de atuação profissional foram destacadas por ela. Igualmente, enfatizou o que a agradava e o que a contrariava na rotina do trabalho docente que desenvolvia, registrando que estava preparada para aprender e inovar, qualificando o seu fazer profissional - a aula de Matemática.

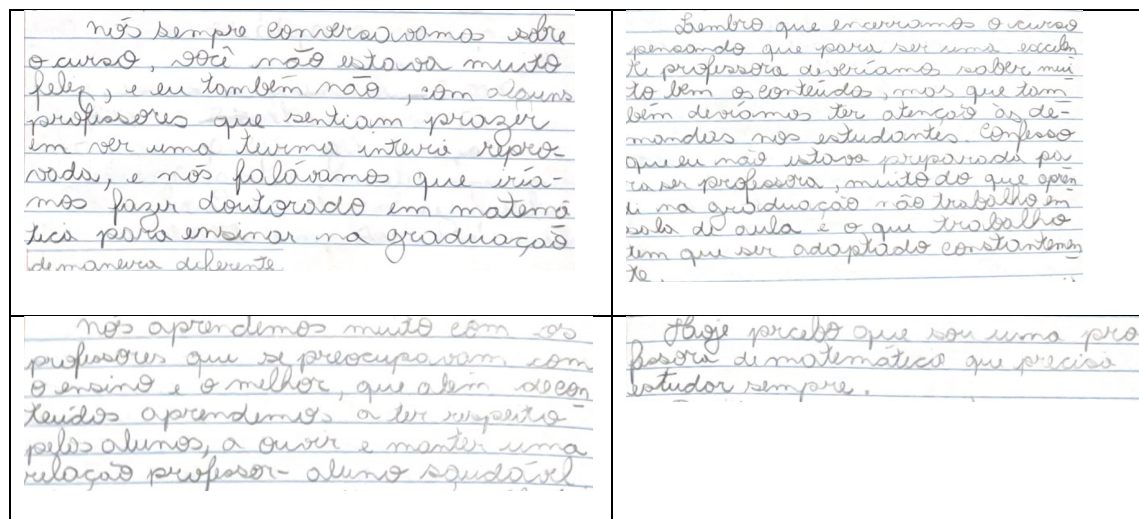


Figura 2. Registro da professora 2.

Diante do registro da Figura 2, nas respostas da professora E, que destaca que, ao conversar sobre o curso com alguns professores, não estava muito feliz ao ver alguns colegas sentirem prazer em ver alguns colegas sentirem prazer em ver uma turma inteira reprovada. E tinham a ideia de fazer doutorado para ensinar Matemática na graduação. Além disso, destacou que se aprende muito e se preocupa com o ensino, que se deve ter respeito pelos alunos, além da boa relação professor x alunos. Por fim, enfatiza que percebe que para ser uma professora de Matemática é preciso estudar sempre.

Tabela 2

Reflexões da Professora 2 expressas depois de vivenciar o EE em contexto de pesquisa empírica em turma da Educação de Jovens e Adultos.

As experiências vivenciadas em sala de aula, descritas nesta pesquisa, proporcionaram um diálogo entre o que propõe Ponte (2014), Stein (2008) e Canavarro (2011) e o desenvolvimento das tarefas em sala de aula, de modo a trazer reflexões não apenas sobre as dificuldades dos estudantes da EJA, mas também sobre a prática educativa da professora-pesquisadora. Apesar dessa prática, em muitos momentos, apresentar reflexos da trajetória acadêmica e da formação inicial dela, é possível perceber a relevância da formação continuada em cursos de pós-graduação, por meio dessa formação, foi possível que a professora-pesquisadora tivesse um olhar diferenciado sobre o próprio fazer pedagógico a fim de perceber, no ensino exploratório, uma possibilidade de promover a aprendizagem tanto para estudantes da EJA, quanto para a própria prática profissional.
Essa experiência metodológica foi marcante para a professora-pesquisadora no que se refere à prática profissional, ao perceber que estudantes da EJA ao desenvolver tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório, demonstravam entusiasmo, compromisso e compreensão do raciocínio matemático. E, na trajetória acadêmica, ao permitir-se, por meio do mestrado, estudar teorias presentes na Educação Matemática; discuti-las entre colegas de curso e professores comprometidos com o fazer pedagógico que almeja a aprendizagem e colocá-las em práticas nas turmas da EJA em que trabalha. Assim, fortalecer a identidade profissional para enfrentar os desafios presentes na docência.
Para trabalhos futuros, é possível desenvolver as tarefas matemáticas dessa pesquisa em turmas de Ensino Médio Regular e turmas da EJA, de modo a analisar as diferenças e similaridades entre elas e refletir qual a maneira mais adequada de desenvolvê-las com foco na aprendizagem dos estudantes. Outro aspecto que poderia ser trabalhado futuramente é o de estruturar tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório, baseadas nos tipos de erros apresentados pelos estudantes, de modo a promover a aprendizagem. E, ainda, em relação à aprendizagem dos professores, sugere-se um estudo sobre a percepção deles sobre as tarefas matemáticas dessa pesquisa, como podem sugerir novas tarefas e quais as fragilidades que apresentam ao desenvolver esse conteúdo em sala de aula.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Tabela 3

Reflexões da Professora 1 expressas depois de vivenciar o EE em contexto de pesquisa empírica em turma de Ensino Fundamental.

Para trabalhos futuros, é possível desenvolver as tarefas matemáticas dessa pesquisa em turmas de Ensino Médio Regular e turmas da EJA, de modo a analisar as diferenças e similaridades entre elas e refletir qual a maneira mais adequada de desenvolvê-las com foco na aprendizagem nos estudantes. Outro aspecto que poderia ser trabalhado futuramente é o de estruturar tarefas matemáticas na perspectiva do ensino exploratório, baseadas nos tipos de erros apresentados pelos estudantes, de modo a promover a aprendizagem. E, ainda, em relação à aprendizagem dos professores, sugere-se um estudo sobre a percepção deles sobre as tarefas matemáticas dessa pesquisa, como podem sugerir novas tarefas e quais as fragilidades que apresentam ao desenvolver esse conteúdo em sala de aula.

Fonte: Acervo da pesquisa.

Ao longo dos encontros, os professores avançaram em suas compreensões sobre Tarefa e Atividade Matemática, apoiados nos materiais de estudo, nas discussões coletivas e nas ações práticas realizadas. Igualmente, demonstraram ter entendido os elementos essenciais do EE, as fases de desenvolvimento em sala de aula de uma Tarefa Matemática, preferencialmente de natureza exploratória e/ou investigativa, destacando o quanto essas favorecem que os

pensamentos e/ou descobertas dos estudantes sejam conhecidos e considerados pelos docentes em sala de aula. Assim, os estudos, as informações sobre o Ensino Exploratório e as simulações de aulas ampliaram, entre os professores, a capacidade de reflexão sobre as práticas que desenvolviam em suas salas de aula e a prática que vislumbravam desenvolver.

Considerações finais

Os resultados evidenciam que os professores, ao vivenciarem tarefas matemáticas, selecionarem/adaptarem/construírem tarefas matemáticas exploratórias e as desenvolverem em suas salas de aula, ampliaram seus entendimentos sobre a produção matemática dos estudantes, valorizando esta produção, mostrando-se favoráveis ao Ensino Exploratório em aulas de Matemática da educação básica, mesmo que tenham registrado a complexidade de se conduzir discussões coletivas (Dörr et al., 2023). Do mesmo modo, mostram que a aproximação e a adoção serão processuais e acontecerão à medida que os professores avançam no entendimento teórico da abordagem aliado às experimentações práticas em contexto de pesquisa e, posteriormente, em suas salas de aula. Dessa forma, suas compreensões da prática docente, a partir dessa abordagem, se consolidarão com o tempo, demandando de todos a capacidade de manter o diálogo e a colaboração entre colegas nesse processo perene de qualificação da própria prática por meio do Ensino Exploratório (Canavarro, 2011; Cyrino & Estevam, 2023).

Referências

- Aguiar, M. A., Ponte, J. P., & Ribeiro, A. J. (2021). Conhecimento Matemático e Didático de Professores da Escola Básica acerca de Padrões e Regularidades em um Processo Formativo Ancorado na Prática. *Bolema*, 35(70), 794-814.
- Canavarro, A. P. (2011). Ensino exploratório da Matemática: Práticas e desafios. *Educação e Matemática*, 115, 11-17.
- Canavarro, A. P., & Prieto, M. (2017). O projeto MatDance - ou as conexões Matemática-Dança como contexto para uma aprendizagem da Matemática com sentido. [Apresentação de trabalho]. *Anais do Congresso Iberoamericano de Educação Matemática*. Universidade de Lisboa.
- Canavarro, A. P., Oliveira, H., & Menezes, L. (2014). Práticas de ensino exploratório da Matemática: Ações e intenções de uma professora. In: J. P. Ponte (Org.). *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (pp. 217-233). Lisboa: Instituto de Educação da Universidade de Lisboa.
- Cyrino, M. C. C. T., & Estevam, E. J. G. (2023). Tarefas Matemáticas na Formação de Professores que Ensinam Matemática. *Perspectivas da Educação Matemática*, 16(42), 1-30.
- Dörr, R. C., Pina Neves, R. da S., & Ribeiro, A. J. (2023). Tarefas Matemáticas na Formação Continuada de Professores: Investigando a Construção e o Desenvolvimento de uma Tarefa Exploratória. *Perspectivas Da Educação Matemática*, 16(42), 1-27.
- Ferreira, M., Ponte, J. P., & Ribeiro, A. J. (2023). Professional learning opportunities for teachers of the early years in algebra teaching: a study on the practice of a teacher educator. *Acta Scientiae*, 25(2), 1-32.
- Fiorentini, D., Ribeiro, C. M., Losano, A. L., Crecci, V. M., Ferrasco, T. de O., & Vidal, C. P. (2018). Estudo de uma experiência de Lesson Study Híbrido na formação docente em matemática: contribuições de/para uma didática em ação. *Anais do XIX Encontro Nacional de Didática e Prática de Ensino* (v. 1, pp. 1-38). Endipe.
- Gil, A. C. (1999). *Método e técnicas de pesquisa social*. Atlas.
- Maggioni, C. E. C. M., & Estevam, E. J. G. (2021). Formação continuada em uma comunidade profissional de professores que ensinam matemática nos anos iniciais: análise de tarefas sobre números e operações. *Em Teia*, 12(3), 1-26.
- Oliveira, H., Menezes, L., & Canavarro, A. P. (2012). Recursos didáticos numa aula de ensino exploratório: Da prática à representação de uma prática. In A. P. Canavarro; L. Santos; A. Boavida; H. Oliveira; L. Menezes & S. Carreira (Eds.), *Investigação em Educação Matemática: Práticas de ensino da Matemática*.
- Pina Neves, R. S., & Fiorentini, D. (2021). Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de Lesson Study. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(34), 1-30. <http://dx.doi.org/10.46312/pem.v14i34.12676>

- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In: GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. da. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetike*, (28), e020027.
- Stein, M. K. et al. (2009). Implementing standards-based mathematics instruction: a casebook for professional development. Teachers College Press.
- Stein, M. K.; Engle, R. A.; Smith, M. S. & Hughes, E. K. (2008). Orchestrating productive mathematical discussions: Helping teachers learn to better incorporate student thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(4), 313-340.
- Teixeira, B. R., & Cyrino, M. C. C. T. (2015). Desenvolvimento da identidade profissional de futuros professores de Matemática no âmbito da orientação de estágio. *Bolema*, 29(52), 658-680.



Características del aprendizaje de la práctica profesional de planificar una lección usando una trayectoria hipotética de aprendizaje sobre la magnitud superficie

Marianela **Alpízar** Vargas
Escuela de Matemática, Universidad Nacional
Costa Rica

marianela.alpizar.vargas@una.ac.cr

Ceneida **Fernández** Verdú
Universidad de Alicante
España

ceneida.fernandez@ua.es

Salvador **Llinares** Ciscar
Universidad de Alicante
España

sllinares@ua.es

Resumen

El objetivo es explorar cómo un docente de educación primaria planifica una lección sobre la medida superficie usando una trayectoria hipotética de aprendizaje tras participar en una propuesta formativa dirigida a desarrollar competencias docentes. Se consideran tres dimensiones en la planificación: identificación de elementos matemáticos y su relación con las habilidades propuestas en el currículo costarricense; abordaje de dichos elementos en la definición de objetivos de aprendizaje y el diseño de las actividades; y la anticipación de respuestas a las actividades diseñadas. Los resultados muestran que el docente planificó una lección considerando una progresión de aprendizaje de los estudiantes sobre la medida superficie integrándola con las referencias contextuales del currículo.

Palabras clave: Competencia mirar profesionalmente; planificar una lección; Medidas; Superficie; Educación Primaria.

Problemática y Referencial Teórico

Mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas es una competencia docente relevante para la práctica de los docentes que ha generado una importante agenda de investigación (e.g. Dindyal et al., 2021; Weyers et al., 2024). Estos estudios han mostrado la necesidad de desarrollar esta competencia en los programas de formación inicial de maestros y profesores de matemáticas y en los programas de formación continua. La competencia mirar profesionalmente se ha conceptualizado desde diferentes perspectivas. En este estudio se entiende como una competencia basada en el conocimiento, por tanto, mirar profesionalmente las situaciones de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas implica que el docente use conocimiento específico de matemáticas y de didáctica de las matemáticas para justificar sus decisiones.

Esta competencia se vincula a las prácticas profesionales específicas en la enseñanza de las matemáticas (Llinares, 2019): (i) dotar de sentido el pensamiento matemático de los estudiantes; (ii) analizar y seleccionar tareas matemáticas; (iii) gestionar las discusiones matemáticas en el aula o (iv) planificar una lección. En este estudio nos centramos en la práctica profesional de planificar una lección. Una de las *effective mathematics teaching practices* propuestas por el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2014) es la de establecer objetivos matemáticos para centrar el aprendizaje. Desde esta perspectiva se indica que una enseñanza eficaz de las matemáticas sitúa los objetivos dentro de una progresión del aprendizaje y utiliza los objetivos para orientar las decisiones pedagógicas. Además, propone la utilización de evidencias del pensamiento matemático de los estudiantes para ajustar la instrucción de manera que apoye el aprendizaje. Por tanto, la planificación de los docentes debería tener en cuenta la progresión del aprendizaje (pensamiento matemático) de los estudiantes y definir objetivos de las lecciones de acuerdo con esta progresión.

En las investigaciones previas centradas en la planificación de lecciones basadas en el pensamiento matemático de los estudiantes es posible considerar el papel que desempeñan las destrezas vinculadas a la competencia docente de mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes (Choy, 2014). Estas destrezas son identificar detalles matemáticos importantes del pensamiento matemático de los estudiantes; interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes y decidir de acuerdo con la interpretación (Jacobs et al., 2010). El estudio de Choy mostró que la planificación considerando dichas destrezas podía contribuir a que las clases fueran más efectivas, ya que permite que los docentes piensen en los contenidos que deben enseñar y también que reflexionen sobre las posibles ideas erróneas de los estudiantes, las dificultades que puedan presentar y las formas en las que cómo docentes pueden abordar esas dificultades. Taylan (2018) indicó que los docentes que tenían destrezas intermedias y avanzadas en la competencia mirar profesionalmente el pensamiento matemático de los estudiantes se desempeñaron mejor al planificar una lección considerando las características del pensamiento matemático de los estudiantes, ya que fueron capaces de proporcionar ejemplos de pensamiento incorrecto de los estudiantes. Este estudio concluyó que el uso de un protocolo de plan de lección centrado en el pensamiento de los estudiantes puede ser una herramienta muy valiosa para los docentes. Cuando el docente conoce sobre el pensamiento de sus estudiantes y es consciente de las dificultades que presentaran sus estudiantes puede establecer pautas convenientes para que su enseñanza sea más efectiva (Tataroğlu Taşdan et al., 2022).

Teniendo en cuenta las prácticas efectivas para la enseñanza de las matemáticas desde la NCTM y los estudios previos centrados en planificar lecciones centradas en el pensamiento matemático de los estudiantes, nuestra hipótesis es que facilitar a los maestros trayectorias hipotéticas de aprendizaje (THA) para planificar una lección, podría ayudarles a establecer objetivos que orienten sus actividades y a tener en cuenta la progresión de aprendizaje de los estudiantes. Investigaciones previas han mostrado que las THA son lentes teóricas que apoyan el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente de los docentes (Fernández y Choy, 2020; Ivars et al., 2020; Moreno et al., 2021). Por ejemplo, Ivars *et al.* (2020) utilizan una THA del concepto de fracción como parte-todo con un grupo de docentes en formación, para que estos interpreten la comprensión de los estudiantes y propongan actividades que los hagan avanzar en su aprendizaje. Se mostró que la THA proporcionó a los docentes un lenguaje apropiado para describir la comprensión de los estudiantes y una guía para diseñar las actividades.

En esta comunicación, se presenta cómo un docente de educación primaria en ejercicio planifica una lección sobre el tema de medidas, en particular, la superficie, usando la información teórica proporcionada en un taller de formación (THA) centrado en el desarrollo de la competencia docente mirar profesionalmente. Este estudio forma parte de una investigación más amplia que tiene como objetivo caracterizar el desarrollo de la competencia mirar profesionalmente en docentes de educación primaria en el dominio matemático específico de las magnitudes y su medida. Se seleccionó el tema de magnitudes y su medida, porque es un tema relevante dentro de los Programas de estudio del Ministerio de Educación Pública en Costa Rica (MEP), y porque las investigaciones han mostrado que los maestros tienen dificultades con determinados contenidos de este tema (Alpízar-Vargas et al., 2024). De manera específica, nuestro objetivo es identificar características de la integración entre el conocimiento de matemáticas y sobre el aprendizaje en la manera en la que un docente de educación primaria planifica una lección usando una THA sobre la magnitud superficie y su medida.

Método

Se diseñó un taller de formación con el objetivo de desarrollar la competencia docente mirar profesionalmente en el tema de “Medidas”. Participaron siete docentes de educación primaria que imparten clases de matemática en instituciones de educación pública vinculadas con el MEP. La participación en dicho taller fue voluntaria. El taller se desarrolló en cuatro bloques. El primer bloque tiene como objetivo que los docentes aprendieran a identificar elementos matemáticos de las magnitudes y su medida al resolver actividades sobre la magnitud longitud y su medida, y la magnitud superficie y su medida. El segundo bloque tiene como objetivos (i) analizar el pensamiento matemático de los estudiantes cuando resuelven actividades matemáticas y (ii) diseñar actividades que facilitaran la progresión en el aprendizaje de los estudiantes. En el tercer bloque, los objetivos eran que (i) los docentes elaboraran un plan de lección y (ii) lo implementaran. El cuarto bloque tenía como objetivo analizar el pensamiento de sus propios estudiantes al implementar el plan de lección. Esta comunicación, adopta la forma de un estudio de caso, y se centra en cómo uno de los docentes participantes realizó su plan de lección (tercer bloque) que nos permite describir algunas características de cómo se aprende a usar una THA para planificar lecciones. A este docente se le identificará desde ahora como DP.

Para planificar la lección se le dio al DP una guía que se dividía en tres partes: (i) *Aspectos generales*: magnitud y su medida a trabajar, nivel educativo, etapa en que se situaba el tipo de planeamiento según los Programas de estudio del MEP (2012). (ii) *Habilidades específicas* según los Programas de estudio del MEP (2012). (iii) *Estrategias de mediación*: objetivos de aprendizaje, elementos matemáticos por movilizar, conocimientos previos, nivel de comprensión esperado, secuencia de actividades, anticipación de respuestas. La guía consideraba los lineamientos curriculares expuestos por el MEP en Costa Rica y los aspectos teóricos abordados en el taller. En los bloques anteriores, los docentes habían identificado elementos matemáticos de la magnitud superficie y su medida implicados en las actividades y en las respuestas de estudiantes. Además, habían interpretado la comprensión de estudiantes usando información proporcionada sobre niveles de comprensión de una THA, para la magnitud longitud y su medida y para la magnitud superficie y su medida. Por otra parte, habían anticipado respuestas de estudiantes en los diferentes niveles de comprensión a diferentes actividades y habían diseñado actividades que ayudaran a los estudiantes a progresar en su comprensión según los niveles de la THA.

Una THA está formada por un objetivo de aprendizaje, descripción de niveles de comprensión y ejemplos de actividades que ayudan a transitar entre los niveles. La THA de nuestro estudio se diseñó teniendo en cuenta los estudios de Battista et al. (1998) y, Clements y Sarama (2009). La THA fue proporcionada a los docentes como documento teórico del taller. En la figura 1 se muestra un resumen de las características de la comprensión de los niveles 3, 4 y 5 para la magnitud superficie y su medida.

Nivel	Características
3	Utilizan la propiedad transitiva para ordenar tres o más objetos por su superficie mediante comparaciones indirectas.
4	- Identifican una unidad de medida, como parte de la superficie de un objeto que se mide y son conscientes de que deben: - seleccionar una única unidad de medida, - realizar iteraciones de la unidad en toda la superficie, estructurar el espacio: realizar arreglos de filas y columnas sobre la superficie a medir, - reconocer la propiedad de acumulación.
5	- Reconocen la relación inversa entre las unidades (su medida) y el número de unidades de medida (relación entre número y medida). - Reconocen la necesidad de utilizar una única unidad de medida para medir y que debe ser universal (universalidad de la unidad de medida, m²). - Realizan un conteo sistemático de las unidades dentro de un arreglo de filas y columnas. - Empiezan a realizar estimaciones de la superficie usando el metro cuadrado como unidad de medida.

Figura 1. Fragmento de la THA sobre magnitud superficie y su medida.

Para el análisis del planeamiento se consideraron varias dimensiones: *Dimensión 1. Elementos Matemáticos*. En esta dimensión se consideraron los elementos matemáticos relacionados con la magnitud y su medida movilizados en el plan de lección, así como su relación con el currículo costarricense por medio de las habilidades específicas a desarrollar (tomadas del PEM), y el nivel de comprensión de la magnitud superficie asociado a los elementos indicados. *Dimensión 2. Abordaje de los elementos matemáticos*. Esta dimensión se refiere a las acciones del docente para elegir y describir las actividades de su plan de lección. Intervienen los conocimientos previos que debe tener un estudiante para realizar las actividades

matemáticas propuestas, así como los objetivos de aprendizaje relacionados con los elementos matemáticos definidos y en qué medida la secuencia de actividades diseñada tiene en cuenta los objetivos definidos. *Dimensión 3. Anticipación de respuesta.* Esta dimensión se relaciona con la anticipación de respuestas a la actividad o secuencia de actividades sugerida por la docente donde se refleje diversos niveles de comprensión.

Resultados

DP elaboró su plan de lección con la temática de superficie. Los resultados se exponen de acuerdo con cada una de las dimensiones observadas en el plan de lección de DP.

Dimensión 1. Elementos Matemáticos

DP elige la magnitud superficie y su medida para un grupo de 5º año de educación primaria e indica como objetivo de aprendizaje la habilidad específica: “Aplicar las diversas medidas en la resolución de problemas que se presenten en situaciones ficticias y del entorno.” Dicha habilidad está definida en los Programas de estudio de Matemáticas del MEP para 5º año de educación primaria y está relacionada con el conocimiento de la medida de la superficie (MEP, 2012). Por tanto, se relaciona el planeamiento de clase con lo establecido en el currículo costarricense. DP indica que los elementos matemáticos que deben ser comprendidos por los estudiantes son: “transitividad, unicidad de la unidad de medida, iterar la unidad de medida y contar las iteraciones, estructuración del espacio en arreglos de filas y columnas”, los cuales son elementos matemáticos de los niveles 3 y 4 de la THA.

Dimensión 2. Abordaje de los elementos matemáticos

DP señala que los estudiantes requieren el reconocimiento de la magnitud superficie y la conservación como conocimientos previos para poder llevar a cabo las actividades que propone en su plan de lección. Es decir, los conocimientos previos están en coherencia con los elementos matemáticos que previamente ha indicado que iba a trabajar, ya que están relacionados con elementos matemáticos de niveles inferiores de la THA (nivel 1 y 2). Los objetivos de aprendizaje específicos sugeridos por DP se relacionan de manera directa con cada uno de los elementos matemáticos que indicó que iba a movilizar en su plan de clase:

Comprender y usar la transitividad de la superficie, usar una unidad de medida para completar una superficie, elegir una única unidad de medida, realizar iteraciones de esta en toda la superficie del objeto, sin saltos ni superposiciones y contar las iteraciones y realizar arreglos de filas y columnas. [DP]

DP propone una secuencia de dos actividades para los objetivos y elementos matemáticos previamente indicados. La actividad 1 estaría relacionada con la posibilidad de usar la propiedad de transitividad (al tener que ordenar 3 superficies) y con el uso de la unidad de medida (al tener que usar una única unidad de medida, iterarla y contar las iteraciones) para comparar las superficies. A manera de ejemplo se incluye lo concerniente a la Actividad 1.

En la actividad 1, DP da a sus estudiantes tres figuras para que puedan ordenarlas según la medida de la superficie (la docente lo da como material concreto a los alumnos). Las figuras tienen la misma superficie, pero diferente forma (Figura 2). DP propone las siguientes preguntas para que los estudiantes las contesten en grupos: (1) *¿Cuál es la figura más grande?*, (2) *¿Cómo*

llegaron a esa respuesta?, (3) ¿Usaron las unidades de medida dadas? (4) ¿Seleccionaron solo una o utilizaron varias? ¿Hubo alguna persona que se opuso a la forma de hacerlo en el equipo?

En la actividad 2, DP pide a los estudiantes que expliquen “por qué deben usar la misma unidad de medida para comparar la superficie de las figuras dadas” e indica que cerraría las actividades con las siguientes preguntas: (1) *¿Cuál es el orden de tamaño de las figuras?;* (2) *¿Pueden indicar cuánto mide cada figura?* (3) *¿Por qué las figuras tienen diferente medida entre lo dicho por sus compañeros?* (4) *¿Podemos decir que son de superficie distinta?*

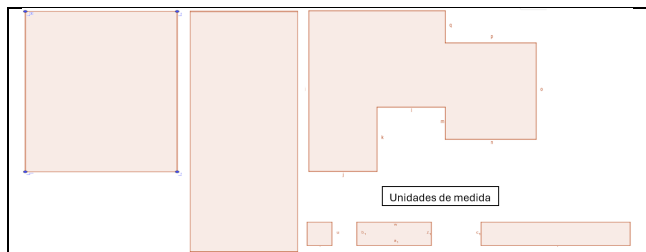


Figura 2. Material concreto dado por DP a los estudiantes para la Actividad 1.

Se observa, aunque no lo indica DP en los elementos matemáticos identificados y los objetivos de las actividades, que con la actividad 2 trabajaría la necesidad de una unidad universal.

Dimensión 3. Anticipación de respuestas. DP anticipó la respuesta a las actividades de tres estudiantes, donde se reflejan características diferentes de la comprensión según la THA. Propone una respuesta con dificultades en los elementos matemáticos de nivel 4 (identificación de una unidad de medida), una respuesta que muestra características de nivel 4 y una respuesta que muestra características del nivel 5 (Relación inversa entre la cantidad-unidad y el número-medida). A manera de ejemplo se mostrará la anticipación para el estudiante que tiene dificultades con las características de nivel 4 (estudiante 1) y un estudiante que estaría ubicado en el nivel 4 (estudiante 2). DP anticipa la respuesta de la Figura 3 para el estudiante 1 e indica que presenta dificultades con la elección y la iteración de la unidad de medida: “porque está dejando por fuera de la figura la unidad de medida seleccionada, lo que hace que exista un error en el conteo y por lo tanto en la selección de la figura con mayor superficie”.

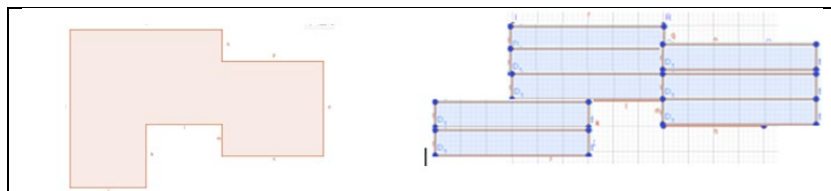


Figura 3. Anticipación de la respuesta del estudiante 1 en la actividad 1.

Para la Actividad 2, DP anticipa una respuesta para el estudiante 1 que muestra el uso de diferentes unidades de medida para calcular la medida de cada superficie y comparar (Figura 4).

1. ¿Cuál es el orden de superficie de las figuras?
La C es la más grande, la B es la mediana y la A es la más pequeña.
2. ¿Pueden indicar cuánto mide cada figura?
La C mide 36 cuadritos pequeños. Como teníamos que dar un tamaño exacto usamos los cuadritos pequeños.
La B mide 12 unidades medianas.
La A mide 6 unidades grandes.

Figura 4. Anticipación de la respuesta del estudiante 1 en la actividad 2.

Para el estudiante 2, considera que una posible respuesta es que domine el uso de las unidades de medida; la elección, iteración y conteo de la unidad de medida (Figura 5).

1. ¿Cuál es la figura más grande?
Ubicamos la unidad de medida más pequeña dentro de cada figura, poniendo una a la par de la otra, sin dejar espacios entre ellas y así poder contar cuantas unidades cabían, dejando exactamente todas dentro de la figura. Después de hacer el conteo de las figuras A y B vimos que tenían la misma cantidad de unidades, por lo tanto, son iguales, pero nos costó ubicar el tamaño de la figura C, sin embargo, usamos la misma unidad de medida y las ubicamos dentro de la figura igualmente todas pegaditas y observamos que tiene el mismo tamaño que las otras dos, entonces las tres son del mismo tamaño.

Figura 5. Anticipación de la respuesta del estudiante 2 en la actividad 1.

En cuanto a la Actividad 2 (Figura 6), DP indica que este grupo (donde trabaja el estudiante 2) tendría dificultad en identificar que los diferentes resultados (medida de las figuras) son debido a que se han usado unidades de medida distintas y que por ello sería necesario una unidad universal (pregunta 4).

3. ¿Por qué las figuras tienen diferente medida entre lo dicho por sus compañeros?
Porque el grupo de Esteban tiene figuras con diferente superficie posiblemente, o usaron otra unidad de medida que no dio la maestra.
4. ¿Podemos decir que son de superficie distinta?
Sí, porque las medidas de ellos no fueron iguales a las de nosotros.

Figura 6. Anticipación de la respuesta del estudiante 2 en la actividad 2.

Discusión y conclusiones

Los resultados muestran que el docente integró lo establecido en el currículo costarricense (PEM) con la información de la THA ya que los elementos matemáticos de la THA elegidos se relacionan con las habilidades específicas del PEM. La evidencia de esta integración apoya lo indicado por Dietiker et al. (2018) de que el desarrollo de la competencia docente relativa a la planificación se apoya en el reconocimiento de las características de las actividades basadas en los elementos del currículo vigente y el modelo de progresión del aprendizaje. Esta integración permite adecuar las actividades a las habilidades y conocimientos requeridos por los estudiantes según su año escolar. El aprendizaje de la práctica profesional de planificar se apoya en el conocimiento de los elementos matemáticos relacionados con la medida que intervienen en el

estudio de la magnitud y en el conocimiento sobre el aprendizaje ya que para abordar elementos de niveles superiores debe considerar que los estudiantes dominan los elementos de los niveles anteriores permitiendo al docente definir objetivos de aprendizaje desde los elementos a movilizar tomados de la THA. Esta característica respalda la idea propuesta por Ivars *et al.* (2020) de que una THA sirve como guía para los docentes planificar las actividades. Por último, el docente fue capaz de anticipar tanto respuestas correctas como respuestas que reflejan dificultades con los elementos matemáticos de los estudiantes. Este resultado apoya la idea de Smith *et al.* (2008) que indican que no se puede predecir todo lo que pasará en el aula, pero se puede tener un listado que permita tener una idea de los que ocurrirá durante la clase.

En resumen, el caso presentado muestra características de la manera que el conocimiento sobre los elementos matemáticos y sobre el aprendizaje interactúan al aprender la práctica profesional de planificar una lección sobre la medida de la superficie en educación primaria.

Reconocimientos

Este estudio ha sido apoyado por la Agencia Estatal de Investigación, Ministerio de Ciencia e Innovación, España (Ref. No. PID2023-149624NB-I00 y PID2020-116514GB-I00).

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación SIA 0339-22 de la Escuela de Matemática de la Universidad Nacional, Costa Rica.

Referencias

- Alpízar-Vargas, M., Fernández, C., & Llinares, S. (2024). Competencia docente del profesorado de educación primaria en el área de medidas en un contexto de reforma curricular. *Uniciencia*, 38(1), 1-24. <https://dx.doi.org/10.15359/ru.38-1.22>
- Battista, M., Clements, D. Arnoff, J., Battista, K., & Van Auken, C. (1998). Students' spatial structuring of 2D arrays of squares. *Journal for Research in Mathematics Education*, 29(5), 503-532. <https://doi.org/10.2307/749731>
- Choy, B.H. (2014). Teachers' productive mathematical noticing during lesson preparation. In Nicol, C., Liljedahl, P., Oesterle, S., & Allan, D. (Eds.) *Proceedings of the Joint Meeting of PME 38 and PME-NA 36* (Vol. 2, pp. 297-304). PME.
- Clements, C., & Sarama, J. (2009). *Early Childhood Mathematics Education Research. Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.
- Dietiker, L., Males, L. M., Amador, J. M., & Earnest, D. (2018). Curricular Noticing: A framework to describe Teachers' interactions with curriculum materials. *Journal for Research in Mathematics Education*, 49(5), 521-532. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.49.5.0521>
- Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H. y Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *ZDM – Mathematics Education*, 53(1), 1–16. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01249-y>
- Fernández, C. & Choy, B.H. (2020). Theoretical lenses to develop mathematics teacher noticing. Learning, teaching, psychological and social perspectives. In S. Llinares, O. & Chapman (Eds.), *International Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2. Tools and Processes in Mathematics Teacher Education (Second Edition)* (pp. 337–360). Brill. https://doi.org/10.1163/9789004418967_013
- Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). Uso de una trayectoria hipotética de aprendizaje para proponer actividades de instrucción. *Enseñanza de las Ciencias*, 38(3), 105-124. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2947>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. C., & Philipp, R. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Llinares, S. (2019). Enseñar matemáticas como una profesión. Características de las competencias docentes. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 18, 30–43.

- MEP. (2012). Programas de Estudio en Matemáticas para la Educación General Básica y el Ciclo Diversificado. San José, Costa Rica: autor.
- Moreno, M., Sánchez-Matamoros, G., Callejo, M.L., Pérez-Tyteca, P. & Llinares, S. (2021). How prospective kindergarten teachers develop their noticing skills: the instrumentation of a learning trajectory. *ZDM Mathematics Education*, 53, 57-72. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01234-5>
- National Council of Teachers of Mathematics. (2014). *Principles to actions: Ensuring mathematical success for all*. Reston, VA: Author.
- Smith, M. S., Bill, V., & Hughes, E. K. (2008). Thinking through a lesson: Successfully implementing a high level task. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 14(3), 132–138. <https://doi.org/10.5951/mtms.14.3.0132>
- Taylan, R.D. (2018). The Relationship between pre-service mathematics teachers' focus on student thinking in lesson analysis and lesson planning tasks. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 16, 337–356. <https://doi.org/10.1007/s10763-016-9778-y>
- Tataroğlu Taşdan, B., Tekin Dede, A., & Yiğit Koyunkaya, M. (2022). Examining pre-service mathematics teachers' argumentation-supported lesson plans and their noticing during planning. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 55(6), 1309–1329. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2022.2054741>
- Weyers, J., König, J., Scheiner, T., Santagata, R., & Kaiser, G. (2024). Teacher noticing in mathematics education: a review of recent developments. *ZDM–Mathematics Education*, 56, 249-264. <https://doi.org/10.1007/s11858-023-01527-x>



Causas de los errores de estudiantes en Matemática universitaria: Cambios en las concepciones de un grupo de profesores

Henry Alexander **Ramírez** Bernal
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Bogotá
haramirez@udistrital.edu.co

Resumen

En la investigación doctoral llevada a cabo por el autor, se analizaron los cambios en las concepciones de un grupo de profesores de matemática universitaria sobre las causas de los errores de los estudiantes, al participar en un minicurso de Educación matemática centrado en el estudio de algunos referentes teóricos (obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, misconcepciones y transformaciones semióticas) que ayudan a comprender las causas de tales errores. Mediante un proceso de categorización inductivo-deductivo y un análisis comparativo se caracterizaron los cambios en las concepciones de los profesores. La presente ponencia documenta el análisis específico del cambio en las concepciones de uno de los participantes (Manuel). Adicionalmente, se presenta un esquema de gradualidad que describe la asimilación de los referentes teóricos por parte de los participantes y su relación con los cambios en sus concepciones sobre las causas de los errores.

Palabras clave: Aprendizaje; Educación matemática; Educación superior; Formación docente continua; Investigación cualitativa; Errores de estudiantes en matemática universitaria; Teoría de obstáculos; Teoría de representaciones semióticas; Colombia.

Descripción del problema

El error es una poderosa herramienta para diagnosticar dificultades de aprendizaje y poder remediarlas (Borasi, 1987), postura con la que coinciden autores como Parra y Santos (2016), Alsina, Bosch y López (2023). De acuerdo con Brousseau (1983) los errores pueden considerarse como el resultado de un conocimiento que fue exitoso en el pasado pero que resulta erróneo o simplemente no es aplicable en otras circunstancias. Adicionalmente, los errores son inevitables durante el aprendizaje matemático (Legutko, 2008) y pueden considerarse como manifestaciones

de malestares cognitivos (D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani, & Sbaragli, 2010). Si el profesor desea ayudar a sus estudiantes a superar los errores en matemática, debe ser consciente de la importancia del error en el proceso de aprendizaje matemático y aún más, de sus causas. De acuerdo con Ball, Thames y Phelps (2008) el profesor debe tener la capacidad de identificar los errores en matemática de sus estudiantes, analizar su naturaleza, juzgar su origen y comprender el aprendizaje del estudiante mediante el error.

Ramírez (2013) mostró que algunos profesores universitarios atribuyen los errores en matemática de sus estudiantes a factores como falta de concentración del estudiante, falencias en la lectura, ligereza del estudiante o falta de madurez). En algunos estudios como Economou (1995) y Ramírez (2020) se ha evidenciado que los profesores atribuyen las causas de los errores a hechos que se distancian de los referentes teóricos de la Educación matemática que intentan explicar críticamente tales causas. D'Amore (2004) llama la atención sobre la deficiente preparación de los profesores (o falta de ella) para identificar las dificultades de los estudiantes en el aprendizaje matemático. Lo anterior resulta coherente con el hecho que las creencias de los profesores influyen directamente sobre su desempeño y sobre los procesos de enseñanza aprendizaje como lo señalan García, Azcárate y Moreno (2006). Las creencias de los profesores pueden influir negativamente en sus análisis sobre las causas de los errores.

Considerando las creencias como parte de las concepciones de los profesores (Llinares, 1996), en la investigación doctoral se buscó determinar qué cambios en las concepciones sobre las causas de los errores de un grupo de profesores de matemática universitaria pueden ocurrir si tienen la oportunidad de analizar y reflexionar críticamente sobre el tema. Para cumplir con los objetivos de la investigación, los profesores participaron de un minicurso de Educación matemática en el que se abordó el estudio de algunos referentes teóricos que ayudan a comprender las causas de los errores (obstáculos epistemológicos, obstáculos didácticos, transformaciones semióticas y misconcepciones), se estudió la disposición a incorporar el referencial teórico por parte de los participantes en sus análisis sobre las causas de los errores. Los participantes en el curso tuvieron la oportunidad de reflexionar, socializar y discutir con colegas sobre el referencial teórico.

Marco teórico

Los referentes teóricos, relevantes para la investigación doctoral, tomados como base de los análisis realizados por los participantes durante las reuniones en grupos focales sobre las causas de los errores fueron los siguientes: obstáculos epistemológicos y obstáculos didácticos (Brousseau, 1976; D'Amore & Fandiño Pinilla, 2012), misconcepciones (D'Amore 1999; D'Amore & Sbaragli, 2005) y transformaciones semióticas (Duval, 2006). Adicionalmente, se consideraron las tipologías de aprendizajes propuesta por Fandiño Pinilla (2010) por su aporte a los análisis específicos sobre las dificultades de aprendizaje matemático. En la actualidad el referencial teórico citado mantiene su vigencia y se ha constituido en base de múltiples investigaciones sobre las causas de los errores en el aprendizaje matemático; mencionamos algunas: Sulastrí, Suryadi, Prabawanto y Cahya (2022) y Asenova, Del Zozzo y Santi (2023) entre otros.

Se consideran además las creencias y concepciones de los profesores de matemática sobre las causas de los errores. De acuerdo con Moreno y Azcárate (2003) las creencias: se caracterizan por tener un carácter de conocimiento subjetivo poco elaborado, explican y justifican muchas de las decisiones de las personas, no se justifican sobre la racionalidad sino sobre sentimientos y experiencias y carecen de conocimientos específicos sobre el tema relacionado. En esta investigación, se adoptó el término concepciones siguiendo la definición de Llinares (1996), que abarca un espectro de cogniciones del profesor, incluyendo sus creencias y conocimiento derivado de la experiencia. Adicionalmente, se adoptó el cambio de concepciones en el sentido de desarrollo o modificación de concepciones en el transcurso del tiempo como lo señalan Wilson & Cooney (2002). Varios autores han llamado la atención sobre el hecho que los cambios en las concepciones de los profesores contribuyen a mejorar la enseñanza de los profesores (Lerman, 1999) y el rendimiento de los estudiantes (Sparks, 1999). En una postura muy similar a la sugerida por Hamukwaya y Haser (2021), consideramos que los programas de formación docente deben centrarse en sensibilizar a los docentes sobre cómo sus concepciones sobre las dificultades en el aprendizaje de la matemática podrían afectar a los estudiantes.

De acuerdo con Pehkonen (2006) un profesor debe ser consciente de sus acciones y debe reflexionar sobre ellas, pues cuando el individuo reflexiona sobre sus acciones se produce aprendizaje. Además, la conciencia de las propias creencias y concepciones puede surgir de esta autorreflexión (Pehkonen, 2006). Por otra parte, si las creencias de los profesores son confrontadas y desafiadas se pueden generar cambios duraderos en los docentes (Holm & Kajander, 2012). En la investigación doctoral se buscó ayudar a los profesores a reflexionar y tomar conciencia de sí mismos mediante datos que validaran o refutaran sus creencias (Olson & Singer, 1994; Pehkonen, 2001), se ofreció a los profesores participantes un escenario que les brindara oportunidades para el cambio y se buscó respetar el hecho que el cambio debe ser voluntario (Pehkonen, 2001).

Metodología

La investigación se desarrolló en dos fases. Para la Fase 1 (llamada de indagación inicial) se realizó una invitación abierta a profesores (en ejercicio) de matemática universitaria de primeros semestres. 25 profesores que laboran en diferentes universidades de Bogotá y municipios aledaños respondieron positivamente a la convocatoria. En esta primera fase los participantes respondieron un cuestionario en el que se les pidió identificar algunos errores en matemática de sus estudiantes y proponer explicaciones para sus posibles causas. En la Fase 2 (de reuniones en grupos focales) participaron 12 profesores, quienes se seleccionaron del grupo original de participantes por su interés y compromiso en continuar haciendo parte del estudio. Estos docentes participaron en un minicurso de Educación matemática de 4 sesiones enfocado en el estudio de los referentes teóricos mencionados en el marco teórico y que contribuyen a comprender las causas de los errores. Se conformaron 4 grupos focales de 3 participantes (Morgan, 1998) cada uno. Con cada grupo se realizaron 4 reuniones que tuvieron una duración de entre 60 y 90 minutos cada una (Morgan, 1998). En cada reunión se realizaron las siguientes actividades: tarea individual de análisis de las soluciones dadas por algunos estudiantes a actividades matemáticas (previamente seleccionadas, organizadas y sistematizadas por el investigador), socialización y discusión inicial en los grupos focales, presentación por parte del

investigador de referentes teóricos (1 por sesión), nueva socialización y discusión por pares. En la sesión sobre obstáculo epistemológico se analizaron soluciones de estudiantes a 2 preguntas sobre límites; en la sesión correspondiente a transformaciones semióticas se analizaron soluciones de estudiantes a 2 preguntas sobre ecuaciones; en la sesión sobre obstáculos didácticos se analizaron soluciones de estudiantes a una pregunta sobre ecuación cúbica y algunos aspectos geométricos de un problema de física sobre plano inclinado y en la sesión sobre misconcepciones se analizaron las respuestas de estudiantes a una pregunta sobre el sucesivo de un número racional y sobre la interpretación de cuadrado como rectángulo.

Se realizaron 4 reuniones con cada uno de los grupos focales (1, 2 y 3) y 2 reuniones con el grupo focal 4. Las sesiones se registraron en video y posteriormente se transcribieron en su totalidad para su organización y análisis. Las transcripciones se hicieron de acuerdo con el criterio conversacional consistente en la división del texto en función de las declaraciones o turno de palabra de los participantes (Rodríguez, Gil & García, 1996, citados en Rodríguez, Lorenzo, & Herrera, 2005, p. 141). Se seleccionaron fragmentos de las declaraciones de cada participante para caracterizar concepciones y sus cambios.

Para analizar la información se siguió un proceso de categorización inductivo-deductivo (Navarrete, 2011): por cada participante, para cada sesión y para cada grupo focal. Se establecieron 5 categorías a priori para el análisis de las concepciones de los participantes (identificación del error, explicación del error, disposición a incorporar los referentes de la Didáctica de la matemática en sus análisis, concepciones sobre las causas de los errores y otros factores que influyen en los análisis de los errores). La elección de las categorías a priori se fundamenta en la revisión bibliográfica de la literatura específica sobre los análisis de errores (Gagatsis & Kyriakides, 2000; Legutko, 2008; Peng & Luo, 2009; Brown & Skow, 2016; Muñoz Lira, 2020; Aguerrea, Solís, & Huincahue, 2022). Se establecieron además algunas subcategorías emergentes de los datos que dieron lugar a descriptores específicos de cada categoría; además el proceso de codificación y categorización se revisó continua y detalladamente.

Para establecer y caracterizar cambios en las concepciones de los profesores se utilizó un criterio de comparación usado y sugerido por autores como Alsina (2012) y D'Amore y Fandiño Pinilla (2004), quienes coinciden en hacer comparaciones de las concepciones de los participantes en sus respectivas investigaciones antes y después de ciertos programas de formación. En la investigación doctoral se hizo una comparación detallada antes y después de cada una de las reuniones en cada grupo focal. Además, para analizar las interacciones entre los diferentes participantes de cada grupo focal se utilizó la caracterización de Cooney, Shealy y Arvold (1998) en sus investigaciones sobre las estructuras de las creencias de docentes en formación. En esta caracterización las personas pueden considerarse como aislacionistas, idealistas ingenuos, conexionistas ingenuos y conexionistas reflexivos.

Resultados y análisis

Un ejemplo de análisis: el caso del participante Manuel

Presentamos a continuación como ejemplo, parte de los análisis realizados para establecer cambios en las concepciones el caso del participante Manuel¹. Se presenta aquí únicamente la caracterización de dos las categorías de análisis.² Se describe también una caracterización de la influencia de las interacciones con los otros participantes en las concepciones de Manuel. En las socializaciones previas a las presentaciones de los referentes teóricos por parte del investigador de las sesiones 1, 2 y 3, Manuel atribuye parte de las causas de los errores a hechos que se distancian de los referentes de la Educación matemática; según Manuel, los estudiantes se vuelven “mecánicos”, no analizan y sólo quieren aplicar fórmulas. También atribuye las causas de los errores a actitudes del estudiante como pereza de los estudiantes o que los estudiantes “quieren todo hecho” como lo muestra el siguiente ejemplo tomado de su participación en la sesión 1:

30:22 Es decir, a los estudiantes realmente, ¡les da pereza!, es decir, ellos quieren toda la parte de fácil, entonces a ellos les cuesta; el estudiante que es dedicado, lo vemos en la Universidad, que es estudiado, que, que pregunta, que llega, que hace, ese estudiante la capta, capta la idea y, y, y arranca. Pero los estudiantes no, ese facilismo creo que es el que, en buena parte, una muy buena parte, es lo que hace que los estudiantes caigan en ese error y no se apropien de los conceptos y de los conocimientos.

En la sesión 4, Manuel atribuye los errores analizados en esa sesión a debilidades en la formación previa de los estudiantes. Al mismo tiempo, Manuel identifica características de algunos de los referentes teóricos estudiados en las diferentes sesiones (incluso antes de ser presentados por el investigador) como posibles explicaciones de las causas de los errores; por ejemplo reconoce lo problemático que puede ser el infinito para los estudiantes (obstáculo epistemológico) o el uso inapropiado de la expresión “pasar a” en la resolución de ecuaciones (obstáculo didáctico).

Ahora bien, un aspecto específico a caracterizar fue la forma en que los participantes incorporaban o no los referentes teóricos estudiados a sus análisis sobre las causas de los errores.³ En la sesión 1, Manuel no incorpora el obstáculo epistemológico como recurso para analizar las posibles causas de las tareas analizadas en esa sesión. En las sesiones 2 y 3 puede observarse que Manuel intenta incorporar los referentes teóricos a sus análisis sobre las causas de los errores o los reconoce como pertinentes para tales análisis. En la sesión 4, Manuel recurre directamente a la misconcepción para sustentar sus argumentos sobre las causas de los errores. El siguiente ejemplo, tomado de la sesión 2 expresa la interpretación de Manuel sobre la conversión, reconociendo la dificultad que genera a los estudiantes:

27:35 Pues profe, yo considero que es que ahí es precisamente donde está el meollo del asunto, es decir, ¿de por qué a los estudiantes se les dificulta tanto las situaciones matemáticas?, porque eh [...], yo llamo, él lo dice convertir, yo a ellos, a los muchachos les digo el traducir, pase de lenguaje normal a lenguaje matemático, y eso es muy difícil para ellos, es demasiado complicado porque el nivel de abstracción,

¹ Se usan pseudónimos para identificar a los participantes.

² Debido a las limitaciones de espacio en este documento. Para una revisión detallada, se sugiere al lector revisar Ramírez (2024).

³ Este aspecto es el que sustenta una de las categorías a priori definidas para el análisis: “Disposición a incorporar referentes teóricos de la Educación matemática en los análisis sobre las causas de los errores.”

Durante las socializaciones, Manuel coincidió con sus colegas del grupo focal 3 en varios argumentos. Por ejemplo, en la sesión 3, respecto al obstáculo didáctico, Manuel, Hernán y José concordaron en que los profesores emplean múltiples estrategias para lograr la comprensión de los estudiantes; a continuación, parte de la intervención de Manuel:

05:42 Yo estoy de acuerdo con lo que decían José y Hernán, que uno como profesor busca muchos caminos, muchos métodos para explicar y hacerse entender, o sea, quiere transmitir lo que, de la mejor manera lo que uno quiere hacer.

En otras ocasiones, Manuel adoptó posturas divergentes de los demás participantes. Por ejemplo, en la tarea sobre el sucesivo (sesión 4, misconcepción), su análisis se focalizó en lo que ocurre en el conjunto de los números naturales, a diferencia de sus colegas que cuestionaron la pertinencia de la tarea:

06:13 Bueno, profe yo si partí del supuesto de los números naturales porque generalmente cuando, cuando se generaron los números naturales pues apareció, apareció un siguiente, apareció un anterior, un orden que se le fue dando ese orden establecido, y ahí es muy claro hablar del siguiente, pero si, si de pronto nosotros hacemos el ejercicio en cualquier, con cualquier persona, inclusive cualquier estudiante y le preguntamos por un estudiante generalmente intrínsecamente uno da una respuesta desde los naturales, no haciendo las aclaraciones que tienen toda la razón tanto con el profe José como el profe Hernán del contexto.

De los participantes de este grupo focal, Manuel es el más crítico frente a los argumentos de los otros participantes: aunque puede incorporar y coincidir en varias de las ideas que ellos expresan, también toma distancia y argumenta el por qué en otros casos. En la clasificación de Cooney, Shealvy y Arvold (1998) corresponde a un conexionista reflexivo.

A lo largo de las sesiones, los participantes incorporaron en diversos grados los referentes teóricos presentados, identificándose tres tendencias con fronteras difusas. El grado 1 denota nula o poca disposición a incorporar referentes de la Educación Matemática y escaso cambio en sus concepciones sobre las causas de los errores. El grado 2 exhibe indicios de cambio conceptual y un intento por integrar dichos referentes en sus análisis. Finalmente, el grado 3 refleja una incorporación efectiva de los referentes y fuertes indicios de cambio en sus concepciones. A continuación, se muestra la caracterización de estos grados para los participantes del estudio.

Grado 1: nula o poca disposición a incorporar referentes de la Educación matemática y al cambio en sus concepciones

Los participantes Fabio, Andrés y Enrique (del grupo focal 4) coinciden en varios de sus argumentos con características de los referentes teóricos (obstáculos didácticos, transformaciones semióticas y misconcepciones). Fabio reconoce la resistencia del error a ser superado, pero no incorpora estas herramientas a sus análisis, mientras que Andrés y Enrique enfatizan la responsabilidad de los profesores y los problemas derivados del uso repetido de las mismas representaciones, especialmente en el análisis de las tareas. Aunque todos muestran coincidencia con los referentes teóricos, no se observan cambios significativos en sus concepciones sobre las causas de los errores.

Aunque Nicolás (grupo focal 2) identifica causas de errores que coinciden parcialmente con los referentes teóricos, sus argumentos se centran en aspectos generales de la enseñanza y el aprendizaje, sin profundizar en las causas específicas. Si bien intenta incorporar los referentes, no hay un cambio significativo en sus concepciones, aunque reconoce su potencial y la necesidad de profundización. Por otro lado, Miguel (grupo focal 2) critica factores de enseñanza que dificultan el aprendizaje matemático, algunos alineados con obstáculos didácticos. Sin embargo, se resiste a incorporar otros referentes de la Educación Matemática, prefiriendo mantener su postura inicial, como en la cuarta sesión en que desestima la pertinencia de la misconcepción para explicar las causas de los errores analizados.

Grado 2: participantes que intentan incorporar referentes de la Educación matemática y algunos indicios de cambio en las concepciones

Ernesto y César (grupo focal 1) y José y Hernán (grupo focal 3), concuerdan en que el error es inherente al aprendizaje matemático, influenciado por la enseñanza, la naturaleza de los objetos matemáticos y sus representaciones semióticas. Ernesto y César resaltan la importancia de ahondar en las causas de los errores; César, aunque crítico con algunos referentes teóricos, reconoce el potencial del error como oportunidad de aprendizaje. José valora los referentes teóricos de la Educación Matemática, especialmente las misconcepciones, y toma conciencia de la necesidad de profundizar en ellos para una mejor comprensión de los errores. Hernán incorpora algunos referentes a sus análisis, proponiendo estrategias didácticas para superar errores, si bien enfatiza la prioridad de las soluciones sobre las causas.

Grado 3: incorporan los referentes de la Educación matemática y muestran indicios de cambio en sus concepciones

Carlos (grupo focal 1) muestra una creciente disposición a incorporar los referentes teóricos de la Educación Matemática, viendo el error como una oportunidad de aprendizaje. En su análisis de las causas de los errores, enfatiza la importancia de los factores emocionales y actitudinales del estudiante. Diego (grupo focal 2) analiza las causas de los errores considerando factores actitudinales, institucionales y conceptuales. Sus explicaciones se alinean parcialmente con los referentes teóricos, pero también incluye otros factores y sugiere soluciones. Aunque los incorpora, considera que los referentes son insuficientes para explicar exhaustivamente las causas, manteniendo una postura crítica al reconocer que las explicaciones son parciales. Manuel (grupo focal 3) incorpora los referentes teóricos (obstáculo epistemológico, transformaciones semióticas, obstáculos didácticos) en sus análisis, aportando ejemplos y discutiendo aspectos de las tareas y la enseñanza para superar los errores, además de sugerir estrategias de apoyo. Reconoce la importancia de los referentes teóricos para entender las causas de los errores, pero es consciente de la necesidad de profundizar en su estudio para una correcta aplicación.

Conclusiones

La inclusión de referentes de la Educación Matemática como herramientas críticas para analizar las causas de los errores generó ejes de discusión y socialización para todos los participantes, lo que permitió la emergencia de diversas posturas sobre su pertinencia. Los participantes, en mayor o menor medida, reconocieron la importancia del abordaje académico en

la discusión sobre las causas de los errores, independientemente de si concordaban o no con su relevancia explicativa.

Puede afirmarse que hay un cambio en la concepción de la mayoría los participantes de los grupos focales 1, 2 y 3 en el sentido de considerar, después de participar en el estudio, que los errores pueden tener causas que merecen un tratamiento académico y que no se deben simplemente a cuestiones como “pereza de los estudiantes” o “factores actitudinales.” Los participantes del Grado 1 mostraron la menor disposición a incorporar los referentes de la Educación Matemática para analizar las causas de los errores, a pesar de reconocer la importancia de su estudio, con escasas evidencias de cambio en sus concepciones. Los del Grado 2, aunque sin un cambio radical en sus concepciones, tuvieron mayor disposición a integrar y profundizar en los referentes, incluso si manifestaron una postura crítica. Finalmente, los participantes del Grado 3 evidenciaron una mayor disposición a incorporar los referentes teóricos en sus análisis de las causas de los errores.

Por otra parte, no puede afirmarse que existan cambios radicales en las concepciones de los profesores sobre la forma de analizar las causas de los errores; más bien existen ciertos indicios de cambio graduales y diferenciados. Que un referente teórico como el obstáculo epistemológico pueda resultar novedoso y útil para explicar ciertas causas de errores no implica que los participantes lo usen en sus análisis. Más bien, hay evidencias de la incorporación, en mayor o menor grado, del referencial teórico en los análisis de los participantes y un reconocimiento de varios de ellos de la necesidad de profundizar en el estudio de estos referentes para poder usarlos funcionalmente en sus análisis de las causas de los errores de sus estudiantes.

Los participantes en general se muestran dispuestos a reflexionar y discutir los argumentos de los otros colegas contribuyendo con sus propias ideas a posicionarse en favor de un argumento o para controvertir o matizar las declaraciones de los otros docentes. Puede afirmarse que hay una fuerte tendencia conexional reflexiva (Cooney, Shealvy y Arvold, 1998) de los participantes respecto a la posibilidad de incorporar ideas de los otros docentes a sus análisis.

Este estudio es consistente con investigaciones sobre la formación de profesores y sobre las causas de los errores, que además se sustentan en referentes teóricos similares, como las realizadas por Ferretti, Gambini y Spagnolo (2024) y Dello y Santi (2025).

Referencias y bibliografía

- Aguerre, M., Solís, M. E., & Huincahue, J. (2022). Errores matemáticos persistentes al ingresar en la formación inicial de profesores de matemática: el caso de la linealidad. *Uniciencia*, 36(1), 49-65.
- Alsina, A. (2012). Proceso de transformación de las concepciones del Profesorado sobre la resolución de Problemas matemáticos. *Enseñanza de las Ciencias. Revista de investigación y experiencias didácticas*, 30(3), 71-88.
- Alsina, Á., Bosch, E., & López Dalmau, M. (2023). Situaciones de aprendizaje para desarrollar el sentido socioafectivo: Contribuyendo a formar personas desde la educación matemática. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*, 2023, vol. 115, p. 143-160.
- Asenova, M., Del Zozzo, A., & Santi, G. (2023). Unfolding Teachers' Interpretative Knowledge into Semiotic Interpretative Knowledge to Understand and Improve Mathematical Learning in an Inclusive Perspective. *Education Sciences*, 13(1), 65.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching what makes it special? *Journal of teacher education*, 59(5), 389-407.
- Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, 7(3), 2-8.

- Brousseau, G. (1976). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. En Wanhamme, W., & Wanhamme, J. (Eds.), *La problématique et l'enseignement des mathématiques*, Actes de la XXVIIIème rencontre CIEAEM, Louvain la Neuve, 5-12 août 1976.
- Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en Mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 4(2), 164–198.
- Brown, J., & Skow, K. (2016). Mathematics: Identifying and addressing student errors. *The Iris Center*, 31.
- Cooney, T. J., Shealy, B. E., & Arvold, B. (1998). Conceptualizing belief structures of preservice secondary mathematics teachers. *Journal for research in mathematics education*, 29(3), 306-333.
- D'Amore, B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.
- D'Amore, B. (2004). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales*, (60), 413-434.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2004). Cambios de convicciones en futuros profesores de Matemáticas de la Escuela Secundaria Superior. *Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación matemática Thales*, (58), 23-44.
- D'Amore, B., & Fandiño Pinilla, M. I. (2012). *El número cero: aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número mas misterioso*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- D'Amore, B., & Sbaragli, S. (2005). Analisi semántica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*, 2, 139-163.
- D'Amore, B., Fandiño Pinilla, M. I., Marazzani, I., & Sbaragli, S. (2010). *La didáctica y la dificultad en Matemática: análisis de situaciones con falta de aprendizaje*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Duval, R. (2006). Un tema crucial en la Educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 9(1), 143-168.
- Dello Iacono, U., & Santi, G. (2025). Mathematics teacher education in a computer-based environment: joint labor using Moodle Quick Chat plugin. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1-18.
- Economou, P. (1995). How teachers of mathematics confront students' errors. En Philippou, G., Christou, C., & Kakas, A. (Eds.), *Proceedings of the Second Panhellenic Conference on Mathematics Education and the Informatics in Education*, (pp. 383–400). Nicosia: Sighroni Epoxi.
- Fandiño Pinilla, M. I. (2010). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática: evaluar e intervenir en forma miranda y específica*. Bogotá: Editorial Magisterio.
- Ferretti, F., Gambini, A., & Spagnolo, C. (2024). Management of semiotic representations in mathematics: quantifications and new characterizations. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 12(1), 11-20.
- Gagatsis, A., & Kyriakides, L. (2000). Teachers' attitudes towards their pupils' mathematical errors. *Educational Research and Evaluation*, 6(1), 24-58.
- García, L., Azcárate, C., & Moreno, M. (2006). Creencias, concepciones y conocimiento profesional de profesores que enseñan Cálculo diferencial a estudiantes de ciencias económicas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, 9(1), 85-116.
- Hamukwaya, S. T., & Haser, Ç. (2021). "It does not mean that they cannot do mathematics": Beliefs about mathematics learning difficulties. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(1), em0622.
- Holm, J., & Kajander, A. (2012). Interconnections of knowledge and beliefs in teaching mathematics. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 12, 7-21.
- Lerman, S. (1999). Research on mathematics teachers' beliefs: A situated perspective. En: Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.), *Proceedings of the Workshop in Oberwolfach: Mathematical Beliefs and their Impact on Teaching and Learning of Mathematics* (pp.66-72). Duisburg, Alemania: Gerhard Mercator Universität
- Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En Ponte, J. P., Monteiro, C., Maia, M., Serrazina, L., & Loureiro, C. (Eds.), *Desenvolvimento profissional dos professores de matemática. Que formação?* (pp. 47-82). Lisboa, Portugal: Secção de Educação Matemática. SPCE.
- Legutko, M. (2008). An analysis of students' mathematical errors in the teaching research process. En Czarnocha, B. (Ed.), *Handbook for mathematics teaching: Teacher experiment. A tool for research* (pp. 141–152). Rzeszów: University of Rzeszów.
- Moreno, M., & Azcárate, C. (2003). Concepciones y creencias de los profesores universitarios de matemática acerca de la enseñanza de las Ecuaciones diferenciales. *Enseñanza de las Ciencias: Revista de Investigación y Experiencias Didácticas*, 21(2), 265-280.

- Morgan, D. L. (1998). *The focus group guidebook*. Thousand Oaks: Sage Publications.
- Muñoz Lira, M. (2020). Análisis de las prácticas declaradas de retroalimentación en Matemáticas, en el contexto de la evaluación, por docentes chilenos. *Perspectiva Educacional*, 59(2), 111-135.
- Navarrete, J. M. (2011). Problemas centrales del análisis de datos cualitativos. *Revista latinoamericana de metodología de la investigación social*, (1), 47-60.
- Olson, J. R., & Singer, M. (1994). Examining teacher beliefs, reflective change, and the teaching of reading. *Literacy Research and Instruction*, 34(2), 97-110.
- Parra, F. V., & Santos, S. A. G. (2016). El error como oportunidad para reflexionar y tomar decisiones asertivas en el aprendizaje de las matemáticas. *Revista mexicana de bachillerato a distancia*, 8(16), 34-42.
- Pehkonen, E. (2001). A hidden regulating factor in mathematics classrooms: mathematics-related beliefs. En Ahtee, M., Björkqvist, O., Pehkonen, E., & Vatanen, V. (Eds.), *Research on mathematics and science education. From beliefs to cognition, from problem solving to understanding* (pp. 11-37). Jyväskylä, Finland: Institute for Educational Research, University of Jyväskylä.
- Pehkonen, E. (2006). What do we know about teacher change in mathematics? En Häggbloom, L., Burman, L., & Røj-Lindberg, A.-S. (Eds.), *Kunskapens och lärandets villkor. Festschrift tillägnad professor Ole Björkqvist Vol 1*. (pp. 77-87). Vasa, Finland: Åbo Akademi, Pedagogiska fakulteten, Specialutgåva.
- Peng, A., & Luo, Z. (2009). A framework for examining mathematics teacher knowledge as used in error analysis. *For the learning of mathematics*, 29(3), 22-25.
- Ramírez, H. (2013). *Tipología de errores y dificultades de aprendizaje de la Matemática de estudiantes de primer curso de Matemática. Análisis epistemológico, semiótico y didáctico*. (Tesis de Maestría). Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.
- Ramírez, H. (2020). Explicaciones de profesores universitarios de matemática sobre las posibles causas de algunos errores de sus estudiantes. *La matematica e la sua didattica*. 28(1), 87-105.
- Ramírez, H. (2024). *Posibles cambios de concepciones de profesores universitarios sobre las causas de los errores (de sus estudiantes) en el aprendizaje de la matemática*. (Tesis de Doctorado). Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá, Colombia.
- Rodríguez, C., Lorenzo, O., & Herrera, L. (2005). Teoría y práctica del análisis de datos cualitativos. Proceso general y criterios de calidad. *Revista Internacional de Ciencias Sociales y Humanidades, SOCIOTAM*, 15(2), 133-154.
- Sparks, D. (1999). Real life view: Here's what a rule learning community looks like. *Journal of Staff Development*, 20(4), pp. 53-57.
- Sulastri, R., Suryadi, D., Prabawanto, S., & Cahya, E. (2022). Epistemological Obstacles on Limit and Functions Concepts: A Phenomenological Study in Online Learning. *Mathematics teaching research journal*, 14(5), 84-106.
- Wilson, M., & Cooney, T. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. En: Leder, G., Pehkonen, E., & Törner, G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (127-148). Dordrecht – Boston – Londres: Kluwer Ac. P.



Conocimiento del Profesorado de Básica Primaria para la Enseñanza de la Probabilidad

David Fernando **Méndez** Vargas
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia

david.mendez@udea.edu.co

Zaida Margot **Santa-Ramírez**
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia

zaida.santa@udea.edu.co

Carlos Mario **Jaramillo** López
Facultad de Educación, Universidad de Antioquia
Colombia

carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

Esta ponencia expone una revisión y análisis de literatura, enmarcada en una investigación doctoral que se adelanta en la Universidad de Antioquia, Colombia, cuyo objetivo es examinar estudios que permitan una visión panorámica de tendencias y oportunidades en la investigación relacionada con el campo de la probabilidad en educación primaria. Para ello, se seleccionaron documentos comprendidos en el período 2016-2024. En el procesamiento de la información se utilizó el software Atlas.ti, versión 24, y una plantilla en Excel de elaboración propia que facilitó el análisis de los datos. En los resultados se identifican tres líneas relacionadas con la formación de profesores en el campo probabilístico: conocimiento didáctico del profesorado, enseñanza de la probabilidad y conocimiento probabilístico del profesor de primaria; estas líneas sugieren la necesidad de generar espacios académicos de formación continua que integren tanto conocimientos disciplinares como didácticos para fortalecer el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad.

Palabras clave: Conocimiento matemático; Educación primaria; Enseñanza de la probabilidad; Formación de profesores; Revisión de literatura.

Introducción

Las dinámicas actuales de la sociedad han impulsado el uso de la probabilidad en un mundo donde predominan las apuestas deportivas, las loterías o los juegos de azar; la sensación de incertidumbre obliga a los ciudadanos a contar con unos conocimientos mínimos que les permita tomar postura en situaciones particulares. Al respecto, Franklin et al. (2007) expresan que “la probabilidad es un intento de cuantificar la incertidumbre” (p. 88), pues las personas podrían contar con información que no solo puede ser aplicable en contextos abstractos, sino que se constituye en un conocimiento que es utilizado en el diario vivir. Así mismo, Vergara et al. (2020) mencionan que la probabilidad suministra herramientas para modelar y cuantificar la incertidumbre y que, dependiendo del contexto en que se analice, esta puede ser útil en la toma de decisiones. Con respecto a este escenario, Rodríguez-Alveal et al. (2022) sugieren prestar atención a las habilidades de alfabetización y de pensamiento probabilístico que las personas deberían desarrollar para facilitarle la toma de decisiones.

Investigaciones como las de Batanero et al. (2021), Perea (2024) y Pineda et al. (2024) expresan que el conocimiento probabilístico se asocia con el conocimiento matemático y didáctico que usan los profesores para enseñar probabilidad. Mientras que, para Maanan y de Haro (2012), este conocimiento implica la habilidad de comparar la probabilidad de un evento con otro, utilizando un lenguaje adecuado en el campo de la probabilidad; así mismo, Bryant y Nunes (2012) sostienen que el pensamiento probabilístico es un conocimiento complejo que implica el desarrollo de cuatro habilidades cognitivas, a saber: (1) comprender la naturaleza y las consecuencias de lo aleatorio; (2) formar y categorizar el espacio muestral; (3) comparar y cuantificar probabilidades; (4) comprender correlaciones. Es decir, se puede apreciar que el pensamiento probabilístico se integra al conocimiento probabilístico, en tanto que ambos abarcan las habilidades cognitivas complejas mencionadas.

Estudios como los de Fúneme et al. (2024), Vásquez y Cabrera (2022) y Alsina (2021) resaltan la importancia de la enseñanza de la probabilidad en los diseños curriculares de la educación básica primaria; estos trabajos subrayan que su inclusión responde a la necesidad de fomentar un aprendizaje basado en metodologías experimentales y vivenciales, permitiendo que los estudiantes construyan nociones de probabilidad a partir de los primeros años escolares. En este mismo orden, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, 2000), al igual que el Ministerio de Educación y Ciencia de España (MEC, 1992), establecen la importancia de incluir el estudio de la probabilidad en edades tempranas. Para el caso de Colombia, el Ministerio de Educación Nacional - MEN en los Derechos Básicos de Aprendizaje -DBA-, versión 2.0 (MEN, 2016), resalta la importancia del pensamiento aleatorio; no obstante, se puede apreciar que establecer el papel de la probabilidad en el currículo escolar no es suficiente, pues la situación en el aula de clase no refleja el mismo compromiso.

Metodología

Para la revisión y el análisis de literatura se ha considerado la mirada de Velásquez (2015), quien manifiesta que “la revisión sistemática de literatura es un mecanismo para recolectar, organizar, evaluar y sintetizar toda la evidencia disponible respecto a un fenómeno de interés” (p. 2); para ello, se establece como objeto de búsqueda estudios cuyo foco de interés sean temáticas

relacionadas con el conocimiento del profesorado de básica primaria para la enseñanza de la probabilidad. Posteriormente, se procedió a definir el protocolo de exploración de los datos, el cual consistió en escoger las bases de datos, definir las palabras y frases clave, determinar los criterios de inclusión y exclusión, establecer ecuaciones de búsqueda, entre otros; estos criterios pueden garantizar la calidad de los documentos elegidos (Velásquez, 2015).

Conforme a lo expuesto, las bases de datos que hicieron parte de la búsqueda fueron las siguientes: Scopus, Scielo, Dialnet, Google Académico, Science Direct y Redalyc, las cuales proporcionaron documentos derivados de estudios en estrecha relación con la temática en cuestión. Igualmente, se establecieron criterios de inclusión y exclusión, tal como se muestra en la tabla 1.

Tabla 1
Criterios de inclusión y exclusión

Criterios de inclusión	Criterios de exclusión
Lenguaje: inglés, portugués y español.	Estudios desarrollados con profesores de secundaria.
Estudios comprendidos en el periodo 2016-2024.	Validación de instrumentos evaluativos de probabilidad.
Estudios que abordan la enseñanza de la probabilidad con profesores en ejercicio.	Análisis de libros de texto de estadística y probabilidad.
Documentos que hayan surtido la revisión por pares.	Estudios desarrollados con futuros profesores de primaria.

Esta revisión se centró en responder la pregunta ¿cuáles son las tendencias y oportunidades en la investigación relacionada con el campo de la probabilidad en educación básica primaria? La búsqueda se realizó de diferentes maneras; inicialmente, con palabras unidas por medio de operadores booleanos (and, or, o, +, *); también se utilizó el método de rastreo bibliográfico propuesto por Velásquez (2014), a partir de palabras clave como probabilidad, conocimiento probabilístico, profesor de primaria, didáctica, enseñanza.

Para la selección y el análisis de la información se utilizó el software Atlas.ti, versión 24, mediante los componentes de codificación axial, concurrencia de palabras y redes de conceptos; se seleccionaron 47 de los 192 documentos iniciales, los cuales están en estrecha relación con el objeto de estudio. Posteriormente, se procedió a lecturas críticas, como lo expresa Velásquez (2015), lo que permitió establecer códigos emergentes mediados por codificación axial que, de acuerdo con el nivel de concurrencia, posibilitó el surgimiento de tres líneas.

Resultados

Los hallazgos sobre la revisión de literatura dejan como resultado algunas consideraciones importantes para tener en cuenta. Se identificaron tres líneas relacionadas con el conocimiento del profesor de primaria asociado a la probabilidad que están en correlación con su formación. Estas son: (1) conocimiento didáctico del profesorado; (2) conocimiento probabilístico del profesor de primaria; (3) enseñanza de la probabilidad. La figura 1 muestra esta relación.

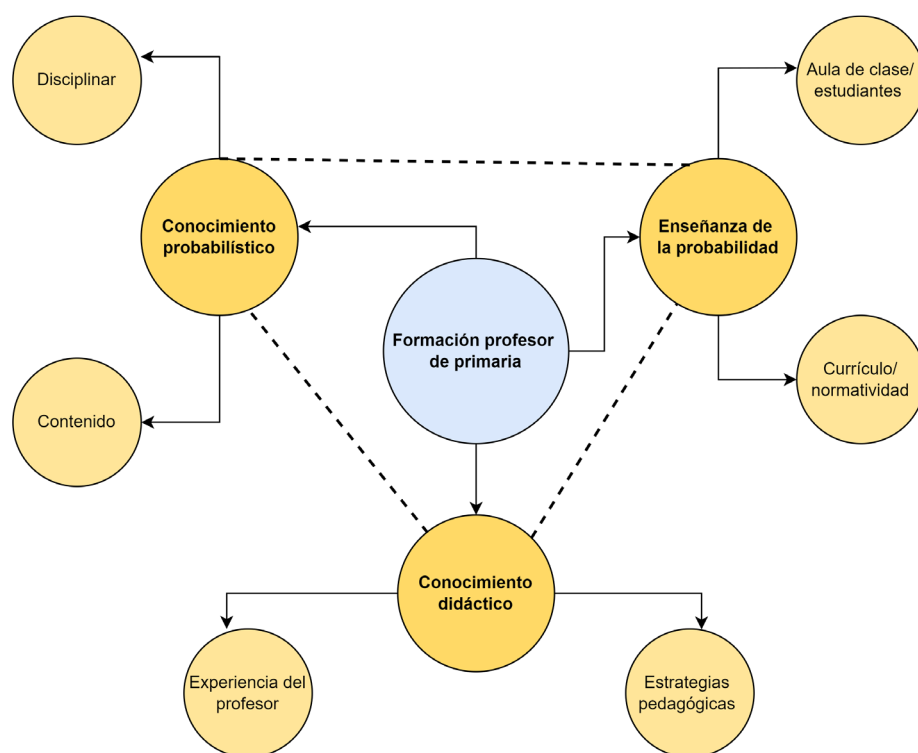


Figura 1. Relación de líneas en cuanto a la formación del profesor de primaria.

Conocimiento didáctico del profesorado

Autores como Rodríguez-Alveal et al. (2018) y Vásquez y Alsina (2019) hacen mención al conocimiento didáctico del profesor expuesto por Shulman (1987), señalando que fue este autor quien, en principio, expuso la necesidad de que un profesor pueda contar con diversos tipos de conocimientos para afrontar la enseñanza. Shulman (1987) presenta el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) como una composición única de conocimientos, habilidades y creencias que los profesores deben emplear en su práctica educativa. Sin embargo, el marco referencial de mayor uso para analizar el conocimiento didáctico de los profesores asociado a la probabilidad ha sido el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas (CCDM) de Godino et al. (2017), en el que se reconoce que las matemáticas desarrollan la capacidad de pensar de manera reflexiva, analítica y concluyente, por lo que se espera que los docentes estén en la capacidad de orientar, efectivamente, estos conocimientos, asumiendo que la enseñanza de las matemáticas es considerada una actividad social.

En menor proporción, autores como Pinheiro et al. (2019) reconocen el modelo del Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) expuesto por Ponte (2012); este autor examina diversos aspectos que inciden en el desarrollo de la labor docente, centrando su atención en el que está directamente relacionado con la práctica del profesor, que es el escenario donde se llevan a cabo los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Conocimiento probabilístico del profesor de primaria

Para acercarse al conocimiento probabilístico de los docentes de primaria, la literatura reporta que este se analiza a partir de estudios que incluyen cuestionarios con preguntas abiertas y cerradas, y resolución de situaciones problemas, también llamadas tareas y cuestionarios mixtos (Vásquez y Alsina, 2021). El estudio desarrollado por Fernandes et al. (2016) evaluó el conocimiento en probabilidad de 59 docentes mediante la resolución de tres situaciones basadas en la extracción de bolas blancas y negras de un saco sin reposición. Vásquez y Alsina (2015) diseñaron un cuestionario CDM-Probabilidad formado por siete ítems de elaboración propia, con el fin de obtener un significado de referencia sobre el concepto de probabilidad.

El estudio de Pinheiro et al. (2019) presenta un análisis de un proceso de formación con 32 profesores en ejercicio de básica primaria, en un periodo de seis meses, cuyo objetivo fue explorar, mediante actividades variadas, conceptos básicos relacionados con la enseñanza de la probabilidad, como nociones de aleatoriedad, azar, espacio muestral, entre otros. Por otro lado, el estudio de Rodríguez-Alveal et al. (2022) caracterizó las habilidades de alfabetización y pensamiento probabilístico con una muestra de 26 profesores en ejercicio y 29 en formación, ambos grupos pertenecientes a la educación básica primaria; para ello, se aplicó un instrumento con dos situaciones problemas afines a juegos no determinísticos.

Los resultados muestran que el conocimiento probabilístico del profesorado de educación básica primaria es escaso, en tanto que el promedio de respuestas correctas no logró superar el 9,9%, evidenciando que los profesores presentan dificultades en conceptos como espacio muestral, eventos equiprobables, permutación, combinación o probabilidad. Además, la evidencia señala que se dejan llevar por intuiciones, más que por el conocimiento probabilístico.

Enseñanza de la probabilidad

El estudio realizado por Burgos et al. (2022) analizó la enseñanza la probabilidad en primaria hasta el grado cuarto, en 57 países, a partir de la información curricular contemplada en la normatividad de cada país; para ello, tomaron como base el estudio internacional de TIMSS (2015); luego, compararon esta información con la encontrada en Colombia. Los resultados mostraron que, mientras en otros países se abordan temas como combinaciones, permutaciones, diagramas de Venn, criterios de probabilidad, entre otros, en Colombia se estudian experimentos aleatorios y no aleatorios, espacio muestral, uso de representaciones como gráficos (diagramas), y listados para enumerar los posibles resultados que se relacionan con un experimento aleatorio. Lo anterior, permite ubicar a Colombia como uno de los países donde menos se abordan temas probabilísticos.

En este mismo sentido, Batanero (2016) sostiene que países como Uruguay y España incluyen la enseñanza de la probabilidad desde los primeros niveles escolares, mientras que, en otros, se retrasa, incluso, a la educación secundaria. Batanero (2016) manifiesta que un niño puede desarrollar intuición en situaciones asociadas al azar, la aleatoriedad y el razonamiento combinatorio, desde los primeros años de escolaridad, pero que, en gran medida, depende del compromiso y el conocimiento del profesor, pues este asume un papel importante en su enseñanza, estando esto completamente ligado a su formación disciplinar. Otro aspecto estudiado

por Vásquez y Pincheira (2021) son los procesos matemáticos que gestiona el profesor al interior del aula de clase al enseñar el concepto de probabilidad; mediante un estudio de caso lograron evidenciar que no es suficiente con que un profesor posea un alto conocimiento del contenido matemático a enseñar, sino que, además, debe contar con un vasto conocimiento sobre cómo se desarrolla y de qué forma se puede utilizar en diferentes contextos. Estrada et al. (2018) diseñaron un cuestionario de 28 ítems para explorar las actitudes de los profesores de primaria con respecto al concepto de probabilidad; una vez diseñado y validado el instrumento, fue aplicado a 232 profesores; este estudio evidenció que los profesores muestran una actitud más positiva hacia la enseñanza de la probabilidad que de la estadística, como también un interés por introducir la probabilidad en las aulas escolares.

Alsina y Vásquez (2017) proporcionaron orientaciones y recursos para enseñar probabilidad en educación primaria, siguiendo un enfoque de enseñanza progresiva, cuyo objetivo era fomentar el desarrollo gradual de la alfabetización probabilística a través de la construcción de conocimiento matemático en situaciones significativas, la experimentación, la intuición y la capacidad para relacionar y abstraer conceptos. Esto sugiere la posibilidad de enseñar probabilidad en este nivel, sin embargo, está sujeta a la postura del profesor y a la capacidad que este tenga para orientar adecuadamente estos conceptos, lo que, de alguna manera, está ligado a su conocimiento sobre estos conceptos.

Conclusiones

Los resultados subrayan la importancia de desarrollar competencias probabilísticas en los estudiantes que permitan la toma de decisiones informadas en situaciones de incertidumbre (Vásquez et al., 2018). No obstante, los estudios revelan que existe una brecha entre este objetivo y la realidad del aula; de hecho, las dificultades identificadas en los profesores están estrechamente vinculadas con su formación; estos aspectos tanto disciplinares como didácticos constituyen una barrera para la implementación adecuada de la enseñanza de la probabilidad (Tizón-Escamilla et al., 2024). Esta situación se ve agravada por la escasez de espacios académicos de formación continua o, incluso, en la forma como estos son orientados para abordar estas necesidades.

La interrelación entre estos componentes sugiere que el conocimiento matemático asociado a la probabilidad está ligado a la formación del profesor, quien requiere un equilibrio entre el dominio del contenido matemático, las habilidades pedagógicas y la capacidad de adaptación al contexto educativo específico; es decir, es fundamental que el profesor logre interconectar estos aspectos entre sí, destacando la naturaleza dinámica y recíproca del proceso formativo. Lo anterior indica la necesidad de buscar alternativas que posibiliten a los profesores fortalecer el conocimiento matemático para la enseñanza de la probabilidad. Si bien la literatura reporta dificultades en aspectos disciplinares, didácticos o de enseñanza, pocos se centran en cómo abordar este tipo de problemas.

En este sentido, el estudio doctoral en curso busca analizar la transformación del conocimiento matemático asociado a la probabilidad en profesores de educación básica primaria mediante tareas de formación; en particular, se espera aportar un mecanismo de formación in situ que permita la reflexión entre pares, de tal manera que los profesores generen sus propios

insumos, recursos, métodos, y puedan lograr orientar, de manera adecuada, este saber en el aula de clase.

Referencias y bibliografía

- Alonso-Castaño, M., Alonso, P., Mellone, M., y Rodríguez-Muñoz, LJ (2021). ¿Qué conocimientos matemáticos revelan los futuros profesores al crear y resolver un problema de probabilidad? *Matemáticas*, 9(24), 3300. <https://doi.org/10.3390/math9243300>.
- Alsina, Á. (2021). ¿Qué puede hacer el profesorado para mejorar la enseñanza de la Estadística y la Probabilidad? Recomendaciones esenciales desde el Enfoque de los Itinerarios de Enseñanza de las Matemática. *Números: revista de didáctica de las matemáticas*, 108, 49-74.
- Alsina, Á. y Vásquez O. C. (2017). Hacia una enseñanza eficaz de la estadística y la probabilidad en las primeras edades. *Didáctica y Educación*, 8(4), 199-212.
- Batanero, C. (2016). Posibilidades y retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. En SEMUR, Sociedad de Educación Matemática Uruguay (Ed.), *Actas del 6º Congreso Uruguayo de Educación Matemática* (pp. 24-31). SEMUR.
- Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R. y Valenzuela-Ruiz, S. M. (2021). Los futuros profesores de matemáticas comprenden la probabilidad clásica y frecuentista. *Matemáticas*, 9(19), 25-26. <https://doi.org/10.3390/math9192526>
- Batanero, C., Begué, N., Álvarez-Arroyo, R., & Valenzuela-Ruiz, S.M. (2021). Prospective Mathematics Teachers Understanding of Classical and Frequentist Probability. [Comprensión de la probabilidad clásica y frecuentista por parte de futuros profesores de matemáticas]. *Mathematics*. 9(19), 25-38. <https://doi.org/10.3390/math9192526>
- Bryant, P., y Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability. A literature review*. Nuffield Foundation.
- Burgos, M., López-Martín, D. M., Aguayo-Arriagada, C. G. y Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia*, 36(1), 588-611. <https://doi.org/10.15359/ru.36-1.38>
- Estrada, A., Batanero, C., & Díaz, C. (2018). Exploring teachers' attitudes towards probability and its teaching. [Explorando las actitudes del profesorado hacia la probabilidad y su enseñanza]. En C. Batanero and E. Chernoff (Eds.), *Teaching and learning stochastics: Advances in probability education research* (pp. 313-332). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-72871-1_18
- Fernandes, J. A., Gea, M. M. y Batanero, C. (2016). Conocimiento de futuros profesores de educación primaria sobre probabilidad en experiencias compuestas. *Investigación en Educación Matemática*, 14(1), 217-225. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i14.213>
- Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Schaeffer, R. (2007). *Guidelines for assessment and instruction in statistics education (GAISE), Report: A preK12 curriculum framework*. [Directrices para la evaluación y la instrucción en la educación estadística (GAISE), Informe: Un marco curricular preK12]. American Statistical Association.
- Fúneme Mateus, C. C., Jaimes Contreras, L. A. y Ramírez Leal, P. (2024). Análisis epistémico de un Libro de Texto: el caso del Objeto Matemático Probabilidad. *Revista Perspectivas*, 9(2), 6–16. <https://doi.org/10.22463/25909215.4565>.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Batanero, C. y Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 90-113.
- Koparan, T., y Rodríguez-Alveal, F. (2022). Pensamiento probabilístico en futuros docentes a partir del uso de TinkerPlots para simulación: Problema del sombrero. *Revista de Investigación Pedagógica*, 6(5), 1-16. <https://doi.org/10.33902/jpr.202217461>
- Maanan, N. M., y de Haro, J. J. O. (2012). Evaluación de conocimientos de profesores en formación sobre el juego equitativo. *Números*, 80, 103-117. <https://core.ac.uk/download/pdf/20343734.pdf>
- Ministerio de Educación Nacional (2016). Derechos Básicos de Aprendizaje. Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación y Ciencia de España. (1992). Decretos de Enseñanza Secundaria Obligatoria. MEC.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). Principles and standards for school mathematics. NCTM.
- Perea, C., de la Cruz. (2024). Reflexiones sobre la enseñanza del concepto de probabilidad. *Ciencia Latina Revista Científica Multidisciplinar*, 8(3), 8279-8288. https://doi.org/10.37811/cl_rcm.v8i3.12007

- Pineda Procel, J. H., Alban Alcívar, J. A., Cañar Cuenca, J. Y., Jiménez Ordóñez, H. D., y Quezada Yaguachi, D. A. (2024). Estrategia Pedagógica del Aprendizaje Basado en Proyectos en la Enseñanza de Estadística y Probabilidad. *SAGA: Revista Científica Multidisciplinar*, 1(4), p, 202-212.
- Pinheiro, M. G., Serrazina, M. D. y Silva, A. D. (2019). Desenvolvimento profissional de uma professora dos anos iniciais do ensino fundamental no tema probabilidade. [Desarrollo profesional de un docente de educación primaria en el tema de probabilidad]. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, (33), 1175-1194. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v33n65a10>
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In N. Planas (Ed.). *Teoría, Crítica y Práctica de La Educación Matemática* (83– 98). Graó.
- Rodríguez-Alveal, F., Díaz-Levicoy, D., y Aguerrea, M. (2022). Alfabetización y pensamiento probabilístico en docentes de matemática. *Uniciencia*, 36(1), 347-362. <http://dx.doi.org/10.15359/ru.36-1.22>.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57, 1-22.
- Tizón-Escamilla, N., Burgos, M. y Chaverri, J. (2024). Variación de problemas de probabilidad para promover aprendizaje. Una experiencia con docentes en formación inicial. En N. Adamuz-Povedano, E. Fernández-Ahumada, N. Climent y C. Jiménez-Gestal (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XXVII* (pp. 521-528). SEIEM.
- Vásquez Ortiz, C. A., Díaz-Levicoy, D., Coronata Ségure, C. y Alsina, Á. (2018). Alfabetización estadística y probabilística: primeros pasos para su desarrollo desde la Educación Infantil. *Cadernos Cenpec*, 8(1), 154-179. <https://doi.org/10.18676/cadernoscenpec.v8i1.393>
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2015). Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesorado de Educación primaria sobre Probabilidad: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 29, 681-703. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n52a13>
- Vásquez, C. y Alsina, Á. (2019). Conocimiento especializado del profesorado de educación básica para la enseñanza de la probabilidad. Profesorado. *Revista De Currículo y Formación Del Profesorado*, 23(1), 393–419. <https://doi.org/10.30827/profesorado.v23i1.9160>
- Vásquez, C. y Pincheira, N. (2021). ¿Qué procesos matemáticos se movilizan cuando se enseña probabilidad? Un estudio de caso en el aula de Educación Infantil. *Revista Sergipana de Matemática e Educação Matemática*, 6(2), 62-84. <https://doi.org/10.34179/revisem.v6i2.16007>
- Vásquez, C., y Cabrera, G. (2022). La estadística y la probabilidad en los currículos de matemáticas de educación infantil y primaria de seis países representativos en el campo. *Educación matemática*, 34(2), 245-274. <https://doi.org/10.24844/em3402.09>
- Velásquez, J. (2015). Una Guía Corta para Escribir Revisiones Sistemáticas de Literatura Parte 4. *DYNA*, 82(190), 9-12. <https://doi.org/10.15446/dyna.v82n190.49511>
- Vergara, A., Estrella, S., & Vidal-Szabó, P. (2020). Relaciones entre pensamiento proporcional y pensamiento probabilístico en situaciones de toma de decisiones. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 23(1), 7-36. <https://doi.org/10.12802/relime.20.2311>



El desarrollo del pensamiento proporcional en los niveles primario y medio inferior utilizando los registros semióticos de representación

Celia Elizabeth **Villagra**

Facultad Regional de Orán, Universidad Nacional de Salta
Argentina

villagracelia@gmail.com

Edith Marcela **Chorolque**

Facultad Regional de Orán, Universidad Nacional de Salta
Argentina

marcelachoroqlue@gmail.com

Isabel Hortensia **Miguez**

Facultad Regional de Orán, Universidad Nacional de Salta
Argentina

miguezisa26@gmail.com

Resumen

Es importante que los estudiantes desarrollen el pensamiento proporcional para que logren la comprensión conceptual de la proporcionalidad y así puedan desempeñarse con fluidez en su vida cotidiana. Pero también para que puedan construir conceptos más complejos en niveles educativos superiores, como por ejemplo las variaciones, la función lineal, las razones de cambios, las derivadas. Por eso es necesario generar un espacio de reflexión sobre la enseñanza y aprendizaje de la proporcionalidad en distintos niveles educativos, que permita poner en relevancia los diferentes significados de la proporcionalidad haciendo uso de los distintos registros semióticos, incluyendo las TIC y así repensar la articulación entre los niveles educativos Primario y Medio entorno a la enseñanza de la proporcionalidad.

Palabras clave: Proporcionalidad. Pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. Registros semióticos. Nivel Primario. Nivel Medio. Enseñanza de la Matemática. Articulación niveles.

Introducción

En general los estudiantes del nivel medio y los ingresantes al nivel superior muestran que tienen dificultades al resolver y comprender situaciones vinculadas a la proporcionalidad. como por ejemplo las variaciones, la función lineal, las razones de cambios, las derivadas entre otros conceptos. Para lograr que haya una buena comprensión conceptual de la proporcionalidad es preciso que el estudiante desarrolle el pensamiento proporcional, tal como lo señalan Piaget e Inhelder (1978) al expresar que para que el estudiante de nivel básico le dé sentido y significado a la proporcionalidad es fundamental desarrollar su pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo desde el nivel primario. Van Dooren, De Bock, Janssens y Verschaffel (2005) consideran que además el estudiante debe tener la habilidad de discriminar entre situaciones proporcionales y no proporcionales como un dominio del conocimiento del razonamiento proporcional.

Es por ello que consideramos importante generar un espacio para que los docentes de los niveles primario y medio reflexionen sobre los errores frecuentes de los estudiantes cuando resuelven situaciones de proporcionalidad, valoren la necesidad de promover el desarrollo del pensamiento proporcional en los estudiantes, reconozcan los diferentes significados de la proporcionalidad y propicien el uso de registros semióticos y la inclusión de recursos informáticos para potenciar las producciones matemáticas de los estudiantes.

Respecto a los distintos significados de la proporcionalidad, consideramos los aportes de Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone (2017) que distinguen tres tipos de significados: aritmético, proto – algebraico y algebraico funcional.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el Taller

Broitman et al. (2018) consideran que el estudio de la noción de proporcionalidad atraviesa muchos años de escolaridad y se relaciona con múltiples contenidos tanto en el nivel primario como secundario. Mejorar la enseñanza de la proporcionalidad es clave para fortalecer las bases matemáticas y la comprensión de conceptos fundamentales que no solo son importantes en el ámbito académico, sino también en la vida cotidiana y en diversas disciplinas profesionales. Los mismos autores considera que durante muchos años, la noción de proporcionalidad se asoció con ciertas reglas de trabajo más que con las relaciones que la caracterizan. Numerosas investigaciones han advertido sobre los riesgos que implica que los estudiantes asocien un concepto a un conjunto de técnicas o reglas de cálculo. Por lo que es necesario que el docente tome conciencia de los errores de sus estudiantes, los asocie con ciertos obstáculos y que reconozca los distintos significados de la proporcionalidad.

En la actualidad el desafío pedagógico en Matemática, en la escuela primaria y secundaria, consiste en lograr un aprendizaje significativo en los estudiantes, a partir de situaciones de aprendizaje que permitan desarrollar sus capacidades. En el Marco Nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática en Argentina [Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología, 2019] se plantea mejorar el aprendizaje en Matemática y desarrollar el potencial del pensamiento lógico matemático, siendo una posibilidad la incorporación de herramientas tecnológicas en la resolución de problemas. No menos importante resulta, según Duval (2004), la interacción entre los distintos tipos de registros: natural, numérico, gráfico, geométrico y

algebraico para propiciar aprendizajes significativos de los conceptos y como forma de ligar el tratamiento de la información con la experiencia de los estudiantes. Es necesario que los estudiantes aprendan a usar las Tecnologías de la Información y comunicación y a interactuar con ellas, de allí que los docentes deban incluir estas nuevas tecnologías en las propuestas educativas. Particularmente el Software dinámico Geogebra permite la coordinación de los diferentes registros y de esta manera se convierte en una potente herramienta para propiciar la significación de conceptos, en este caso de la proporcionalidad que funciona en diferentes registros.

Referencial Teórico

Tipo de pensamiento proporcional

Piaget e Inhelder diferenciaron entre dos tipos de pensamiento proporcional que los niños desarrollan a medida que crecen: **pensamiento proporcional cualitativo** y **pensamiento proporcional cuantitativo**. Estos conceptos son fundamentales para comprender cómo los niños van adquiriendo habilidades para comprender las relaciones proporcionales en diversas situaciones.

El **pensamiento proporcional cualitativo** se refiere a la capacidad de los niños para entender las **relaciones de proporcionalidad** de manera **cualitativa** o más intuitiva. Es decir, los niños pueden reconocer que dos cosas están relacionadas de manera proporcional, pero de una forma más general, sin centrarse en la cantidad precisa de esa relación.

El **pensamiento proporcional cuantitativo** se refiere a la capacidad de los niños para comprender las relaciones proporcionales de manera **precisa y cuantitativa**, es decir, en términos de **cálculos numéricos exactos**. En esta etapa, los niños no solo entienden que hay una relación entre las magnitudes, sino que también pueden **calcular** la proporción y aplicar la regla matemática necesaria para resolver problemas que involucren proporcionalidad.

En la enseñanza de la proporcionalidad también es necesario considerar los diferentes significados. Al respecto Godino et al. expresan que los significados de la proporcionalidad se pueden clasificar según criterios, en particular, el contexto o campo de aplicación y el nivel de algebrización de las prácticas matemáticas realizadas. Algunos contextos de aplicación de las nociones de razón y proporción (vida cotidiana, científico técnico, artístico, geométrico, probabilístico, estadístico, etc.) deben ser incluidos en las prácticas de resolución de los problemas adecuados al nivel de escolaridad. Los mismos autores también distinguen tres tipos de significados de la proporcionalidad: aritmético, proto-algebraico y algebraico-funcional, que deben ser considerados en la enseñanza aprendizaje de este concepto. Estos significados corresponden a diferentes niveles de abstracción y comprensión del concepto de proporcionalidad, y cada uno tiene un papel importante en el proceso de aprendizaje.

Significado Aritmético

Este significado se refiere a la proporcionalidad entendida en términos de razones y comparaciones numéricas. Es el nivel más básico y directo, donde los estudiantes se enfrentan a la relación proporcional de manera concreta y numérica.

- Ejemplo: Si tenemos 2 manzanas por cada 3 peras, la relación proporcional entre manzanas y peras es 2:3.
- Importancia: En este nivel, los estudiantes comienzan a comprender la proporción como una relación entre dos cantidades y aprenden a resolver problemas sencillos utilizando razones, como problemas de proporcionalidad directa (por ejemplo, "si 2 kg de manzanas cuestan 30 pesos, ¿cuánto costarán 5 kg?").

En este nivel, el concepto de proporcionalidad se enseña a través de fracciones, múltiplos y divisores, utilizando cálculos aritméticos directos, y la solución de estos problemas se basa en la intuición de que las cantidades cambian de manera proporcional.

Significado Proto-Algebraico

Este tipo de proporcionalidad introduce una visión más abstracta de la relación proporcional, moviéndose más allá de las simples comparaciones numéricas para empezar a usar símbolos y expresiones algebraicas. Aunque aún no se llega a la formalización algebraica completa, el estudiante comienza a ver las relaciones proporcionales en términos de variables y no solo de números específicos.

- Ejemplo: En lugar de trabajar con números concretos, los estudiantes comienzan a resolver problemas como "si x es proporcional a y , ¿cuál es el valor de y si $x=4$?", donde se utiliza la relación $x/y=k$, siendo k una constante de proporcionalidad.
- Importancia: Este tipo de significado es crucial para vincular la aritmética con el álgebra. Los estudiantes se familiarizan con el uso de variables y ecuaciones en la resolución de problemas proporcionales. Aprenden a interpretar las relaciones de proporcionalidad como ecuaciones en las que las cantidades están vinculadas por una constante.

Este nivel de comprensión es un puente entre la proporcionalidad numérica concreta y la manipulación algebraica formal de ecuaciones y funciones.

Significado Algebraico-Funcional

El significado algebraico-funcional es el nivel más avanzado de comprensión de la proporcionalidad y se refiere a la relación proporcional como una función lineal. En este nivel, la proporcionalidad se entiende como una función matemática que relaciona dos variables de forma tal que un cambio en una de ellas provoca un cambio proporcional en la otra.

- Ejemplo: Se puede expresar la relación proporcional como una función lineal $y=k.x$, donde k es la constante de proporcionalidad. Aquí, el estudiante comprende que la proporcionalidad implica que, si una variable cambia, la otra también lo hará en una forma predecible y proporcional.
- Importancia: En este nivel, los estudiantes empiezan a trabajar con funciones lineales, pendientes y gráficas. La proporcionalidad se representa como una recta que pasa por el origen (0,0) en un gráfico, y se utiliza para resolver problemas más complejos, como los de modelado de situaciones reales en las que una variable depende de otra (por ejemplo, la velocidad de un vehículo en función del tiempo, o el precio de varios productos).

Este tipo de significado es clave para entender las aplicaciones de la proporcionalidad en contextos más amplios, y se convierte en la base para abordar conceptos matemáticos más avanzados, como las funciones lineales y las ecuaciones lineales.

Estrategias para desarrollar el Taller

Inicialmente en el taller se presentarán problemas diseñados para estudiantes de nivel primario que serán el punto de partida para que se generen debates grupales en torno a si el problema es aditivo o de proporcionalidad, también sobre pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo. en estas actividades además se deberán identificar procedimientos que pueden realizar los estudiantes, dificultades y errores que cometen en la resolución. Se realizará una puesta común eligiendo los representantes de algunos grupos para la socialización. Los talleristas sintetizarán las producciones y señalarán la diferencia entre pensamiento proporcional cualitativo y cuantitativo y las actividades que les corresponden.

Además, se mostrará una posible secuencia de tipo de pensamiento y actividades para ir articulando primaria con niveles secundario.

Los talleristas realizaran una síntesis acerca de los significados de la proporcionalidad propuestos por Godino y sobre los registros semióticos. Será necesario que los asistentes al taller tengan Geogebra en su notebook, tablet o celular y que tengan conocimientos básicos del uso de este software.

Los asistentes analizarán actividades reconociendo el significado de proporcionalidad que enfatiza, según el texto de Godino y los contenidos matemáticos que subyacen y los registros semióticos que involucran, el nivel educativo al que corresponde. Las actividades propuestas están destinadas a nivel primario y secundario. Además, deberán resolver una de las actividades que analizan.

Ejemplo de actividades que analizarán: (la siguiente actividad fue extraída de Atela, Fernández y Vila (2019))

Actividad 1:

El siguiente dibujo es un  cuadrado

a. Completa en cada caso el dato faltante:

Longitud del lado del cuadrado(cm)	0	2	4	7		12	15
Perímetro del cuadrado(cm)		8			40		

- b. Si se duplica un par de lados, se obtiene un rectángulo. ¿El perímetro de la nueva figura se duplica? Justifiquen.
- c. Si se duplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El cuadrado de la nueva figura se duplica? Justifiquen.

- d. Si se triplican los lados del cuadrado original, se obtiene otro cuadrado. ¿El perímetro de la nueva figura se triplica? Justifiquen.
- e. A partir de lo analizado, ¿en qué casos el perímetro es directamente proporcional a la longitud de lado?

Actividad 2

Ahora analicen el archivo de Geogebra “problema 1” y sigan las instrucciones:(Actividad propuesta por Atela, Fernandez y Vila (2019))

- a. Muevan el punto a del deslizador, ¿qué observan?, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante?, ¿por qué creen que ocurre esto?
- b. ¿Qué significado tiene el valor de a?
- c. ¿Qué sucede cuando $a=0$? ¿Coincide con el valor de la tabla que completaron en la parte I 1 a?(problema 1 a)
- d. Ahora muevan el punto A, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿por qué consideran que ocurre esto?
- e. Ahora muevan el punto B, ¿qué se modifica y qué se mantiene constante? ¿por qué consideran que ocurre esto?
- f. Utilizando la Vista Algebraica y/o la vista gráfica completen la tabla:

Longitud del lado del cuadrado	3					
Perímetro del cuadrado	12	36			80	
Área del cuadrado	9		100	900		1

- g. A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su perímetro aumenta, ¿aumenta de manera directamente proporcional?
- h. A medida que aumenta la longitud del lado del cuadrado, su área aumenta, ¿aumenta de manera directamente proporcional?

Actividad 3

- a. Observa las siguientes tablas que representan la relación entre dos magnitudes.

Cantidad de envases (x)	300	120	80	60	30	12
Contenido de cada envase en litros (y)	0,2	0,50	0,75	1	2	5

Cantidad de alfajores(x)	6	12	18	3	2	1
Precio en \$ (y)	450	900	1350	225	150	75

Número de personas(x)	2	3	5	7	8	10
Cantidad de harina en gramos (y)	100	150	250	350	400	500

Cantidad de alfajores por caja(x)	10	20	30	5	60
Cantidad de cajas(y)	6	3	2	12	1
Tiempo en horas (x)	0,5	1	3	5	6
Distancia recorrida en km (y)	40	80	240	400	480

- b. Decide cuáles corresponden a relaciones de proporcionalidad directa. Encuentra su constante de proporcionalidad. Justifica.
- c. Representa en Geogebra los puntos de cada tabla (realiza una gráfica por ventana).

Si correspondiera uno los puntos.

- d. ¿Qué características tienen las gráficas de las relaciones que representan proporcionalidad directa? ¿son funciones? Justifica

Se realizará una síntesis final mostrando contenidos, tipo de pensamiento, registros y tipo de actividades sugeridas por nivel para lograr la articulación entre niveles y el desarrollo del pensamiento proporcional.

El taller se realizará durante 1 hora y 50 minutos, previendo que se deben moderar las puestas en común para no desfazar los tiempos programados para la realización de las actividades. Para introducción del taller 10 minutos, resolución de actividades 60 minutos por fases (se prevén tres momentos de resolución de 20 min cada uno), 20 minutos para puesta en común y 20 minutos para exposición de talleristas.

Referencias y bibliografía

- Atela, M. A., Fernández, J. P., Vila, M. (2019). Articulación entre nivel primario y secundario. Una experiencia alrededor de la proporcionalidad mediada por TIC. *Actas V Jornadas de Enseñanza e Investigación Educativa en el campo de las Ciencias Exactas y Naturales, Fac. de Humanidades y Cs. de la Educación, UNLP.*
- Broitman C., Escobar M., Grimaldi V, Itscovich H, Novembre A., Ponce H. & Sancha I)2018. *La divina Proporción. La enseñanza de la proporcionalidad en la escuela primaria y en los inicios de la escuela secundaria.* Santillana en el aula.
- Duval, R.(2004). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales.* Universidad del Valle, Colombia.
- Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M., y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-13). https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/godino_beltran.pdf

- Ministerio de Educación, Cultura, Ciencia y Tecnología de la Nación (2019). *Marco nacional para la mejora del aprendizaje en Matemática*. - 1a ed. – Ciudad Autónoma de Buenos Aires .
- Piaget, J. y Inhelder, B. (1978). Las operaciones intelectuales y su desarrollo. En J. Delval (Ed.), *Lecturas en Psicología del niño*, I (pp. 70-119). Madrid: Alianza Editorial.
- Van Dooren, W., De Bock, D., Hessels, A., Janssens, D. y Verschaffel, L. (2005). Not everything is proportional: Effects of age and problem type on propensities of overgeneralization. *Cognition and Instruction*, 23(1), 57-86.



Formular problemas y la competencia profesional

Augusta **Osorio** Gonzales
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

arosorio@pucp.edu.pe

Elizabeth **Advíncula** Clemente
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

eadvincula@pucp.edu.pe

Maritza **Luna** Valenzuela
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

luna.m@pucp.edu.pe

Miluska **Osorio** Martínez
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

mosoriom@pucp.edu.pe

Resumen

El presente taller tiene como objetivo que los participantes formulen un problema para introducir el estudio de la función lineal en una clase con estudiantes de educación media inferior, identifiquen los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de dicho problema y establezcan conexiones con otros conocimientos matemáticos. Con base en el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MSTK), utilizaremos los subdominios KoT y KSM para que los participantes puedan identificar el conocimiento matemático movilizado durante el desarrollo de las actividades propuestas en el taller. Se espera que los participantes conozcan herramientas que ayuden a la reflexión sobre su práctica docente.

Palabras clave: Competencia profesional; Conocimiento especializado del profesor de Matemáticas (MSTK); Educación Matemática; Formulación de problemas; Formulación de tareas; Función lineal; Sesiones de clase.

Taller; Media inferior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

Introducción

La planificación de clases es una de las tareas fundamentales del profesor de Matemáticas, ya que permite organizar estrategias de enseñanza que favorecen el aprendizaje significativo de los estudiantes. Dentro de este proceso, la formulación de problemas es una competencia esencial que influye en la manera en que los estudiantes interactúan con el contenido matemático, desarrollan habilidades de razonamiento y construyen su comprensión de los conceptos.

En estudios relacionados con la actividad de formulación de problemas se encuentran varias posibles definiciones para ella. Para Martín-Díaz (2022) señala que la mayoría de trabajos referidos a la formulación de problemas tiene como nexo común la propuesta de Silver (1994). Así, Silver (1994) señala que la formulación de problemas abarca la generación de nuevos problemas y la reformulación de problemas existentes, pudiendo ocurrir ambas fases antes (a partir de un objeto, imagen, historia, etc.), durante (al simplificar un problema no trivial para hacerlo más accesible a la solución) o después (al ampliar un problema o al utilizar el conocimiento adquirido para otros problemas) del proceso de resolución de problemas.

Los problemas que un profesor propone en sus clases pueden originarse de dos formas principales: pueden ser seleccionados de un conjunto definido de recursos o pueden ser creados por el propio docente. En el primer caso, el profesor puede recurrir a fuentes como un banco personal de problemas, el libro de texto del curso, materiales bibliográficos de la institución o personal, recursos en internet o incluso problemas compartidos por otros colegas. En este escenario, el docente debe seleccionar y, en muchos casos, adaptar los problemas para ajustarlos a los objetivos pedagógicos y a las características específicas de sus estudiantes. Por otro lado, si el profesor decide crear sus propios problemas, lo hace generalmente para alinearlos mejor con sus metas de enseñanza, adaptar el nivel de complejidad (ya sea simplificándolos o enriqueciéndolos) o responder a las necesidades particulares de su grupo de alumnos. En esta situación, el docente diseña todos los elementos del enunciado, lo que le permite un mayor control sobre el enfoque y la profundidad del problema.

Con el desarrollo del taller, se espera responder a la pregunta: ¿Cómo pueden los docentes reflexionar y mejorar sus procesos de formulación de problemas, utilizando el modelo MTSK, para fortalecer sus conocimientos matemáticos y didácticos en temas como la función lineal? Esta pregunta no solo guía el objetivo central de la propuesta, sino que también orienta la reflexión sobre cómo la selección, adaptación o creación de problemas puede impactar en la efectividad de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Antecedentes: Definición y relevancia de la formulación de problemas en la práctica docente

La formulación de problemas es considerada un recurso fundamental en la enseñanza de las Matemáticas, ya que es un medio a través del cual se puede facilitar el aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes. Se considera una competencia esencial del docente y dentro del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MSTK) se ubica específicamente en el conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT), subdominio del conocimiento pedagógico del contenido (PCK).

Numerosos estudios han resaltado el impacto de la formulación de problemas en la enseñanza. Xu et al. (2020) destacan que este proceso fortalece las competencias docentes al mejorar la comprensión del pensamiento matemático de los estudiantes. Además, Cifarelli y Sevim (2005) subrayan que la formulación de problemas puede integrarse con la resolución de problemas, permitiendo reformularlos y dotarlos de mayor significado, lo que favorece la construcción del conocimiento matemático.

Por ello, se considera importante que los profesores establezcan los criterios en que basan su formulación de problemas, pues eso les ayudará a reflexionar sobre nuevas estrategias que favorezcan el desarrollo de su habilidad en formular problemas y que redundará en la elaboración de problemas muchos más motivadores y retadores para sus alumnos, que en el caso de este taller serán sobre el tema de función lineal.

Con respecto al objeto matemático, función lineal, encontramos que Silva y Nogueira (2021) realizan una revisión bibliográfica de tesis de maestría en la plataforma CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) de Brasil, desde 2007 hasta 2017 y encuentran 28 tesis que tienen como objetivo identificar las dificultades que el alumno presenta al estudiar funciones afines. Las dificultades en el aprendizaje de la función lineal no se restringen al nivel secundario, pues también están presente en la educación superior en los cursos de Matemáticas del primer ciclo del nivel universitario. Por ejemplo, en la Pontificia Universidad Católica del Perú (PUCP) la función lineal está presente en los sílabos de los cursos de Fundamentos de Cálculo (1MAT05) de Estudios Generales Ciencias, Matemática Básica (MAT155) de Estudios Generales Letras, Matemática de la Facultad de Educación (1MAT13), etc. Durante la enseñanza de estos cursos se han encontrado que los alumnos presentan serias deficiencias en el manejo de la función lineal, a pesar de que lo trabajaron en el nivel secundario. Una de las razones para trabajar este objeto matemático, en particular dentro de nuestro taller, radica en la preocupación porque los participantes analicen sus estrategias de enseñanza basadas en la formulación de problemas y de ese modo la experiencia contribuya a un aprendizaje más significativo de sus alumnos.

Dada esta problemática, este taller propone que los docentes analicen sus estrategias de enseñanza desde la formulación de problemas, buscando diseñar situaciones de aprendizaje más efectivas. A través de esta reflexión, se espera que los participantes desarrollen estrategias didácticas que favorezcan una mejor comprensión de la función lineal y, en consecuencia, un aprendizaje más sólido y significativo para sus estudiantes.

Referencial teórico

En este taller tomamos como base el modelo del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas (MTSK) propuesto por Carrillo et al. (2018), que se sustenta en los trabajos de Shulman (1986) y Ball et al. (2008). Este modelo es una herramienta analítica que permite explorar, en detalle, el conocimiento que moviliza el docente al desarrollar cualquier actividad profesional relacionada a la enseñanza de la Matemática, como por ejemplo la preparación de clases o la gestión de tareas, entre otras. El modelo MTSK considera dos grandes dominios: Conocimiento Matemático (MK) y Conocimiento Didáctico del contenido (PCK).

El MK se divide en tres subdominios: Conocimiento de los temas matemáticos (KoT), Conocimiento de la estructura matemática (KSM) y Conocimiento de la práctica matemática (KPM). El PCK se divide en tres subdominios: Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT), Conocimiento de las características del aprendizaje de las Matemáticas (KFLM) y Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las Matemáticas (KMLS).

Tabla 1
Subdominios del MSTK

Conocimiento de los temas (KoT)	Abarca qué sabe el profesor y con qué profundidad conoce los contenidos matemáticos útiles para enseñar. Este subdominio incluye cuatro categorías: procedimientos; definiciones, propiedades y sus fundamentos; registros de representación y fenomenología
Conocimiento de la estructura matemática (KSM)	Abarca aquellos saberes sobre las conexiones y las relaciones que existen entre objetos o elementos matemáticos. Este conocimiento es el que permite a los docentes comprender conceptos avanzados desde una perspectiva elemental y viceversa.
Conocimiento de la práctica matemática (KPM)	Incluye el conocimiento sobre las características de la actividad como herramientas sintácticas, como, por ejemplo: demostrar, definir, justificar o ejemplificar, así como una comprensión de los fundamentos lógico-matemáticos que sustentan todas estas prácticas. Este subdominio también abarca el conocimiento acerca de los procesos propios de la resolución y la formulación de problemas, como estrategias y heurísticos
Conocimiento de la enseñanza de las Matemáticas (KMT)	Comprende teorías, recursos, estrategias, etc., relacionadas con el saber y el aprendizaje de esa disciplina que el profesor pueda conocer y usar para organizar la lección de un determinado contenido.
Conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas (KFLM)	Contiene aquellos elementos del saber del profesor acerca del pensamiento, forma de actuar y procesos de comprensión de los estudiantes. Este conocimiento le permite al docente anticipar respuestas de los alumnos ante un determinado constructo o situación matemática.
Conocimiento de los estándares de aprendizaje de las matemáticas (KMLS)	Implica el saber referido a aspectos curriculares de la enseñanza de las Matemáticas, aquellos tanto contemplados en el currículo oficial como en los diversos elementos que organizan qué se debe aprender, cómo, y en qué orden.

Fuente: Elaboración propia.

En el taller, vamos a utilizar los subdominios KoT y KSM del modelo MTSK para que los participantes puedan identificar el conocimiento matemático movilizado durante el desarrollo de las actividades propuestas en el taller.

Así, en relación con el conocimiento de los temas (KoT) los participantes identificarán definiciones, propiedades, procedimientos, representaciones y aplicaciones relacionados con la función lineal; y con respecto al conocimiento de la estructura de las Matemáticas (KSM) los participantes identificarán conexiones entre la función lineal y otros conocimientos matemáticos.

En relación con la estructura de un problema, se adoptará la propuesta de Malaspina (2017), quien identifica los elementos del enunciado de un problema en cuatro componentes: **información, requerimiento, contexto y entorno matemático**, los cuales se describen a continuación.

- La información está compuesta por los datos cuantitativos o las relaciones entre datos no cuantitativos que se colocan en el enunciado del problema.
- El requerimiento que consiste en lo que se solicita como solución del problema, puede ser cuantitativo o cualitativo.
- El contexto se refiere a la realidad donde se trabaja el problema y en algunos casos puede ser simplemente un contexto intra matemático.
- El entorno matemático consiste en el marco matemático en el que se ubican los conceptos matemáticos que intervienen o pueden intervenir en la solución del problema.

Estrategia para desarrollar el taller

Este taller está dirigido a profesores de secundaria en ejercicio o futuros profesores. El taller tiene por objetivo que los participantes formulen un problema para introducir el estudio de la función lineal en una clase con estudiantes de educación media inferior, identifiquen los conocimientos matemáticos involucrados en la resolución de dicho problema y establezcan conexiones con otros conocimientos matemáticos.

La primera actividad (30 minutos) consistirá en que los participantes, en grupos, propongan un problema que permita introducir el tema de función lineal para una clase con estudiantes de educación media inferior. Para ello, se les proporcionará un conjunto de problemas extraídos de diversos libros de educación media de editoriales españolas. Los participantes deberán seleccionar un problema del grupo de problemas dado o proponer un nuevo problema, e indicar las razones por las razones por las que seleccionan o proponen el problema.

La segunda actividad (50 minutos) consistirá en solicitar a cada grupo de participantes que resuelvan el problema seleccionado e identifiquen definiciones, propiedades, procedimientos, representaciones y aplicaciones presentes; y establezcan conexiones con otros conocimientos matemáticos.

La tercera actividad (30 minutos) consistirá en que cada grupo de participantes socialice las respuestas elaboradas para las dos actividades anteriores, las cuales serán discutidas a la luz de los subdominios KoT y KSM del modelo MSTK con los responsables del taller.

Para el desarrollo de cada actividad se entregará a cada grupo de trabajo los documentos necesarios. Por ejemplo, para las dos primeras actividades los docentes deberán completar las siguientes tablas.

Problema seleccionado o formulado	Razones de la selección o formulación

Figura 1. Plantilla de respuesta para la Actividad 1

Solución del problema seleccionado o formulado	
Definiciones	
Propiedades	
Procedimientos	
Tipos de representaciones	
Aplicaciones	

Figura 2. Plantilla de respuesta para la Actividad 2

Reconocimientos

Trabajo elaborado en el marco del proyecto de investigación Análisis de criterios para formular problemas matemáticos en profesores de educación secundaria con relación a la función lineal de la Pontificia Universidad Católica del Perú, bajo el código 2024-B-0055.

Consideraciones finales

Este taller busca la reflexión de los participantes en torno a la formulación de problemas para sus estudiantes.

Las actividades desarrolladas les permitirán revisar los conocimientos matemáticos que movilizan sobre un determinado objeto y las conexiones que pueden establecer con otros objetos matemáticos cuando formulan un problema. Se espera que esta revisión les permita encontrar estrategias para mejorar su competencia profesional en formulación de problemas.

La revisión de los subdominios del MTSK utilizados para el trabajo de las actividades de este taller y puestos en evidencia durante la socialización del mismo, les permitirá a los participantes conocer herramientas que ayuden a la reflexión sobre su práctica docente.

Referencias y bibliografía

- Ball, D., Thames, M.H., & G. Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: what makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407. <https://doi.org/10.1177/0022487108324554>
- Bicer, A., Lee, Y., Perihan, C., Capraro, M. M., & Capraro, R. M. (2020). Considering mathematical creative self-efficacy with problem posing as a measure of mathematical creativity. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 457–485. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09995-8>
- Brown, S.I., & Walter, M.I. (2004). *El arte de plantear problemas* (3ª ed.). Psychology Press.
- Cai, J., & Leikin, R. (2020). Affect in mathematical problem posing: Conceptualization, advances, and future directions for research. *Educational Studies in Mathematics*, 105(3), 287–301. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-10008-x>
- Cai, J., & Hwang, S. (2020). Learning to teach through mathematical problem posing: Theoretical considerations, methodology, and directions for future research. *International Journal of Educational Research*, 102, 101420.
- Cai, J., & Hwang, S. (2021). Teachers as redesigners of curriculum to teach mathematics through problem posing: conceptualization and initial findings of a problem-posing project. *ZDM Mathematics Education*, 53, 1403–1416. <https://doi.org/10.1007/s11858-021-01252-3>
- Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M.C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20, 236-253. <https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Carrillo, J., Montes, M., & Contreras, L. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. En Grupo de investigación en Educación Matemática Universidad de Alicante (Eds.) *Ideas para la educación matemática: Perspectivas desde el trabajo de Mª Luz Callejo de la Vega* (pp. 163-182).
- Cifarelli, V. V., & Cai, J. (2005). The evolution of mathematical explorations in open-ended problem-solving situations. *Journal of Mathematical Behavior*, 24, 302–324
- Crespo, S., & Harper, F. K. (2020). Learning to pose collaborative mathematics problems with secondary prospective teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101430. <https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.05.003>
- Cruz, M. (2006). A mathematical problem-formulating strategy. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 79–90.
- Headrick, L., Wiezel, A., Tarr, G., Zhang, X., Cullicott, C., Middleton, J., & Jansen, A. (2020). Engagement and affect patterns in high school mathematics classrooms that exhibit spontaneous problem posing: An exploratory framework and study. *Educational Studies in Mathematics*, 105, 435–456. <https://doi.org/10.1007/s10649-020-09996-7>
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J.M. Contreras, P. Arteaga, G.R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M.M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos* (pp. 1-14). <https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html>
- Martín-Díaz, J. (2022). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de problemas. [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva] Montes, M.A., Carrillo, J. & Contreras, L. C. (2013). Conocimiento del profesor de matemáticas: Enfoques del MKT y del MTSK. En A. Berciano, G. Gutiérrez, A. Estepa & N. Climent (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 403-410). SEIEM.
- Pelcer, I., & Gamboa, F. (2009). Problem posing: Comparison between experts and novices. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou, & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of the 33th conference of the International group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4 (pp. 353–360). PME.
- Polya, G. (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. Editorial Trillas.

- Silver, E. A. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28.
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. Academic Press.
- Schwab, J. J. (1978). *Science, curriculum and liberal education*. University of Chicago Press.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4–14.
<https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Silva, S. D., & Nogueira, C. M. (2021). Dissertações brasileiras relacionadas ao ensino de função afim sob a perspectiva das teorias da didática da matemática. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 23(1), 448-472.
- Stoyanova, E., & Ellerton, N. F. (1996). A framework for research into students' problem posing in school mathematics. In P. C. Clarkson (Ed.), *Technology in mathematics education* (pp. 518–525). Mathematics Education Research Group of Australasia.
- Van Harpen, X. Y., & Presmeg, N. C. (2013). An investigation of relationships between students' mathematical problem-posing abilities and their mathematical content knowledge. *Educational Studies in Mathematics*, 83(1), 117–132.
- Xu, B., Cai, J., Liu, Q., & Hwang, S. (2020). Teachers' predictions of students' mathematical thinking related to problem posing. *International Journal of Educational Research*, 102, 101427.
<https://doi.org/10.1016/j.ijer.2019.04.005>



Gráficos estadísticos accesibles: Desarrollo profesional utilizando datos reales

Lizbeth **Alvarado** Vargas
Universidad de Puerto Rico
Puerto Rico
lizbeth.alvarado@upr.edu
Ariana **Rodríguez** Flores
Universidad de Puerto Rico
Puerto Rico
ariana.rodriguez20@upr.edu

Resumen

En esta comunicación se presenta una guía para un desarrollo profesional enfocado en el tema de creación de gráficos estadísticos accesibles para personas ciegas que permitan generar y responder preguntas de investigación. Para ello se sigue la estrategia de enseñanza cooperativa, *Rompecabezas II*, en la que los docentes participantes, trabajan de manera cooperativa construyendo su aprendizaje. Para la creación de gráficos estadísticos se utiliza un software que incorpora elementos de accesibilidad para personas ciegas, llamado *SAS Graphics Accelerator*. Por lo que, esta propuesta no solo busca fortalecer las habilidades estadísticas de los docentes participantes; sino que también incorpora elementos de accesibilidad para personas ciegas, promoviendo así una mayor inclusión.

Palabras clave: Accesibilidad; Aprendizaje Cooperativo; Constructivismo; Desarrollo profesional; Educación; Educación Matemática; Estadística; Recursos Libres de Matemáticas; SAS Graphics Accelerator.

Definición y relevancia de las prácticas educativas

La Estadística tiene mucha importancia y utilidad en distintos ámbitos reales, como lo son, la educación, la salud, la economía, las ciencias, las finanzas, la ingeniería, la política, entre otras, las cuales requieren constantemente del análisis de datos en sus actividades. Además, como sociedad frecuentemente recibimos información a través de medios de comunicación sobre análisis estadísticos que debemos interpretar (Garibotti, et al., 2020).

Según Schreiter, et al., (2024), existen importantes lagunas en los conocimientos de docentes en servicio y formación, relacionados con alfabetización estadística y alfabetización de datos, definiendo la primera como la “capacidad de comprender y evaluar críticamente los resultados estadísticos que impregnan nuestra vida diaria” (Wallman, 1993, p.1 como se cita en Schreiter, et al., 2024), y la segunda como las habilidades para recopilar y crear representaciones sobre datos. Además, los libros de texto abarcan de manera muy básica los conceptos de estadística y no se basan en datos reales (Batanero, 2006).

Además, los profesores tienen concepciones erróneas sobre conceptos estadísticos y les transmiten dichos errores a los estudiantes (Schreiter, et al., 2024). También, se sienten inseguros a la hora de enseñar el tema y optan por omitirlo (Batanero, 2006), en lugar de aprovechar las ventajas que tiene para contextualizar situaciones.

Por otra parte, la investigación de Escandell et al., (2014) evidenció que las personas ciegas, sus familiares y los técnicos que trabajan con ellas, señalaron distintas barreras en el ámbito educativo. Entre estas, se mencionan que las editoriales escogidas por los centros educativos no cumplen los criterios de accesibilidad, que los documentos proporcionados en la web no son accesibles y que las metodologías aplicadas no son apropiadas para las personas ciegas. A esto se suma que, un alto porcentaje de los encuestados informó que los profesionales no utilizan las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

Frente a estas dificultades, el Diseño Universal hace referencia a la creación de productos y espacios que puedan ser utilizados por la mayor cantidad de personas posibles, es decir, que la mayoría de las personas independientemente de sus capacidades o discapacidades, puedan tener acceso sin la necesidad de que el producto o espacio tenga que ser modificado (Mace, 1998). A partir de este enfoque, surge el Diseño Universal de los Aprendizajes (DUA), que traslada estos principios al ámbito educativo. Según lo que plantea Pastor (2019), el DUA “parte de la diversidad desde el comienzo de la planificación didáctica y trata de lograr que todo el alumnado tenga oportunidades para aprender”.

Una herramienta fundamental en la interpretación y el análisis de datos son los gráficos estadísticos, con los cuales se pueden identificar patrones, tendencias y relaciones que permiten comunicar resultados sencillos de interpretar, sin embargo, a pesar de la gran utilidad que tienen para transmitir la información, estos son generados como imágenes, utilizando distintos colores y formas, por lo que, poseen un alto contenido visual, siendo esto una limitante para que una persona ciega pueda interpretar, analizar y comunicar datos estadísticos (Alcaraz, et al., 2020).

Por este motivo, la creación de los materiales de este trabajo se enfoca en garantizar la accesibilidad para los docentes participantes del taller, proporcionándoles herramientas y estrategias inclusivas para la enseñanza de las estadísticas, pues uno de los objetivos que se quieren alcanzar es generar conciencia en los docentes sobre la importancia de ofrecer una educación inclusiva, aprovechando los recursos disponibles para garantizar el acceso equitativo al aprendizaje de las estadísticas.

Referentes teóricos

El constructivismo explica el aprendizaje como un proceso activo en el que se promueve el descubrimiento y la verificación. En la enseñanza esto se puede poner en práctica a través de prácticas como, el apoyo temporal por parte del instructor, la intercalación del papel de profesor, la colaboración entre pares y la evaluación continua del aprendizaje (Vygotsky, 1978; Brooks y Brooks, 1993; Schunk, 2012). Estas prácticas no solo favorecen la construcción del conocimiento en los estudiantes, sino que también pueden aplicarse al desarrollo profesional docente.

De manera similar, según Kang et al., (2013) un buen desarrollo profesional debe contar con ciertas características, algunas de ellas son, un **enfoque en el contenido**, en el conocimiento de la materia, el conocimiento de cómo los estudiantes aprenden el contenido, conocimiento de la enseñanza del contenido y conocimiento de los docentes; **aprendizaje activo**, se brindan oportunidades para que los docentes participen en el análisis de la enseñanza y el aprendizaje; **coherencia**, con otras oportunidades de aprendizaje de los docentes, con el conocimiento y las creencias de los docentes, y con las reformas y políticas de la escuela, el distrito y el estado; **participación colectiva**, se ofrece oportunidad de que varios profesores de la misma escuela participen en las mismas oportunidades de aprendizaje.

Al igual que en el aula, el aprendizaje de los docentes debe ser un proceso dinámico, reflexivo y colaborativo que les permita mejorar continuamente su práctica. En este sentido el aprendizaje cooperativo juega un papel fundamental, ya que permite maximizar el aprendizaje a través de la participación en conjunto. El aprendizaje cooperativo se basa en cinco componentes: en la interdependencia positiva, se asegura que el éxito de cada uno dependa del éxito del grupo, lo cual garantiza que todos se integren al mismo; en la interacción promotora, los integrantes se ayudan entre sí para el logro de las metas que se imponen; en la responsabilidad individual, se asegura que cada persona, como mínimo, tenga una participación equitativa; en el uso de habilidades interpersonales, las que se necesitan para trabajar en equipo de manera efectiva; y en el procesamiento grupal que permite pensar sobre la acción realizada con la finalidad de lograr mejoras continuas (Johnson et al., 1994).

Entre las diversas técnicas de enseñanza del aprendizaje cooperativo está la del rompecabezas II propuesta por Slavin (1999). En Rompecabezas II, los participantes trabajan en equipos heterogéneos, es decir, cada grupo de trabajo está compuesto por expertos en distintas áreas, estos expertos se forman a través del estudio individual y grupal de distintas temáticas asignadas. Luego, dichas temáticas deben ser expuestas a sus equipos de trabajo, para posteriormente en equipo realizar tareas que abarcan todos los temas estudiados.

La esencia del método Rompecabezas radica en la interdependencia, ya que cada estudiante es responsable de una parte única de la actividad colectiva, y los demás integrantes dependen de sus compañeros expertos para obtener la información necesaria y desempeñarse bien en las evaluaciones (Slavin, 1999).

Método y desarrollo conceptual

La metodología que se lleva a cabo en el desarrollo profesional se divide en las cuatro partes propuestas en la técnica de enseñanza Rompecabezas II como se muestra en la Figura 1 (Slavin, 1999). En la primera parte **Tópicos Expertos**, los docentes participantes se organizan en equipos de cuatro integrantes, a estos se les llama equipos originales. A cada miembro se le asigna aleatoriamente una hoja de expertos, la cual incluye un tipo específico de gráfico estadístico (barras, circular, histograma o líneas). En esta primera parte, los participantes trabajan de manera individual el tema asignado, siguiendo las instrucciones de la hoja de expertos correspondiente, cuyo propósito es estudiar y comprender en profundidad el tema.

A lo largo del desarrollo profesional, los docentes utilizan el software para creación de gráficos estadísticos, **SAS Graphics Accelerator**. Esta plataforma fue diseñada por Statistical Analysis System (SAS) para mejorar la accesibilidad de los gráficos estadísticos y visualizaciones para personas ciegas. Esta herramienta permite a los usuarios generar diferentes tipos de gráficos estadísticos y explorar los mismos a través de descripciones en texto, tecnología de sonificación y contraste de colores.

En la plataforma mencionada se ingresarán datos reales previamente depurados para que el formato sea compatible con el software. Es recomendable que los datos reales que se utilicen al implementar el desarrollo profesional sean obtenidos de páginas oficiales, ya sea de censos, páginas gubernamentales, revistas académicas, entre otras fuentes confiables, pertenecientes al país donde se lleve a cabo el desarrollo profesional, de manera que sean relevantes para los participantes.

La segunda parte, **Discusión en Grupos de Expertos**, se basa en que los docentes se reúnan con los otros participantes que recibieron la misma hoja de expertos, es decir, el mismo tema a estos grupos se les llama grupos de expertos. En estos grupos se elegirá una persona que tomará el rol de líder de discusión, el cual tiene como tarea asegurarse de la participación equitativa de todos los integrantes. Para esta discusión, se entregará a cada grupo de expertos una guía de discusión para estructurar el intercambio de ideas y profundizar en el estudio del tipo de gráfico asignado. Luego de la discusión, deberán preparar una exposición del tema para que en la siguiente parte compartan la información en los grupos originales, para esto se les entregará un protocolo de ajuste el cual consiste en una guía que les ayudará a ordenar su presentación.

En la tercera parte, **Informe de Expertos**, los docentes regresan a los equipos originales y exponen el conocimiento adquirido en las fases anteriores. Acá también se asigna un líder de discusión el cual está encargado moderar la discusión, dar los turnos correspondientes y controlar el tiempo para que todos puedan exponer sus temas.

Finalmente, en la cuarta parte **Preparación del Informe de Equipos Originales**, cada grupo elige un conjunto de datos reales con los cuales deben formular una pregunta de investigación que puedan responder usando uno o varios de los gráficos estadísticos estudiados, los cuales deben crear de manera accesible. Para llevar a cabo esta parte, se proporciona una guía para la preparación del informe, junto con una escala de valoración para el informe final que sirve como referencia para evaluar la calidad del informe final. Cada equipo original realiza una exposición final, la cual será evaluada por los facilitadores del taller.

En cada una de las partes del desarrollo profesional, se utiliza una estrategia de evaluación, de manera que permita identificar el progreso continuo de los maestros. Según el constructivismo, el maestro debe evaluar el aprendizaje de los estudiantes en el contexto de la enseñanza diaria, con el objeto de corregir oportunamente el proceso de aprendizaje si fuera necesario (Brooks y Brooks, 1993). Por ende, la evaluación se llevará a cabo diariamente y no solo al término del desarrollo profesional, pues en esa instancia sería muy difícil remediar los resultados no satisfactorios del aprendizaje.

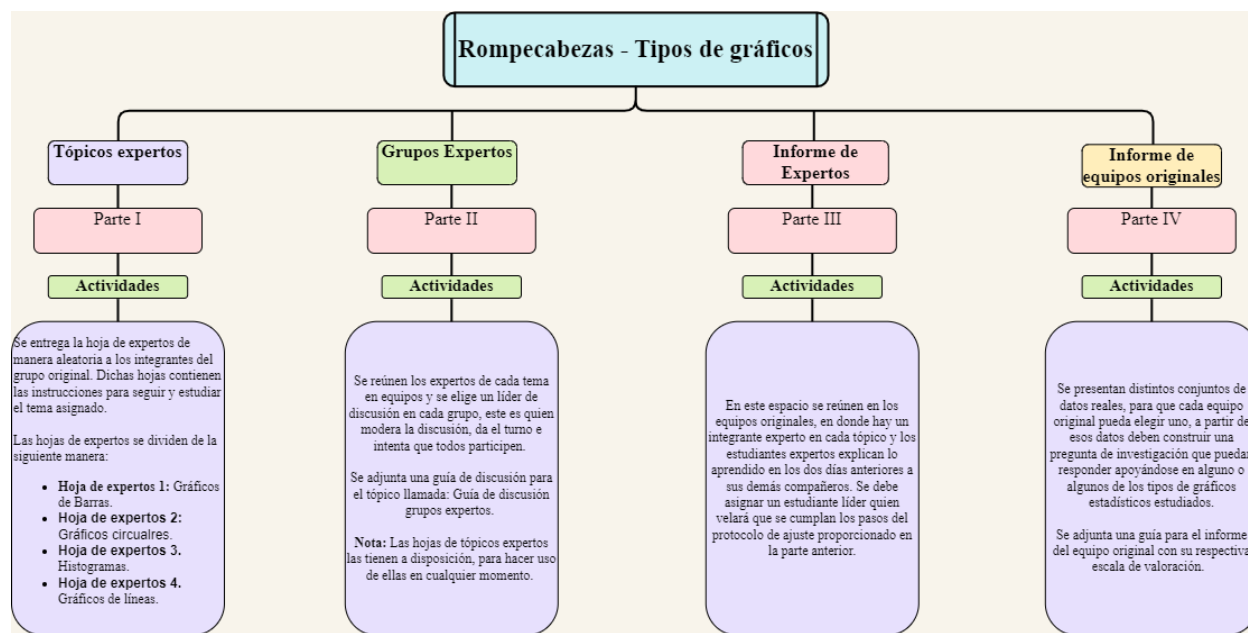


Figura 1. Diagrama Rompecabezas II.

Conclusiones

Esta comunicación proporciona una guía estructurada para el desarrollo profesional de docentes en la creación y uso de gráficos estadísticos accesibles, que incluyen sonificación y contraste de colores, por ende, la misma no solo pretende mejorar las habilidades estadísticas de los profesores, sino también fomentar la creación de gráficos accesibles, reforzando el compromiso con la equidad en la educación y permitiendo que todos los estudiantes y docentes, sin importar sus capacidades, tengan acceso a herramientas que faciliten el aprendizaje y la toma de decisiones informadas.

Aunque la guía aún no ha sido implementada en un entorno de formación docente, la misma ha sido revisada por otros docentes expertos en los diferentes temas (estadística, accesibilidad, currículo y desarrollo profesional), quienes han aportado observaciones valiosas que han permitido ajustar ciertos aspectos, por ejemplo, la selección de herramientas tecnológicas y la manera en que se integran las actividades cooperativas en el desarrollo profesional.

Se espera que la aplicación de esta guía tenga varias implicaciones en la enseñanza y aprendizaje de la estadística. Por un lado, su enfoque basado en datos reales busca fortalecer la interpretación crítica de los gráficos, conectando la estadística con situaciones de la vida cotidiana. Además, el uso de herramientas con sonificación y contrastes de colores facilitan la accesibilidad para la mayoría de docentes y estudiantes, promoviendo una educación más equitativa. De igual manera, esta propuesta busca contribuir al conocimiento y desarrollo de prácticas más colaborativas y tecnológicamente enriquecidas, lo que favorece la implementación y el buen uso de recursos tecnológicos en el aula.

Invitamos a la comunidad educativa que imparte desarrollos profesionales a ponerla en práctica y a compartir sus experiencias, para así evaluar su impacto en el aprendizaje de los docentes, así como de los estudiantes. Estas experiencias contribuirán a mejorar y expandir la propuesta, asegurando que responda a las necesidades reales de docentes y estudiantes.

Agradecimientos

Agradecemos a la National Science Foundation (NSF) por su apoyo financiero a través de la subvención #2321760. También expresamos nuestra gratitud a la Dra. Isabel Delgado Quiñones, al Dr. Jairo A. Ayala Godoy, al Dr. José M. Álvarez Cabán, al Dr. José L. Agosto Rivera y al Dr. Omar A. Hernández Rodríguez, por su valiosa colaboración.

Referencias

- Alcaraz, R., Ribera, M., y Granollers, T. (2020). La accesibilidad de los gráficos estadísticos para personas con baja visión y visión cromática deficiente: revisión de alcance y perspectivas. *Interacción, Revista digital de AIPO*, 1, 59-75.
- Batanero, C. (2006). Educación Estadística en la matemática escolar: retos para la enseñanza y la formación del profesor (documento de discusión). *Revista Iberoamericana de Educación Matemática, Santa Cruz de Tenerife*, 8, 63-75.
- Brooks, J. G y Brooks, M. G. (1999). *In search of understanding: The case for constructivist classrooms*. Alexandria, VA: Association for Supervision and Curriculum Development.
- Escandell, M., Fortea, M. y Castro, J. (2014). La brecha digital en las personas con discapacidad visual. *Revista INFAD de Psicología. International Journal of Developmental and Educational Psychology*, 1(1), 489–498. <https://doi.org/10.17060/ijodaep.2014.n1.v1.396>
- Garibotti, G. M., Zacharias, D. R., Treuque, J., Guardamagni, A. L., Huaylla, C. A., Vega, R. M., Miori, G., y Viozzi, G. P. (2020). Una propuesta de enseñanza de estadística en la escuela secundaria mediante el abordaje de problemas comunitarios. *Contextos de Educación*, 28(20).
- Johnson, D. W., Johnson, R. T., & Holubec, E. J. (1994). *The new circles of learning: Cooperation in the classroom and school*. Association for Supervision and Curriculum Development.
- Kang, H. S., Cha, J., & Ha, B. W. (2013). What should we consider in teachers' professional development impact studies? Based on the conceptual framework of Desimone. *Creative education*, 4(04), 11.

- Mace, R. L. (1998). Universal Design in Housing. *Assistive Technology*, 10(1), 21–28.
<https://doi.org/10.1080/10400435.1998.10131957>
- Pastor, C. A. (2019). Diseño Universal para el aprendizaje: un modelo teórico-práctico para una educación inclusiva de calidad. Dialnet. <https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7449797>
- SAS Institute Inc. (2020). SAS Graphics Accelerator. Recuperado de <https://chromewebstore.google.com/detail/sas-graphics-accelerator/ockmipfaiiahknplnepcagodillgoko>
- Schreiter, S., Friedrich, A., Fuhr, H., Malone, S., Brünken, R., Kuhn, J., & Vogel, M. (2024). Teaching for statistical and data literacy in K-12 STEM education: A systematic review on teacher variables, teacher education, and impacts on classroom practice. *ZDM–Mathematics Education*, 56(1), 31-45.
- Schunk, D. H. (2012). *Teorías del aprendizaje: Una perspectiva educativa*. (pp. 228-277). Pearson.
- Slavin, R. (1999). *Grupo de estudio sobre aprendizaje cooperativo: aprendizaje cooperativo. teoría, investigación y práctica*. Aique Grupo Editor.
- Vygotsky, L. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.



La creación de problemas realizada por el profesor

Amador Augusto **Paredes** Chavez
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

paredes.a@pucp.edu.pe

Augusta **Osorio** Gonzales
Pontificia Universidad Católica del Perú
Perú

arosorio@pucp.edu.pe

Resumen

En esta ponencia se realiza una sinopsis de la investigación desarrollada en Paredes (2024), cuyo objetivo central pretende identificar las mejoras que un profesor debe considerar en su proceso de creación de problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria. Para alcanzar este propósito, el estudio parte de los criterios que él emplea al crear sus problemas; luego se descubre el paradigma de la investigación: los criterios requeridos para el logro del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticas (CCDM) basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS). Después del análisis se precisa que diversas respuestas plausibles y errores intencionales son algunas de las mejoras a tener en cuenta.

Palabras clave: Reflexión docente; Creación de problemas; Tareas; Medidas de tendencia central.

Antecedentes en la creación de problemas

Durante las últimas dos décadas, las investigaciones sobre creación de problemas han ido en aumento (Paredes, 2024). Pero, ¿qué es un problema de Matemáticas? Un problema de Matemáticas es una tarea que no es de fácil solución (Martín, 2022). ¿Qué supone crear un problema de Matemáticas? Crear un problema de Matemáticas significa obtener un problema que anteriormente no existía y que en su estructura presenta cuatro elementos básicos: información, requerimiento, contexto y entorno matemático (Malaspina, 2017). La creación puede darse de

dos maneras, por variación de uno o más de los elementos básicos de un problema existente o por elaboración (Malaspina, 2017).

En forma experimental se pudieron determinar cuatro criterios empleados por los profesores al crear problemas: el atractivo del problema, el contexto de los estudiantes, que promueva el razonamiento matemático y que posea una estructura de matematización (Pino-Fan et al., 2020). De lo anterior se puede afirmar que la creación de problemas es una competencia de los profesores de Matemáticas que demanda cierto grado de creatividad y dificultad (Carrillo et al., 2021); sin embargo, el profesor ha de ser eficiente formulando problemas (Chico et al., 2023). En este sentido, la reflexión permanente lo llevará a describir, explicar y valorar su proceso creativo con la finalidad de optimizarlo (Godino et al., 2018).

La importancia de la creación de problemas

Una de las características del enfoque Centrado en la Resolución de Problemas, señalada en el Programa Curricular de Educación Secundaria del Ministerio de Educación del Perú, es la creación de problemas de Matemáticas realizada por el profesor (Minedu, 2016). La creación de problemas de Matemáticas por los profesores es una destreza que promueve el aprendizaje de docentes y estudiantes (Carrillo et al., 2021). La trascendencia de la creación de problemas ha sido mencionada por hombres de ciencia e investigadores en los campos de las Matemáticas y la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas (Malaspina, 2017). Durante mucho tiempo, el planteamiento de problemas de Matemáticas fue valorado como un rasgo de la creatividad o del talento extraordinario (Silver, 1994).

Creación de problemas sobre medidas de tendencia central

El presente trabajo es una síntesis de la investigación desarrollada en Paredes (2024), cuyo propósito radica en identificar las posibles mejoras que un experimentado profesor de Matemáticas del nivel secundario tendría que realizar en su proceso de creación de problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria a partir de las diferencias observadas entre los criterios que emplea y los criterios del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” (Problem Posing) del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor o modelo CCDM (Pino-Fan et al., 2022), basado en el Enfoque Ontosemiótico (EOS).

Se debe mencionar que el objeto estadístico seleccionado por el profesor se encuentra presente en los desempeños de la competencia “Resuelve problemas de gestión de datos e incertidumbre” de los cinco grados del nivel secundario (12 a 16 años de edad); específicamente, en primer grado de secundaria, cuatro de los siete desempeños de esta competencia hacen referencia a las medidas de tendencia central (Minedu, 2016). También se debe precisar que este objeto estadístico pone a nuestra disposición medidas representativas de un conjunto de datos, nos indica su centro; no es posible la realización de procesos de inferencia sin las medidas de tendencia central (INEI, 2001). Adicionalmente, nuestro objeto estadístico simplifica la información, le da confiabilidad, es esencial en el análisis estadístico y en la toma de decisiones y es útil en situaciones de la vida real (UNIR, 2024).

Diseño metodológico

En la investigación presentada en Paredes (2024), la metodología es cualitativa y la estrategia empleada es estudio de caso. La unidad en estudio es un profesor de secundaria y el caso es el proceso que desarrolla al crear problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a sus estudiantes de primer grado de secundaria. El paradigma de la investigación lo conforman los criterios del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM y, a su vez, el enfoque es de tipo fenomenológico.

En Paredes (2024), el caso para su posterior análisis es detallado por la unidad en estudio luego de un proceso de reflexión profunda en el que presenta los criterios que emplea al crear problemas. Se subraya el hecho de que hasta la finalización de esta reflexión el paradigma de la investigación le era desconocido. Lo particular de este estudio radica en que el profesor del caso es también el investigador.

Seguidamente, se presentan aspectos mencionados en Paredes (2024) relacionados con la creación de problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria que realiza la unidad en estudio luego de haber reflexionado sobre este punto.

La reflexión del profesor

El profesor que se estudia menciona haber laborado en instituciones educativas particulares y estar nombrado en una institución educativa estatal desde hace aproximadamente 27 años, que incluyen siete años de desempeño como subdirector. También señala que empezó a crear problemas de Matemáticas casi desde el inicio de su experiencia profesional (Paredes, 2024).

Cinco son las motivaciones que ha tenido para crear problemas sobre medidas de tendencia central dirigidos a estudiantes de primer grado de secundaria: el aprendizaje de los estudiantes, el lenguaje empleado en los textos escolares, el nivel de exigencia de los problemas de estos textos, la participación de los estudiantes y su propio desarrollo profesional (Paredes, 2024).

El procedimiento que utiliza al crear un problema considera, en primer lugar, el tema a abordar: las medidas de tendencia central. En segundo lugar, fija uno o más objetivos que desea alcanzar con el problema; luego piensa en una situación real de interés de sus estudiantes. Posteriormente, realiza una simulación de los datos y formula uno o más requerimientos; finalmente, resuelve el problema con la finalidad de verificar que la construcción sea correcta (Paredes, 2024).

Usando este procedimiento, el profesor crea tres problemas que usará como ejemplos durante el desarrollo de la sesión: uno sobre media, otro sobre mediana y el tercero sobre moda. A su vez, crea también 30 problemas que propondrá a sus estudiantes para que los resuelvan: 10 sobre media, 10 sobre mediana y 10 sobre moda. Seguidamente, elabora una escala que presenta cinco niveles que van en orden creciente de dificultad para clasificar y ordenar los problemas que ha creado (Paredes, 2024). La escala de dificultad la podemos observar en la Tabla 1.

Tabla 1
Escala de dificultad de los problemas creados.

Nivel	Descripción
1	La situación real, los datos y el requerimiento del problema se presentan en el mismo orden y de la misma manera que en el problema que fue presentado como ejemplo.
2	El problema de este nivel difiere del anterior únicamente en que introduce una expresión simbólica en el requerimiento.
3	El problema presenta la situación real y los datos organizados en una tabla de frecuencias absolutas. El requerimiento es presentado de manera parecida a la del problema presentado como ejemplo.
4	El problema presenta la situación real y los datos representados en gráficos estadísticos de barras o de sectores. El requerimiento es expresado mediante una pregunta.
5	El problema requiere encontrar uno de los datos a partir de los otros datos y de la medida de tendencia central que refiere el problema.

Fuente: tomado de Paredes, 2024, p. 57.

En la Tabla 1 puede observarse las diferencias cada vez mayores que progresivamente existen entre los niveles de dificultad de los problemas. Un siguiente aspecto mencionado consiste en agregar a cada uno de sus problemas la solución que considera pertinente, la misma que denomina “solución ideal”. Asimismo, incluye las soluciones incorrectas que supone va a observar en sus estudiantes; a estas las denomina “soluciones esperadas” (Paredes, 2024).

A continuación, se presentan dos problemas creados por este profesor y que están incluidos en Paredes (2024).

1. La directora de la Institución Educativa 5049, Emma Dettmann de Gutiérrez, averiguó el número de hijos que tienen 20 de sus padres de familia, obteniendo los siguientes datos: 3, 4, 5, 2, 2, 4, 3, 3, 3, 2, 1, 3, 3, 2, 3, 4, 4, 2, 3, 4. Encuentra e interpreta la media aritmética del número de hijos que tienen estos padres de familia. (Nivel 1).

Objetivos: Resolver el problema haciendo uso de la definición de media aritmética para datos no agrupados en intervalos e interpretar el resultado obtenido.

Este problema será usado como ejemplo durante el desarrollo de la sesión. Puede observarse que cumple con la descripción del nivel 1 de la Tabla 1.

Solución ideal. Los estudiantes aplican la definición de media aritmética para datos no agrupados en intervalos y obtienen el resultado correcto.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{20} x_i}{20} = \frac{1}{20} (3 + 4 + 5 + 2 + 2 + 4 + 3 + 3 + 3 + 2 + \dots + 4) = \frac{60}{20} = 3.$$

Luego interpretan el resultado obtenido de esta manera: “Los 20 padres de familia de esta institución educativa tienen un promedio de 3 hijos”.

Soluciones esperadas. Algunos estudiantes obtienen un valor diferente del 60 en el numerador. Un número reducido de estudiantes obtiene el resultado $\bar{x} = 3$, pero no responden cuando se les pide la interpretación del mismo.

2. Las calificaciones de un estudiante de secundaria en 11 competencias durante el primer bimestre fueron las siguientes: B, A, C, AD, B, B, C, B, C, AD, B. Halla e interpreta la M_e de estas calificaciones. (Nivel 2).

Objetivos: Resolver el problema empleando la definición de la mediana para datos no agrupados en intervalos e interpretar el resultado obtenido.

Este problema difiere del anterior en la expresión simbólica M_e presente en el requerimiento; por esta razón se le ubica en el nivel 2 de la Tabla 1.

Solución ideal. Los estudiantes ordenan en forma ascendente las calificaciones.

C, C, C, B, B, B, B, B, A, AD, AD.

Entonces encuentran la posición P de la mediana haciendo el cálculo siguiente:

$$P = (11 + 1)/2 = 6$$

Luego concluyen que $M_e = B$ e interpretan el resultado de esta forma: “La mitad de las calificaciones de este estudiante es como máximo B, mientras que la otra mitad de sus calificaciones es como mínimo B”.

Soluciones esperadas. Algunos estudiantes mencionan que no se pueden ordenar los datos de este problema porque son cualitativos. Un pequeño grupo de estudiantes ordena los datos en forma ascendente e identifica a la mediana, pero tiene dificultades para interpretar el resultado que ha obtenido.

En la parte final de la reflexión observada en Paredes (2024), se puntualizan los criterios empleados en la creación de los problemas, los mismos que pueden observarse en la Tabla 2.

Tabla 2

Criterios contemplados al crear problemas.

¿Qué considera el docente?	Justificación
1. Los desempeños del Programa Curricular de Educación Secundaria.	El Programa Curricular de Educación Secundaria es el documento oficial del Ministerio de Educación del Perú. De este documento se seleccionan dos desempeños: “Expresa con diversas representaciones y lenguaje matemático su comprensión sobre la media, la mediana y la moda para datos no agrupados...” y “Lee tablas y gráficos de barras o circulares, así como diversos textos que contengan valores de medida de tendencia central...” (Minedu, 2016, p. 172).
2. Los resultados de la evaluación diagnóstica.	Es necesario saber los conocimientos previos con los que cuentan los estudiantes.
3. Las características de la institución educativa.	Es de modalidad Jornada Escolar Completa (JEC) con 6 horas semanales de clases en el área de Matemática.
4. Las características de los estudiantes.	Los problemas están dirigidos a un grupo específico de personas.
5. Situaciones reales de interés de los estudiantes.	Es fundamental motivar a los estudiantes mediante situaciones reales que son importantes para ellos.
6. Proporcionar información diversa.	Es básico aumentar el bagaje de conocimientos de los estudiantes sobre cultura general.
7. El uso de un lenguaje sencillo.	Los problemas deben ser entendidos por la totalidad de los estudiantes.
8. Una escala con cinco niveles de dificultad.	Es indispensable la gradación de los problemas de un menor a un mayor nivel de dificultad.

Fuente: adaptado de Paredes, 2024, p. 66-69.

De acuerdo con lo observado en la Tabla 2, ocho son los criterios empleados por el profesor en su proceso creativo. Seguidamente, se presentan los criterios por niveles de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM que serán utilizados en el análisis de la reflexión (Paredes, 2024).

Marco teórico

La competencia “Propuesta de tareas” (Problem Posing) es una de las tres competencias matemáticas del modelo CCDM (Pino-Fan et al., 2022). El nivel de logro de un profesor en esta competencia puede determinarse a través del cumplimiento de los criterios de los niveles 0, 1, 2, 3 que se observan en la Tabla 3.

Tabla 3
Niveles de logro de la competencia “Propuesta de tareas”.

Nivel	Criterios
0	El docente reproduce tanto el enunciado de las tareas como sus soluciones, y hace uso de Internet, libros de texto o programas de la asignatura del grado en el que imparte clases. Esto último lo hace para establecer las tareas matemáticas que se propondrán en el proceso de estudio.
1	El docente propone tareas adecuadas al nivel educativo que imparte. Para ello, considera características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos de los estudiantes y rediseña las tareas del objeto matemático, pero no prevé conceptos erróneos, errores, dificultades o diferentes posibilidades de respuesta. Se trata principalmente de adaptaciones de tareas tomadas de otras fuentes con respecto a las tareas propuestas.
2	El docente propone tareas correspondientes al nivel educativo, considerando aspectos relacionados con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones) y los conocimientos previos del estudiante. Además, considera diversas respuestas plausibles, conceptos erróneos, conflictos o errores en torno a la práctica matemática para su propuesta y los contextos más adecuados según las características, intereses y necesidades de los estudiantes. Las tareas pueden ser adaptaciones o modificaciones de tareas tomadas de otras fuentes o de su propio diseño. El docente no considera que diferentes tipos de situaciones de tareas puedan requerir diferentes significados sobre la noción en estudio.
3	Además, el docente considera nuevas tareas asociadas al tema matemático y propone retos para los estudiantes. Las tareas vinculan el objeto matemático estudiado con otros objetos matemáticos (en el grado escolar, grados anteriores o posteriores). Los significados de las nociones matemáticas que propone estudiar amplían su visión de tipos de situaciones/problemas en términos de los contextos en los que tales nociones pueden ser utilizadas (se consideran las nociones intra y extramatemáticas de las nociones en estudio). En este nivel, el docente anticipa los conflictos o errores de los estudiantes y, en ocasiones, los induce a crear oportunidades de aprendizaje.

Fuente: tomado de Pino-Fan et al., 2022, p. 1416.

En la Tabla 3 se observa que en el nivel 0 el docente selecciona tareas tomadas de otras fuentes, en tanto que en el nivel 1 principalmente las adapta; en el nivel 2 adapta o crea las tareas, mientras que el nivel 3 complementa lo requerido por el nivel 2.

Análisis de la reflexión del profesor

Seguidamente, se presenta el análisis ejecutado en Paredes (2024) a la reflexión del profesor, en particular la comparación de los criterios de la Tabla 2 con los del nivel 2 de la Tabla 3.

Que proponga tareas correspondientes al nivel educativo demanda cuatro aspectos que se examinan a continuación.

El primero de ellos consiste en considerar características relacionadas con el currículo (procedimientos, argumentos o justificaciones, representaciones). En el criterio 1 de la Tabla 2, el profesor menciona haber usado dos desempeños; en cuanto al primero de ellos, por lo observado en los dos problemas de este documento, usa parcialmente, por cuanto requieren el uso del lenguaje matemático, pero no el de las representaciones (tablas de frecuencias y gráficos estadísticos). En cuanto al segundo, por lo examinado en los dos problemas y en la Tabla 1, es usado en forma cabal. Se debe agregar que los problemas creados suponen el uso de otros dos desempeños referidos a las medidas de tendencia central, aunque no son mencionados en la reflexión.

El segundo punto está relacionado con los conocimientos previos de los estudiantes. El criterio 2 de la Tabla 2 los señala y es observable en los desempeños seleccionados, ya que refieren a la moda y a las tablas de frecuencias y gráficos estadísticos (diversas representaciones), objetos estadísticos que se trabajan en el grado anterior de estudios.

En tercer lugar, se requiere considerar diversas respuestas plausibles, conceptos erróneos, conflictos y errores en torno a la práctica matemática. De lo primero se afirma que no se observan en los dos problemas presentados en este documento; de lo segundo, hay un inicio observable en la primera solución esperada del problema 2. De lo tercero se verifica que los problemas presentan los cuatro elementos básicos, son resolubles y emplean un lenguaje sencillo, este último puntualizado en el criterio 7 de la Tabla 2. Por último, los problemas no consideran errores intencionales para que sean corregidos por los estudiantes.

El cuarto aspecto tiene que ver con la consideración de los contextos más adecuados según las características, intereses y necesidades de los estudiantes. El criterio 4 de la Tabla 2 alude a lo primero. Al observar los dos problemas incluidos en esta comunicación, se concluye que son apropiados para estudiantes de primer grado de secundaria. A su vez, el criterio 5 de la Tabla 2 se relaciona con los intereses de los estudiantes, lo que es observable en los contextos extramatemáticos de los dos problemas: el número de hijos de los padres de familia de su institución educativa y las calificaciones. Por último, los criterios 3, 6 y 8 enfatizan las necesidades de los estudiantes.

En consecuencia, la propuesta de tareas correspondientes al nivel educativo ha sido desarrollada por el profesor en forma moderada.

El objeto estadístico es presentado en forma básica, en ocasiones, por lo que se observa en la Tabla 1, vinculado a otros objetos estadísticos (tablas de frecuencias y gráficos estadísticos). Los problemas han sido clasificados según la Tabla 1; no se consideró el contexto intramatemático.

Conclusiones

En Paredes (2024) se mencionan las siguientes conclusiones:

1. El profesor estudiado presenta un avance aceptable en el logro del nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas” del modelo CCDM, que trae consigo algunas limitaciones en la propuesta de tareas, como no incentivar en los estudiantes el uso de las representaciones, el desarrollo de la creatividad a través de las diversas respuestas plausibles o la capacidad de observación mediante errores intencionales. Se recomienda

- tener en cuenta en los problemas creados requerimientos sobre el uso de las representaciones, además, de ser posible, tres maneras diferentes de resolver los problemas, así como la inclusión de errores intencionales en al menos uno de ellos.
2. Los problemas creados presentan básicamente simulaciones de datos, lo cual trae como consecuencia que el estudiante no produzca información. Se recomienda también el uso de instrumentos de recolección de datos tomados de situaciones reales.
 3. Una vez que el profesor logre en forma total el nivel 2 de la competencia “Propuesta de tareas”, debería trazarse como meta el logro del nivel 3 para optimizar la creación de sus problemas sobre el objeto estadístico abordado.

Finalmente, se señala que futuras investigaciones podrían considerar las otras competencias matemáticas del modelo CCDM: la resolución de tareas y el análisis de las prácticas matemáticas ejecutado por los profesores sobre un objeto matemático determinado (Paredes, 2024).

Referencias y bibliografía

- Carrillo, J., Montes, M. y Contreras, L. (2021). La competencia profesional en formulación de problemas escolares. *Ideas para la Educación Matemática*, 163–182.
- Chico, J., Martín-Díaz, J., Montes, M. y Badillo, E. (2023). ¿Qué intenciones didácticas muestran los futuros maestros cuando transforman problemas? *Investigación en Educación Matemática XXVI*, 203-210. <https://seiem.es/docs/actas/26/Comunicaciones/203.pdf>
- Godino, J., Giacomone, B., Font, V. y Pino-Fan, L. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos. Análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (13), 63–83. <https://aiem.es/article/view/3929/4369>
- Instituto Nacional de Estadística e Informática. (2001). *Guía para la evaluación de indicadores sociales de las encuestas de hogares*. https://www.inei.gob.pe/media/MenuRecursivo/publicaciones_digitales/Est/Lib0507/Libro.pdf
- Malaspina, U. (2017). La creación de problemas como medio para potenciar la articulación de competencias y conocimientos del profesor de matemáticas. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone, y M. M. López-Martín (Eds), *Actas del Segundo Congreso Internacional Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Pontificia Universidad Católica del Perú, Perú. <https://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos/malaspina.pdf>
- Martín, J. (2022). *Conocimiento especializado del profesor de matemáticas en contextos de formulación de problemas* [Tesis de Doctorado, Universidad de Huelva]. https://rabida.uhu.es/dspace/bitstream/handle/10272/21453/Conocimiento_especializado_profesor_matematicas.pdf?sequence=2
- Ministerio de Educación del Perú. (2016). *Programa Curricular de Educación Secundaria* (Aprobado por Resolución Ministerial N° 649-2016-MINEDU Parte 4). <https://www.gob.pe/institucion/minedu/normas-legales/169574-649-2016-minedu-parte-4>
- Paredes, A. (2024). *Creación de problemas para la enseñanza de las medidas de tendencia central en estudiantes de primer grado de secundaria*. [Tesis de maestría no publicada]. Pontificia Universidad Católica del Perú.
- Pino-Fan, L., Báez-Huaiquián, D., Molina-Cabero, J. y Hernández-Arredondo, E. (2020). Criterios utilizados por profesores de matemáticas para el planteamiento de problemas en el aula. *Uniciencia*, 34(2), 114-136. <https://www.scielo.sa.cr/pdf/uniciencia/v34n2/2215-3470-uniciencia-34-02-114.pdf>
- Pino-Fan, L., Castro, W. y Font, V. (2022). A macro tool to characterize and develop key competencies for the mathematics teacher's practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, (21), 1407–1432. https://bibliotecadigital.udea.edu.co/bitstream/10495/36812/1/CastroWalter_2023_MacroToolCompetence.pdf
- Silver, E. (1994). On mathematical problem posing. *For the Learning of Mathematics*, 14(1), 19–28. https://www.researchgate.net/publication/284047623_On_mathematical_problem_posing
- Universidad Internacional de La Rioja. (2024). *¿Qué son las medidas de tendencia central y para qué sirven?* <https://colombia.unir.net/actualidad-unir/medidas-tendencia-central/>



La geometría a través de las artes visuales: Diseño de una propuesta didáctica en educación básica

Isabella **Revelo** Mera
Universidad del Valle
Colombia
isabella.revelo@correounivalle.edu.co
Evelio **Bedoya** Moreno
Universidad del Valle
Colombia
evelio.bedoya@correounivalle.edu.co

Resumen

Se presenta una propuesta de un modelo de formación de profesores de Matemáticas centrado en la enseñanza de la geometría con un enfoque en las artes visuales. Para su diseño se han considerado los contenidos curriculares de la educación básica y los recursos necesarios para desarrollar una propuesta de formación docente que integra geometría y artes visuales. Se pretende la coordinación o integración de múltiples registros de representación y la ‘visualización didáctica’, como estrategias heurísticas de mediación para la enseñanza y el aprendizaje de la geometría escolar. Como metodología, se propone una estrategia de Sistematización de la praxis docente, mediante el diseño e implementación de unidades didácticas, basada en la investigación-acción y estudio de casos. Se pretende que los profesores participantes en la experiencia formativa desarrollen saberes (conocimientos y competencias) que los capaciten para: usar las artes visuales como recurso didáctico, reflexionar de manera creativa y crítica en torno a su práctica sobre enseñanza de geometría en educación básica.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Artística; Enseñanza de la Geometría; Formación de Profesores; Visualización didáctica; Conocimiento y Análisis Didáctico; Modelo Local; Sistematización de Experiencias Docentes.

Justificación y fundamentación teórica

De acuerdo con desarrollos teóricos en el campo de la Educación Matemática, la enseñanza de la geometría, a nivel de la educación básica (secundaria), enfrenta desafíos relacionados con dificultades y obstáculos en los procesos curriculares y didácticos, tales como los de construcción, razonamiento, abstracción, visualización y comprensión de conceptos, procesos y objetos matemáticos (Gutiérrez, 1992; Van Hiele, 1999; Presmeg, 2006). La investigación en estos campos, en particular con la emergencia de enfoques educativos y curriculares basados en el modelo STEAM (sigla en inglés), que propone integrar aspectos educativos matemáticos (M), artísticos (A), tecnológicos (T), científicos en general (S) e incluso de ingeniería (E), han venido mostrando y proponiendo considerar elementos educativos de las artes visuales como un recurso didáctico y pedagógico valioso para abordar e intentar superar estas dificultades, al permitir o facilitar establecer conexiones entre conceptos matemáticos (geométricos), múltiples registros de representación visual concretos, y los procesos didáctico-cognitivos esenciales de visualización (Presmeg, 2006; Moreno, et al., 2024; Rey-Valzacchi, et al., 2025). Teniendo en cuenta lo anterior, esta propuesta se fundamenta entre otros en los siguientes marcos de referencias:

En primer lugar, se trabaja la propuesta de los Van Hiele (Dina van Hiele-Geldof & Pierre van Hiele, 1999) que plantea herramientas conceptuales y procedimentales para fundamentar y analizar los procesos de razonamiento y comprensión geométrica por parte de los estudiantes, así como los de diseño, planificación e implementación de los procesos curriculares por parte de los docentes. Esta propuesta describe cinco niveles de razonamiento por los que puede transitar un estudiante durante su proceso de aprendizaje. En particular, la teoría permite analizar, explicar y comprender las dificultades que presentan los estudiantes a lo largo de los distintos niveles de comprensión y aprendizaje que la misma propuesta ha identificado y propuesto como “cinco niveles de razonamiento geométrico.

Esto se ve reflejado en una primera parte del taller que presenta los principios del modelo teórico-práctico de los Van Hiele, y la manera como en la propuesta del modelo local de conocimientos y de análisis didáctico se integra con los aspectos considerados en relación con la conexión con las artes visuales y el desarrollo de la sensibilidad artística o estética por parte de los participantes; lo cual al tenor del modelo planteado por los van Hiele, de alguna manera se refleja también de manera progresiva en el desarrollo de esta habilidad o competencia, tanto parte de los docentes como de los estudiantes. Complementariamente se propondrá una reflexión que siempre es requerida por los docentes, sobre la evaluación en el aula de estos desarrollos de niveles cognitivos y de las fases instruccionales (Gutiérrez, 1998).

Del mismo modo, desde la perspectiva de la teoría semiótica y cognitiva de los registros de representación de Duval (2017), uno de los principales obstáculos para el aprendizaje de las Matemáticas radica en la dificultad para comprender y utilizar conceptos en distintos sistemas de registros de representación (verbal, gráfico, simbólico, etc.), lo cual es particularmente evidente en el aprendizaje de la geometría, reconociendo que la inclusión de recursos visuales y artísticos puede favorecer la coordinación entre registros, facilitando la comprensión de conceptos geométricos mediante representaciones concretas y estéticas. Por su parte, Presmeg (2006) plantea que la visualización es una herramienta fundamental en la comprensión matemática, al permitir formar y manipular mentalmente imágenes. A este enfoque se suma el concepto de

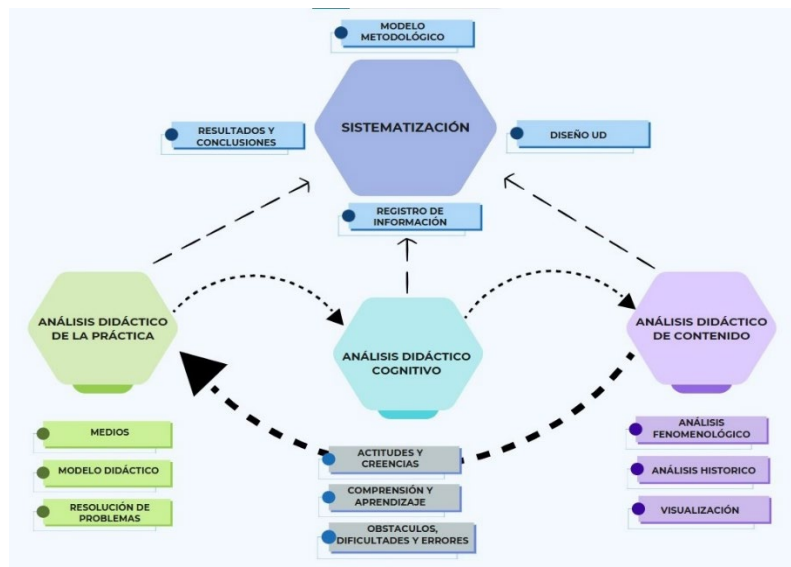
visualización didáctica desarrollado por Bedoya (2002, 2025), entendida como la intencionalidad pedagógica de diseñar representaciones visuales que favorezcan procesos de construcción de significados matemáticos. La propuesta aquí planteada busca formar docentes capaces de diseñar experiencias didácticas en las que la visualización (a través de las artes visuales) se constituya un eje mediador entre el conocimiento geométrico y la experiencia del estudiante.

Así, el diseño, implementación y reflexión en torno al modelo local de conocimientos y de análisis didáctico, concebido como una estrategia de formación, desarrollo profesional, investigación didáctica e innovación curricular por parte de los docentes de Matemáticas, se fundamenta en los desarrollos iniciales del grupo PNA de la Universidad de Granada (España), sobre fundamentos teóricos y prácticos en el campo de la Didáctica de las Matemáticas, la formación y desarrollo profesional docente y la innovación curricular y didáctica, referidos al conocimiento y el análisis didácticos (Rico, Lupiáñez y Molina, 2015). De manera concreta, estos referentes teórico-conceptuales y procedimentales proponen al docente de Matemáticas, herramientas para la planificación, implementación y evaluación de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, permitiendo identificar obstáculos y dificultades de comprensión y aprendizaje, así como planificar y seleccionar recursos pertinentes para el diseño o selección de actividades, tareas y recursos didácticos para los estudiantes y con carácter formativo para los docentes. En este sentido, Bedoya (2002, 2025) concibe la propuesta de modelos locales de conocimientos y de análisis didácticos como estrategia formativa y de desarrollo profesional docente, considerando el saber del docente como situado o contextualizado, por lo cual promueve una formación profesional que emerge de la reflexión sobre la propia práctica y que se concreten en propuestas de innovación y desarrollo curricular en distintos niveles de concreción (macro, mezo y micro) curricular.

Desde el campo de la educación artística, Eisner (2002) defiende que las artes visuales no sólo contribuyen al desarrollo estético y expresivo, sino que también constituyen formas válidas de conocimiento. Al integrarlas en la enseñanza de la geometría, se abren nuevas posibilidades para la comprensión conceptual mediante la exploración de simetrías, proporciones, transformaciones y estructuras espaciales. La intersección entre el arte y la Matemática permite generar experiencias significativas, conectadas con la sensibilidad, la creatividad y la interpretación visual del entorno.

Así como se mencionó anteriormente, en años recientes se ha promovido la integración en los currículos educativos del enfoque STEAM, el cual propone fomentar una integración interdisciplinaria en la educación. Este enfoque destaca la importancia de las artes como un componente esencial para el desarrollo de habilidades creativas y críticas en los estudiantes, estableciendo relaciones entre las disciplinas científicas y tecnológicas. En este marco, la integración de las artes visuales en la enseñanza de la geometría no solo enriquece el aprendizaje matemático, sino que también contribuye a una formación más holística y conectada con el mundo real. De la misma manera que el año 2025 se celebra internacionalmente como un año para fomentar la relación entre las Matemáticas y las artes visuales, promoviendo iniciativas que exploran las conexiones entre estas disciplinas. Esta propuesta se alinea con este objetivo, ofreciendo una perspectiva innovadora para la enseñanza de la geometría a través de las artes visuales.

A continuación, se presenta esquemáticamente la estructura de Modelo local de conocimientos y de análisis didácticos, concebido como propuesta teórico-práctica de formación y desarrollo profesional de los docentes de Matemáticas, como estrategia metodológica de investigación en Educación Matemática, así como estrategia y propuesta de innovación y desarrollo curricular.



Objetivos

En el diseño y construcción de la propuesta del modelo local de conocimientos y de análisis didácticos, se trabaja a partir de los siguientes objetivos, los cuales se basan en los objetivos general y específicos de un proyecto de innovación investigación y formación más amplio que tiene como título **“La geometría a través de las artes visuales: diseño de una propuesta didáctica en educación básica”** que se ha venido realizando por parte de los autores, como un proyecto de tesis en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad del Valle (Cali, Colombia). Sin embargo, para el desarrollo del presente taller se retoman específicamente los dos primeros objetivos específicos como foco central de las actividades propuestas.

Objetivo General

Socializar y reflexionar la praxis en torno a una propuesta didáctica y curricular sobre formación y desarrollo profesional (de competencias) de profesores de Matemáticas que integre las artes visuales en la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, partiendo del enfoque STEAM y las iniciativas internacionales que la relación matemáticas y creatividad (artes).

Objetivos Específicos

- Presentar y reflexionar en torno a una estrategia de formación y desarrollo profesional de profesores de Matemáticas, que integra artes visuales como recurso curricular y didáctico de la geometría en educación básica, basada en el diseño de un modelo didáctico (local) de conocimientos y de análisis didácticos.

- Promover una estrategia de formación y desarrollo profesional docente en Matemáticas basada en la reflexión continua sobre sus prácticas profesionales, mediante la sistematización de experiencias y la investigación-acción con estudio de casos.
- Reflexionar en la acción sobre una propuesta de diseño de unidades didácticas basadas en un modelo teórico (conceptual) y práctico (procedimental) de conocimientos y de análisis didácticos e indagación educativa que integra artes visuales y geometría en educación básica.

Metodología

El desarrollo de esta ponencia-taller se ha planteado en tres fases:

Fase de Planificación

Comprende el diseño de unidades didácticas que integren las artes visuales y la geometría, para promover la exploración de composiciones artísticas y ejercicios de observación en el entorno que permitan la educación de la mirada, entendiendo esta como una habilidad y competencia de visualización y pensamiento espacial que permite entrar al mundo de la geometría a través de la lectura y percepción de representaciones visuales (Duval y D'Amore; 2023). Para ello, se parte de la selección de obras de arte y actividades visuales que permitan explorar conceptos geométricos (Simetría, proporción, perspectiva, etc.).

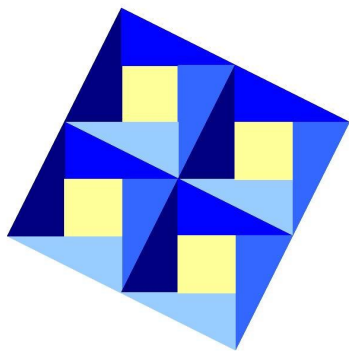


Figura 1. Meavilla; 2006

Por ejemplo, la imagen permite visualizar a través de una representación artística (Meavilla; 2006) el teorema de Pitágoras y una de sus “más bellas” demostraciones (Bhaskara, s. XII). Sin lugar a duda, un profesor de Matemáticas (o de artes visuales), requeriría una formación especializada de carácter geométrico y en educación artística, para poder considerar una propuesta didáctica basada en procesos de visualización, razonamiento visual y espacial como recurso organizador y de mediación didáctica y curricular.

Fase de Implementación

En esta fase, el objetivo principal es realizar actividades prácticas dirigidas a profesores, en los cuales puedan experimentar directamente con las unidades didácticas diseñadas, a través de las cuales los docentes tendrán la oportunidad de aplicar los enfoques y metodologías propuestas, que parten de la visualización como la conexión principal entre geometría y arte. Dado que, la visualización es considerada una habilidad cognitiva que permite a las personas generar y manipular imágenes espaciales, facilitando la resolución de problemas teóricos y prácticos

(Hegarty & Waller, 2005). Así mismo, Gutiérrez (1992) describe esta habilidad como una capacidad que posibilita la creación, procesamiento y manipulación de imágenes visuales permitiendo una mejor comprensión de conceptos espaciales.

Así mismo y con el propósito de enriquecer este proceso se da a conocer el uso de técnicas de investigación-acción, que permite la reflexión continua sobre la práctica educativa, debido a que este promueve una mejora constante en el que los profesores se convierten en agentes activos de su propio aprendizaje y desarrollo profesional.

Fase de Análisis y Evaluación

Para terminar, se presenta el trabajo que se ha llevado a cabo para el análisis y evaluación de la propuesta utilizando herramientas como la sistematización de experiencias docentes. Este proceso incluye el uso de estudios de caso que permiten examinar de forma contextualizada la implementación de las estrategias didácticas. Además de comprender cómo la reflexión y retroalimentación continua permite realizar modificaciones en el diseño.

Estructura del Taller

Introducción (10 minutos)

Se propone un espacio para la presentación del marco teórico de la propuesta y los objetivos que la impulsan. Con ello, se propone una discusión alrededor de los desafíos presentes en la enseñanza de la geometría y la importancia de integrar las artes visuales en el marco del modelo STEAM y las iniciativas internacionales para 2025; así como los fundamentos y estructura del modelo local de conocimientos y de análisis didáctico.

Actividad Práctica (60 minutos)

1. Se propone a los docentes una serie de imágenes alusivas a la relación geometría y arte con el objetivo de trabajar la visualización como el proceso principal que permite la conexión entre estas áreas y mediador en el proceso de enseñanza y aprendizaje.
2. Los participantes trabajarán en grupos para diseñar una actividad didáctica que integre las artes visuales y la geometría.

Reflexión y Discusión (20 minutos)

En este espacio se busca que los participantes presenten las ideas abordadas en las actividades diseñadas, además de generar discusión acerca de las posibilidades y limitaciones del uso de las artes visuales en la enseñanza de la geometría.

Cierre (20 minutos)

Conclusiones y reflexiones finales.

Ejemplos orientadores

A continuación, se presentan algunos ejemplos que ilustran cómo integrar las artes visuales en la enseñanza de la geometría. Cada uno incluye una obra visual, el concepto geométrico a trabajar, una actividad propuesta y las competencias docentes a desarrollar.

1) El teorema de Pitágoras



Figura 2. Bhaskara. Por Max Bill (1981) Figura 3. Euclides. Por Crockett Johnson (1965)

- Actividad propuesta: Análisis e interpretación de la obra, seguida por la reconstrucción de la demostración visual mediante recortes geométricos. Reflexión sobre su potencial como recurso didáctico. Diseño de nuevas representaciones artísticas basadas en teoremas clásicos.
- Competencias docentes:
 - o Uso de demostraciones visuales como mediadores conceptuales.
 - o Fomento de la creatividad como medio para representar y enseñar conceptos matemáticos.

2) Teselaciones y transformaciones geométricas.



Figura 4. M. C Escher. Círculo al límite

- Actividad propuesta: Diseño de mándalas, mosaicos o patrones geométricos inspirados en Escher. Aplicación de transformaciones para generar figuras artísticas.
- Competencias docentes:
 - o Uso y construcción de obras visuales para el manejo del espacio y el plano.
 - o Desarrollo de estrategias de visualización y razonamiento espacial.
 - o Fomento de la creatividad como medio para representar y enseñar conceptos matemáticos.

3) Teselaciones del plano al espacio.

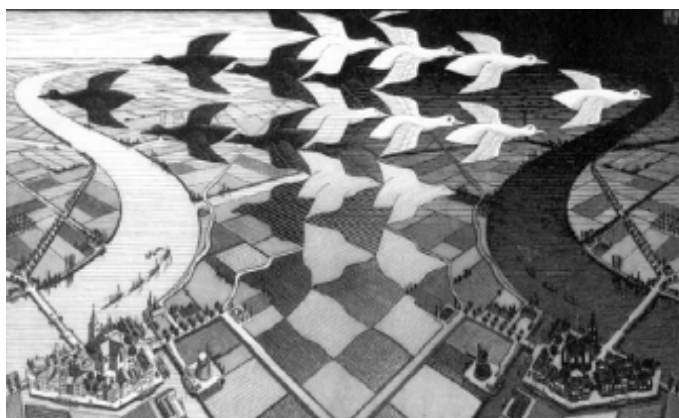


Figura 5. M. C Escher. Día y Noche (1939)

- Actividad propuesta: Diseño de patrones geométricos inspirados en Escher. Aplicación de transformaciones para generar figuras artísticas. Analizar características de las figuras bidimensionales y tridimensionales. Reflexionar sobre la modificación de las características de las figuras para pasar del plano al espacio.
- Competencias docentes:
 - o Diseño de actividades visuales que integren arte y geometría;
 - o Desarrollo de estrategias para el recubrimiento del plano y el espacio.
 - o Fomento de la creatividad como medio para la comprensión del cambio de características entre conceptos.

Resultados esperados

- Desarrollo de habilidades en los profesores para integrar las artes visuales en la enseñanza de la geometría, en línea con el modelo STEAM.
- Creación de un banco de recursos didácticos (unidades didácticas, actividades, materiales visuales) que puedan ser utilizados en el aula.
- Reflexión crítica sobre la práctica docente y su impacto en el aprendizaje de los estudiantes, en el marco de las iniciativas internacionales que promueven la relación entre Matemáticas y artes en 2025.

Conclusiones

Esta propuesta busca analizar y contribuir a la formación de profesores de Matemáticas mediante un enfoque innovador que integra artes visuales en la enseñanza de la geometría, en el marco del modelo STEAM y en consonancia con las iniciativas internacionales que promueven la relación entre Matemáticas y artes en 2025. Al fomentar la reflexión sobre la práctica docente y el uso de recursos visuales, se espera mejorar la comprensión de los conceptos geométricos

Referencias y bibliografía

- Bedoya (2025) *Didáctica de las matemáticas: conocimiento y análisis didácticos, formación de profesores, investigación e innovación curricular en educación matemática*. Documento de trabajo. Facultad de Educación y Pedagogía. Universidad del Valle. Cali.
- D'Amore, B.; Duval, R. (2023). Similitudes y diferencias entre la educación de la mirada en geometría elemental y en arte figurativo. *Educación Matemática*, vol. 35, núm. 1, abril de 2023.
<https://doi.org/10.24844/EM3501.02>
- Duval, R. (1999). *Semiosis y pensamiento humano: Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Peter Lang.
- Eisner, E. W. (2002). *The Arts and the Creation of Mind*. Yale University Press.
- Elliot, J. (1991). *Action Research for Educational Change*. Open University Press.
- Gutiérrez, A. (1992): Procesos y habilidades en visualización espacial, en *Memorias del Tercer Simposio Internacional sobre Investigación en Educación Matemática: Geometría* (pp.44-59). México: CINVESTAV.
- Gutiérrez, A. (1998). On the assessment of the Van Hiele levels of reasoning. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 20(2, 3), 27-46.
- Hegarty, M., & Waller, D. (2005). Individual differences in spatial abilities. In P. Shah, & A. Miyake (Eds.), *The Cambridge handbook of visuospatial thinking* (pp. 121-169). Cambridge: Cambridge University Press.
- Moreno Badás, A., y García-Terceño, E. M. (2024). Educación inclusiva: propuesta didáctica STEAM integrada para alumnado de Educación Primaria centrada en el aprendizaje de las figuras planas. *Educación Matemática*, 36(3), 274-299.
- Presmeg, N. C. (2006). Research on Visualization in Learning and Teaching Mathematics. En *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 205-235).
- Rey Valzacchi, J.; Aprende Virtual – Instituto Latinoamericano de Desarrollo Profesional Docente (2025). STEAM y el futuro del aprendizaje con IA - Metodologías disruptivas para desarrollar habilidades del siglo XXI
<https://acortar.link/shgCwu>
- Van Hiele, P. M. (1999). *Developing Geometric Thinking through Activities That Begin with Play*. Teaching Children Mathematics 6 (February 1999): 310–16.



Laboratorio de Matemáticas en la formación continua del docente de la educación básica primaria

Alfonso **Romero** Huertas
 Universidad Antonio Nariño
 Colombia
romerohuertas78@gmail.com

Resumen

La presente comunicación hace parte del resultado de investigación realizada con docentes licenciados en educación básica primaria, y que atienden el área de Matemáticas en este nivel educativo. En la investigación se ha planteado como objetivo, construir un modelo de formación continua para los docentes de la educación básica primaria que atienden el área en mención y a través del cual se fortalezca el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en el área de Matemáticas. Al respecto, se ha considerado pertinente la metodología investigación basada en diseño, dentro del enfoque cualitativo, para dirigir la propuesta y construir el modelo a medida que se avanzó en el desarrollo del proyecto.

Palabras clave: Formación docente; Laboratorio de Matemáticas; Modelo pedagógico.

Definición y relevancia del problema

Los programas de formación docente es una estrategia que, en las últimas décadas en cuanto a cobertura, en la atención y acompañamiento en los diferentes territorios se han fortalecido en Colombia; sin embargo, la mayoría de estos, son programas de momento de un gobierno de paso, generando el riesgo o tendencia a desaparecer, principalmente cuando no se trabaja de manera eficaz en la consolidación de procesos y en la capacidad instalada en las instituciones educativas. En consecuencia, la mejora en los aprendizajes de los estudiantes aún no se evidencia tanto en desempeños institucionales como en pruebas externas. Luego, es evidente que el mejoramiento de la educación básica en Colombia requiere cambios significativos desde las políticas de estado y prácticas de aula, de tal forma que impacten de manera positiva en los aprendizajes de los estudiantes.

Según el estado del arte, en algunos países del mundo el laboratorio de Matemáticas es una estrategia que ha impactado positivamente en la formación de docentes y estudiantes. Al respecto, Bartolini Bussi y Maschietto (2006) citado por Huertas (2023), en su “*Laboratorio de Máquinas Matemáticas (MMLab)*”, en el Departamento de Matemáticas de Módena Italia, contiene una colección de instrumentos geométricos (máquinas matemáticas), reconstruidos con un objetivo didáctico, según el diseño descrito en textos históricos desde la Grecia clásica hasta el siglo XX. Este trabajo fue el punto de partida del proyecto “*Ciencias y Tecnología - Laboratorio de Matemáticas*” para la formación de profesores (2008-2013), en el que muchos profesores en Italia construyeron y propusieron sesiones de laboratorio con máquinas matemáticas para sus prácticas pedagógicas.

Por lo anterior y demás investigaciones analizadas, se indica que la formación docente debe contar con un enfoque donde prevalezca lo práctico sobre lo teórico; por lo tanto, y con el objetivo de consolidar un modelo para la formación de los docentes en ejercicio, se ha desarrollado esta propuesta, teniendo en cuenta además que la gran mayoría de ellos no son licenciados en Matemáticas, y se ha evidenciado la falta de profundización en los diferentes componentes que estructuran el área.

Este proyecto se ha desarrollado a través de un sistema de actividades que incluyen la resolución de problemas como su eje fundamental, cuidadosamente diseñadas desde las oportunidades de mejora identificadas en los docentes, y en cuyo abordaje de las mismas se gestionó diversidad de material concreto y virtual, generando de esta manera escenarios dinámicos de trabajo, caracterizados por la posibilidad que brindan para la experimentación, exploración del medio e integración con la tecnología.

Referencial teórico

Se sitúa al lector en los aspectos teóricos que implican el propósito de la investigación.

Laboratorio de Matemáticas en la formación docente

De acuerdo con Huertas (2023), se define laboratorio de Matemáticas como “un espacio físico diferente del aula, en cuanto se pretende construir un modelo de formación continua de docentes en ejercicio, lo cual requiere un espacio específico en cada institución educativa o sitio estratégico donde sea posible focalizar profesores de varias instituciones” (p. 171).

El laboratorio de Matemáticas tendrá a disposición diversidad de materiales: manipulativos concretos y virtuales, herramientas tradicionales de dibujo (escuadra, regla, compás) y máquinas matemáticas (pantógrafo). Igualmente, el laboratorio estará equipado con mesas y sillas, garantizando la comodidad de los estudiantes (docentes) para el trabajo que, en su mayor parte, está diseñado para realizarlo de forma grupal.

¿Qué es un modelo pedagógico?

Shulman, L (1987), Chávez, H.L. (2008), Kitchen y Petrarca (2016), citado por Huertas (2023), definen un modelo pedagógico como una propuesta teórica que incluye conceptos de

formación, de conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido, principalmente; estos se encargan de organizar el currículo de acuerdo a fines y principios de la educación, y al cómo desarrollar la práctica pedagógica en coherencia con los referentes teóricos.

Máquina matemática

Para la definición de máquina matemática, se tendrá en cuenta la definición de Bartolini y Maschietto (2008), quienes definen máquina matemática como un artefacto diseñado y construido con el propósito de forzar un punto, un segmento de línea o una figura plana (apoyada por un soporte material que los hace visibles y tocables), a moverse o transformarse de acuerdo con una ley matemática que ha sido determinada por el diseñador. Es así como algunas máquinas permitirán al usuario realizar construcciones geométricas, otras realizar acciones como contar, hacer cálculos, representar números, entre otras. Las herramientas de las TIC (Tecnologías de la Información y la Comunicación, por ejemplo, calculadoras, software dinámico) estarán igualmente disponibles y se utilizarán con frecuencia en el laboratorio de Matemáticas.

Manipulativos concretos y manipulativos virtuales

En la presente investigación se considera como definición de material concreto la propuesta por Swan y Marshall (2010): “un material de manipulación matemática es un objeto que puede ser manejado por un individuo de manera sensorial durante el cual se fomentará el pensamiento matemático consciente e inconsciente” (p. 2). En consecuencia, un objeto manipulativo tiene el potencial de conducir a una toma de conciencia y desarrollo de conceptos e ideas relacionadas con las Matemáticas los cuales serán diseñados para trabajar en el laboratorio con un propósito pedagógico.

En cuanto a manipulativos virtuales, Moyer y otros (2002), citados por Hunt y otros (2011), los definen como “una representación visual interactiva, basada en la Web, de un objeto dinámico que proporciona oportunidades para construir conocimiento matemático” (p.185). Además, los autores identifican la interacción con manipulativos virtuales como un ejemplo del proceso de representación de las Matemáticas recomendado por los estándares National Council of Teachers of Mathematics (NCTM), en cuanto resulta favorable para que los estudiantes interioricen sus propias representaciones de los conceptos matemáticos mediante la interacción con una herramienta dinámica durante las experiencias y prácticas pedagógicas.

La resolución de problemas

La Educación Matemática, desde el punto de vista de la enseñanza, debe ser dirigida a la construcción de significado robusto de conceptos, más que como un mero desarrollo mecánico de destrezas, debe desarrollar en los estudiantes la habilidad de aplicar los aprendizajes en las necesidades de su entorno. De este modo, y como lo concibe el Ministerio de Educación Nacional a través de los lineamientos curriculares, MEN. (1998), la resolución de problemas debe ser eje central del currículo de Matemáticas, y como tal, es un objetivo primario de la enseñanza y parte integral de la actividad matemática. Por tal razón, y con el fin de atender a los objetivos de la investigación, se exponen las consideraciones de algunos referentes en la resolución de problemas.

George Polya (1945), citado por Huertas (2023), estructura la actividad de resolución de problemas en Matemáticas en cuatro pasos principales, conocidos también como el programa heurístico de Polya: entender el problema, configurar un plan, ejecutar el plan y visión retrospectiva o mirar hacia atrás; cada una de estas con sus características a través de las cuales se brinda al docente y educando una estrategia que se ha consolidado e incluido en diversos textos dirigidos a la enseñanza de las Matemáticas en los diferentes niveles de formación.

Método y desarrollo conceptual

La propuesta se ha enmarcado en el enfoque cualitativo, considerando específicamente la investigación basada en diseño, la cual ha permitido construir el modelo de formación a medida que se avanzaba en el desarrollo de cada una de las actividades propuestas. Este tipo de investigación se ha desarrollado en el contexto de las ciencias y se nutre de un amplio campo multidisciplinar que incluye la antropología, la psicología educativa, la sociología, la neurociencia e igualmente las didácticas específicas, entre otros (Confrey, 2006; Sawyer, 2006; Molina y Castro, 2011).

La propuesta de investigación se desarrolló a través de un diplomado denominado “formación matemática del docente de primaria, usando como herramienta el laboratorio”, en el cual han participado 12 docentes en ejercicio, no licenciados en el área de Matemáticas.

A continuación, se presenta algunos episodios dentro de las actividades de formación.

Desafío dentro de la actividad “estadística y probabilidad”

Los docentes mediante la interacción a manera de competición en el tablero del juego rayuela, experimentan y argumentan la razón del perder o ganarle al otro equipo, resaltando finalmente la importancia del espacio muestral y la probabilidad de un evento.



Figura 1: Docentes participantes interactuando en equipo a través del juego la rayuela, con el objetivo de construir el concepto de espacio muestral y probabilidad de un evento.

Desafío dentro de la actividad “pensamiento espacial”

Construir las secciones de cubo soma utilizando cinco fichas del mismo, las cuales se indican en los siguientes planos. A continuación, represente esta construcción en un plano mediante proyección por niveles, de tal forma que sea posible también una construcción con el material manipulativo (dados).



Figura 2: Los docentes interactúan con el cubo soma, experimentando la representación de 2 a 3 dimensiones y viceversa, así como las diferentes proyecciones.

Resultados

Para dar respuesta al objetivo de la investigación: construir un modelo de formación continua para los docentes de la educación básica primaria que atienden el área de Matemáticas y a través del cual se fortalezca el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en esta área, se ha construido el modelo pedagógico que se describe a continuación.

El modelo pedagógico tiene como protagonista al laboratorio de Matemáticas e ingrediente del mismo como son los materiales manipulativos, en cuanto están presentes en todas las actividades diseñadas para formar a los docentes. Según Piaget (1966), citado por Bartolini & Maschietto (2008), los niños necesitan manipulativos concretos para desarrollar conceptos matemáticos abstractos. En el laboratorio de Matemáticas de Módena, estos autores extienden la concepción de Piaget, en cuanto se afirma que los manipulativos concretos y virtuales deben utilizarse en la construcción de significado robusto de conceptos, no sólo con los niños sino también en adultos en sus diferentes etapas de formación.

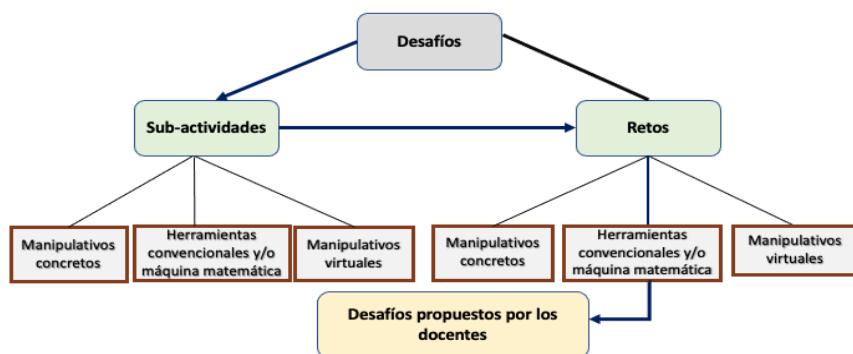


Figura 3: Estructura general de las actividades: de acuerdo con Huertas (2023), “las actividades dentro del modelo de formación se componen de desafíos y retos (problemas retadores), los cuales los pueden abordar con manipulativos concretos en un primer momento, herramientas convencionales y manipulativos virtuales en momentos posteriores” (p. 179)

Tabla 1
Modelo pedagógico de formación docente

Enfoque	Constructivista				
Diagnóstico					
Fases	Planeación y diseño de experimento de enseñanza				
	I	Implementación del experimento de enseñanza			
		Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4
		Exploración de la actividad	Planteamiento y ejecución de estrategias	Consolidación de estrategias y metacognición	Planteamiento de experimentos de enseñanza y relación con otros contextos.
	II	Revisión y análisis			
		Se realiza reflexión y análisis en referencia con los logros alcanzados y los objetivos de la investigación, analizando los recursos y medios que lo sustentan como insumo para diseñar un nuevo experimento de enseñanza y reiniciar el ciclo en la fase 1 con una nueva iteración.			
Validación	Enfoque basado en argumentos				
	Bases de evidencia	Interpretación de la experiencia	Uso de la experiencia	Consecuencias sociales	

Nota: La validación del modelo se realizó mediante adaptación del enfoque basado en argumentos, propuesto por Messick, S (1989), Camargo, S.L (2017), citado por Huertas (2023).

Conclusiones

En coherencia con la pregunta de investigación y objetivos, se establece en relación al conocimiento disciplinar y conocimiento pedagógico del contenido, las siguientes conclusiones:

Posterior a la participación en el diplomado, 10 de los 12 docentes participantes, por iniciativa propia, compartieron evidencias de sesiones de clase en ambiente de laboratorio, apoyadas por manipulativos concretos y software dinámico GeoGebra.

Algunas novedades que aporta el desarrollo de la propuesta respecto a los aprendizajes logrados por los docentes, la forma y los medios utilizados son:

- Lenguaje matemático y conceptos básicos que la mayoría de docentes desconocían, tales como: el concepto de altura de un triángulo, así como sus rectas y puntos notables, el concepto de homotecia, el cual fue consolidado mediante la proyección de figuras (montaje de figuras y su respectiva sombra), juegos de estrategia y fractales.
- Los docentes han fortalecido su conocimiento base, que según Harel (2008), lo define en términos de tres componentes: conocimiento de las Matemáticas, conocimiento del aprendizaje de los estudiantes y conocimiento de la pedagogía.
- Los docentes en su totalidad consideran que la metodología empleada en el diplomado ha despertado el interés para abordar las actividades propuestas de formación, cambiando significativamente las formas de aprender y enseñar las Matemáticas, mediados por el laboratorio y donde resaltan el uso de material concreto para construir, fortalecer conceptos y resolver problemas.

- Los docentes manifiestan que los desafíos planteados en cada una de las actividades propician la interacción entre compañeros y el trabajo en equipo, generando en ellos confianza para abordar temáticas específicas con mayor profundidad en la educación básica primaria.

Una mirada diferente a las Matemáticas

Más allá de fortalecer el conocimiento disciplinar y pedagógico del contenido en los docentes participantes, simultáneamente a través del desarrollo de las actividades, han cambiado su actitud frente a las Matemáticas, en cuanto ellos consideraban inicialmente que los procesos con cierto grado de complejidad correspondían exclusivamente al nivel de básica secundaria y con su respectivo docente licenciado en Matemáticas.

El empoderamiento y apropiación de la metodología por parte de los docentes les ha generado mayor confianza para abordar las Matemáticas, en tanto a medida que transcurre el desarrollo de la propuesta, adquieren hábitos y familiarización con los manipulativos concretos y virtuales, de tal forma que son considerados como una estrategia de primera mano en la construcción de significado robusto de conceptos y en la resolución de problemas. Las propuestas que presentan, y sus respectivos argumentos, evidencian la evolución que han adquirido en el transcurso del diplomado.

Referencias

- Bartolini Bussi, M. G., & M. Maschietto. (2006). Gli strumenti meccanici: le macchine per tracciare curve e realizzare trasformazioni. *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola*, 1-32.
- Bartolini Bussi, M. G., & M. Maschietto. (2008). Machines as tools in teacher education. In *The Handbook of Mathematics Teacher Education: Volume 2* (pp. 183-208). Brill Sens.
- Camargo, S. L. (2017). En búsqueda de consenso sobre el concepto de validez: Un estudio Delphi. *Psicología*.
- Chávez, H. L. (2008). Los modelos pedagógicos en la formación de profesores. *Revista Iberoamericana de educación*, 46(3), 1-8.
- Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 135-152. Nueva York: Cambridge University Press.
- Harel, G. (2008). A DNR perspective on mathematics curriculum and instruction. Part II: with reference to teacher's knowledge base. *ZDM*, 40(5), 893-907.
- Harel, G. (2008). DNR perspective on mathematics curriculum and instruction, Part I: focus on proving. *ZDM*, 40(3), 487-500.
- Huertas, A. R. (2023). Construcción de un modelo pedagógico para la formación en matemáticas del docente de educación básica primaria, usando como herramienta el laboratorio. *South Florida Journal of Development*, 4(1), 169-182.
- Hunt, A. W., Nipper, K. L., & Nash, L. E. (2011). Virtual vs. Concrete Manipulatives in Mathematics Teacher Education: Is One Type More Effective than the Other? *Current Issues in Middle Level Education*, 16(2), 1-6
- Kitchen, J. y Petrarca, D. (2016). Approaches to teacher education. En J. Loughran y L. Hamilton (Eds.), *International handbook of teacher education* (pp. 137-185). Springer.
- MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Messick, S. (1989). Validity. En: R. L. Linn (Ed.), *Educational Measurement*. (pp. 13-103). Washington, D.C.: American Council on Education.
- Molina, M., Castro, E., Molina, J. L., & Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 75-88.
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. New York: Doubleday Anchor Books.

- Sawyer, R.K. (2006). The New Science of Learning, en Sawyer, R.K. (ed.). *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences*, pp. 1-18. Nueva York: Cambridge University Press.
- Shulman, L. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard educational review*, 57(1), 1-23.
- Swan, P., & Marshall, L. (2010). Revisiting mathematics manipulative materials. *Australian Primary Mathematics Classroom*, 15(2), 13-19



Lesson Study com Professores de Matemática e Física: Aprendizagens na exploração das múltiplas representações

Mauri Luís Tomkelski

Secretaria da Educação do Rio Grande do Sul – SEDUC/RS

Brasil

mauriluis@gmail.com

Adriana Richit

Universidade Federal da Fronteira Sul – Campus de Erechim/RS

Brasil

adrianarichit@gmail.com

Resumo

A investigação evidencia as aprendizagens profissional de professores de Matemática e Física sobre o uso das múltiplas representações (MRs) no ensino de um tópico curricular. O lesson study envolveu a participação de quatro professoras de Matemática e Física que atuam em escolas públicas do Rio Grande do Sul, Brasil, durante 18 encontros presenciais. O material empírico constitui-se das: transcrições das gravações das sessões; entrevistas; e dos materiais produzidos pelos professores e alunos no decorrer do lesson study. A análise qualitativa evidenciou, na perspectiva das professoras, que a ênfase nas MRs favoreceu o ensino do tópico curricular por oportunizar a obtenção das informações complementar, na realização das interpretações restritas e na construção das compreensões aprofundadas. Em relação às complexidades das MRs, as aprendizagens versam sobre quais informações são melhor acessíveis aos alunos e a forma de usá-las, instigando os alunos na busca eficaz de integrar várias representações no processo de aprendizagem.

Palavras-chave: Aprendizagem Profissional; Múltiplas Representações; Lesson Study; Ensino Médio.

Introdução

A aprendizagem profissional é um fenômeno dinâmico, permanente, pessoal e socialmente constituído na interação entre professores mediante o confronto e a modificação de ideias e da reinterpretação de suas experiências (Flores, 2004). Tais aprendizagens estão relacionadas ao campo disciplinar, ao ensino em sala de aula, a aspectos de gestão do ensino, aos elementos do contexto profissional, aos processos de aprendizagens dos alunos e suas dificuldades, e aos elementos do contexto social e cultural de atuação, bem como a outros processos intrínsecos à docência (Richit & Tomkelski, 2022). Em um estudo sobre as aprendizagens profissionais de professores, Desimone (2009) destaca cinco aspectos relativos ao modo como estas aprendizagens influenciam o conhecimento, as habilidades e a prática dos professores: foco no conteúdo, aprendizagem ativa, coerência, direção e participação coletiva. Acrescenta que as tensões existentes entre estas características constituem uma das razões pelas quais são difíceis as mudanças em larga escala nos processos de ensino.

A temática das múltiplas representações (MRs) tem despertado o interesse de professores e pesquisadores da área da Matemática e das Ciências Naturais, especialmente da Física, devido às possibilidades de abordar tópicos curriculares e favorecer a compreensão de conhecimentos específicos dessas áreas. Nesta perspectiva, o uso das MRs para abordar conceitos e fenômenos viabiliza mudanças no ensino porque possibilita investigações em sala de aula, favorecendo a descoberta de conceitos e relações. Entretanto, segundo resultados de investigação, nem sempre os professores as usam de modo a permitir aos alunos compreenderem os conceitos científicos (Ainsworth, 2006, 2008, 2014).

Para tal, faz-se necessário promover processos formativos que oportunizem aos professores aprenderem a utilizar as MRs, por meio das quais sejam oportunizados a explorar propriedades e relações de tópicos curriculares específicos e modos de ensiná-los em sala de aula. Processos de formação centrados na prática oportunizam a constituição de contextos favoráveis à aprendizagem profissional de professores (Ribeiro & Ponte, 2019).

Uma das abordagens formativas que contemplam esses aspectos, crescentemente utilizadas na formação inicial e continuada de professores em diferentes áreas do conhecimento, é o *lesson study*. Originário do Japão, caracteriza-se por uma abordagem de desenvolvimento profissional de professores com foco na prática letiva e apoiada em dois princípios fundamentais: a colaboração e a reflexão (Richit & Tomkelski, 2022). Por centrar-se na prática letiva, o *lesson study* têm embasado investigações sobre aspectos relacionados à aprendizagem de tópicos curriculares diversos, como por exemplo, as MRs e o seu papel na aprendizagem da Matemática e das Ciências.

Assim, realizamos uma investigação envolvendo quatro docentes de Matemática e Física, participantes de um *lesson study*, visando examinar as aprendizagens dos professores no uso das MRs. As professoras participantes do *lesson study* indicaram m tópico da Ciência, a Lei de Ohm, para realizar a exploração e aprofundamento das relações matemáticas entre as variáveis físicas (grandezas físicas) envolvidas e, também, porque os alunos geralmente apresentam dificuldade na compreensão do conceito físico, bem como na associação e uso da equação matemática que o representa.

Múltiplas Representações

Explorar uma variedade de representações distintas permite correlacionar vários aspectos de um fenômeno, construir uma compreensão mais completa e profunda da ciência e auxilia na comunicação dos conceitos científicos de forma efetiva (Ainsworth, 2006, 2008, 2014). Também permite a integração de diferentes modos de representar o raciocínio, os processos e as descobertas científicas com o propósito de que os alunos se apropriem dos significados dos conceitos na medida em que gradualmente compreendem as distintas formas de representar as ideias, hipóteses e conceitos.

Ainsworth (2014) propôs uma análise conceitual dos ambientes de aprendizagem de MRs e sugeriu uma taxonomia de três funções principais: (1) obter informação complementar; (2) realizar interpretação restrita e (3) construir compreensões aprofundadas sobre o tópico em estudo. Cada uma das funções pode ser subdividida em várias subclasses e, frequentemente, um único ambiente MRs pode servir às várias funções mostradas, entretanto, cada classe será considerada separadamente.

A primeira função diz respeito ao uso das representações que abrangem informações complementares ou que embasam processos cognitivos complementares. Consiste em fornecer informação complementar sobre um conceito, facilitando a sua aprendizagem, por exemplo, uma tabela explícita a informação, possibilitando destacar valores, regularidades e padrões (Ainsworth, 2014).

Na segunda função, interpretação restrita, uma representação é usada para restringir possíveis (re)interpretações no uso de outra, ou seja, uma determinada representação constitui-se em ponto de partida para encorajar os alunos a interpretar uma representação complexa, por familiaridade com outra representação mais simples (Ainsworth, 2014). Outra forma consiste em estimular os alunos a aproveitarem as propriedades de cada representação de um problema ou fenômeno, por exemplo, uma equação algébrica permite ao aluno estabelecer relações quantitativas entre variáveis e manipulá-las numericamente, porém, por possuir um elevado grau de abstração, este tipo de representação nem sempre é acessível aos alunos. Entretanto, iniciar explorando graficamente as relações entre variáveis pode ser uma estratégia para mobilizar os alunos a interpretar a equação algébrica que envolve essas variáveis (Ainsworth, 2014). Além disso, nessa função pode-se utilizar as MRs para incentivar os alunos a usarem uma determinada representação por familiaridade e, concomitantemente, pelas suas propriedades, como, por exemplo, usar uma tabela para ajudar os alunos a interpretar um gráfico (Ainsworth, 2014) e analisarem a relação entre as grandezas envolvidas (Tomkelski, 2024).

A terceira função, compreensão aprofundada, as MRs são utilizadas para impulsionar os alunos a construírem uma compreensão mais profunda de uma determinada situação (Ainsworth, 2014). Podem fazê-lo por abstração, ou seja, a generalização dos alunos de um determinado conceito surge a partir do que aprenderam num determinado contexto particular e com valores das MRs ou podem fazê-lo por extensão, isto é, os alunos se utilizam da aplicação do aprendizado anterior para alcançar novas representações ou ainda podem obter por relação, construindo relações entre as representações e entre as grandezas físicas (Tomkelski & Baptista, 2023; Tomkelski, Baptista, & Richit, 2023; Tomkelski, 2024). Ou seja, consiste em oportunizar

aos alunos terem contato com os mais diferentes modos de representação: verbais, pictóricas, gráficos, tabulares, experimentos, matemáticos, entre outros. Portanto, usar diferentes processos de representação constitui-se em uma estratégia favorável à aprendizagem da Física e da Matemática, porque possibilita mudanças no ensino e nos modos de aprender dos alunos. Em face a esses aspectos, ressaltamos a relevância desta investigação por apresentar compreensões sobre os contributos das MRs às aprendizagens dos professores sobre um determinado tópico curricular.

Lesson study

O lesson study (ou estudo de aula) começaram a se desenvolver no Japão na Era Meiji, caracterizando o processo pelo qual os professores buscavam desenvolver e melhorar progressivamente a forma de ensinar, trabalhando em conjunto com outros professores, refletindo criticamente sobre a prática pedagógica e modificando-a quando necessário (Isoda, Arcavi, & Mena Lorca, 2007).

Uma das principais mudanças introduzidas no período Meiji, que promoveu uma reforma global no ensino escolar, foi a superação do ensino individualizado em detrimento do ensino mútuo, inspirado nas experiências ocidentais. A primeira iniciativa deu-se a partir da Escola Normal de Tóquio, que realizou uma experiência de ensino mútuo, desenvolvendo aulas para classes inteiras. A partir dessa experiência pioneira, esse modelo foi implantado em Tóquio e em seguida outras escolas do país também o adotaram (Isoda & Baldin, 2023).

A introdução desse modelo envolveu duas etapas. Na primeira, foram convidados professores estrangeiros para ministrar, experimentalmente, aulas coletivas na Escola Normal de Tóquio, a fim de disseminar a sabedoria ocidental no ensino mútuo. Em seguida, alguns professores japoneses, participantes da experiência, foram convidados a ministrar aulas em uma escola primária anexa à Escola Normal. A partir dessas experiências, foram produzidos materiais de ensino, que foram distribuídos em todo o país (Richit, 2022).

A seguir, a partir das ações do Ministério da Educação japonês, os estudos de aula foram implementados em todo país, tornando-se política pública a partir de 1960 (Richit, 2022). Nesse movimento, foram promovidas aulas abertas para divulgar esse modelo, iniciativa que deu origem ao primeiro grupo de estudos de aula iniciados pelo governo japonês (Isoda, Arcavi, & Mena Lorca, 2007). As aulas abertas, em alguns casos, eram assistidas por grandes grupos de professores (Isoda & Baldin, 2023).

Os estudos de aula vêm apresentando resultados promissores em relação à formação docente e ao ensino em sala de aula, porque os professores se concentram nos conhecimentos e capacidades essenciais para melhorar as atividades de sala de aula e, com isso, desenvolvem o seu conhecimento acerca de determinado conteúdo, aperfeiçoando a maneira de ensiná-lo (Sibbald, 2009). Além disso, possibilitam ao professor analisar os diferentes tipos de tarefa a propor para as aulas e as consequências que essas tarefas podem ter para a aprendizagem dos alunos (Richit, Tomkelski, & Richit, 2021).

Uma das principais características do lesson study é que constitui-se em um trabalho que se desenvolve de maneira colaborativa por um grupo de professores (Lewis, 2016; Stigler & Hiebert, 1999; Yoshida, 1999), favorecendo aprendizagens profissionais, especialmente sobre tópicos curriculares e sobre modos de os ensinar em sala de aula (Lewis, 2016). Devido às características deste modelo, os professores desenvolvem um conhecimento aprofundado sobre o tópico, o seu ensino, e sobre as aprendizagens dos alunos (Stigler & Hiebert, 1999). Assim, o estudo de aula é uma abordagem de formação docente fortemente ligada à prática de sala de aula, que tem por finalidade a melhoria do ensino e a aprendizagem dos alunos (Richit & Ponte, 2020).

Este processo compõe-se de quatro momentos principais (Figura 1), realizados colaborativamente por uma pequena equipe de professores: (i) identificação de um problema de aprendizagem; (ii) planejamento de uma aula, designada aula de investigação, visando superar esse problema; (iii) realização dessa aula, acompanhada de observação por toda a equipe participante do estudo de aula; e (iv) reflexão sobre a aula, com foco naquilo que foi registrado sobre as ações dos alunos (Lewis, 2002; Richit, Ponte, & Tomkelski, 2019).



Figura 1. Ciclo do Estudo de Aula da Investigação.

Se desejável, o ciclo pode ser repetido outras vezes para promover o aprofundamento sobre um determinado conteúdo ou iniciar um novo conteúdo (Fujii, 2016). Assim, o estudo de aula incorpora sistematicamente o desenvolvimento profissional docente em sala de aula, ancorado na ideia de que uma única aula contém muitos (se não todos) componentes críticos que os professores necessitam considerar para melhorar a sua formação (Sims & Walsh, 2009).

A dinâmica do estudo de aula, a partir das distintas etapas orientadas por um objetivo principal, oportuniza aos participantes reverem e aprofundarem conhecimentos profissionais, realizarem aprendizagens profissionais de distinta natureza, experimentarem uma nova prática e, especialmente, romperem com culturas profissionais balizadoras do crescimento do professor mediante vivências em colaboração.

Metodologia

A investigação¹ seguiu a abordagem qualitativa (Bogdan & Biklen, 1994) refere-se à forma como os problemas de pesquisa são abordados, levando o pesquisador a procurar métodos e procedimentos apropriados para estudá-los. A pesquisa se caracteriza como qualitativa porque visa compreender os contributos do lesson study para o desenvolvimento das aprendizagens dos professores de Matemática e de Física sobre um tópico curricular, definido pelo professores nas etapas desenvolvidas e, assim, definido como sendo a exploração matemática e conceitual da Lei de Ohm. Os dados foram recolhidos em um lesson study, que envolveu quatro professoras que lecionam Física no 3.º ano do Ensino Médio em escolas públicas de ensino do Rio Grande do Sul (RS), Brasil, na região de abrangência da 15.ª Coordenadoria Regional de Educação (CRE), sediada em Erechim. A seleção dos participantes foi viabilizada por convite ou conveniência, i.e., proximidade com o investigador.

As participantes – Sol, Jô, Mel e Roberta –, com idades compreendidas entre 38 e 52 anos, lecionam exclusivamente na rede pública de ensino do estado do Rio Grande do Sul e possuem entre 8 e 25 anos de experiência profissional na Educação Básica, especificamente no Ensino Fundamental (anos finais) e Ensino Médio. O lesson study constituiu-se de dezoito sessões, cada uma com duração de duas horas e meia. Cada aula de investigação teve duração de cem minutos e foi implementada em escolas distintas.

O lesson study foi constituído por dezoito sessões, cada uma com duração de duas horas e meia, foi organizado em cinco etapas: 1) constituição teórica da abordagem dos estudos de aula e análise dos documentos legais da legislação educacional brasileira vigente; 2) análise de tarefas de investigação para sala de aula; 3) planejamento do plano de trabalho da primeira aula de investigação, reflexões e refinamento da atividade; 4) realização da primeira aula de investigação em sala de aula, reflexões pós-aula e revisão do planejamento do plano de trabalho e 5) realização da segunda aula de investigação, reflexão pós-aula e finalização do plano de trabalho. Quinze sessões ocorreram nas dependências da 15ª CRE e as demais sessões nas Escolas de atuação profissional das professoras. As duas aulas de investigação, cada uma de 100 minutos, incidiram no mesmo tópico de Física, sendo a primeira lecionada por Jô e a segunda por Sol.

O material empírico constitui-se dos dados recolhidos ao longo do processo formativo, incluindo diário de bordo; registos em áudio e/ou vídeos das sessões do lesson study; acervo documental das produções escritas dos professores e os registos dos alunos produzidos na aula de investigação; e entrevistas realizadas com as professoras. As sessões foram observadas pelo investigador, primeiro autor do artigo, que adota um papel de observador-como-participante (Cohen, Manion, & Morrison, 2011).

As categorias de análise, conforme Quadro 1, foram constituídas a partir de análise de conteúdo (Bardin, 2011) e tendo em conta as dimensões das MRs. Cada função corresponde a uma categoria de análise. E cada categoria apoia-se em subcategorias, consoante a função específica das MRs no ensino do tópico curricular explorado (Tomkelski, 2024; Tomkelski & Baptista, 2023; Tomkelski, Baptista, & Richit, 2023).

¹ Aprovado pela Comissão de Ética do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa, Lisboa – Portugal. Número do Parecer: 4328 de 22/10/2018

Quadro 1
Categorias e subcategorias de análise.

Categoria	Subcategoria
<i>Função Complementar das MRs</i>	- Informação diferente - Processo diferente
<i>Interpretação Restrita das MRs</i>	- Familiaridade - Propriedades inerentes
<i>Compreensão Aprofundada das MRs</i>	- Abstração - Extensão - Relação

Fonte: autores.

Os dados difíceis de categorizar foram discutidos entre os autores com o objetivo de chegar a um consenso. Os dados que não tiveram consenso não foram utilizados.

Resultados e Conclusões

A investigação evidenciou as aprendizagens profissionais dos professores de Matemática e Física sobre os contributos das MRs para o aprofundamento do tópico curricular da Lei de Ohm e à aprendizagem dos alunos. O tópico definido representa uma relação matemática de 1º Grau, cujo conceito Físico é o resultado da relação matemática entre as duas grandezas Físicas. Assim, a pesquisa mostra que os professores aprenderam a usar as três funções da MRs (Ainsworth, 2006, 2008, 2014), desde a obtenção das informações complementares, perpassando pela interpretação restrita, culminando com uma compreensão aprofundada sobre a Lei de Ohm.

Relativamente à função complementar das MRs, os professores utilizaram as seguintes representações: texto, desenho do circuito, tabelas, gráficos e equações. As representações das informações físicas foram utilizadas como estratégia útil para sala de aula (Ainsworth, 2006, 2008), envolveram elementos teóricos que facilitaram a ampliação, diversificação e articulação das distintas representações sobre a Lei de Ohm, favorecendo o aprofundamento desse conceito.

A análise mostrou, ainda, que o uso de MRs ajuda a relacionar vários aspetos de um fenómeno, construir uma compreensão mais completa e profunda do conceito físico envolvido (Ainsworth, 2014).

Na interpretação restrita, os professores desenvolveram a compreensão sobre a importância da interpretação das MRs no ensino de física. Também realizaram aprendizagens sobre o potencial das atividades estruturadas na e para a exploração das MRs. Os professores aprenderam sobre a interpretação por familiaridade e pela busca das propriedades inerentes aos conceitos envolvidos (Ainsworth, 2006, 2008).

Por fim, na compreensão profunda, os professores aprenderam a utilizar as MRs na obtenção de uma compreensão mais aprofundada do conceito da Lei de Ohm, assim como na relação matemática entre as grandezas físicas envolvidas. Além disso, ao explorar as MRs puderam: (a) ampliar o entendimento e compreensão dos dados de uma tabela, através da procura de padrões de comportamento da proporcionalidade entre as grandezas físicas, i.e., relação matemática entre a diferença de potencial (U) e a intensidade da corrente elétrica (I), representada por uma equação de 1º Grau; (b) criar relações e interpretação entre gráficos e as respectivas equações algébricas das grandezas físicas envolvidas na Lei de Ohm; e (c) generalizar a expressão algébrica da resistência elétrica de um condutor. Também perceberam que a construção de gráficos, a partir de dados de uma tabela, facilita a compreensão qualitativa, sua interpretação, assimilação e integração.

O lesson study oportunizou aos professores a elaboração de uma aula centrada no objetivo de conhecer e entender a aprendizagem dos alunos sobre o conceito físico da Lei de Ohm, bem como das relações matemática entre as grandezas físicas, a partir da exploração das MRs sobre esse tópico e da transição entre elas. E a partir deste planejamento, e da concretização, observação e reflexão sobre a aula de investigação, os professores realizaram aprendizagens sobre a Lei de Ohm e sobre como desenvolver esse tópico a partir das MRs.

Ao refletir sobre a experiência, com olhar de investigador, perceberam a importância da utilização das MRs em suas práticas profissionais, modificando a maneira como abordam esse conceito em sala de aula e no processo de aprendizagem dos alunos em sua prática de sala de aula em Matemática e Física. Também os oportunizou aprofundarem as aprendizagens sobre a necessidade da interpretação e transição entre as diversas formas de representação, convergindo para uma compreensão mais aprofundada dos conceitos.

Assim, o lesson study constitui-se em contexto para promover a aprendizagem dos professores ao oportunizar aprendizagens durante o processo de exploração das MRs e revelar os seus contributos à aprendizagem de conceitos Matemáticos e Físicos. Também favoreceu, momentos de interação entre os professores que possibilitaram o confronto e a modificação necessária à reinterpretação de suas experiências. Além disso, proporcionou momentos de trabalho colaborativo, reflexivo e o compartilhamento de práticas de sala de aula e ao desenvolvimento das aprendizagens profissionais dos professores.

Agradecimento

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq (Processo: 307153/2023-1).

Referências

- Ainsworth, S. (2006). DeFT: A conceptual framework for considering learning with. *Learning and Instruction*, 16(3), 183-198. <https://doi.org/10.1016/j.learninstruc.2006.03.001>
- Ainsworth, S. (2008). The educational value of multiple-representations when learning complex scientific concepts. In J. K. Gilbert, M. Reiner & M. Nakhleh (Eds.), *Visualization: Theory and practice in science education* (pp. 191-208). Springer.
- Ainsworth, S. (2014). The multiple representations principle in multimedia learning. In R. E. Mayer (Ed.), *The Cambridge handbook of multimedia learning* (2 ed., pp. 464–486). Cambridge University Press.

- Bardin, L. (2011). *Análise de conteúdo* [Content Analysis]. Edições 70.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. M. Alvarez, S. dos Santos, & T. M. Baptista (Trans.). Porto Editora.
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research methods in Education*. Routledge.
- Desimone, L. M. (2009). Improving impact studies of teachers' professional development: Toward better conceptualizations and measures. *Educational Researcher*, 38 (3), 181-199.
- Flores, M. A. (2004). *The Early years of teaching: issues of learning, development and change*. RÉ.S.
- Fujii, T. (2016). Designing and adapting tasks in lesson planning: a critical process of Lesson Study. *ZDM*, 48(4), 411-423.
- Isoda, M., & Baldin, Y. Y. (2023). Japanese Lesson Study, its Nature and its Impact on the Teaching and Learning Mathematics. *PARADIGMA*, 44(2), 5-35. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410>
- Isoda, M., Arcavi, A., & Mena-Lorca, A. (2007). *El estudio de clases japonés en matemáticas: su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global*. Ediciones Universitarias de Valparaíso.
- Lewis, C. (2016). How does lesson study improve mathematics instruction? *ZDM*, 48, 571-580. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0792-x>
- Lewis, C. (2002). *Lesson study: A handbook of teacher-led instructional change*. Research for Better Schools.
- Ribeiro, A. J., & Ponte, J. P. (2019). Professional learning opportunities in a practice-based teacher education programme about the concept of function. *Acta Scientiae*, 21(2), 49-74. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.v21iss2id5002>
- Richit, A. (2022). Professional Development of Professors in Lesson Study. *Educação Unisinos*, 27, 1-20. <https://doi.org/10.4013/edu.2023.271.20>
- Richit, A. (2021). Desenvolvimento profissional de professores: um quadro teórico [Teacher professional development: a theoretical framework]. *Research, Society and Development*, 10(14), 1-15. <http://dx.doi.org/10.33448/rsd-v10i14.22247>
- Richit, A., & Ponte, J. P. (2020). Conhecimentos Profissionais Evidenciados em Estudos de Aula na Perspectiva de Professores Participantes. *Educação em Revista*, 36, 1-29. doi:<http://dx.doi.org/10.1590/0102-4698190699>
- Richit, A., & Tomkelski, M. L. (2022). Meanings of mathematics teaching forged through reflection in a lesson study. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 18(9), em2151, 1-15. <https://doi.org/10.29333/ejmste/12325>
- Richit, A., Ponte, J. P., & Tomkelski, M. L. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 100(254), 54-81. <https://doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254>
- Richit, A., Tomkelski, M. L., & Richit, A. (2021). Understandings of Perimeter and Area Mobilized with an Exploratory Approach in a Lesson Study. *Acta Scientiae*, 23(5), 1-36. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6226>
- Sibbald, T. (2009). The Relationship Between Lesson Study and Self-Efficacy. *School Science and Mathematics*, 109(8), 450-460. <https://doi.org/10.1111/j.1949-8594.2009.tb18292.x>
- Sims, L., & Walsh, D. (2009). Lesson Study with preservice teachers: Lessons from lessons. *Teaching and Teacher Education*, 25, 724-733.
- Stigler, J. W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teacher for improving education in the classroom*. The Free Press.
- Tomkelski, M. L. (2024). *Conhecimento Pedagógico do Conteúdo (PCK) de Professores de Física no Contexto do Estudo de Aula*. Tese de Doutorado em Educação - Especialidade da Didática das Ciências - Instituto de Educação - Universidade de Lisboa, Lisboa, Portugal.
- Tomkelski, M. L., Baptista, M., & Richit, A. (2023). Physics Teachers Learning on the Use of Multiple Representations in Lesson Study. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(3), 427-444. <https://doi.org/10.30935/scimath/12906>
- Tomkelski, M. L., & Baptista, M. (2023). PCK of Physics Teachers about the use of Multiple Representations in a Lesson Study. *Sisyphus — Journal of Education*, 11(2), 164-186. <https://doi.org/10.25749/sis.28904>
- Tomkelski, M. L., Baptista, M., & Richit, A. (2023). Physics teachers' learning on the use of multiple representations in lesson study about Ohm's law. *European Journal of Science and Mathematics Education*, 11(3), 427-444. <https://doi.org/10.30935/scimath/12906>
- Yoshida, M. (1999). Lesson study: A case study of a Japanese approach to improving instruction through school-based teacher development. Doctoral dissertation, University of Chicago.



Lesson Study em três regiões brasileiras: Em busca da institucionalização

Yuriko Yamamoto **Baldin**

Departamento de Matemática, Universidade Federal de São Carlos

Brasil

yuriko@ufscar.br

Regina da Silva **Pina Neves**

Departamento de Matemática, Universidade de Brasília

Brasil

reginapina@mat.unb.br

Aluska Dias Ramos de **Macedo** Silva

Unidade Acadêmica de Física e Matemática, Universidade Federal de Campina Grande

Brasil

aluska.dias@professor.ufcg.edu.br

Resumo

O processo formativo Lesson Study (LS), original do Japão, foca na aprendizagem dos estudantes e, consequentemente, colabora para o desenvolvimento profissional dos participantes. Embora haja diferenças culturais, sociais e políticas entre o Japão e o Brasil, este trabalho tem como objetivo apresentar a possibilidade de sua institucionalização a partir de uma rede de colaboração entre facilitadores de LS, formadores de professores, professores em exercício e futuros professores de Matemática. A metodologia é de cunho qualitativo e aborda dois contextos diferentes: formação continuada e inicial de professores de Matemática. As pesquisas e práticas realizadas em três regiões do Brasil para implementar uma rede possuem característica fundamental de preservar os princípios essenciais dos ciclos de LS na formação continuada e inicial. Os resultados apontam para a melhoria do desenvolvimento profissional de professores e futuros professores percebida por mudanças de percepção metacognitiva da profissão docente.

Palavras-chave: Ensino e aprendizagem da Matemática; Formação de professores de Matemática; Futuros professores; Lesson Study; Rede de colaboração.

Introdução

A formação continuada de professores de Matemática no Brasil tem sido historicamente, marcada por práticas formativas, geralmente, externas ao ambiente escolar, realizadas por meio de cursos pontuais, que pouco ou não consideram as necessidades reais dos professores e de seus estudantes, ou seja, práticas numa perspectiva colonizadora. Nesse contexto, os professores e a equipe gestora têm pouco espaço para a fala, o estudo, a interação, a reflexão e a ação na construção de respostas educativas às demandas culturais e cognitivas da comunidade escolar. Igualmente, a formação inicial sofre dilemas de mesma natureza, uma vez que, enfrenta falta de conexões no tripé da formação matemática, didático-pedagógica e prática profissional, com pouco ou nenhum diálogo entre os formadores de professores, o que não permite uma articulação harmônica entre teoria e prática nos componentes curriculares.

Ao mesmo tempo, em que estes desafios perduram em determinadas instituições, presenciamos, também, a ampliação de propostas formativas construídas, colaborativamente, por formadores de professores, professores em serviço e futuros professores, de modo que todos possam agir, conscientemente e ativamente, em prol de seus desenvolvimentos profissionais. Estas por sua vez, numa perspectiva decolonial fomentam posturas investigativas da prática docente e da própria prática capazes de construir respostas para as necessidades da escola e da universidade (Hiebert et al., 2003; Fiorentini & Crecci, 2015).

Assim, com o intuito de romper com o mito de que na “prática a teoria é outra” (Pimenta & Lima, 2005/2006, p. 6), se torna urgente a construção de processos formativos, seja na formação inicial ou na continuada, que valorizem a “a preparação, a entrada e o desenvolvimento profissional docente” (Nóvoa, 2017, p.1113). Em vista disso, o Lesson Study (LS), enquanto processo de desenvolvimento profissional, de natureza colaborativa e reflexiva, originário no Japão, em expansão no oriente e, mais recentemente no ocidente, vem se consolidando ao proporcionar aos participantes a compreensão aprofundada da aprendizagem dos estudantes, do currículo e das abordagens didáticas, sendo realizado de modo contínuo integrando escolas e universidades como nos estudos realizados em (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2023).

Embora haja diferenças culturais, sociais e políticas entre o Japão e o Brasil, o LS tem se formado em nosso território por meio de adaptações responsáveis que respeitam seus princípios, possibilitando a construção de práticas formativas tanto na formação continuada quanto na inicial de professores de Matemática. Estudos como os de (Baldin & Félix, 2011; Richit, Ponte & Tomkelski, 2019; Silva, 2020; Pina Neves & Fiorentini, 2021), entre outros, evidenciam que o LS favorece o desenvolvimento profissional docente ao fomentar o trabalho coletivo e colaborativo; ao assumir a prática docente enquanto objeto de estudo e pesquisa; ao posicionar o planejamento na centralidade do trabalho docente, permitindo que os professores e os futuros professores desenvolvam aulas que se alinhem às trajetórias de aprendizagem dos estudantes; ao promover abordagens didáticas que qualificam as relações discentes e docentes ante os objetos matemáticos. As características fundamentais da transposição dos princípios do LS na cultura ocidental que devem ser preservadas já eram apontadas por Stigler & Hiebert (1999) no seu impactante “Teaching Gap”, que difundiu o LS nos Estados Unidos. Ante estas compreensões e enaltecendo o caráter coletivo de construção de conhecimento profissional de ensino e

aprendizagem da Matemática escolar, reunimos neste texto propostas formativas desenvolvidas nas formações continuada e inicial, em diferentes regiões do Brasil, tendo como objetivo compreender as propostas, enquanto parâmetros para a institucionalização do LS a partir de uma rede de colaboração de formadores de professores de Matemática.

Referencial teórico

O processo formativo Lesson Study, original do Japão, foca na aprendizagem dos estudantes e, conseqüentemente, colabora para o desenvolvimento profissional dos professores em serviço, futuros professores, formadores de professores ou outros profissionais da educação. (Isoda, Stephens, Ohara & Miyakawa, 2007). Para que haja aprendizagem dos estudantes é necessário que na formação inicial ou continuada sejam trabalhadas as dificuldades que os professores enfrentam nas escolas com estudo, planejamento, implementação do plano de aula e observação da aula, e, por fim, com reflexão pós-aula, que são as etapas do LS. Desse modo, conforme Silva (2020) destaca, há uma inter-relação entre universidade e escola, superando a visão equivocada de que uma delas é superior à outra.

A estrutura básica do processo formativo LS (Isoda et al., 2007; Isoda, Arcavi & Mena, 2012; Fernandez & Yoshida, 2004) inclui no seu cerne um ciclo, chamado ciclo de Aula-Pesquisa de LS, que, de maneira simplificada, constitui o esquema: Determinação do tema; Planejamento da Aula-Pesquisa; Execução da Aula-Pesquisa (observada); Reflexão e Análise posterior da Aula-Pesquisa. Quando este “esquema de um ciclo” é interpretado como o próprio processo de LS, delimita-se o alcance educacional do LS como um processo formativo de professor que se desenvolve para se tornar investigador da própria prática. (Isoda & Baldin, 2023; Takahashi & McDougall, 2016).

Neste trabalho, trabalhamos o conceito de LS como um processo formativo de professor inicial ou em desenvolvimento profissional que, ao compreender o significado do ciclo básico de Aula-Pesquisa como um elemento nuclear do processo, amplia o olhar para a possibilidade de estabelecer uma rede de colaboração entre instituições- pesquisadores- professores- formadores- educadores para fortalecer os cursos de formação de professores de Matemática (Baldin, Silva & Souza, 2022; Baldin, Montes, Pina Neves & Gutierrez-Fallas, 2024).

Metodologia

Este estudo assume um caráter qualitativo e interpretativo (Bogdan e Biklen, 1994) tendo como dados práticas formativas que adotam o LS em contextos de formação de professores de Matemática no Brasil, em três regiões diferentes, abrangendo três universidades públicas federais e escolas de educação básica de cidades circunvizinhas. A primeira prática é desenvolvida no contexto de formação continuada de professores de Matemática, desenvolvida desde 2009 quando da introdução no Brasil (Félix, 2010) em programas de pós-graduação para professores de Matemática, e seguindo com a constituição de Grupos de Estudo para professores em exercício com a participação integrada de pesquisadores e sistemas de educação escolar. A segunda prática é desenvolvida no contexto da formação inicial de professores de Matemática, especificamente, no componente curricular de Estágio Curricular Supervisionado em Matemática, desenvolvida desde 2020, de modo colaborativo, em turmas da licenciatura em

Matemática da Universidade de Brasília (UnB) e Universidade Federal de Campina Grande (UFCG). Em ambos os casos, as formadoras assumem o papel de facilitadoras do LS, integrando em suas práticas professores em exercício, futuros professores e estudantes da educação básica. Em seguida, trazemos os contextos, características dos processos formativos de LS e seus principais resultados.

Lesson Study na Formação Continuada de Professores: A prática formativa na UFSCar

Em 2009, o projeto pioneiro de introdução de LS numa escola pública do estado de São Paulo ocorreu por meio do Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências Exatas-PPGECE na modalidade de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática, na UFSCar, a partir das investigações que tragam inovações pedagógicas para o processo de Ensino e Aprendizagem da Matemática da Educação Básica, fundamentadas nos princípios do LS. A investigação iniciou-se com um estudo e reflexões sobre o significado do Lesson Study que essencialmente se constitui como um processo do planejamento e realização de aulas diferenciadas, com o objetivo explícito de promover a aprendizagem dos alunos com o desenvolvimento de pensamento matemático autônomo. (Isoda et al, 2007). O processo investigativo envolve estudo e reflexões *antes da aula planejada*, seguida de observação e coleta de evidências de aprendizagem dos alunos *durante a aula*, de acordo com os objetivos específicos do plano de aula, que subsidiam as análises reflexivas *após a aula*. Esse ciclo de pesquisa e reflexão do professor torna a prática docente como um tema de pesquisa que traz um aperfeiçoamento do conhecimento do professor sobre o ensino e a aprendizagem. O processo de LS planejado e vivenciado como um ciclo de aula-pesquisa, usa o currículo oficial vigente e elabora o plano de aula com os objetivos gerais e específicos das competências exigidas pelo currículo, o que implica um trabalho investigativo do mestrando no uso pedagógico dos materiais didáticos disponibilizados no ambiente escolar. Portanto, compreender a dimensão de “investigar” o material didático e as exigências curriculares, à luz do conhecimento específico de conteúdo, para elaborar planos de aula adaptados às condições sociais e estruturais da sala de aula sob sua responsabilidade, trouxe um crescimento profissional consistente para o mestrando que com sua dissertação (Felix, 2010) contribuiu para estabelecer as bases para outros projetos de investigação no PPGECE. Os projetos de mestrado profissional na linha de LS que se seguiram contribuíram para constituir uma base para a implementação de Grupos de Estudo coletivos dos professores em exercício como processo de formação continuada apoiada por secretarias regionais de educação, no estado de São Paulo, e logo, um modelo possível para ser difundido em outras regiões (Baldin, Silva & Felix, 2023; Baldin, Silva & Souza, 2022). Uma contribuição significativa da série de trabalhos em LS no programa de formação continuada da UFSCar, é o reconhecimento e fortalecimento do eixo temático de Resolução de problemas, junto com estratégias diversas de ensino de Matemática básica, estudadas e testadas em laboratórios de ensino, como o núcleo dorsal da realização do processo formativo de professores com LS. Essa jornada de crescimento corrobora a história evolutiva do LS original no Japão, desde suas origens até os dias atuais, construída em torno do eixo Resolução de Problemas. (Isoda et al., 2007). A compreensão do papel do *ciclo básico de LS* como uma parte nuclear, mas não total do processo formativo, é chave para difundir LS como um processo formativo e não apenas operação/realização mecanizada de um ciclo. Assim, as investigações realizadas com LS na UFSCar, amparadas pelas características essenciais do LS, ultrapassaram as fronteiras culturais e geográficas, elas têm resultados de colaboração internacional que amplia a noção de

rede colaborativa de LS. Na linha deste trabalho, uma ampliação da noção de rede colaborativa para implementar o LS na formação inicial e continuada está atualmente em investigação com parceria internacional (Baldin et al, 2024).

Lesson Study na Formação Inicial: A prática formativa do ECSM desenvolvido pela UnB e UFCG

As formadoras de professores responsáveis pelo desenvolvimento do ECSM em processo de LS construíram a proposta para a formação inicial a partir do diálogo com robustas iniciativas nacionais e internacionais de apropriação cultural deste processo de desenvolvimento profissional. No Brasil, o diálogo se deu a partir das experiências pioneiras desenvolvidas pela Universidade Federal de São Carlos em parceria com a rede pública municipal, debatidas em Baldin (2009) e Baldin e Félix (2011). Como também, pelo diálogo e visitas técnicas junto ao Grupo de Sábado (GdS) da Universidade de Campinas que em parceria com a Secretaria de Educação de Campinas e cidades circunvizinhas, realizam LS na formação continuada de professores que ensinam Matemática (Crecci, Paula & Fiorentini, 2019).

No exterior, os diálogos foram realizados junto a pesquisadores portugueses, do Instituto de Educação, da Universidade de Lisboa com vasta experiência em Estudos de Aula (nomenclatura usada no país) na formação inicial e continuada de professores em parceria com escolas públicas da grande Lisboa e de outras regiões do país. Estas interlocuções possibilitaram a melhor compreensão da abordagem do Ensino Exploratório e de como esta se articula com a resolução de problemas adotada no Japão; da importância de qualificar a etapa de estudo que antecede o planejamento; do valor das tarefas matemáticas de natureza exploratória ou investigativas na ampliação da atividade matemática dos estudantes ao longo da aula, entre muitas outras (Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2015).

Tudo isso reverberou na estruturação de uma proposta de LS na formação inicial de professores de Matemática, no contexto das disciplinas de ECSM, da UnB e da UFCG, instituições das Regiões Centro-Oeste e Nordeste, respectivamente (Pina Neves & Fiorentini, 2021; Pina Neves, Fiorentini & Silva, 2022). O ECSM na UnB é um componente curricular obrigatório do curso de Licenciatura em Matemática no Brasil, que envolve futuros professores dos dois últimos semestres do curso. Na UFCG, o ECSM, também de caráter obrigatório, acontece nos três últimos períodos do curso.

Desde 2020, esses componentes são desenvolvidos colaborativamente pelas professoras formadoras (segunda e terceira autoras), empregando o LS como processo formativo. Para tanto, elas se reúnem a cada quinze dias para ações de planejamento e avaliação do trabalho. Os futuros professores (FP) se relacionam uns com os outros e com as formadoras e os(as) professores(as) supervisores(as) da escola durante um semestre letivo, tanto em ambientes físicos como nas universidades e escolas, quanto em ambientes virtuais, através do uso de aplicativos (Zoom, Meet, Teams etc.) e compartilhamento de arquivos pelo *Google Drive* ou *Classroom*. Dessa forma, as duas turmas participam de encontros virtuais síncronos para discussão e análise crítica sobre os planos de aula em elaboração, além da implementação em salas de aula do ensino fundamental e médio, e nas reflexões pós-aula que acontecem nas escolas e nas universidades também (Pina Neves et al., 2022; Macedo et al., 2019). Em termos de organização temporal, os componentes são desenvolvidas ao longo de um semestre letivo, em dezesseis semanas, em

médio, organizadas em módulos, a saber: Semanas de 1 a 4 - Apresentação da proposta; Organização da documentação; Leituras e estudos (LS, Ensino Exploratório, Documentos Curriculares, Livros Didáticos); visitas iniciais à escola, Definição do tópico curricular; Semanas de 5 a 8 - Observação de aulas; Leituras e estudos - EM - Tópico Curricular; Discussão sobre prática profissional e planejamento de aulas a partir da experiência de outros professores de Matemática (egressos e não egressos das IES); Elaboração e socialização de planos de aulas; semanas de 9 a 12 - Colaboração em aulas; Análise crítica e validação dos planos de aulas - estagiários (UnB e UFCG), professoras orientadoras e professor supervisor; desenvolvimento e análise crítica das aulas (Regência); semanas de 13 a 16 - Melhoria dos planos de aulas (sugestões advindas do desenvolvimento das aulas); Reaplicação em novas turmas e Relatos pessoais e dos grupos dos estagiários sobre a experiência vivenciada.

As turmas são compostas por no máximo dezesseis FP que são divididos em grupos de até quatro participantes para realização dos ciclos de LS. Em termos de etapas, a partir das três principais planejamento, desenvolvimento e reflexão pós-aula, foram construídas sete, a saber: . A realização destas ocorre tanto no ambiente da universidade, quanto da escola. Ao longo desses anos, foram realizados mais de sete semestres de ECSM em processo de LS, envolvendo mais de cento e vinte FP e mais de vinte professores(as) supervisores(as), no total. Esta proposta tem sido, constantemente, avaliada de modo a subsidiar a realização de ações conjuntas que integrem os FP e estimulem o trabalho colaborativo frente às etapas do LS adotado e dos produtos gerados, a saber: (i) Tarefas Matemáticas (adaptação, construção e desenvolvimento); (ii) Planos de Aulas (versões com comentários dos FP, supervisores, orientadores e membros do projeto); (iii) Discussão/reflexão oral e escrita dos planejamentos dos planos de aula a partir das socializações e sugestões (vídeo/texto); (iv) Reflexão oral e escrita da própria prática enquanto futuro professor de Matemática (vídeo/texto) e (v) Relatório de ECSM e relatos de experiências.

Em termos de resultados, destacam-se: a) o modo como os participantes ampliam seus vínculos profissionais, criando mais espaços para o diálogo, o debate, a produção coletiva e colaborativa; b) os ganhos em termos de conhecimentos profissionais - sobre os conteúdos matemáticos da educação básica, os documentos curriculares, como os estudantes aprendem e as dificuldades conceituais que possuem, sobre abordagens didáticas, especialmente, a do Ensino Exploratório, sobre instrumentos e posturas avaliativas em sala de aula, entre outras; c) as melhorias no modo de se perceberem enquanto professores, valorizando mais suas carreiras e práticas profissionais; d) o entendimento que passam a ter do quanto o trabalho solitário é prejudicial para a qualidade de vida do professor e para o trabalho que desenvolve; e) das transformações possíveis quando se decide trabalhar em grupos, cultivando-os em prol de sua consolidação enquanto grupos colaborativos que desenvolvem ciclos de LS de modo perene, crítico e responsável.

Esta proposta formativa tem alcançado resultados expressivos, o que tem fomentado a realização de intercâmbios com outras IES para agregar e enriquecer o trabalho colaborativo dos FP para que conheçam outras realidades que utilizam o LS em disciplinas de prática profissional, como é o caso do Instituto de Educação da Universidade de Lisboa (IEUL), da Universidad Nacional de Educación (UNAE) do Equador e, mais recentemente, da Universidade Federal do Oeste da Bahia (UFOB). Os intercâmbios mostram o valor social de se expandir o conhecimento a outros domínios geográficos, incentivando que todos aprendam juntos: os formadores

experientes com a pesquisa da própria prática e os novatos nessa ação; os FP já habituados ao processo de desenvolvimento profissional do LS e os iniciantes, ampliando a qualificação profissional docente e auxiliando na busca de soluções para problemas sociais e educacionais que, ainda, afligem a todos.

Considerações finais

Diante das pesquisas realizadas ao longo desses anos, percebe-se o avanço do trabalho colaborativo com o processo formativo LS tanto na formação continuada quanto na inicial em variadas regiões do Brasil, com características sociais e econômicas diferenciadas, mas amparadas pela mesma base curricular nacional. Levando em consideração a quantidade de estados, ainda são situações pontuais, mas que se desenvolvem a cada ano e contribuem para o objetivo da institucionalização nas políticas públicas. Essa institucionalização deve ir além de uma oficialização em documentos da educação, significa um novo passo para a educação brasileira, desde a formação inicial à continuada, para melhorar a qualidade do ensino e da aprendizagem da Matemática no país. A institucionalização deverá marcar uma atualização nos métodos de um ensino tradicional e uma conexão da tricotomia da formação matemática, didático-pedagógica e prática profissional. O trabalho educacional coletivo sobre as dificuldades enfrentadas pelos professores da educação básica será fortalecido pela realização de ciclos de LS nas escolas envolvendo os professores em exercício, e nos cursos de formação, envolvendo os futuros professores e os formadores.

Percebe-se um crescimento na sistematização nas pesquisas realizadas na formação continuada e na inicial, apresentadas anteriormente. Nesses processos de pesquisa, nota-se sempre uma preocupação com a prática profissional do professor, a formação didático-pedagógica e o conhecimento específico da Matemática de cada participante da pesquisa, o que conduz para um fortalecimento da relação entre universidade e escola, entre formadores e professores. Uma pesquisa aprofundada para sistematizar a percepção metacognitiva dos professores que participam dos processos de LS no seu desenvolvimento profissional será uma das questões para futuras investigações.

Referências

- Baldin, Y. Y. (2009). O Significado da introdução da Metodologia Japonesa de Lesson Study nos Cursos de Capacitação de Professores de Matemática no Brasil. In: *Anais Simpósio Brasil – Japão. São Paulo/SP: Associação Brasil-Japão de Pesquisadores - SBPN*, p. 1-5
- Baldin, Y. Y.; Felix, T. F. (2011) A pesquisa de aula (Lesson Study) como ferramenta de melhoria da prática na sala de aula. In: CIAEM-IACME (50 anos), 13. 2011, Recife. Anais. Recife, 2011. Disponível em: <https://xiii.ciaem-redumate.org>
- Baldin, Y. Y.; Montes, G.E.R.; Pina Neves, R da S.; Gutiérrez-Fallas, L.F.(2024). Colaboração Brasil-Costa Rica na construção de Pesquisa de Aula integrando formadores e futuros professores de Matemática. *Zetetike*, Campinas, SP, v. 32, n. 00, p. e024015, 2024. DOI: 10.20396/zet.v32i00.8677101. Disponível em: <https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8677101>
- Baldin, Y.Y., Silva, A.F., Souza, M.A. V.F. (2022) Desafios e diversidade de iniciativas para a implementação de Lesson Study com foco na formação continuada de professores de matemática. *Educação Matemática Em Revista - RS*, 1(23). <https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2.n.23.2022.p.149-159>
- Barrientos-Fernández, A., Pericacho -Gómez, F.-J. e Sánchez-Cabrero, R. (2020). Competências sociais e emocionais do professor de Educação Infantil e sua relação com a gestão do clima de aula. *Estudos sobre Educação* , 38 , 59–78. <https://doi.org/10.15581/004.38.59-78>

- Bourguignon, R., Garaudel, P., & Porcher, S. (2020). Acordos-quadro globais e sindicatos como agentes de monitoramento em empresas transnacionais. *Jornal de Ética Empresarial*, 165 (3), 517–533. <https://doi.org/10.1007/s10551-019-04115-w>
- Crecci, V.; de Paula, A. P. M.; Fiorentini, D. (2019). Desenvolvimento Profissional de uma professora dos anos iniciais que participa de um Lesson Study Híbrido. *Educere et Educare*, [S. l.], v. 14, n. 32, p. DOI:10.17648/educare.v14i32.22755
- Felix, T. F. (2010) Pesquisando a melhoria de aulas de matemática seguindo a proposta curricular do Estado de São Paulo, com a Metodologia da Pesquisa de Aula (Lesson Study). Dissertação (Mestrado)-Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências Exatas, Universidade Federal de São Carlos, São Carlos – SP, 2010. Disponível em: https://ppgece.ufscar.br/?page_id=144.
- Fernandez, C.; Yoshida, M. (2004) Lesson Study: a Japanese approach to improving Mathematics teaching and learning. Mahwah: Lawrence Erlbaum Associates.
- Isoda, M., & Baldin, Y. Y. (2023). Estudio de Clases Japonés, su Naturaleza y su Impacto en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. *PARADIGMA*, 44(2), 5–35. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410>
- Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y. & Miyakawa, T. (2007). Japanese Lesson Study in Mathematics: Its Impact, Diversity and Potential for Educational Improvement, World Scientific, Singapore.
- Isoda, M., Arcavi, A & Mena, A. (Eds.) (2012). El Estudio de Clases Japonés en Matemáticas: Su importancia para el mejoramiento de los aprendizajes en el escenario global. 3era Edición ampliada. pp. 320-328. Valparaíso: Ediciones Universitarias de Valparaíso
- Fiorentini, D. & Crecci, V. M. (2015). Aprendizagem Docente na Formação Inicial mediante análise de práticas de ensinar aprender Matemática. In: Lopes, C. E.; Traldi, A; Ferreira, A. C. (Org.). A Formação do Professor que ensina Matemática. Aprendizagem Docente e Políticas Públicas. Campinas, SP: Mercado de Letras.
- Hiebert, J., Gallimore, R., Garnier, H., Givvin, K.B., Hollingsworth, H., Jacobs, J., Chiu, A.M.-Y., Wearne, D., Smith, M., Kersting, N., Manaster, A., Tseng, E., Etterbeek, W., Manaster, C., Gonzales, P., and Stigler, J. (2003). Teaching mathematics in seven countries : Results from the TIMSS 1999 Video Study. U.S. Department of Education. Washington, DC: National Center for Education Statistics.
- Macedo, A.D.R., Baltar Bellemain, P.M., & Winslow, C. (2019). Lesson study with didactical engineering for student teachers in Brazil. *International Journal for Lesson and Learning Studies*, Vol. 9 No. 2, pp. 127-138. <https://doi.org/10.1108/IJLLS-03-2019-0027>.
- Nóvoa, A. (2017). Firmar a Posição como Professor, afirmar a Profissão Docente. *Cadernos de Pesquisa*, v. 47, n. 166, p. 1106-1133, out/dez. <https://doi.org/10.1590/198053144843>
- Pimenta, S. G.; Lima, M. S. L. (2005/2006). Estágio e docência: diferentes concepções. *Revista Poíesis*, vol. 3, n. 3 e 4, p. 5-24.
- Pina Neves, R. da S., & Fiorentini, D. (2021). Aprendizagens de futuros professores de matemática em um estágio curricular supervisionado em processo de Lesson Study. *Perspectivas da Educação Matemática*, 14(34), 1-30. <http://dx.doi.org/10.46312/pem.v14i34.12676>
- Pina Neves, R. da S., Fiorentini, D., & Silva, J. M. P. (2022). Lesson Study Presencial e o Estágio Curricular Supervisionado em Matemática: contribuições à aprendizagem docente. *Paradigma*, 43(1), 409-442. <https://10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2022.p409-442.id1178>.
- Ponte, J. P. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. In Planas, N. (Org.). *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática*. Barcelona: Graó, p. 83-98.
- Ponte, J. P., Quaresma, M., & Mata-Pereira, J. (2023). Prospective mathematics teachers' views of their learning in a lesson study. *PNA - Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, 17(2), 117-136. <https://doi.org/10.30827/pna.v17i2.23896>
- Richit, A., Ponte, J. P. da, & Tomkelski, M. (2019). Estudos de aula na formação de professores de matemática do ensino médio. *Revista Brasileira de Estudos Pedagógicos*, 100(254), 54-81. <http://dx.doi.org/10.24109/2176-6681.rbep.100i254>
- Silva, A. D. R. M. (2020). Contribuições da Jugyou Kenkyuu e da engenharia didática para a formação e o desenvolvimento profissional de professores de matemática no âmbito do estágio curricular supervisionado [Tese de doutorado, Universidade Federal de Pernambuco]. <https://repositorio.ufpe.br/handle/123456789/40028>
- Stigler, J. & Hiebert, J. (1999) *The Teaching Gap: Best Ideas from the World's Teachers for Improving Education in the Classroom*. The Free Press, New York. 210 p.
- Takahashi, A., & McDougal, T. (2016). Collaborative lesson research: maximizing the impact of lesson study. *ZDM*, 48(4), 513 – 526.



Liderazgo distribuido como predictor de cambio en las prácticas docentes

Brigitte Johana **Sánchez** Robayo
Universidad Distrital Francisco José de Caldas
Colombia
bjsanchezr@udistrital.edu.co

Resumen

Esta investigación indagó las relaciones entre dos tipos de liderazgo, el distribuido y el del rector, con el cambio positivo en las prácticas docentes. Utilizando un modelo jerárquico lineal de dos niveles, se estudiaron las percepciones de más de 4000 profesores y 290 rectores colombianos. Los resultados develan una tendencia moderada de cambio en las prácticas docentes, así como una correlación significativa entre el liderazgo distribuido y el cambio. Además, el liderazgo distribuido es un predictor significativo en el cambio positivo en las prácticas docentes e influye en la media institucional de cambio, mientras que el liderazgo del rector no tiene influencia significativa sobre dicha media. Se concluye resaltando la importancia de la participación colectiva en la toma de decisiones en las instituciones para cambiar las prácticas docentes y la necesidad de ampliar el espectro de estudio a perspectivas cualitativas de indagación.

Palabras clave: Cambio, prácticas docentes, desarrollo profesional, liderazgo distribuido, liderazgo, modelos jerárquicos, investigación cuantitativa, TALIS.

Introducción

En el sistema educativo existen distintos tipos de liderazgo que pueden influir en las prácticas de aula. En general, en el sistema escolar el liderazgo que más se distingue es aquel que recae en el rector en cada institución educativa. No obstante, existen tipos de liderazgo que van más allá de la mirada del individuo como “el (la) líder” y consideran el liderazgo como una propiedad colectiva. En la investigación que aquí se reporta, se estudiaron, desde una perspectiva cuantitativa, relaciones entre estos distintos tipos de liderazgo y el cambio positivo de las prácticas docentes en profesores colombianos.

Al hablar de cambio en las prácticas docentes, comúnmente las indagaciones se enfocan en aspectos centrados en el profesor (por ejemplo, desarrollo profesional o interacciones entre colegas). Sin embargo, elementos institucionales también pueden influir o en la decisión o en la implementación de algún cambio en la práctica docente. Por ejemplo, Cobb y Jackson (2011) encontraron que el clima institucional influencia la sostenibilidad de cierto cambio. No obstante, el clima escolar es uno de los factores que influencia el mejoramiento de las prácticas docentes (Autor, 2023). Como parte del clima escolar, el liderazgo al interior de la institución puede influenciar las prácticas docentes.

El liderazgo en el ámbito educativo puede provenir de rectores, coordinadores, o profesores (Berebitsky & Andrews-Larson, 2017; Shirrell et al., 2019). Un liderazgo a largo plazo, podría conducir a cambios leves en la práctica (Cobb & Jackson, 2011) si el líder facilita la comunicación entre profesores, administrativos, y demás integrantes de la comunidad educativa (Parise & Spillane, 2010; Wang & Degol, 2016). Para Bellibas et al. (2020) los rectores influyen las prácticas docentes al observar las prácticas, proporcionar retroalimentación o fortalecer las oportunidades de desarrollo profesional. Así mismo, los rectores pueden promover el diálogo entre profesores a través de la colaboración, los grupos de estudio entre colegas y las discusiones de índole reflexivo. Sin embargo, Rigby et al. (2017) encontraron que el liderazgo no debe recaer únicamente en el rector. Dada su carga laboral, su efecto en la mejora de las clases puede ser insignificante. Estos autores también plantean que pocos estudios exploran las conexiones entre las acciones de los rectores y el cambio en las prácticas docentes. No obstante, Boström y Palm (2020) encontraron que el apoyo de parte del rector puede afectar la percepción de los profesores acerca del valor que puede venir con cierto cambio.

Más allá de la mirada individual de liderazgo, existen tipos de liderazgo como el liderazgo compartido o el colectivo (Kezar, 2013) en el caso de educación superior y el liderazgo distribuido (Sleegers et al., 2014) para el caso de la educación escolar, que asumen el liderazgo como una propiedad de un grupo, una red o una comunidad más que una individual (Bianchini et al., 2014; Kezar, 2013). En el ámbito escolar, el liderazgo distribuido puede “aumentar el compromiso afectivo que los profesores tienen hacia los procesos de cambio” (Maureira-Cabrera et al., 2023, p. 3). En particular, Bellibas et al. (2020) encontraron que el liderazgo distribuido puede influenciar el mejoramiento de la práctica docente al incrementar la colaboración entre profesores y la satisfacción laboral. Adicionalmente, Chen (2018) encontró una relación directa entre el liderazgo distribuido y el cambio en las prácticas docentes y concluyó que una distribución equitativa del liderazgo podría tener impacto en el cambio instruccional si los líderes alinean sus miradas y comportamientos hacia cierto objetivo.

Con un estudio a gran escala, este reporte se centra en las relaciones entre liderazgo del rector y liderazgo distribuido con cambio en la práctica docente. Las relaciones son de índole correlacional y predictivo y permiten identificar variaciones entre profesores y entre colegios.

Metodología

Esta investigación fue de índole cuantitativo. El método de análisis fue un modelo jerárquico lineal (Hierarchical linear modelling -HLM-) de dos niveles. El análisis se realizó en

dos programas: El paquete estadístico para las ciencias sociales -SPSS- y el de modelación jerárquica lineal y no lineal, que fue usado para conducir los modelos jerárquicos. Los datos se tomaron de la Encuesta Internacional de Enseñanza y Aprendizaje -TALIS-.

Datos

Los datos provienen de la encuesta aplicada en 2018 a profesores y rectores de diferentes regiones de Colombia. Dentro de la encuesta, se incluye un cuestionario para profesores, aplicado a un aproximado de 20 profesores por institución y un cuestionario para rectores, aplicado a los rectores de las instituciones encuestadas. Dado que las dos poblaciones fueron muestreadas por medio de diseño de clúster estratificada de múltiples etapas (OECD, 2019), en el análisis se incluyeron los pesos estimados de la encuesta. La muestra inicial incluyó 4640 profesores agrupados en 312 colegios. Luego del tratamiento de datos, se obtuvo una muestra de 4426 profesores y 290 colegios.

Variables

El modelo incluye diferentes variables para cada nivel.

Variables del nivel 1. La variable de salida es *cambio positivo en la práctica docente* (CAMBIO). Es una variable ordinal que podía tomar valores entre 0 y 5. Esta variable tomó de base la pregunta 31 del cuestionario de profesores, en la que se les cuestiona si tuvieron algún cambio positivo en alguno de seis aspectos de su enseñanza. MATH es una variable dicotómica que se enfoca en si el profesor enseñaba Matemáticas. Esta variable fue codificada como 1 si el profesor enseñaba Matemáticas y 0 si no lo hacía. DISTRIBUIDA refiere a *liderazgo distribuido* y representa la percepción de los profesores acerca del liderazgo distribuido en su colegio. Es una variable continua creada a partir del promedio de 9 ítems que conforman la pregunta acerca del liderazgo distribuido en la encuesta de profesores TALIS.

Variables del nivel 2. Estas variables tienen dos fuentes diferentes de construcción: preguntas del cuestionario para rectores y agregados de las variables del nivel 1. Para calcular las variables composicionales, usé la función de *agregado* del programa SPSS separando la variable IDSCHOOL (ID de colegio) y agregando la variable respectiva del nivel 1.

MEAN_DISTRIBUIDA es una variable composicional que representa las percepciones del grupo de profesores de un mismo colegio acerca del liderazgo distribuido en el mismo. Esta variable fue calculada con el promedio de la variable de nivel 1 DISTRIBUIDA.

RECTOR_DISTRIBUIDA es una variable construida del cuestionario para rectores.

Específicamente los cuestionarios de profesores y rectores contienen preguntas comunes sobre su percepción de liderazgo distribuido en la institución. Esta variable representa la percepción del rector del liderazgo distribuido en su institución, es una variable continua calculada de los ítems que conforman la pregunta y que son comunes a los ítems que incluía la encuesta de los profesores. RECTOR es la variable que considera diferentes acciones que el rector hace como líder, para promover el mejoramiento de las prácticas docentes. Esta variable se construye de la pregunta del cuestionario de rectores en la que se les cuestiona la frecuencia con la que hacen ciertas actividades. Esta es una variable continua que representa el liderazgo del rector.

Modelos

Siguiendo el método de análisis, primero se estimó el modelo incondicional (Aguinis et al., 2013; Raudenbush & Bryk, 2002) para identificar la varianza asociada al cambio positivo en prácticas docentes al interior de los colegios y entre colegios. Posteriormente se estimó el modelo condicional y el modelo mixto para identificar relaciones de predicción en las variables de nivel 1 y estimar las estimaciones de cambio en y entre colegios de acuerdo a los predictores. A continuación se describe el modelo principal:

Nivel 1

$$CAMBIO_{ij} = \beta_{0j} + \beta_{1j}MATH + \beta_{2j}DISTRIBUIDA + r_{ij}$$

Nivel 2

$$\beta_{0j} = \gamma_{00} + \gamma_{01}MEAN_DISTRIBUIDA + \gamma_{02}RECTOR_DISTRIBUIDA + \gamma_{03}RECTOR + u_{0j}$$

$$\beta_{1j} = \gamma_{10} + u_{1j}$$

$$\beta_{2j} = \gamma_{20} + \gamma_{21}MEAN_DISTRIBUIDA + \gamma_{22}RECTOR_DISTRIBUIDA + \gamma_{23}RECTOR + u_{2j}$$

Donde $CAMBIO_{ij}$ representa cambio en la práctica docente del profesor i en el colegio j . β_{0j} representa el promedio de cambio en las prácticas docentes. β_{ij} para $i = 1, 2$ son los coeficientes del nivel 1. Cada coeficiente tiene variación aleatoria en el modelo de nivel 2.

Resultados

Los resultados presentan elementos descriptivos, así como correlaciones y los resultados específicos del modelo incondicional y condicional.

Tabla 1
Estadística Descriptiva

NIVEL 1	<i>P</i>	<i>DE</i>	<i>Min</i>	<i>Max</i>	α
CAMBIO	2.85	1.75	0.00	5.00	0.60
DISTRIBUIDA	3.02	0.55	1.00	4.00	0.91
MATH	0.2	0.40	0.00	1.00	-
NIVEL 2					
MEAN_DISTRIBUIDA	3.02	0.25	2.32	3.94	-
RECTOR_DISTRIBUIDA	3.28	0.42	1.00	4.00	0.86
RECTOR	2.91	0.54	1.17	4.00	0.80

Según la percepción de los profesores y los rectores, en los colegios se distribuye el liderazgo entre diferentes agentes del sistema educativo; en particular la percepción respecto a dicha distribución es más alta en rectores. No obstante, los rectores tienen mejor percepción del liderazgo distribuido que del liderazgo individual en sus instituciones. Por otro lado, el valor alfa de Cronbach (α) muestra un nivel alto de consistencia en los grupos de preguntas analizados para cada una de las variables.

Correlaciones

Calculé la correlación Pearson en las variables de nivel 1 y 2 para indagar las asociaciones bivariadas entre variables. Así mismo, usé los pesos de muestra en los cálculos realizados.

Tabla 2.
Correlaciones

		1	2	3	4	5	6
Nivel 1	1. CAMBIO	--					
	2. MATH	-.04**	--				
	3. DISTRIBUIDA	.31**	-.03*	--			
Nivel 2	4. MEAN_DISTRIBUIDA				--		
	5. RECTOR_DISTRIBUIDA				.33**	--	
	6. RECTOR				.10**	.24**	--

Nota: **La correlación es significativa en 0.01(2-tailed).

Aunque no muy alta, existe una relación significativa entre el cambio positivo en las prácticas docentes y el liderazgo distribuido. Así mismo, desde la percepción de los rectores, la relación entre el liderazgo del rector y el liderazgo distribuido es significativa pero baja ($r = .24$). Por otro lado, existe una relación significativa negativa pero cercana a cero entre el ser profesor de Matemáticas y el cambio positivo en las prácticas docentes ($r = -.04$).

Modelo Jerárquico Lineal

Modelo Incondicional. Del modelo incondicional se obtuvo un promedio de cambio en las prácticas docentes de 2.75 (0.05, $p < 0.001$), con 95% de rango posible de valores (2.7, 2.8). Dado que la variable CAMBIO es una variable ordinal con valores enteros entre 1 y 5, este rango de valores sugiere una tendencia moderada al implementar cambios positivos en la práctica docente. La varianza de la variable CAMBIO es significativa entre profesores y entre colegios, pero es casi cero en esta última (0.00002, $p < 0.001$), lo que sugiere que factores asociados a los profesores pueden explicar mejor tal varianza.

Modelo Condicional. Los resultados del modelo condicional se presentan en la tabla 3. El porcentaje de varianza para el nivel 1 es de 12.6% y para el nivel 2 de 50% dada la baja variabilidad de la variable de salida en este nivel.

Tabla 3.
Modelo Condicional

Efectos fijos	Efecto (es)
Gran media de CAMBIO	2.83(0.04)***
MEAN_DISTRIBUIDA	1.67(0.15)***
RECTOR_DISTRIBUIDA	0.05(0.10)
RECTOR	-0.01(0.06)
MATH	-0.12 (0.07)

Efectos fijos	Efecto (es)
DISTRIBUIDA	0.85(0.06)***
MEAN_DISTRIBUIDA	-0.04(0.25)
RECTOR_DISTRIBUIDA	-0.08(0.17)
RECTOR	0.13(0.11)
Variance Components	Varianza
With-in school variability of change	2.57
Between school variability of change	0.00***
MATH	0.00003
DISTRIBUIDA	0.00002**
Variance Explained	Varianza
Level 1 proportion variance explained (R^2_{L-1})	0.126
Level 2 proportion variance explained (R^2_{L-2})	0.5

p < 0.01; *p < 0.001.

El liderazgo distribuido es un predictor significativo de cambio en las prácticas docentes ($\beta = 0.85$). Por otro lado, la media de cambio de los promedios de los colegios (gran media) confirma la tendencia de implementar cambios en las prácticas docentes en los colegios, estas tendencias son influenciadas por el liderazgo distribuido en la institución; efecto contrario al liderazgo del rector que no tiene influencia sobre la gran media. Adicionalmente, los resultados muestran que, con la variable de control DISTRIBUIDA, el ser profesor de Matemáticas no influye en la tendencia de cambio de las prácticas docentes y el liderazgo distribuido tiene una tendencia significativa pero muy baja entre colegios.

Conclusiones y discusión

Usando un modelo jerárquico lineal de dos niveles, en esta investigación se analizó información de profesores y rectores colombianos, proveniente de la encuesta internacional de enseñanza y aprendizaje -TALIS-, respecto a sus percepciones en torno al liderazgo y al cambio. Este análisis permitió develar relaciones entre el cambio en las prácticas docentes y dos tipos de liderazgo en las instituciones: del rector y distribuido. A partir de la percepción de los profesores, el liderazgo distribuido tiene un efecto alto y significativo en el cambio positivo de las prácticas docentes. Así, si el profesor percibe que las decisiones en el colegio son tomadas por diferentes agentes de la comunidad escolar (estudiantes, trabajadores, profesores), lo que fortalece la posibilidad que sus prácticas cambien positivamente.

Existe una relación directa entre liderazgo distribuido y cambio positivo en las prácticas docentes. Este resultado confirma las relaciones que Chen (2018) encontró respecto a las interacciones entre líderes en un tipo de liderazgo distribuido con el cambio instruccional y amplía dicho hallazgo, pues las preguntas consideradas cuestionan la toma de decisiones desde distintos miembros de la comunidad educativa.

De manera similar, O'Shea (2022) encontró que el liderazgo distribuido predice el uso de prácticas innovativas de parte de los profesores y Lin (2022) que dicho liderazgo afecta la aceptación e internalización de ideas creativas de parte de los profesores. Así, el liderazgo visto como una propiedad grupal tiene influencia en el cambio positivo de las prácticas docentes y fomenta el uso, aceptación o internalización de parte de los profesores, de diferentes técnicas.

Dado que el liderazgo (grupal o individual) forma parte del clima escolar (Autor, 2023), una institución que provea oportunidades a sus trabajadores, padres, estudiantes o profesores de participar en las decisiones escolares, incrementará las posibilidades de cambios positivos en sus prácticas docentes. Así, en términos de organización escolar, si dicha organización provee condiciones para ampliar la participación de sus miembros en la toma de decisiones puede ampliar las posibilidades de cambio positivo en las prácticas docentes al interior de los colegios.

El efecto del liderazgo distribuido en el cambio positivo en prácticas docentes tiene una variación significativa entre colegios. Tal variación puede responder a la gran diferencia existente entre colegios rurales y urbanos en Colombia. Cuando menos, hay dos diferencias entre estas instituciones: la presencia de personal administrativo y la estabilidad de los profesores. Respecto al primero, hay una gran discrepancia organizacional entre colegios a lo largo del país. Aunque en el sistema educativo colombiano, cada colegio debe estar integrado por profesores, estudiantes, personal administrativo, coordinadores, padres y rectores; en áreas rurales, tales características organizacionales no suceden en muchos casos. Altos niveles de dispersión en la población generan que los colegios expandan el número de sedes; por ejemplo, en locaciones de postconflicto, algunos colegios tienen hasta cuatro o cinco sedes diferentes (MEN, 2018a). Adicionalmente, los bajos niveles de registro estudiantil junto con algunas normas legales no admiten un cuerpo entero de personal administrativo que apoye la administración del colegio (MEN, 2018b, p. 34). Esto produce que en algunos casos, el rector sea el único personal administrativo en un colegio con más de tres sedes. Bajo este escenario, el colegio no tiene personal más allá del rector para participar en las decisiones escolares, identificar creencias comunes sobre enseñanza o aprendizaje, o reforzar normas de comportamiento. Segundo, la población profesoral es más inestable en áreas rurales que en las urbanas (Echeverri, 2022; Mauris, 2022). Tal inestabilidad vuelve más difícil la participación de los profesores en la toma de decisiones en el colegio, el compartir responsabilidades respecto a cuestiones institucionales, o tener continuidad en propósitos de cambio en la institución.

Esta investigación se centró en uno de los aspectos que forman parte del clima escolar y que influyen en la práctica docente: el liderazgo educativo. En particular, muestra que la distribución de liderazgo tiene un efecto positivo importante en el cambio de las prácticas docentes. No obstante, el análisis descriptivo muestra que dicho liderazgo tiene cierta presencia en las escuelas colombianas desde la percepción de los profesores y de los rectores. Sin embargo, existen estudios como el de Labrín (2014), quien encontró que profesores y directivos de un Liceo chileno plantean diversas acciones propias del liderazgo distribuido en su institución que en el día a día no se reflejan. Así, es necesario indagar desde un punto de vista cualitativo, cuáles son las dinámicas reales de distribución de liderazgo de las instituciones escolares y cómo las acciones específicas asociadas al mismo influyen en las aulas.

Referencias

- Aguinis, H., Gottfredson, R. K., & Culpepper, S. A. (2013). Best-practice recommendations for estimating cross-level interaction effects using multilevel modeling. *Journal of Management*, 39(6), 1490–1528.
<https://doi.org/10.1177/0149206313478188>
- Autor (2023). *Predictors of Positive Change in Teaching Practices: A Quantitative Study* [Dissertation]. Virginia Polytechnic Institute and State University.

- Bellibaş, M. Ş., Gümüş, S., & Liu, Y. (2020). Does school leadership matter for teachers' classroom practice? The influence of instructional leadership and distributed leadership on instructional quality. *School Effectiveness and School Improvement*, 0(0), 1–26. <https://doi.org/10.1080/09243453.2020.1858119>
- Berebitsky, D., & Andrews-Larson, C. (2017). Teacher advice-seeking: Relating centrality and expertise in middle school mathematics social networks. *Teachers College Record*, 119(10), 1–40.
- Bianchini, S., Maxwell, T., & Dovey, K. (2014). Rethinking leadership in the academy: An Australian case. *Innovations in Education and Teaching International*, 51(5), 556–567. <https://doi.org/10.1080/14703297.2013.786582>
- Boström, E., & Palm, T. (2020). Expectancy-value theory as an explanatory theory for the effect of professional development programmes in formative assessment on teacher practice. *Teacher Development*, 24(4), 539–558. <https://doi.org/10.1080/13664530.2020.1782975>
- Chen, S. (2018). Influence of functional and relational perspectives of distributed leadership on instructional change and school climate. *The Elementary School Journal*, 119(2), 298–326. <https://www.journals.uchicago.edu/doi/pdf/10.1086/700279>
- Cobb, P., & Jackson, K. (2011). Towards an empirically grounded theory of action for improving the quality of mathematics teaching at scale. *Mathematics Teacher Education and Development*, 13(1), 6–33.
- Echeverri, E. (2022, October). La educación rural en Colombia se enfrenta a deserción escolar, falta de recursos y corrupción. *Semana*.
- Kezar, A. (2013). *How colleges change: understanding, leading, and enacting change*. Taylor & Francis.
- Labrín Bórquez, K. Y. (2014). *Prácticas que configuran un liderazgo distribuido en un liceo politécnico de la comuna de San Miguel* [Magister]. Universidad de Chile.
- Lin, Q. (2022). The relationship between distributed leadership and teacher innovativeness : Mediating roles of teacher autonomy and professional collaboration. *Frontiers in Psychology*, July, 1–11. <https://doi.org/10.3389/fpsyg.2022.948152>
- Mang, J., Küchenhoff, H., Meinck, S., & Prenzel, M. (2021). Sampling weights in multilevel modelling: an investigation using PISA sampling structures. *Large-Scale Assessments in Education*, 9(1). <https://doi.org/10.1186/s40536-021-00099-0>
- Maureira-Cabrera, Ó., Ahumada-Figueroa, L., Ascencio-Garrido, C., & Bandeira-Andriola, W. (2023). Liderazgo distribuido en centros escolares: cambios en la percepción de prácticas educacionales. *Ensaio*, 31(121). <https://doi.org/10.1590/S0104-40362023003103839>
- Mauris, L. (2022). Liderazgo pedagógico en la educación rural colombiana: los desafíos , retos y oportunidades generadas por la crisis sanitaria del COVID-19. *Revista Estudios Psicológicos*, 2(1), 74–87. <https://doi.org/10.35622/j.rep.2022.01.005> Recibido
- MEN. (2018a). Plan especial de educación rural. Hacia el desarrollo rural y la construcción de paz [Special rural education plan. Towards rural development and the construction of peace]. In *Ministerio de Educación Nacional*. Ministerio de Educación Nacional.
- MEN. (2018b). Plan especial de educación rural. Hacia el desarrollo rural y la construcción de paz [Special rural education plan. Towards rural development and the construction of peace]. In *Ministerio de Educación Nacional*. Ministerio de Educación Nacional. https://www.mineducacion.gov.co/1759/articles-385568_recurso_1.pdf
- OECD. (2018). *OECD Teaching and Learning International Survey (TALIS) Teacher Questionnaire* (pp. 1–30). OECD. <http://www.oecd.org/education/school/TALIS-2018-MS-Teacher-Questionnaire-ENG.pdf>
- OECD. (2019). *TALIS 2018 and TALIS Starting Strong 2018 User Guide*. <http://www.oecd.org/education/school/oecd-starting-strong-teaching-and-learning-international-survey.htm>
- Parise, L. M., & Spillane, J. P. (2010). Teacher learning and instructional change: How formal and on-the-job learning opportunities predict change in elementary school teachers' practice. *Elementary School Journal*, 110(3), 323–346. <https://doi.org/10.1086/648981>
- Raudenbush, S. W., & Bryk, A. S. (2002). *Hierarchical linear models. Applications and data analysis methods*. (Second). Sage Publications.
- Rigby, J. G., Larbi-Cherif, A., Rosenquist, B. A., Sharpe, C. J., Cobb, P., & Smith, T. (2017). Administrator observation and feedback: Does it lead toward improvement in inquiry-oriented math instruction? *Educational Administration Quarterly*, 53(3), 475–516. <https://doi.org/10.1177/0013161X16687006>
- Shirrell, M., Hopkins, M., & Spillane, J. P. (2019). Educational infrastructure, professional learning, and changes in teachers' instructional practices and beliefs. *Professional Development in Education*, 45(4), 599–613. <https://doi.org/10.1080/19415257.2018.1452784>

- Sleegers, P. J. C., Thoonen, E. E. J., Oort, F. J., & Peetsma, T. T. D. (2014). Changing classroom practices: The role of school-wide capacity for sustainable improvement. *Journal of Educational Administration*, 52(5), 617–652. <https://doi.org/10.1108/JEA-11-2013-0126>
- Wang, M. Te, & Degol, J. L. (2016). School climate: a review of the construct, measurement, and impact on student outcomes. *Educational Psychology Review*, 28(2), 315–352. <https://doi.org/10.1007/s10648-015-9319-1>



Los sentimientos: Una barrera del conocimiento de la práctica educativa del profesorado que enseña Matemáticas en educación básica primaria

José Luis **Bossio** Vélez
Universidad de Antioquia
Colombia
jose.bossio@udea.edu.co
Zaida Margot **Santa-Ramírez**
Universidad de Antioquia
Colombia
zaida.santa@udea.edu.co
Carlos Mario **Jaramillo** López
Universidad de Antioquia
Colombia
carlos.jaramillo1@udea.edu.co

Resumen

Esta investigación, desarrollada en el marco de una tesis doctoral adscrita a la Facultad de Educación de la Universidad de Antioquia, Colombia, analizó las acciones e interacciones de la práctica educativa del profesorado de básica primaria que enseña Matemáticas, identificando diversas barreras en su conocimiento de la práctica educativa. A partir de una metodología basada en la teoría fundamentada, se generó un esquema explicativo para reconocer las transformaciones en dicho conocimiento. Los hallazgos evidencian que sentimientos como inseguridad, incertidumbre y frustración, afectan el desarrollo de la enseñanza de las Matemáticas. Sin embargo, se identificaron reflexiones durante la formación y desarrollo profesional que fortalecieron el conocimiento de la práctica educativa. El esquema generado ofrece una visión integral de cómo la formación ofrecida incide en la superación de estas barreras, destacando la importancia de su reconocimiento para transformar y fortalecer el conocimiento del profesorado para la enseñanza de las Matemáticas.

Palabras clave: Conocimiento de la Matemática; Conocimiento de la práctica educativa; Conocimiento profesional; Formación y desarrollo profesional; Sentimientos; Tareas para el aula.

Definición y relevancia del problema

La UNESCO (2015) indica que la práctica del profesorado en el aula tiene una alta incidencia en el aprendizaje, lo que hace esencial su mejoramiento. En el caso del profesorado de básica primaria, se presentan fuertes limitaciones en la enseñanza de las Matemáticas (Antonio et al., 2019). Según la Fundación Compartir (2015), estas limitaciones se manifiestan en una enseñanza centrada en una única forma de resolver problemas o en la formulación de aquellos que no propician el aprendizaje de nuevas nociones matemáticas.

A partir de esta investigación, durante la revisión y análisis de literatura, se reconocieron barreras con respecto a la práctica educativa de Matemáticas del profesorado de básica primaria (Bossio Vélez et al., 2023), en correspondencia con la enseñanza de las Matemáticas mediante una alternativa de práctica educativa como la modelación matemática en educación básica primaria (Borromeo-Ferri y Blum, 2014). Además, se identificó la manera de proyectar y planear la práctica educativa con respecto al conocimiento profesional del profesorado en cuanto a sus dimensiones (Ponte, 2012).

No obstante, algunos aspectos relevantes presentados en Bossio-Vélez et al. (2020), los cuales describen elementos relacionados con los sentimientos del profesorado, fueron analizados a partir de conceptos tales como inseguridad, incertidumbre, frustración, entre otros. Estos conceptos se identificaron en estrecha relación con el plan de estudios de Matemáticas, los conceptos matemáticos a enseñar y aspectos asociados con el desarrollo de la práctica en el aula. Como consecuencia, se observó una fuerte limitación en el proceso de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas de los estudiantes que cursan grados de educación básica primaria.

Por tanto, el estudio se planteó la siguiente pregunta de investigación: ¿cómo el profesorado que enseña Matemáticas en básica primaria transforma su conocimiento de la práctica educativa a partir de la elaboración de tareas para el aula? En la perspectiva de la formación y desarrollo profesional de Ponte (2012) y contando con el interés y la voluntad de un colectivo de profesoras, participantes del estudio, se lograron reconocer distintas transformaciones en tal conocimiento.

Referencial teórico

El conocimiento del profesorado para enseñar Matemáticas se ha convertido en un objeto de estudio relevante para los investigadores en el campo de la Educación Matemática. En este sentido, Ponte (2012) describe el conocimiento del profesor con cuatro dimensiones del conocimiento didáctico. El *conocimiento de la Matemática para su enseñanza* es entendido a partir del conocimiento que el profesor pone en juego para enseñar las Matemáticas a sus estudiantes, como conceptos, ideas y maneras de representarlas. Por otra parte, el *conocimiento del alumnado y de su aprendizaje* se asocia con el reconocimiento que hace el profesorado de las necesidades de aprendizaje de sus estudiantes, sus ritmos y cómo estos relacionan las

Matemáticas en diferentes contextos. Referente al *conocimiento del currículo*, se relaciona con la manera como el profesor integra y organiza los lineamientos curriculares en correspondencia con los objetivos macros y micros (Santana et al., 2020), estos vistos a partir del plan de estudios que dispone la escuela. En cuanto al *conocimiento de la práctica educativa*, Ponte (2012) hace referencia a la manera de direccionar la práctica en el aula a corto y mediano plazo, y a los diferentes momentos del desarrollo al interior de esta; también se refiere a los elementos a considerar a la hora de evaluar los aprendizajes de los estudiantes y a la forma de organizar, orientar y agrupar a los estudiantes en el aula. Todos estos elementos se pueden reconocer en correspondencia de los tres conocimientos anteriores.

Por otro lado, el desarrollo profesional es entendido en la mirada de un tipo de formación que va de adentro hacia afuera (Ponte, 2012). No es en el sentido de qué debería saber el profesorado para la enseñanza de las Matemáticas; sino que parte de las expectativas e intereses del profesorado para desarrollar su práctica educativa. En este caso, las tareas para el aula (Ramos-Rodríguez et al., 2015) posibilitan al profesor un acercamiento a las Matemáticas para fortalecer su práctica educativa, en la medida en que va construyendo las distintas actividades para desarrollar con los estudiantes en el aula.

La elección de la categoría de sentimientos como eje de análisis se fundamenta en su aparición como categoría central durante el proceso de codificación abierta. Sentimientos como el miedo, la inseguridad y la frustración tuvieron una incidencia significativa en la forma en que las profesoras participantes desarrollaban su práctica educativa, especialmente al planear y desarrollar la práctica en el aula. Esta perspectiva concuerda con lo planteado por Ponte (2004), quien señala que los sentimientos forman parte del desarrollo profesional del profesorado como un aspecto personal que condiciona su motivación, disposición y seguridad al enseñar. Para este estudio, los sentimientos no solo reflejan barreras en la práctica educativa, sino que, también, constituyen un lente a través del cual las profesoras transforman su relación con las Matemáticas y su rol como profesoras que enseñan esta asignatura.

Método y desarrollo conceptual

Esta investigación se enmarcó en el paradigma cualitativo, adoptando la metodología de la teoría fundamentada propuesta por Strauss y Corbin (2016). El estudio contó con la participación de seis (6) profesoras de educación básica primaria de una institución educativa pública de la región de Urabá (Colombia), seleccionadas bajo los siguientes criterios: (1) disposición para integrar un proceso de formación y desarrollo profesional; (2) experiencia como profesoras en educación básica primaria sin especialización en enseñanza de las Matemáticas; y (3) responsabilidad directa en la enseñanza de las Matemáticas en cuarto grado de primaria.

El análisis se centró en las acciones e interacciones de las profesoras durante la construcción reflexiva de tareas para el aula, en la mirada de Ramos-Rodríguez et al. (2015). Para ello, se emplearon los métodos de codificación abierta, axial y selectiva, propios de la teoría fundamentada. La operacionalización de los datos cualitativos se realizó con el apoyo del software ATLAS.ti, versión 24, lo que permitió sistematizar y visualizar múltiples representaciones de la información para su análisis integral.

Se dispusieron seis (6) encuentros con el colectivo de profesoras para desarrollar la formación y desarrollo profesional que posibilitó la construcción de tareas para el aula, con el propósito de analizar cómo ellas, durante estos encuentros, transformaron su conocimiento de la práctica educativa de Matemáticas. Durante estos encuentros, se recopilaron los datos cualitativos mediante entrevistas, observaciones, videos de la práctica en el aula y documentos escritos por las profesoras. Estos registros fueron almacenados para su posterior análisis y de allí emergieron los diferentes esquemas conceptuales para generar un modelo refinado (Jiménez-Fontana et al., 2017), es decir, esquema explicativo. Con este, se logró responder a la pregunta de investigación del estudio en cuestión.

Resultados

A partir del análisis mediante codificación abierta, axial y selectiva, emergieron diversas categorías que estructuran el esquema explicativo del estudio. En la tabla 1 se sintetizan las principales categorías, los conceptos asociados y su relación con la teoría que sustenta el análisis.

Tabla 1
Relación entre las categorías emergentes y referentes teóricos

Categoría	Conceptos asociados	Relación teórica
Sentimientos	Temor, inseguridad, frustración	Ponte (2004): condiciones personales del desarrollo profesional
Conocimiento de la práctica educativa	Planeación, agrupación, evaluación	Ponte (2012): dimensiones del conocimiento profesional del profesorado
Tareas para el aula	Contextualización, elaboración de tareas	Ramos-Rodríguez et al. (2015): tareas como medio de desarrollo profesional

Para efectos de este artículo, se describirán tres (3) momentos clave en la transformación de los sentimientos de las profesoras, como categoría central de análisis, que participaron en el estudio. A partir de estos, la formación y desarrollo profesional abordó la construcción de tareas para el aula. En el primer momento se analizaron los episodios narrados por las profesoras al inicio de la investigación, donde se evidenciaron sus sentimientos iniciales en cuanto a su práctica educativa. En el segundo momento se reconocieron transformaciones en su conocimiento y enfoque educativo, reflejadas en la elaboración de tareas para el aula, lo que demostró un avance en su desarrollo profesional. Finalmente, en el tercer momento, se identificó un antes y un después que permitió observar cómo sus sentimientos se transformaron, fortaleciendo su práctica educativa y generando mayor confianza en su labor como profesoras.

Primer momento: sentimientos iniciales sobre la práctica educativa

En cuanto a los *sentimientos*, para el presente análisis, se consideró la mirada de Ponte (2004) cuando se refiere al *sentimiento general de desarrollo profesional*. Durante el proceso de formación y desarrollo profesional, las profesoras experimentaron sentimientos de frustración, temor e impotencia. Por lo tanto, estos fueron agrupados en el análisis mediante la categoría emergente *Sentimientos*. Estos elementos se asociaron con algunas barreras del conocimiento de la práctica educativa del profesorado, tal como se pudo reconocer en el testimonio de la profesora Débora en la Tabla 2. Esto también se evidenció en Bossio-Vélez et al. (2020) cuando

el profesorado expresó sentimientos de *temor* y *frustración* con respecto al desarrollo de su práctica.

Tabla 2

Testimonio de la profesora Débora durante el momento 1.

Débora: las matemáticas las consulto hasta tal punto que yo trato de entender para poderle transmitir a ellos, porque no quiero que ellos de pronto se encuentren en las mismas que yo me encontré, con una situación tan difícil. Pero como tal, no me siento bien en las matemáticas. Ese proceso de bachillerato me generó una barrera que todavía experimento. (Código 34:48)

Fuente: transcripción primer momento, archivo de audio en Atlas.ti 24.

Con referencia a los conceptos de *frustración* y *miedo*, tanto para la profesora Yujo como para la profesora Débora, estos estarían asociados con las experiencias de su formación inicial en Matemáticas. La profesora Yujo mencionó haber tenido una experiencia negativa con un profesor de Matemáticas, lo que le generó *miedo* (o *temor*) hacia tal asignatura, mientras que la profesora Débora precisó que *las Matemáticas le generan incertidumbre y susto*, especialmente cuando debe asumir la planificación de sus clases (ver Tabla 3).

Tabla 3

Testimonios de las profesoras Yujo y Débora durante el Encuentro 1.

Yujo: me enseñaron las tablas de multiplicar en mi casa porque no me las sabía y la profesora me pegaba. De esa manera fue que las aprendí. Ahora que soy profesora me da miedo porque en cuarto son más avanzadas. (Código 34:68)

Débora: con las matemáticas, no es que me generan temor, sino que ya me lo generaron. Le cuento, cuando yo estaba estudiando en octavo grado, estuvimos un tiempo sin profesor porque no lo habían nombrado, entonces nos tocó validar la asignatura. Respecto a la validación, llegó un profesor y nos dio unas clases, y entonces siempre decía “cuidado con esos que no saben las cosas, que no las hacen bien”. Pues, él me generaba pánico, miedo hacia las matemáticas. Por esa razón, le cogí pereza a las matemáticas. (Código 34:46)

Fuente: transcripción primer momento, archivo de audio en Atlas.ti 24.

Se reconoce, en lo anterior, una barrera con respecto al conocimiento de la práctica educativa, dado que se identificó un sentimiento general de desconfianza (Ponte, 2004) a la hora de desarrollar la planeación, aspecto reflejado en la propuesta de guía de la práctica educativa de las Matemáticas en el aula. Por el momento, los sentimientos expresados por las profesoras, al parecer, obstaculizaban no solo aspectos de su conocimiento, sino, también, la acción de su práctica en el aula.

Segundo momento: elaboración de tareas para el aula

En el análisis de la categoría *tareas para el aula*, se pudo observar un enfoque de enseñanza que buscó integrar la medición y la comprensión geométrica de manera contextualizada. Las profesoras desarrollaron tareas para el aula que permitieron a los estudiantes explorar conceptos matemáticos a partir de múltiples perspectivas.

El diseño de tareas reflejó un enfoque de aprendizaje diferente al tradicional (Aparisi y Pochulu, 2013), en el que los estudiantes participaron, directamente, en la exploración y el análisis de conceptos matemáticos. La profesora Yazmin, por ejemplo, propuso medir la cancha de fútbol de la escuela y utilizar estas medidas para calcular el área y el perímetro. Este enfoque ayudó en la comprensión de los estudiantes al ver cómo los conceptos matemáticos se usan en situaciones de la vida diaria; además, a incentivarlos a identificar figuras geométricas y relacionarlas con mediciones, así que se promovió un pensamiento de las Matemáticas ajustado a los contextos sociales y culturales (Bossio et al., 2015).

Un aspecto significativo del análisis fue la reflexión y el empoderamiento de las profesoras en cuanto a su rol. La profesora Yujo expresó su sorpresa al darse cuenta de que pudo desarrollar una clase de Matemáticas por sí misma (ver Tabla 4), lo que indicó un nivel creciente de confianza en su práctica educativa (Santana et al., 2020). Este empoderamiento influyó en la manera de desarrollar su enseñanza, ya que se sintieron con habilidades y competencias al diseñar actividades que pudieran ser significativas para sus estudiantes.

Tabla 4

Testimonio de la profesora Yujo durante el diseño de tareas para aula.

Yujo: *Yo insisto que algo sé de Matemáticas y siempre he dicho que nos la compartieron mal. Me acabo de dar cuenta que acabé de preparar una clase de Matemáticas, que yo misma pienso dar cuando la termine de arreglar. ¡Pero la preparé yo misma! Yo siento que esto salió de nosotras, salió de mí. Me preguntaba ¿y eso dónde estaba? Ja, ja, ja. (Código 89:44)*

Fuente: transcripción momento 2, archivo de audio en Atlas.ti 24.

Las tareas para el aula diseñadas por las profesoras mostraron una proyección de la práctica educativa al integrar la medición y la comprensión geométrica a partir de contextos cercanos a los estudiantes o propios de la geometría. Estas tareas, durante la práctica en el aula, fomentaron la exploración, la aplicación práctica y la reflexión por parte de los estudiantes. Además, el empoderamiento de las profesoras demostró un proceso de desarrollo profesional que transforma elementos del conocimiento de su práctica educativa.

Tercer momento: un antes y un después en la transformación de la práctica educativa

El reconocimiento de una serie de barreras con respecto al conocimiento de la práctica educativa de las Matemáticas subrayó la presencia de desafíos y obstáculos que las profesoras afrontaron en las etapas iniciales de su participación en el proceso formativo y de desarrollo profesional; según sus testimonios (ver Tabla 5), se evidenció una actitud de cambio toda vez que ellas lograron superar los obstáculos durante el trabajo de campo de esta investigación.

Tabla 5

Testimonios de las profesoras Débora, Yujo y Yazmin: momento 3.

Débora: *ya no padezco de ese susto a las Matemáticas. Ahora me siento más tranquila, más liberada, y sí, puedo trabajar con mucha libertad. Ya no me da temor hacer Matemáticas con mis estudiantes, porque la puedo hacer desde una ensalada de frutas, las puede hacer desde contar piedras en el patio del recreo, desde mirar las hojas de los árboles. Ya no hay nada que temer. (Código 91:19)*

Yujo: *ahora, me siento, desde lo personal, muy plena. Descubrí en mí que sí podía, mi ambiente de clase es más tranquilo, vi un camino y me comprometí porque vi que podía enseñar unas Matemáticas activas, veo que ahora puedo integrar otras asignaturas a la clase de Matemáticas. Esto sentía que no era capaz. Me siento más plena y emocionada planeando la clase de Matemáticas.* (Código 91:49)

Yazmin: [...] *ya nos sentamos con las otras colegas a evaluar, a reflexionar nosotras mismas sin que nadie nos diga. Evaluamos los procesos, los casos particulares de las preguntas de los estudiantes, cambio las estrategias para que los estudiantes aprendan. Ahora observo que los niños que saben contar y conocen los números, con un buen proceso pueden resolver los problemas, sin necesidad de decirles cuándo sumar o cuándo multiplicar, con una buena motivación todo te lo hacen.* (Código 91:65)

Fuente: transcripción momento 3, archivo de entrevista en Atlas.ti 23.

La superación del *miedo* a las Matemáticas fue evidenciada en las palabras de la profesora Débora, la cual indicó una transformación, ya que, después del proceso formativo, ella se sintió liberada de este sentimiento. Esto permitió inferir que transformó su conocimiento de la práctica educativa al ser capaz de abordar la enseñanza de las Matemáticas incorporando elementos del contexto cotidiano de sus estudiantes en la práctica en el aula, demostrando una nueva perspectiva que va más allá de la limitada visión inicial que experimentó. La seguridad y la tranquilidad transmitidas por la profesora Débora en su testimonio fueron notables, debido a que su superación del *miedo* le permitió una mayor confianza en sus habilidades y una apertura de pensamiento a enfoques de enseñanza orientados a la contextualización de los aprendizajes de los estudiantes.

Así mismo, la profesora Yujo compartió una experiencia transformadora en su testimonio, expresando una sensación de *plenitud* al reconocer que podía construir un conocimiento para enseñar Matemáticas y ajustarlo a las necesidades de sus estudiantes. Esta descripción permitió inferir un cambio en su enfoque de la práctica educativa y destacó una conexión de sus sentimientos con la enseñanza de esta asignatura, es decir, su cambio se evidenció en su habilidad para contextualizar y relacionar la asignatura con otros aspectos del conocimiento, logrando una integración con otras áreas del conocimiento y enriqueciendo, así, la experiencia de aprendizaje de sus estudiantes.

El cambio de percepción de la profesora Yujo, como profesora que enseña Matemáticas, indicó un progreso importante en su desarrollo profesional debido a su capacidad de reconocer y superar barreras, lo cual incidió en una transformación en el enfoque de su práctica educativa, en el fortalecimiento del conocimiento profesional y la confianza para enseñar esta asignatura. En el caso de la profesora Yazmin, se resaltó un avance en su enfoque hacia la enseñanza de las Matemáticas, destacando el desarrollo de su conciencia sobre sus habilidades y su creatividad para ampliar su práctica educativa.

Conclusiones

La categoría emergente de *sentimientos*, al inicio de la investigación, estuvo asociada con conceptos como inseguridad, incertidumbre y frustración, relacionados, principalmente, con el conocimiento de las Matemáticas. Estos reflejaban barreras en las profesoras con respecto a la comprensión de ciertos conceptos matemáticos, lo cual dificultaba su práctica educativa. Sin embargo, a lo largo del proceso de formación y desarrollo profesional, estos sentimientos experimentaron una transformación significativa.

A través de acciones e interacciones al interior del colectivo, se fomentaron sentimientos de confianza y motivación, los cuales posibilitaron reconocer nuevas formas de representar las Matemáticas, basándose en los contextos conocidos por sus estudiantes. Este cambio de la inseguridad y frustración hacia la confianza y la motivación, fue crucial para el empoderamiento de la planificación de su práctica educativa. La reflexión continua y la integración de nuevos enfoques de enseñanza permitieron a las profesoras elaborar tareas adaptadas a las necesidades y contextos específicos de sus estudiantes, fortaleciendo, así, tanto su práctica educativa como el aprendizaje y la participación de sus estudiantes; esto propició responder a la pregunta por la transformación del conocimiento de la práctica educativa a partir de la elaboración de tareas.

Referencias

- Antonio, L., Bernal, E., Naranjo, G., Vite, A., Gómez, M., Rebolledo, V., Rangel, N., García, S., Ramírez, M., Ramos, D. y Reséndiz, L. (2019). *La enseñanza en educación básica. Análisis de la práctica docente en contextos escolares*. Instituto Nacional para la Evaluación de la Educación.
- Aparisi, L. y Pochulu, M. D. (2013). Dificultades que enfrentan los profesores en escenarios de modelización. En R. Flores (Ed.), *Acta latinoamericana de matemática educativa* (pp. 1387-1397). Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Borromeo-Ferri, R., & Blum, W. (2014). Barriers and motivations of primary Teachers for implementing Modelling in mathematics lessons. In B. Ubuz, C. Haser y M.A Mariotti (Eds.), *Proceedings of the Eight Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 1000-1009). CERME 8.
- Bossio, J. L., Londoño, S. M., & Jaramillo, C. M. (2015). Activation of Student Prior Knowledge to Build Linear Models in the Context of Modelling Pre-paid Electricity Consumption. In Stillman, G., Blum, W., Salett Biembengut, M. (Eds), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice. International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 317-326). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-319-18272-8_26
- Bossio Vélez, J. L., Santa Ramírez, Z. M. y Jaramillo López, C. M. (2023). Un análisis sobre las barreras de la modelación matemática en la práctica educativa del profesor de básica primaria. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 68, 255-285. <https://doi.org/10.35575/RVUCN.N68A11>
- Bossio-Vélez, J. L., Santa-Ramírez, Z. M. y Jaramillo-López, C. M. (2020). Conocimiento profesional del profesor de básica primaria: Una reflexión sobre su práctica de enseñanza. *Escenarios actuales en ciencias exactas y naturales*, 1, 29-43.
- Fundación Compartir. (2015). *¿Cómo enseñan los maestros colombianos en el área de matemáticas?* Fundación Compartir.
- Jiménez-Fontana, R., García-González, E. y Cardeñoso, J. M. (2017). Teoría Fundamentada: Estrategia para la generación teórica desde datos empíricos. *Campo abierto*, 36, 29-46. <https://doi.org/10.17398/0213-9529.36.1.29>
- Ponte, J. (2004). Pesquisar para compreender e transformar a nossa própria prática. *UFPR*, 24, 37-66.
- Ponte, J. (2012). Estudiando el conocimiento y el desarrollo profesional del profesorado de matemáticas. En N. Planas (Ed.), *Teoría, Crítica y Práctica de La Educación Matemática* (pp. 83-98). Graó.
- Ramos-Rodríguez, E., Martínez, P. F., Da Ponte, J. P. y Verdejo, A. M. (2015). Desarrollo profesional del docente de matemáticas a través de sus tareas para el aula propuestas en un curso de formación. *Bolema - Mathematics Education Bulletin*, 29(51), 389-402. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a20>
- Santana, E., Ponte, J. P. y Serrazina, M. de L. (2020). Conhecimento didático do professor de matemática à luz de um processo formativo. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 34(66), 89-109. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v34n66a05>
- Strauss, A. y Corbin, J. (2016). *Bases de la investigación cualitativa: Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Universidad de Antioquia.
- UNESCO. (2015). *Factores Asociados*. UNESCO.



Matemáticas en Movimiento: Impacto de MateMóvil

Ana Paola **Castillo** Domenech
Mathkind Global
Ecuador

pao@mathkind.org

Jorge Luis **Gutiérrez** Villegas
Mathkind Global
Ecuador

jorge@mathkind.org

Saúl Eduardo **Méndez** Larios
Mathkind Global
Guatemala

saul@mathkind.org

Las Matemáticas son clave para el pensamiento crítico, pero su enseñanza enfrenta desafíos en comunidades rurales de Ecuador y Guatemala debido a la falta de formación docente y recursos adecuados. Mathkind Global promueve estrategias pedagógicas basadas en evidencia, articuladas en los Principios de Enseñanza Eficaz (PEE), que buscan desarrollar aprendizajes significativos. El programa MateMóvil, de Mathkind, surge como una solución para acercar a los docentes recursos didácticos y estrategias pedagógicas adaptables a sus contextos. Este estudio presenta el impacto del programa en comunidades rurales ecuatorianas y guatemaltecas, con énfasis en la autopercepción de los docentes sobre su avance profesional y su transición de una educación tradicional centrada en el docente hacia una educación centrada en el estudiante.

Metodología y resultados más relevantes

El programa se desarrolla en módulos de 15 horas divididos en 5 sesiones, tal como muestra la Figura 1, que incluyen talleres prácticos, observación en aula y evaluación del impacto. En cada sesión se resalta 1 de los 5 PEE de Mathkind. MateMóvil se enfoca en la exploración y experimentación con materiales didácticos, el acompañamiento y retroalimentación constante, y la medición del progreso a través de encuestas y rúbricas.

Desde 2022, el programa MateMóvil ha logrado un impacto en Guatemala de 33 docentes y 845 estudiantes (en 3 módulos), y en Ecuador de 46 docentes y 1028 estudiantes (en 4 módulos). Se han alcanzado un total de 14 escuelas participantes en ambos países, con un puntaje promedio de cumplimiento de expectativas reportado por los docentes de 8.3/10. Los participantes muestran un cambio hacia metodologías más activas, una visión positiva del error y una disposición a seguir explorando nuevas estrategias pedagógicas.

01	LA BRÚJULA: ¿Dónde estoy y a dónde voy?	Planteamiento de objetivos globales y personales que guíen el camino.	PEE: Enfocarse en el contenido relevante.	
02	MANOS A LA OBRA: ¿Qué es y cómo lo uso?	Exploración del material con juegos y actividades que estimulan el pensamiento crítico.	PEE: Proporcionar tareas desafiantes.	
03	DE SABELOTODO A CURIOSO: ¿Por qué? ¿cómo lo sabes?	Actividades grupales que favorezcan el discurso matemático significativo.	PEE: Preguntar y Escuchar	
04	HAZLO TÚ MISMO: ¿Cómo crear mi propio material?	Elaboración del material concreto fabricado con elementos de la vida cotidiana, y planificación de una clase modelo adaptada al contexto.	PEE: Asegurar un involucramiento equitativo	
05	ALCANZANDO METAS ¿Cumplí mis objetivos?	Monitoreo del aprendizaje, seguimiento al cumplimiento de objetivos y participación en la feria de cierre.	PEE: Monitorear el aprendizaje y proporcionar retroalimentación	

Figura 1. Estructura de programa con los Principios de Enseñanza Eficaz (PEE) resaltados por sesión

Conclusiones y recomendaciones

El impacto de MateMóvil no solo se evidencia en el uso de recursos pedagógicos innovadores, sino en el cambio progresivo y paulatino hacia una enseñanza más dinámica y reflexiva. Los siguientes aspectos reflejan las conclusiones más relevantes:

- Percepción del error: Uno de los cambios más evidenciados muestra cómo los docentes aprendieron a ver los errores como oportunidades de aprendizaje.
- Aplicación en el aula: La combinación de talleres, observación de clases y reflexión guiada permite que los docentes se sientan más seguros de transferir sus aprendizajes a la práctica educativa de manera efectiva.
- Cierre con impacto: La feria de aprendizajes demostró ser una estrategia efectiva para consolidar conocimientos y compartir experiencias.

MateMóvil por sí solo no tendría un impacto significativo y sostenible sin una visión más amplia. Si bien esta propuesta se centra en sus resultados, el programa es parte de un modelo pedagógico integral de Mathkind Global, donde cada iniciativa se interconecta y complementa. Se recomienda replicar el programa en nuevas regiones y continuar midiendo el impacto.

Referencias y bibliografía

- Boaler, J. (2015). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching*. Jossey-Bass.
- Dweck, C. (2006). *Mindset: The New Psychology of Success*. Random House.
- Hattie, J., & Timperley, H. (2007). *The Power of Feedback*. Review of Educational Research, 77(1), 81-112.
- Mathkind Global (2024). *Principios de Enseñanza Eficaz*. Recuperado de: https://mathkind.org/wp-content/uploads/2022/03/PET_Mar2022_ESP_Landscape.pdf
- National Council of Teachers of Mathematics (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. Reston, Va: NCTM



Metodologia Lesson Study e Teaching Research Group: Lições e Práticas de Xangai

Silmara Louise da **Silva**
Instituto Federal do Triângulo Mineiro Campus Paracatu
Brasil
silmaraba10@gmail.com
Marcela Luciano Vilela de **Souza**
Universidade Federal do Triângulo Mineiro
Brasil
marcela.souza@uftm.edu.br

Resumo

Este trabalho se baseia em um intercâmbio em Xangai, China, em setembro de 2024, com professores brasileiros do ensino básico e superior, focando na metodologia Lesson Study (LS) para o ensino de Matemática. Durante a vivência no Teaching Research Group (TRG), metodologia do Lesson Study desenvolvida na China, os participantes assistiram a aulas de Ensino Médio e discutiram práticas pedagógicas com professores locais na Universidade Normal de Xangai. Também ministraram uma aula para o 1º Ano do Ensino Médio, com base nas estratégias discutidas. O principal aprendizado foi a importância da colaboração e reflexão no planejamento das aulas. O grupo de professores brasileiros já iniciou a disseminação do conhecimento por meio de workshops e planeja aprofundar pesquisas sobre a formação continuada de professores para melhorar a prática pedagógica e o aprendizado em Matemática.

Palavras-chave: Lesson Study; Teaching Research Group; Conhecimento Pedagógico de Conteúdo; Formação continuada; Ensino de Matemática.

Fundamentação teórica

O ensino de Matemática no Brasil enfrenta desafios para implementar metodologias inovadoras como o Lesson Study (LS). Segundo Baldin, Silva e Félix (2023), o LS transforma a prática pedagógica por meio da colaboração entre professores, promovendo o Conhecimento Pedagógico de Conteúdo (PCK). Essa metodologia estimula a reflexão sobre o planejamento das

aulas, a participação dos alunos e a observação mútua. O planejamento colaborativo é essencial para antecipar as reações dos alunos e melhorar a prática pedagógica (BALDIN et al., 2023). No Brasil, a criação de uma comunidade de aprendizagem é um desafio, mas fundamental para o sucesso do LS, como destacam Isoda e Baldin (2023).

Na China, práticas como a revisão de aulas e a preparação colaborativa contribuem para o desenvolvimento profissional dos professores e a melhoria coletiva do ensino (WANG, 2020).

Metodologia

Este estudo surgiu a partir de um intercâmbio realizado em Xangai, China, em setembro de 2024, envolvendo professores brasileiros do ensino básico e superior. O foco da experiência foi investigar a metodologia Lesson Study (LS), adaptada no contexto chinês como Teaching Research Group (TRG). Ao longo dessa vivência, os participantes tiveram a oportunidade de observar aulas do Ensino Médio e de participar de discussões sobre as práticas pedagógicas adotadas. Também tiveram a experiência de ministrar uma aula para o 1º Ano do Ensino Médio, com base em estratégias que foram previamente discutidas e planejadas em conjunto.

As visitas a quatro escolas de Xangai, aliadas às discussões realizadas na Universidade Normal de Xangai, permitiram uma reflexão crítica sobre as práticas observadas, oferecendo uma oportunidade de análise detalhada dos aspectos metodológicos e pedagógicos que emergiram durante o intercâmbio.

Resultados

O principal aprendizado foi a importância de investigar a essência da aprendizagem, refletindo sobre como se ensina, além de o que se ensina. A preparação de aulas em grupo, prática comum no TRG, é essencial para o desenvolvimento dos professores.

Os professores brasileiros já começaram a disseminar o conhecimento adquirido por meio de workshops, buscando melhorar a formação continuada e o planejamento de aulas, com foco no aprendizado efetivo dos alunos em Matemática.

{Enlace

<https://drive.google.com/file/d/18D7tXPFd6pKZhLPpui7FHVMjIBDEtzZF/view?usp=sharing>}

Referências e bibliografia

- Baldin, Y.Y., Silva, A.F., Souza, M.A. V.F. (2022) Desafios e diversidade de iniciativas para a implementação de Lesson Study com foco na formação continuada de professores de matemática. *Educação Matemática Em Revista* - RS, 1(23). <https://doi.org/10.37001/EMR-RS.v.2.n.23.2022.p.149-159>
- Baldin, Y. Y., da Silva, A. F., & Felix, T. F. (2023). Introdução dos Princípios da Lesson Study no Brasil: primeiros passos e grupos de estudo. *Revista Paradigma*, 44, 131-158.
- Isoda, M., & Baldin, Y. Y. (2023). Estudio de Clases Japonés, su Naturaleza y su Impacto en la Enseñanza y el Aprendizaje de las Matemáticas. *Paradigma*, 44(2), 5–35. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2023.p5-35.id1410>
- Wang, L. (2020). Teaching Research Group (Jiaoyanzu) and Teacher Development in China. In: Peters, M. (eds) *Encyclopedia of Educational Philosophy and Theory*. Springer, Singapore. https://doi.org/10.1007/978-981-287-532-7_717-1



Modelo para la enseñanza de la resolución colaborativa de problemas matemáticos: Aprendizajes de una investigación

Omar Hernández Rodríguez

Departamento de Estudios Graduados, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras
Puerto Rico

omar.hernandez4@upr.edu

Eric Figueroa González

Escuela Elemental, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras+
Puerto Rico

eric.figueroagonzalez@upr.edu

Yamily Colón Negrón

Escuela Elemental, Universidad de Puerto Rico, Recinto de Río Piedras

yamily.colon@upr.edu

Resumen

Reportamos un estudio de caso sobre la resolución colaborativa de problemas matemáticos a nivel elemental. La investigación tenía tres fases. En la primera los estudiantes resolvieron problemas sin ninguna instrucción, ni supervisión del proceso. En la segunda, recibieron instrucción sobre el proceso colaborativo con énfasis en la comprensión común del problema y tuvieron supervisión. En la tercera, volvieron a resolver problemas sin instrucción, ni supervisión. Utilizando el modelo establecido por la OECD (2017), el análisis de la información nos permitió establecer un modelo de seis categorías indispensables para la enseñanza colaborativa de problemas matemáticos: propiciar el ambiente para que el estudiante adquiera compromiso en la resolución colaborativa del problema, posibilitar la comprensión individual y grupal del enunciado del problema, estimular la generación y prueba de posibles soluciones, mantener el compromiso en la resolución colaborativa del problema, mantener equilibrio entre trabajo colaborativo e individual, verificar la comprensión individual y grupal sobre el problema.

Palabras clave: Educación Matemática primaria; Formación continua y desarrollo profesional; Resolución de problemas; Resolución colaborativa de problemas.

Introducción

Trena Wilkerson, pasada presidenta del Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas de Estados Unidos (NCTM, la sigla en inglés), reconoce la importancia de la resolución de problemas matemáticos en la formación de ciudadanos con la capacidad de entender y criticar el mundo y para prepararlos como líderes sociales (Wilkerson, 2022). También describe los esfuerzos de su organización que por décadas ha promovido la resolución de problemas matemáticos. Desde la publicación del informe *Una agenda para la Acción* en 1980, el NCTM ha privilegiado la resolución de problemas. La primera recomendación del informe era que para la década de los 80 del siglo pasado, la Educación Matemática se debía enfocar en la resolución de problemas, y la segunda indicaba que las competencias básicas no debían ser exclusivamente algorítmicas (NCTM, 1980). Wilkerson también reconoce que, a pesar de todos los esfuerzos, los cambios no han sido notables. El enfoque en los salones de clases sigue siendo el dominio de las operaciones en lugar de la resolución de problemas, el pensamiento crítico o el razonamiento.

Enseñar la resolución de problemas es un proceso complejo. Chapman (2015) realizó una revisión de literatura y estableció siete dimensiones que debe dominar el maestro que incluyen su capacidad para resolver problemas, el conocimiento de la estructura e importancia del problema, el conocimiento de cómo los estudiantes resuelven problemas, el conocimiento sobre cómo enseñar a resolverlos y el conocimiento de los aspectos afectivos y creencias que rodean esta tarea. Por su parte, Cheeseman (2018) realizó una investigación para determinar los factores que se le dificultan a los maestros. Entre los más destacados encontró el rol que deben cumplir cuando los estudiantes están resolviendo problemas, la selección apropiada de problemas y cómo apoyar a los estudiantes para que sean más persistentes y resilientes. Aunque en estas investigaciones no se considera la resolución colaborativa de problemas matemáticos, nos permiten determinar que es un proceso complejo, que se requiere de más investigación y de mayor capacitación para los maestros.

Las investigaciones sobre resolución colaborativa de problemas matemáticos tienen como foco los diferentes grupos de participantes, niveles académicos y facetas del proceso. Sofroniou y Poutos (2016) investigaron los aspectos positivos del trabajo colaborativo en estudiantes universitarios de ingeniería civil de primer año. Figueroa et al. (2025) investigaron las interacciones de los estudiantes de primaria al resolver problemas matemáticos sin ser expuestos a instrucción. Nieminen et al. (2022) investigaron el papel de la intervención estudiantil¹ de estudiantes de secundaria cuando resuelven problemas colaborativos en tareas abiertas que se basan en contextos de la vida real y exigen argumentación más allá de lo “matemático”.

Varios investigadores han desarrollado modelos para la implantación del trabajo colaborativo en el salón de clases. Roschelle y Teasley (1995) desarrollaron el concepto de parcelas compartidas de conocimiento a partir del análisis del trabajo de dos estudiantes de quince años al resolver problemas interaccionando con la computadora. Griffin et al. (2012) desarrollaron su modelo con el propósito de evaluar a gran escala y con medios tecnológicos las competencias para el siglo 21; Sun et al. (2020) establecen un modelo a partir de la revisión de literatura y lo validan en dos escenarios diferentes, el primero con estudiantes de nivel

¹ En el sentido de tomar la iniciativa y hacer que las cosas sucedan durante el trabajo colaborativo. El término que utilizan los autores en inglés es “student’s agency”.

intermedio que resuelven problemas de física durante tres horas, y el segundo, con estudiantes universitarios que resuelven problemas de programación en interacción remota durante 20 minutos. Ninguno de los modelos fue desarrollado a partir de la observación de estudiantes de nivel primario mientras resolvían problemas matemáticos.

El objetivo principal de esta investigación es la construcción de un modelo de enseñanza para la resolución colaborativa de problemas matemáticos con estudiantes de nivel primario. Nos enfocamos en la observación de grupos de estudiantes realizando la tarea de resolver problemas matemáticos en un contexto natural del salón de clases. Los problemas que escogimos para la investigación son problemas muy similares a los que plantean los maestros en sus salones de clases. Partimos de una revisión de la literatura de la cual sintetizamos las pautas para las mejores prácticas y continuamos con la observación de los grupos de estudiantes para determinar los procesos que utilizan y las interacciones que se dan entre ellos. Posteriormente, analizamos un grupo de tres estudiantes a lo largo de las tres fases del estudio. Nos preguntamos, ¿cuáles son los aspectos que se deben tener en cuenta para elaborar un modelo de enseñanza para la resolución colaborativa de problemas matemáticos con estudiantes de nivel primario?

Marco teórico

En esta investigación integramos el método de inquirir propuesto por Polya (1945) y el modelo propuesto por la OECD (2017) sobre las competencias para la resolución colaborativa de problemas. Reconocemos, desde el inicio de la investigación, que ninguna de estas publicaciones está dirigida a la educación primaria y que sus recomendaciones deben ser adaptadas para ajustarlas a esta población. La publicación del libro de Polya (1945) sobre solución de problemas establece un hito en la historia del tema. En la primera oración el autor establece que la tarea principal del maestro es ayudar al estudiante. Indica que lo puede lograr por medio de sugerencias y preguntas que guíen al estudiante por cuatro fases: comprensión del problema, elaboración de un plan para resolver el problema, desarrollo de un plan de resolución y reflexión sobre el proceso.

Por su parte, la OECD (2017) estableció las competencias de un individuo para participar activamente en un proceso en el cual dos o más personas intentan resolver un problema por medio de un entendimiento común y compartiendo conocimientos, destrezas y esfuerzos para llegar a una solución. Por medio de una tabla cruzada establece las competencias colaborativas y las competencias de resolución de problemas. Las competencias colaborativas consideradas son: (1) establecer y mantener un entendimiento compartido, es decir, conocer lo que saben los otros miembros del equipo y garantizar que los miembros del equipo compartan la misma visión del problema; (2) tomar las medidas adecuadas para resolver el problema determinando las acciones de colaboración que se deben realizar; y, 3) ejecutar las acciones para establecer y mantener la organización del equipo siguiendo su propio rol en la estrategia de resolución de problemas y verificando que los otros también cumplan con su rol asignado. Por otro lado, las competencias de resolución de problemas son: (1) explorar y comprender el problema, esto es, examinar la situación que se pretende atender, entender el contexto, determinar los elementos y su estado actual, clarificar lo que se pregunta, determinar los elementos indispensables, determinar los contenidos matemáticos que están presentes y establecer la pregunta del problema; (2) representar y formular, esto es, identificar oportunidades para aplicar las Matemáticas, ver que

las Matemáticas pueden ser útiles para entender o resolver un problema, construir una representación compartida del significado del problema utilizando representaciones verbales, gráficas o simbólicas; (3) planificar y ejecutar, es decir, identificar las tareas, la secuencia en que se deben realizar y asignar la o las personas que la van a realizar; y, (4) supervisar y reflexionar en el sentido de reflexionar sobre la solución matemática o los resultados e interpretarlos en el contexto del problema y en el campo matemático.

Método

Utilizamos el estudio de caso como diseño de esta investigación. Nos enfocamos en el proceso de resolución de problemas matemáticos en forma colaborativa por parte de estudiantes de quinto grado. Específicamente, utilizamos el análisis de las interacciones de los estudiantes para proponer un modelo que permita al docente organizar su sala de clases de forma que se optimice el fortalecimiento de las competencias de trabajo colaborativo y del entendimiento del contenido matemático.

El estudio se realizó en tres fases. En la primera fase, determinamos las interacciones de los estudiantes sin recibir ninguna instrucción. En una segunda fase todos los estudiantes recibieron instrucción en la resolución de problemas en forma colaborativa. Las competencias que se desarrollaron fueron las recomendadas por la OEDC (2017). En una tercera fase los estudiantes volvieron a resolver problemas sin ninguna intervención de los maestros o los investigadores.

Los participantes pertenecían a dos salones de quinto grado con 11 y 14 estudiantes, respectivamente. Los participantes se dividieron en nueve grupos de dos o tres estudiantes. Cada grupo contaba con una computadora en donde se grababan todas las interacciones mientras resolvían los problemas. Los estudiantes se ubicaron de tal forma que la cámara de la computadora capturara el lenguaje oral, el lenguaje corporal y en general, las interacciones de todos los miembros del equipo. Las sesiones de solución de problemas se realizaron en periodos lectivos de 50 minutos. En cada clase los estudiantes resolvieron colaborativamente un problema. Cada integrante del grupo recibía una hoja con el problema y espacio suficiente para resolverlo. Cada estudiante identificaba su hoja de trabajo con un código que se le había asignado previamente y anotaba todos los procesos que se le ocurrían para la resolución del problema. Cuando terminaban de resolver el problema, debían indicarlo para recibir una hoja en la cual plasmarían la solución grupal final. Posteriormente, uno de los investigadores realizó una entrevista a los miembros del equipo para recoger la percepción de los estudiantes sobre su participación en el proceso. Cada grupo resolvió nueve problemas, tres en cada fase. Las fuentes de información fueron, las hojas de trabajo individual de los estudiantes, la hoja grupal de la solución consensuada del problema, el análisis de los vídeos, y las transcripciones de las entrevistas a los estudiantes después de la sesión de resolución de problemas.

Análisis de la información

El análisis de la información se realizó en dos etapas. En la primera, los investigadores revisaron todos los videos. En el proceso excluyeron los videos que tenían problemas de sonido y aquellos en los que no había mucha interacción entre los participantes. Posteriormente, los

investigadores seleccionaron uno de los grupos de trabajo para un análisis más detallado de las tres fases del estudio. El grupo seleccionado estaba compuesto por tres niñas a las que nos referiremos por los seudónimos Beatriz, Carla y Dora. Desde el inicio Beatriz realizó acciones que denotaron su deseo de liderar los trabajos y la reacción de sus compañeras para retar su liderazgo. De los nueve problemas resueltos, seleccionamos los problemas 1 y 2 de la primera fase, los problemas 4 y 5 de la segunda fase y el problema 8 de la tercera fase. Algunos de los problemas fueron:

Problema 1

Juan se durmió a las 9:30pm y despertó a las 6:45am. Al día siguiente su hermano Carlos durmió 1 hora 50 minutos más que él. ¿Cuánto tiempo durmió Carlos?

Problema 5

Marian ganó un concurso y puede escoger un máximo de 1000 dulces. Sin embargo, tiene dos opciones:

- a. Llenar 30 bolsas con la misma cantidad de dulces en cada bolsa.
- b. Llenar 24 cajas poniendo en cada caja una cantidad distinta de dulces.

¿Cuál es la mejor opción para Marian? Mostrar todas las posibilidades y explicar cómo las hallaron.

Problema 9

El número 2581953764 se escribe en una tira de papel. John corta la tira 2 veces y obtiene 3 números. Luego suma estos 3 números. ¿Cuál es la suma más pequeña posible que se puede conseguir?

Resultados

El análisis de la información nos permitió establecer un modelo de seis categorías para la enseñanza colaborativa de problemas matemáticos. Estas categorías no son mutuamente excluyentes, por lo que algunas acciones del docente pueden asociarse con más de una categoría. A continuación, se describe cada categoría y se presentan algunas preguntas que pueden ayudar en el proceso.

Categoría #1: Propiciar el ambiente para que el estudiante adquiera compromiso en la resolución colaborativa del problema

El docente forma grupos heterogéneos mediante la exploración de los estilos de aprendizaje, intereses y afinidades. La formación de grupos fundamentados en estos criterios procura evitar que ocurran aislamientos en los cuales no se involucre a algún miembro del grupo. Otras acciones que propician este tipo de ambiente son entregar a cada estudiante una hoja con el problema asignado, ofrecer instrucciones específicas para que inicialmente todos realicen una lectura en silencio del problema y posteriormente uno de los estudiantes realice una lectura en voz alta, mientras los restantes miembros del grupo siguen la lectura con su hoja del problema. Luego, el docente invita a los estudiantes a conversar sobre lo que cada uno comprende con el propósito de un entendimiento común aun cuando exista la posibilidad de que sea incorrecto o que se esté obviando algún dato o información relevante. El maestro evita asignar roles específicos y permite que sean los mismos estudiantes quienes por consenso establezcan roles y tareas en los grupos. El docente fomenta que los estudiantes se involucren con el problema y se

comprometan con hallar una solución grupal al mismo. Fomenta que los estudiantes se motiven a resolver de manera colaborativa el problema ya sea porque le resulta interesante, pertinente o ambas.

Categoría #2: Posibilitar la comprensión individual y grupal del enunciado del problema

El maestro guía a los estudiantes a comprender la situación planteada. En esta categoría el docente alienta a los estudiantes a explicarse mutuamente lo que entienden del problema y destacar los datos o información que deben tener en cuenta. En caso de que el problema no incluya un diagrama o representación visual, el maestro propone que cada estudiante genere una representación visual del mismo, ya sea mediante un diagrama, tabla o dibujo, y que además exprese en voz alta lo que entiende de la situación, sin discutir estrategias de solución. El maestro luego fomenta que cada grupo discuta lo generado por cada estudiante para comparar si comprendieron lo mismo. Luego de que cada estudiante exprese lo que entiende o lo que no entiende del problema, el docente debe invitar a los estudiantes a conversar para lograr un entendimiento común.

El docente procura que los estudiantes comprendan el vocabulario que se está empleando. Ciertos conceptos pueden tener más de un sentido o definición si dependen del contexto en que se están presentando. Por tanto, es meritorio que el docente, mediante preguntas guías, se asegure que los estudiantes entienden el contexto y si es una situación plausible o no. Como parte de este proceso el docente pregunta si hay algún término o palabra que no saben su significado y guía a los estudiantes a familiarizarse con el mismo en algún diccionario o consultando la Internet. En caso de ser necesario aclara el mismo. El docente pudiera ofrecer ejemplos que faciliten la comprensión de conceptos matemáticos y de ser posible, establecer asociaciones entre el problema y temas estudiados previamente en la clase de Matemáticas. El maestro realiza preguntas como las siguientes: ¿Hay alguna palabra de la situación que se les presenta que no entiendan? ¿Con cuál tema estudiado en la clase de Matemáticas se relaciona el problema?

Categoría #3: Estimular la generación y prueba de posibles soluciones

El maestro aclara que no todos los problemas de Matemáticas ameritan el empleo de alguna operación aritméticas y provee problemas en los cuales las soluciones no se obtienen empleando operaciones aritméticas, sino con otras estrategias, tales como reconocimiento de patrones, establecimiento de relaciones, incluso el intuir una posible respuesta. Es importante fomentar que los estudiantes comuniquen sus ideas sobre la solución de tal forma que sean evaluadas por sus compañeros. En el proceso de evaluación, el plan de un estudiante se complementa, se mejora y, en otros casos, puede ser rechazado. El docente realiza preguntas como las siguientes: ¿Qué operaciones o estrategias se pueden utilizar para resolver el problema? ¿Han resuelto algún problema parecido anteriormente? ¿Pueden asociar este problema con alguna situación de la vida diaria?

Categoría #4: Mantener el compromiso en la resolución colaborativa del problema

Las acciones de los estudiantes se mueven entre la individualización y la colaboración y es posible que las acciones individuales tiendan a monopolizar el trabajo (Autores, aceptado). El

maestro debe realizar acciones dirigidas a lograr que los miembros del equipo discutan las posibles soluciones. El docente fomenta que haya apertura para escuchar las ideas que expresan los estudiantes a sus compañeros y promueve que todas las aportaciones son valiosas ya que pueden conducir a la solución del problema de forma directa o indirecta. El maestro debe solicitar a los estudiantes que escriban posibles estrategias de solución. Al obtener de manera escrita esta información, le brinda al docente la oportunidad de validar si los alumnos comprenden el problema y puede apoyarlos mediante preguntas guías que faciliten la identificación de estrategias cognitivas de solución, tanto individual como grupal.

Es fundamental que el maestro ofrezca retroalimentación a los intentos de solución que realicen los alumnos. Además, el maestro entrega una hoja a cada estudiante en la cual cada alumno expresa y documenta su aportación al proceso de solución del problema. El maestro realiza preguntas como las siguientes: ¿Cuáles datos o información es la relevante para lograr resolver el problema? ¿Conocen algún problema similar? ¿Cómo se relaciona ese problema con este? ¿Han identificado alguna estrategia para resolver el problema? ¿Cómo estás aportando de manera individual a que el grupo logre resolver el problema?

Categoría #5: Mantener equilibrio entre trabajo colaborativo e individual

Durante esta categoría se realizan acciones docentes conducentes a mantener un balance entre el trabajo individual y el grupal. Como parte de esta categoría, el maestro promueve que los estudiantes compartan sus dudas e ideas a los compañeros de grupo. Inicialmente, se fomenta que los alumnos discutan lo que entienden del problema y realicen preguntas a sus pares conducentes a entender el problema que se les presenta. Posteriormente, el docente alienta a los alumnos que presenten ante sus compañeros las estrategias que pudieran emplearse y finalmente las soluciones halladas. Es decir, el maestro estimula a los estudiantes a que expliquen a sus compañeros de grupo lo que entienden del problema, lo que hicieron o piensan hacer, y por qué no están de acuerdo con la respuesta dada por otro estudiante.

El maestro solicita a los estudiantes que identifiquen las aportaciones de cada uno a la solución del problema, reconociendo que para el estudiante el proceso de solución comienza cuando reciben o les presentan el problema y culmina cuando el grupo expone una solución. El maestro realiza las siguientes preguntas: ¿Todos están de acuerdo con lo que debe hallar o alguno necesita ayuda? ¿Consideraron cada una de las ideas que expresaron los compañeros? Si descartaron alguna de las ideas, ¿por qué lo hicieron? ¿Todos lograron aportar al proceso de solución? ¿De qué forma?

Categoría #6: Verificar la comprensión individual y grupal sobre el problema

El maestro valida que todos los miembros del equipo tienen la misma comprensión de la solución y promueve la reflexión para que el grupo pueda establecer si lo propuesto es compatible con el enunciado del problema y satisface todas las condiciones y supuestos.

Una estrategia que el docente puede emplear es solicitarle que discutan y comparen sus respectivas soluciones y determinen qué elementos tienen en común y los elementos en que difieren. Esto permite que el grupo colaborativo llegue a una solución consensual del problema.

Como parte de este proceso, el docente promueve que en cada grupo se valoren los esfuerzos, tanto individuales, como grupales y destaca que las aproximaciones, aunque inexactas, reflejan un grado de entendimiento del problema. De igual manera, el maestro fomenta el reconocimiento sobre que los intentos fallidos, también muestran un grado de aprendizaje, toda vez que ya se conoce que determinada estrategia no conduce a la solución de problema; lo cual inicialmente no se conocía. Como parte de esta categoría, el maestro realiza las siguientes preguntas: ¿Todos están de acuerdo que esa es la solución? ¿Lo que presentan como solución, es totalmente correcto o es una aproximación a la solución?

Conclusión

La resolución de problemas y el trabajo colaborativo son competencias importantes para los educandos del siglo XXI. La revisión de la literatura revela la necesidad de un modelo que los maestros de educación primaria puedan utilizar para fomentar la resolución colaborativa de problemas matemáticos en sus salones de clases. El modelo que proponemos está fundamentado en las recomendaciones de los expertos y en la observación de estudiantes de este nivel mientras resuelven problemas colaborativamente.

Referencias

- Chapman, O. (2015). Mathematics teachers' knowledge for teaching problem solving. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 3(1), 19-36.
- Cheeseman, J. (2018). Teachers' perceptions of obstacles to incorporating a problem solving style of mathematics into their teaching. En Hunter, J., Perger, P. y Darragh, L. (Eds.). *Making waves, opening spaces (Proceedings of the Annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia 2018)* (pp. 210-217). Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA).
- Crespo, S. y Harper, F. K. (2020). Learning to pose collaborative mathematics problems with secondary prospective teachers. *International Journal of Educational Research*, 102, 101430.
- Figuroa González, E., Colón Negrón, Y. y Hernández Rodríguez, O. (2025). Resolución colaborativa de problemas matemáticos: interacciones entre los participantes del grupo. *Paradigma*, 46(1), e2025028, <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2025.e2025028.id1622>
- Griffin, P., Care, E. y McGaw, B. (2012). The changing role of education and schools. En P. Griffin, B. McGaw y E. Care (Eds.), *Assessment and teaching of 21st century skills* (pp.1-15). Heidelberg: Springer.
- Nieminen, J. H., Chan, M. C. E. y Clarke, D. (2022). What affordances do open-ended real-life tasks offer for sharing student agency in collaborative problem-solving? *Educational Studies in Mathematics*, 109(1), 115-136.
- Polya, G. (1945). *How to solve it: A New aspect of mathematical method*. Princeton University Press.
- OECD. (2017). *PISA 2015 assessment and analytical framework: Science, reading, mathematic, financial literacy and collaborative problem solving*. OECD Publishing. <https://doi.org/10.1787/9789264281820-8-en>.
- Roschelle, J. y Teasley, S. (1995). The construction of shared knowledge in collaborative problem solving. En C. O'Malley (Ed.), *Computer-supported collaborative learning* (pp. 69-197). Berlin, Germany: Springer Verlag.
- Sofroniou, A. y Poulos, K. (2016). Investigating the effectiveness of group work in mathematics. *Education Sciences*, 6(3), 30.
- Sun, C., Shute, V. J., Stewart, A., Yonehiro, J., Duran, N. y D'Mello, S. (2020). Towards a generalized competency model of collaborative problem solving. *Computers & Education*, 143, 103672.
- Wilkerson, T. (2022). *Problem solving: An approach to understanding and critiquing our world*. NCTM. https://www.nctm.org/News-and-Calendar/Messages-from-the-President/Archive/Trena-Wilkerson/Problem-Solving_-An-Approach-to-Understanding-and-Critiquing-Our-World/



O Formador Articulador: Observação e Registro na Formação de Professores de Matemática

Paulo Eugênio da **Silva**
Faculdade Sesi de Educação
Brasil
pauloesmat@yahoo.com.br
Caíque **Oliveira**
Faculdade Sesi de Educação
Brasil
caique.oliveira@sesisp.org.br
Fabiana Ramos **Savani**
Faculdade Sesi de Educação
Brasil
fabiana.rsavani@sesisp.org.br

Resumo

O presente artigo tem como proposta apresentar de que forma vêm acontecendo a ação dos professores formadores chamados de Formadores Articuladores - FA, de um curso Lato sensu de uma Faculdade do Estado de São Paulo, Brasil, cujo método de trabalho tem como foco a ação de grupos heterogêneos, como interação com sua turma e de que maneira desenvolvem sua função. A metodologia utilizada foi a realização de entrevistas com os FA através do uso de questões semiestruturadas abordando registros e interações destes com seus cursistas. Como resultado, tivemos os relatos do que acontece antes, durante e após os encontros formativos dos FA com os cursistas, trazendo os olhares tácitos e a importância da escuta ativa. Com metodologia inovadora, ressalta-se que os FA dentro desta proposta inovadora de curso de pós-graduação possuem atribuições que vão muito além de mediação de aprendizagem, eles acompanham, apoiam, orientam e estimulam seus cursistas.

Palavras-chave: Aprendizagem; Cursistas; Escuta ativa; Formador Articulador; Olhar Tácito; Reflexão da Prática.

Introdução

O presente artigo apresenta o trabalho de pesquisa com os professores de um curso de pós-graduação *Latu Sensu* de uma Instituição de Ensino Superior do Estado de São Paulo, titulados de Formadores Articuladores – FA, que acompanham a cada aula um outro formador, chamado de Formador Docente – FD. Para a apresentação deste trabalho utilizamos para a abordagem das aulas, o termo “encontros formativos” com a justificativa que o público-alvo dos alunos é composto majoritariamente por professores formados em licenciatura de Matemática, ministrando aulas para alunos dos Anos Finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio.

Para a realização de análise de dados, ainda parcial, devido o andamento do curso, o presente estudo se ampara em entrevistas semiestruturadas com os FA. Essas entrevistas permitiram captar a própria percepção do sujeito sobre a sua experiência laboral e o empenho de suas técnicas de atuação. As principais premissas orientadoras ao trabalho do FA são: a) escuta ativa e o b) olhar tácito. Escuta ativa é uma das indicações avaliativas de Reis (2011). Para o autor a escuta ativa e linguagem corporal são fundamentais para propiciar ao cursista um espaço de confiança para expor suas experiências.

O presente texto compõe-se de três partes, para além desta introdução e das considerações finais. Em primeiro lugar, realiza-se uma interpretação sobre o papel do FA no âmbito do curso de pós-graduação em Educação Matemática. Em seguida, são tecidas algumas considerações sobre o desenvolvimento metodológico da pesquisa. Na terceira parte, verifica-se como os FA realizam o acompanhamento dos encontros formativos, no sentido de investigar a materialização do olhar tácito e da escuta ativa no cotidiano dos encontros, sustentando o argumento de que essas técnicas de registro e avaliação não são habilidades espontâneas desses formadores, mas construídas e ancoradas em momentos antes, durante e depois dos encontros formativos. Para Nunes e Nunes (2014), ao conceituar a formação como um processo no qual os professores devem ser investigadores e reflexivos da própria prática, é preciso que os formadores também o sejam, isto é, da mesma forma que os professores em atividade de formação devem estar reflexivos sobre a própria prática, aqueles e aquelas que atuam com a formação de professores devem fazer o mesmo.

O papel do Formador Articulador

Na pós-graduação *Lato sensu* em Educação Matemática da Faculdade que a disponibiliza no Estado de São Paulo, a presença de dois Formadores durante o encontro formativo não configura uma concentração de poder na prática docente, tal qual ocorre nas práticas tradicionais de “educação bancária” (Freire, 2019). Na verdade, o curso realiza exatamente o oposto.

A presença de um FA e FD em cada turma vai ao encontro do que Nunes e Nunes (2014) argumentam em relação à necessidade da formação de professores ir além daquilo que os professores já vivenciam no contexto atual, desde as ações tradicionais de “formação continuada” bem como as oficinas pedagógicas conduzidas por coordenadores. Para atuar no intuito de romper com essas perspectivas tradicionais, o Formador Articulador visa assumir uma “perspectiva crítica e reflexiva”, Nunes e Nunes (2014, p. 171) acrescentam que:

Em uma perspectiva crítica e reflexiva, temos o segundo modelo de formador como um colaborador do processo formação dos professores, contrapondo-se ao papel de controlador e dirigente. Nessa visão, o professor é o protagonista da sua formação e também atua como formador de si próprio e de seus companheiros.

Enquanto formadores de formadores Nunes e Nunes (2014), ressaltam que as atribuições do FA contemplam atividades que vão desde a mediação da aprendizagem no cotidiano do encontro, passando pela avaliação do desenvolvimento dos cursistas, até orientações para a realização do trabalho de final do curso - Memorial do cursista. Seguindo as orientações de Hernandez (1998), a atuação do FA prescinde do saber de como os docentes aprendem. Diante das inúmeras resistências que os docentes apresentam diante de um processo de formação, os FA precisam manter uma escuta ativa em relação a essas resistências. Nesse sentido, a ação do FA ao longo dos encontros precisa estar calcada nessa preocupação em conhecer as demandas dos cursistas e suas especificidades.

Deste modo, é importante que o FA adote uma postura que valorize a dialogicidade e a integridade humana, não menosprezando qualquer proposição por parte dos cursistas. Nesse sentido, que diferença há entre fragmentos de discurso sobre condutas recomendáveis e lições da experiência? A diferença que existe entre ensinamentos e convicções íntimas, conquistadas por si, forjadas pelo acontecimento vivido (Soligo, 2015). Contudo, a dialogicidade vem trazendo a oportunidade tanto aos formadores quanto aos cursistas de apresentarem suas convicções e lapidarem aquilo que observou através do olhar tácito de suas práticas docentes, desenvolvendo um olhar descritivo, através do distanciamento desse olhar.

Metodologia e coleta de dados

Nesta seção, apresentamos a metodologia de pesquisa, especificamente a coleta e a organização dos dados com o uso de entrevistas semiestruturadas com os FA. Discorreremos nesse momento, o formato das entrevistas semiestruturadas (Apêndice 1) realizadas com os FA, ao longo da pesquisa, visando entendimento dessa função nos encontros formativos com os cursistas.

Januario (2017), relata que uma pesquisa tem o objetivo de resolver problemas que emergem dos diferentes setores da sociedade. Esse processo não apenas facilita a resolução dos problemas, mas também possibilita a construção de novos conhecimentos, favorecendo o avanço das ciências e da tecnologia, melhorando a qualidade de vida e a construção de uma sociedade mais justa. Para o autor, a perspectiva de resposta de uma pesquisa para determinado problema permite a descoberta de novos conhecimentos em determinadas áreas do saber.

A escolha do tipo de pesquisa ocorreu devido à combinação entre perguntas semiestruturadas e o objetivo de captar as experiências individuais dos FA. Realizamos as entrevistas com sete FA (FA1, FA2, FA3, FA4, FA5, FA6 e FA7) em um universo de trinta FA, selecionados, aleatoriamente, por convivência e articulação de horários disponíveis nos polos de trabalho das cidades de Campinas, SP, Sorocaba-SP e São Paulo-SP, Brasil. Na atualidade, já é possível compreender que os dados não são simplesmente “coletados” pelo pesquisador, mas percebe-se cada vez mais que a metodologia permite produzir dados para posterior análise (Ferreira, 2017). Nesse sentido, a produção dos dados envolve os instrumentos de

operacionalização do conhecimento, a abordagem desses dados e a criatividade na forma de interpretar os dados (Minayo, 2014).

A análise do trabalho do FA propõe uma perspectiva interacionista e dos processos sociais para entender o comportamento dos indivíduos e seus condicionamentos sociais, centrando-se no “como”, ao invés do “por que”, as ações sociais são realizadas por meio de processos. Assim, em vez de focar apenas nos resultados ou nas motivações individuais, Becker (2008), sugere valorizar a análise de como as convenções sociais emergem, são mantidas e desafiadas através dos processos de interação. Nesse sentido, essa pesquisa pretende investigar como os FA realizam as observações e registram os fenômenos educativos que ocorrem ao longo do encontro.

Observação e registro no trabalho do Formador Articulador – FA

Os registros de atividade possuem uma natureza formal e informal. Tais registros visam tanto o acompanhamento das dinâmicas de aprendizagem quanto o desenvolvimento contínuo dos alunos. A observação formal, conforme definido por Reis (2011), é um processo estruturado e sistemático, com planejamento prévio e fases claramente delineadas. Sua finalidade é identificar aspectos específicos dos encontros, possibilitando reflexões críticas sobre o desenvolvimento pessoal dos cursistas e a melhoria do ensino. Este tipo de observação ocorre de forma contínua e, no contexto do curso estudado, é parte da avaliação dos cursistas.

Esse registro feito pelo FA ocorre durante os diferentes momentos do encontro formativo, não somente no encontro de fato, mas no momento anterior e também posterior. Conforme veremos a seguir, nessa metodologia, o FA estabelece as bases da avaliação ainda no planejamento dos encontros. A observação e o registro da aprendizagem in loco acontecem efetivamente no encontro, e, após o encontro, esses registros são parte importante do relatório e demais atividades de apoio e orientação aos cursistas.

Antes do encontro

Se for para definir uma palavra que foi unânime entre os FA para descrever o período anterior ao encontro, a palavra é “organização”. Dois excertos a seguir são ilustrativos nesse sentido:

Individualmente falando, organização é uma questão que eu tenho é consciência de que eu tenho pontos a melhorar, então eu busco muito, me organizar, então isso pra mim é um desafio constante. É de ter organização, de deixar tudo certinho.” FA1.

Às vezes eu acabo até exagerando, com medo de falhar e deixar passar alguma coisa importante. Então, isso pra mim é um ponto [planejamento antes do encontro]. É que eu estou sempre tomando muito cuidado, né? E aí eu tento me preparar com antecedência para não comer bola nesses sentidos, de organização de não faltar nada, de estar tudo OK, sabe? FA3.

Entre outras ações, a reunião entre FA e FD tem papel fundamental nas observações e registros avaliativos. Pode-se dizer que as observações e registros derivam de momentos que ocorrem antes do encontro acontecer. Nesse momento, o FA tende a se apropriar dos objetivos de aprendizagem e dos conteúdos matemáticos serão abordados ao longo do encontro e que demandarão atenção por parte de ambos os formadores para que a avaliação consiga captar os avanços pretendidos por cada tarefa.

Eu faço todas as atividades, primeiro sozinha, deixo tudo grifadinho, anotadinho e tal. Depois quando eu faço a conversa com o FD, ele vai na sequência. Como eu não sou da área [da matemática] eu sempre questiono: “Qual o conhecimento especializado que está sendo trabalhado aqui?”, “Quais são os “poxas” esperados?”, “Qual atividade vai ter mais expectativa?” [...] Isso me dá segurança para quando eu estou acompanhando o encontro. Nisso eu aproveito para perguntar quais são as palavras que eu tenho que prestar atenção quando eles estão fazendo, o que quer que apareça na discussão, nós vamos falando. No durante, as coisas as vezes acontece um pouco diferente, o FD sinaliza, tal grupo está saindo fora da discussão, eu também observo os grupos e levo para ele para ajustarmos. FA 2.

De modo geral, foi possível observar que as reuniões realizadas entre Formadores Docentes e Articuladores, antes dos encontros, possibilitam o levantamento de possíveis situações que possam acontecer no encontro e prever como lidar com essas situações, sendo flexíveis a cada encontro.

Durante o encontro

Durante os encontros, os FA possuem algumas ações distintas em uma das unidades curriculares, em especial, aquela responsável pela base pedagógica. Esses profissionais regem os encontros dessa unidade. Já nas unidades curriculares de conhecimento matemático, os FA assumem uma postura de sustentação e avaliação do desempenho de sua turma acompanhando os cursistas de perto. O excerto a seguir foi retirado de um diário de campo de um dos FA e busca elucidar o trabalho desse formador ao longo do encontro formativo:

Um olhar mais distanciado pode gerar uma inquietação: são professores aqueles dois que estão de pé no meio da sala enquanto se vê o que parecem ser estudantes sentados em grupos. O FA fez o trabalho de separar os cursistas de acordo com um critério que parece fazer sentido para ele. O FA é identificável por seu caderno em mãos e olhar atento para as interações do grupo e as discussões entre os educandos. Em parceria, FD e FA conduzem o encontro, distribuem os papéis relativos as funções do trabalho em grupos, os recursos que estão sendo utilizados na sala de aula e acompanham o desenvolvimento das tarefas.

Para além do caderno de registro, o FA faz algumas fotografias daquilo que julga relevante como “evidência de aprendizagem”. Ao longo da observação, vejo que os cursistas se mostraram bastante à vontade com a sua presença. Quando um cursista disse “Eu fiz de uma forma e o J fez de outro jeito” o FA deixou a câmera de lado e recorreu ao caderno para registrar a discussão. Enquanto isso, o FD permaneceu atendendo algumas solicitações de um outro grupo.

Apesar do FA não compreender totalmente a discussão matemática, uma vez que disse ter realizado sua formação na área das “humanidades”, se mantém atento as formas de diálogo e aprendizado do grupo de cursistas. Em outro momento, a FA faz uma intervenção nos diferentes grupos dizendo: “Você é o facilitador? É importante que você garanta que todos compreendam o que é para fazer”. Ao perceber que um grupo parece apresentar dificuldade, o FA vai até o FD e sinaliza a necessidade de se atentar a esse grupo. Diário de campo (2024).

Seguindo a orientação de Cohen e Lothan (2017) sobre os professores disporem de controle sobre a formação dos grupos, alguns FA relataram que organizam, junto ao FD, a disposição dos cursistas na turma:

Nós decidimos [quem vai formar o grupo] juntos. Então a gente fala assim “aquele cursista vai ficar melhor aqui”. Então, por exemplo, o Alex é um que vamos ter que colocar com outras pessoas, porque ele chamou a nossa atenção na forma de liderança dele. Na atividade do mosaico, só ele formulou o mosaico, pois eu estava observando o desenvolvimento da tarefa e vi que o Jonas não estava conseguindo participar, aí eu cheguei para ele e disse “Se você quiser ficar de pé para chegar mais perto”, aí ele disse “ah, está bom aqui mesmo”. E isso foi algo que vamos levar para o próximo encontro, como vamos compor um grupo com ele. FA1.

Quando identifica dificuldades, o FA sinaliza ao FD, atuando como observador crítico e facilitador do aprendizado coletivo. Nesse sentido, verifica-se também uma dualidade entre o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico na atuação, observação e registro do FA em relação ao FD. Enquanto o primeiro assume uma postura mais direcionada ao desenvolvimento formativo – por vezes de modo individualizado, o segundo direciona o olhar com mais ênfase ao conhecimento matemático. Isso aparece de modo mais expressivo quando um dos FA entrevistados afirma que quando iniciou com a turma dizendo: *“Deixei claro que muitos FA do programa não são matemáticos e têm uma intenção para isso”*. FA4. No que diz respeito as contribuições em sala de aula, outro FA entrevistado ressaltou: *“O docente vai ter o olhar mais para o conteúdo matemático, e eu fico mais prestando atenção em verificar como eles estão envolvidos, motivados ou desmotivados, como o grupo vai interagindo”*. FA5.

Um dos pressupostos fundamentais do curso de pós-graduação é a gestão do tempo e do conhecimento. O FA deve assumir essa postura. Alguns registros dos FA são realizados nesse intuito. Para o acompanhamento dos cursistas, verificou-se que os FA tendem a desenvolver um olhar crítico sobre situações de alto e baixo desempenho na turma, de modo a regular a composição dos grupos durante os encontros no sentido de juntar aqueles que possam colaborar entre si. Mais do que isso, o FA deve desenvolver um olhar para além das aparências do cotidiano. Esse “olhar tácito” subjaz na capacidade de perceber os fenômenos da realidade mais imediata, realizando associações com questões mais amplas e mais profundas do próprio fenômeno. Isso significa identificar não somente aquilo que ocorreu fora do previsto, mas também as inconformidades que levaram a eventual não atendimento do objetivo do encontro.

Conforme argumentou um dos FA entrevistados, há uma dimensão analítica que delimita o que é registrado. E por mais que ocorra uma análise posterior, as observações em sala de aula passam por um crivo analítico.

Eu não sei se eu sou capaz de fazer essa separação [descritivo e analítico]. Porque eu acho que é tão intrínseco, a coisa acontece tão por que você não descreve algo que não fez sentido analiticamente para você? Em geral, nessas observações você não anota por anotar, você acaba anotando coisas que de alguma forma passou por uma análise que você falou, opa, isso é importante. FA6.

Verificou-se que os FA tendem a desenvolver um olhar crítico sobre situações de alto e baixo desempenho na turma, de modo a regular a composição dos grupos durante os encontros no sentido de juntar aqueles que possam colaborar entre si.

Percebi que a minha turma, por si só, já tem uma característica de participativa, de engajamento, mas quando eu percebo individualmente, algum caso assim, eu tenho chamado para conversa, tenho feito reuniões individuais, faço reuniões coletivas também. FA5.

Todos os FA entrevistados registram suas observações em cadernos ou dispositivos digitais que se assemelham a isso. Por mais que um documento orientador das observações tenha sido produzido inicialmente, os entrevistados assinalaram modos distintos de registrar, o que muitas vezes se aproxima de uma lógica informal de avaliação.

Depois do encontro

De modo específico, uma das FA entrevistadas relatou que no encontro com os FD é reservado um momento para que eles possam compartilhar percepções sobre o encontro, sobre a atuação do FD, sobre a atuação do FA e avaliações sobre o que deu certo e o que deu errado no encontro.

A elaboração de um relatório de encontro é um dos momentos em que esse olhar tácito se faz presente. No registro pós-encontro, o FA pode materializar algumas das observações realizadas ao longo do encontro.

Esse período após os encontros é onde os FA podem fazer uso desse olhar tácito para estabelecer vínculos de proximidade entre os cursistas. Alguns entrevistados apontaram que realizam o compartilhamento de textos e vídeos com algum conhecimento que propicie acréscimo ao conhecimento dos cursistas no encontro.

Considerações finais

Observou-se a multiplicidade de formas de interação com os cursistas, durante os momentos que antecedem, durante e após os encontros formativos. O primeiro momento da análise propiciou identificar que os objetivos de aprendizagem são relevantes para os registros e avaliações, bem como a importância dos mesmos serem atingidos a cada encontro.

A pergunta “Como você articula?” ainda gera alguns silêncios durante as entrevistas. O movimento de articulação ainda carece de reflexões mais profundas que propiciem a definição e o embasamento ao FA, além disso, parece indicar que a concepção de articular ainda não foi construída de modo consensual entre os FA. Durante as entrevistas falou-se muito sobre a organização dos materiais, a articulação da teoria com a prática, a relação dos cursistas com o espaço físico e a gestão do tempo. Porém, entendemos que a essência da ideia de articular ainda precisa de esforços interpretativos. A colaboração com o FD, também foi um dos achados mais relevantes dessa pesquisa. Nos momentos em que FA e FD trabalham juntos e de forma colaborativa, uma junção de conhecimentos que propicia avanços significativos, possivelmente, trazem impactos diretos na relação entre os cursistas e a pós-graduação.

Do ponto de vista metodológico, cabe acrescentar ainda que um trabalho de observação de campo do trabalho do FA pode trazer uma reflexão relevante sobre a forma como ele materializa as observações em ações práticas durante o encontro formativo, de modo a investigar de maneira mais fina, como ele promove estratégias de efetivação do olhar tácito e da escuta atenta em uma metodologia que pressupõe baixa intervenção docente. Ao analisarmos cada entrevistado, observou-se que cada um faz uso de estratégias diferenciadas antes, durante e depois dos encontros formativos. Cada FA utiliza de técnicas, as quais possibilita aproximar de seus cursistas.

Referências

- Becker, H. S. (2008). *Outsiders: Estudos de Sociologia do Desvio*. Zahar.
- Cohen, E. & Lotan, R. (2017). *Planejando o trabalho em grupo: Estratégias para salas de aula heterogêneas* (3.^a ed.). Editora Penso.

- Ferreira, V. S. (2017). Os caminhos e desafios metodológicos na pesquisa com jovens. Em: Ferreira, V. S. (Org.). *Pesquisar jovens: caminhos metodológicos*. ICS.
- Freire, P. (2019). *A pedagogia do oprimido*. (84ª. Ed.). Paz & Terra.
- Hernandez, F. (1998). A importância de saber como os docentes aprendem. Pátio, *Revista pedagógica*. n. 142.
- Hooks, B. (2017). *Ensinando a transgredir: a educação como prática da liberdade*. (2ª. Ed). WMF Martins Fontes.
- Januario, G. (2017). *Marco conceitual para estudar a relação entre materiais curriculares e professores de Matemática*. Tese [Educação Matemática, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo]. Repositório.
- Minayo, M. C. S. (2014). *O desafio do conhecimento: pesquisa qualitativa em saúde*. Hucitec.
- Nunes, A. I. & Nunes, J. B. Papel dos formadores, modelos e estratégias formativos no desenvolvimento docente. *Periódico do programa de pós-graduação em Educação da UCDB*, 37, p. 167-185.
- Patton, M. Q. (2002). *Qualitative Research and Evaluation Methods*. Thousand Oaks, Sage Publications.
- Reis, P. (2011). *Observação de aulas e avaliação do desempenho docente*. Conselho científico para avaliação de professores.
- Sampieri, R. H. & Collado, C. F. & Lucio, M. P. B. (2013). *Metodologia de pesquisa*. (5.ª ed.). Editora Penso.
- Saviani, D. (2009). Formação de professores: aspectos históricos e teóricos do problema no contexto brasileiro. *Revista Brasileira de Educação*. 14(40).
- Soligo, R. (2015). Metodologias dialógicas. *VII Fala outra escola*. Campinas.



Oficinas Matemáticas desenvolvidas com Alunos com Altas Habilidades e Superdotação no Projeto Residência Pedagógica na Universidade de Brasília

Igor dos Santos **Lima**

Universidade de Brasília

Brasil

igorlima@unb.br

Lucas Marinho Mendonça Dos **Santos**

Universidade de Brasília

Brasil

lucas,marinho@aluno.unb.br

Rui **Seimetz**

Universidade de Brasília

Brasil

rseimetz@unb.br

Resumo

O Programa Residência Pedagógica (RP), durante seu período de execução, propôs a elaboração e aplicação de oficinas em ambiente escolar para alunos com altas habilidades e superdotação. Este projeto teve início a partir do contato de Regina Sasaki, mãe de um dos alunos do grupo, com o professor Igor Lima, um dos coordenadores do projeto. Neste trabalho, são descritas três oficinas matemáticas, seus feedbacks e resultados obtidos durante sua aplicação por residentes (discentes) e preceptores/coordenadores (professores) em diversas escolas e níveis de ensino, atendendo aproximadamente 70 alunos com altas habilidades e superdotação, além de seus pais e responsáveis. As oficinas abordadas foram: Construção de Poliedros, Tangram e Pensamento Algébrico.

Palavras-chaves: Altas Habilidades; Oficinas de Construção de Poliedros, Tangram e Pensamento Algébrico; Oficinas Pedagógicas; Programa Residência Pedagógica; Superdotação.

Introdução

O desenvolvimento de habilidades matemáticas em alunos com altas habilidades e superdotação é um tema relevante e que merece atenção especial nas práticas pedagógicas atuais. O Programa Residência Pedagógica (RP) surge como uma iniciativa inovadora que visa promover a formação de futuros educadores por meio da vivência prática em ambientes escolares.

Este projeto, desenvolvido em parceria entre instituições de ensino e escolas, teve início a partir da colaboração entre Regina Sasaki, mãe de um aluno talentoso, e o professor Igor Lima, um dos coordenadores da iniciativa.

O presente trabalho descreve a elaboração e aplicação de três oficinas matemáticas — Construção de Poliedros, Tangram e Pensamento Algébrico — que foram realizadas com aproximadamente 70 alunos com altas habilidades e superdotação. Por meio das experiências compartilhadas por residentes e preceptores, busca-se analisar os feedbacks e resultados obtidos, destacando a importância de metodologias ativas no processo de ensino-aprendizagem desses estudantes.

Referencial Teórico

A literatura sobre educação inclusiva e metodologias inovadoras aponta para a necessidade de práticas pedagógicas que reconheçam e valorizem as singularidades de alunos com altas habilidades e superdotação. Segundo Gagné (2003), a compreensão dessas habilidades deve ir além do elevado desempenho acadêmico, contemplando também as características emocionais e sociais dos alunos. Nesse contexto, as oficinas propostas neste projeto visam não apenas o desenvolvimento cognitivo, mas também a promoção do engajamento e da sociabilização dos alunos.

As oficinas de matemática, conforme relatado por Lima (2024), permitem um ambiente propício para a exploração de conceitos matemáticos de forma lúdica e interativa, o que se alinha ao conceito de aprendizagem ativa defendido por Freire (1996). A prática de atividades como a construção de poliedros e o uso do Tangram fomenta a criatividade e o raciocínio lógico, contribuindo para o desenvolvimento de competências essenciais ao aprendizado da matemática. Assim, o presente trabalho embasa-se nesse referencial teórico, que enfatiza a importância de práticas pedagógicas diversificadas e inclusivas no ensino de alunos com altas habilidades.

Metodologia

A metodologia deste estudo é qualitativa, centrada na descrição e análise das oficinas de matemática aplicadas durante o Programa Residência Pedagógica. As oficinas foram organizadas em três etapas distintas, cada uma focando em um dos temas abordados: Construção de Poliedros, Tangram e Pensamento Algébrico. Foram selecionadas diversas escolas de diferentes níveis de ensino, proporcionando um panorama amplo sobre as práticas pedagógicas implementadas.

A coleta de dados foi realizada por meio de observações diretas e entrevistas semiestruturadas com os residentes e preceptores envolvidos nas oficinas. Os participantes foram convidados a fornecer feedbacks detalhados sobre as atividades, suas percepções sobre o engajamento dos alunos e os resultados observados. Além disso, foram aplicados questionários de satisfação aos alunos e a seus pais, visando captar a experiência geral e a efetividade das oficinas.

Os dados coletados foram analisados qualitativamente, buscando identificar padrões e temas recorrentes nas respostas, e permitindo uma reflexão crítica sobre a prática educativa no contexto do ensino de alunos com altas habilidades e superdotação.

Apresentação e análise dos resultados

A seguir descrevemos as oficinas e as análises dos dados coletados.

Construção de Poliedros

A primeira oficina foi realizada pelas escolas públicas Centro de Ensino Fundamental 06 (Lago Sul/Distrito Federal) e Centro Educacional 11 (Ceilândia/Distrito Federal), localizada no Lago Sul, sob orientação dos respectivos preceptores dessas escolas. Participaram também residentes e coordenadores da Residência Pedagógica (RP).

A oficina ocorreu no Laboratório de Ensino em Matemática (LEMAT) e baseou-se na metodologia de Van Hiele, que propõe o aprendizado da geometria em cinco níveis progressivos: reconhecimento, análise, dedução informal, dedução formal e rigor. Inicialmente, os alunos realizaram uma atividade de reconhecimento de figuras geométricas com o aplicativo Plickers, respondendo questões interativas projetadas em slides.

Na segunda etapa, foram utilizados materiais como papel quadriculado, lápis de cor, régua e transferidores. Este último despertou grande curiosidade, pois muitos alunos ainda não conheciam essa ferramenta. A fase final consistiu na construção de poliedros de Platão utilizando canudinhos de pirulito e arames. Os alunos iniciaram pelo Tetraedro, seguidos pelo Hexaedro e o Octaedro, e os mais avançados construíram o Dodecaedro e o Icosaedro.

Além da construção, os alunos foram incentivados a analisar as propriedades matemáticas dos poliedros, como número de faces, vértices e arestas, verificando as relações propostas pela Fórmula de Euler. Durante a oficina, os alunos discutiram suas descobertas em grupos, estimulando o pensamento crítico e a colaboração.

A oficina foi um sucesso, com alunos demonstrando entusiasmo e orgulho ao levar seus poliedros para casa. Apesar disso, algumas dificuldades foram observadas, como a interferência constante dos pais durante a atividade, reduzindo a autonomia das crianças. Como sugestão para futuras oficinas, propõe-se um ambiente mais silencioso e a separação das turmas por faixa etária. Nas figuras a seguir tem-se fotos das oficinas:



Figura 1: Oficina Construção de Poliedros (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores(2024))

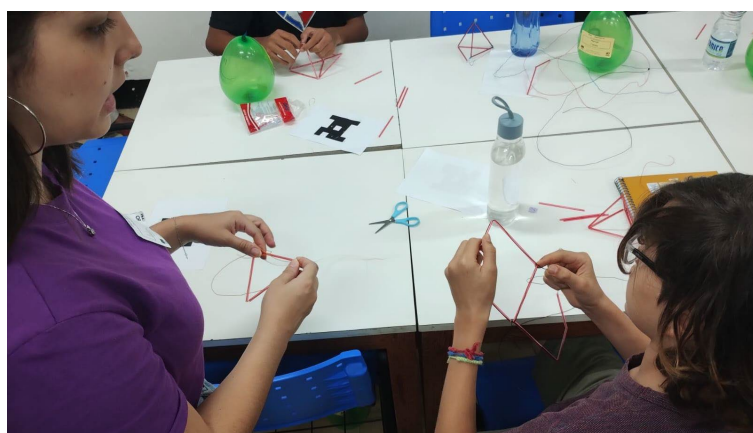


Figura 2: Materiais utilizados na Construção de Poliedros (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores(2024))

Tangram

A segunda oficina foi conduzida pelos preceptores Thafarel Teixeira Rodrigues da Costa e Diego Wilson da Silva Neres, com o objetivo de estimular o aprendizado por meio do uso lúdico do Tangram, um quebra-cabeça que desenvolve habilidades cognitivas e motoras.

A atividade foi dividida em quatro etapas:

1. Narração sobre a origem do Tangram;
2. Reconhecimento das formas geométricas que o compõem;
3. Jogo interativo de montagem;
4. Construção do próprio Tangram.

Os participantes foram incentivados a resolver desafios de montagem progressivamente mais complexos, trabalhando conceitos como simetria, congruência e área das figuras. Durante a oficina, os alunos compartilharam estratégias e soluções, promovendo um aprendizado colaborativo.

Para otimizar a dinâmica, os participantes foram organizados em três grupos: crianças de diferentes faixas etárias e um grupo exclusivo para os pais. A separação dos pais visou minimizar interferências na aprendizagem das crianças, o que havia sido um desafio em eventos anteriores. A oficina foi bem recebida, e os pais destacaram o Tangram como uma ferramenta educacional eficaz, promovendo interação entre crianças e adultos. Nas figuras a seguir tem-se fotos da oficina:



Figura 3: Sala menores de 8 anos (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores (2024))



Figura 4: Sala maiores de 8 anos (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores(2024))



Figura 5: Sala dos pais dos estudantes (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores (2024))

Pensamento Algébrico

A última oficina foi organizada pelos preceptores Emmanuel Moraes e Kenia Holanda, com apoio de residentes das escolas Centro Educacional 07 e Centro de Ensino Fundamental 04. A atividade foi planejada em colaboração com os orientadores, os preceptores e a representante das mães, Regina Sasaki.

O objetivo foi desenvolver o raciocínio lógico por meio da exploração de padrões, introduzindo conceitos como equivalência, sequência e uso de símbolos algébricos. Foram utilizadas dinâmicas como histórias em quadrinhos para trabalhar ordem cronológica, tampinhas coloridas para ensinar padrões e sequências, além de desafios matemáticos.

Para crianças acima de nove anos, foi utilizada uma balança de madeira e cubos para ilustrar conceitos de igualdade e introduzir equações. Os alunos foram incentivados a formular hipóteses e testá-las, verificando relações matemáticas na prática. O uso do aplicativo Plickers proporcionou uma interação dinâmica e facilitou a verificação das respostas em tempo real. O Kahoot foi utilizado para encerrar a oficina de forma lúdica, consolidando os conceitos abordados.

Os pais relataram que as crianças interagiram entusiasmadamente e não queriam deixar a atividade, evidenciando seu impacto positivo. Além disso, observou-se um aumento significativo na confiança dos alunos ao resolver problemas algébricos e discutir suas estratégias. Nas figuras a seguir tem-se fotos da oficina:



Figura 6: Primeira Aplicação (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores (2024))



Figura 7: Segunda Aplicação (Fonte: Elaborada pelos pesquisadores (2024))

Comunicação; Superior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

Considerações Finais

As oficinas matemáticas desenvolvidas e aplicadas no Programa Residência Pedagógica mostraram-se eficazes para o aprendizado de alunos com altas habilidades e superdotação. A abordagem lúdica e interativa proporcionou um ambiente de ensino motivador e produtivo, com excelente recepção por parte dos participantes e seus familiares. Os desafios encontrados contribuíram para aperfeiçoar futuras edições do projeto, reforçando a necessidade de ajustes metodológicos e logísticos para melhor atender esse público. O engajamento dos alunos e a evolução de suas habilidades matemáticas indicam o impacto positivo dessas oficinas na aprendizagem, sugerindo a continuidade e ampliação dessas práticas educacionais.

Referências e bibliografia

- Brasil, Ministério da Educação. (2017). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: MEC.
- Brasil, Ministério da Educação. (2018). *Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)*. Brasília: MEC.
- Brasil, Ministério da Educação. (2020). *Residência Pedagógica em Matemática*. Brasília: MEC.
- Distrito Federal. Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. (2014). *Currículo em Movimento: Ensino Fundamental*. Brasília: SEEDF.
- Lima, I. dos S. (2024). *Residência Pedagógica em Matemática UnB*. Disponível em: <https://www.youtube.com/c/RPMatem%C3A1ticaUnB>. Acesso em: 29 jan. 2025.
- Freire, P. (1996). *Pedagogia da autonomia: saberes necessários à prática educativa*. 30.ed. São Paulo: Paz e Terra.
- Gagné, E. (2003). *Os talentos extraordinários: sua natureza e seu desenvolvimento*. São Paulo: Editora Atlas (tradução).



Perspectivas docentes y relaciones entre pensamiento matemático y la formación integral

Helmer Jesús **Ruiz** Díaz

Institución Educativa Técnica Tomás Cipriano de Mosquera

Colombia

hjdiaz@unicauca.edu.co

Yilton **Riascos** Forero

Universidad del Cauca

Colombia

yirifo@unicauca.edu.co

Resumen

Este taller tiene como objetivo principal generar conciencia entre los docentes sobre la importancia de una enseñanza de las matemáticas que no solo desarrolle habilidades técnicas, sino que también fomente el pensamiento crítico, la ciudadanía activa, la equidad de género y la integración de valores en el aula. A través de un enfoque reflexivo, se busca que los participantes identifiquen sus propias perspectivas de enseñanza y comprendan cómo estas inciden en la formación de los estudiantes. A partir de la discusión de los hallazgos de investigaciones recientes y el análisis de experiencias docentes, se explorarán estrategias para transformar la enseñanza de las Matemáticas en una herramienta para la inclusión y la participación ciudadana.

Palabras clave: Perspectivas docentes, Narrativas, Pensamiento Matemático, Ciudadanía, género y valores, formación de docentes

Introducción

El estudio del pensamiento matemático ha trascendido la mera adquisición de habilidades técnicas para convertirse en un factor clave en la formación de ciudadanos críticos y comprometidos. La enseñanza tradicional de las Matemáticas se ha orientado principalmente a la resolución de problemas y al desarrollo de competencias lógico-matemáticas, pero

investigaciones recientes (Rodríguez, 2013; Felicetti y Pineda, 2016; Hernández et al., 2024; Tanguila et al., 2024) han demostrado la necesidad de integrar aspectos como la equidad de género, la formación en valores y la ciudadanía en el proceso educativo.

Este taller se basa en los hallazgos de la tesis doctoral "Perspectivas de docentes de educación básica y media sobre relaciones entre pensamiento matemático, ciudadanía, género y valores" (Ruiz Díaz, 2024), que revela la influencia de las creencias y prácticas docentes en la formación de los estudiantes. Se abordarán diferentes perspectivas pedagógicas y enfoques de investigación en Educación Matemática para analizar cómo los docentes pueden adoptar estrategias que favorezcan una enseñanza más inclusiva y transformadora. Además, se presentarán ejemplos concretos de buenas prácticas que han demostrado ser efectivas en la integración de estos valores en la enseñanza matemática, específicamente en la educación básica y media.

Las narrativas docentes jugarán un papel central en el taller, permitiendo que los participantes reflexionen sobre su trayectoria y las experiencias que han moldeado su práctica educativa. A través de estos relatos, el orientador resaltará patrones y perspectivas emergentes que servirán como base para la construcción de estrategias pedagógicas más equitativas e inclusivas. La reflexión conjunta sobre estas narrativas facilitará el reconocimiento de las influencias culturales, sociales y personales en la enseñanza de las Matemáticas, permitiendo a los docentes desarrollar enfoques más críticos y transformadores en su práctica.

Definición y relevancia

La enseñanza de las Matemáticas ha sido históricamente concebida como un espacio de formación de habilidades técnicas y lógico-matemáticas, pero su impacto va mucho más allá del aula; cada vez más las Matemáticas se han convertido en una parte importante del currículo escolar en todo el mundo (Ministerio de Educación Nacional MEN, 2002; Bruner, 1963), llegando a catalogarse como un conocimiento fundamental para la formación de los futuros ciudadanos como lo supone Popkewitz, "quienes tienen conocimiento matemático tendrán mejores capacidades de trabajo en la sociedad moderna y participarán más plenamente como ciudadanos" (citado por Valero et al. 2012). El pensamiento matemático no solo implica la resolución de problemas y el razonamiento abstracto, sino que también tiene una función esencial en la construcción de ciudadanía, la equidad de género y la formación en valores. Ruiz Díaz (2024) identificó cómo los docentes perciben e integran estos elementos en su práctica pedagógica, revelando tanto avances como desafíos en la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva crítica y transformadora.

Las creencias, intenciones y acciones de los docentes desempeñan un papel clave en la manera en que los estudiantes internalizan no solo los conceptos matemáticos, sino también valores sociales y éticos. Los resultados de la investigación muestran que existe una conexión entre el pensamiento matemático, la ciudadanía, el género y los valores; los docentes relatan cómo sus experiencias personales y profesionales, marcadas por desafíos y adaptabilidad, reflejan el desarrollo de valores esenciales para una ciudadanía activa y responsable. Esta se entiende como el ejercicio consciente, crítico y participativo de los derechos y deberes ciudadanos, que va más allá de la votación e incluye la implicación en procesos de

transformación social, la toma de decisiones informada, el respeto a la diversidad y el compromiso con el bien común (Giroux, 2003; Freire, 1972; Dewey, 1995).

Desde esta perspectiva se enfatizando que la Educación Matemática puede servir como un vehículo para promover la participación ciudadana y la toma de conciencia política (Skovmose, 1999; Valero, 2012) y se resaltan la importancia de enseñar Matemáticas no solo como una habilidad técnica, sino como un medio para promover la participación ciudadana, la resiliencia y la responsabilidad social.

Diversos estudios han señalado la necesidad de transformar la Educación Matemática desde un enfoque más integral. Investigaciones previas han abordado el desarrollo del pensamiento matemático en contextos educativos y su relación con la formación en ciudadanía, género y valores. Entre los hallazgos más relevantes se encuentran:

- La importancia de la Educación Matemática crítica como medio para el desarrollo del pensamiento reflexivo y socialmente comprometido (Skovmose, 1999).
- La influencia de las creencias y actitudes docentes en la manera en que se enseña y percibe la Matemática en relación con temas de ciudadanía y equidad (Valero, 2012).
- El impacto de los estereotipos de género en el rendimiento y la confianza de las estudiantes en Matemáticas (Ursini, 2014).
- La necesidad de formar docentes con enfoques pedagógicos que integren la enseñanza de valores a través de las Matemáticas (Bishop y Clarkson, 2000).

En este sentido, la formación docente debe considerar estrategias que permitan a los educadores replantear sus enfoques didácticos, promoviendo una enseñanza de las Matemáticas más equitativa e inclusiva. La incorporación de metodologías basadas en la reflexión sobre la práctica, el análisis de experiencias docentes y la aplicación de enfoques interdisciplinarios son elementos clave para la mejora de la Educación Matemática. Es fundamental que los docentes en formación y en ejercicio desarrollen habilidades para cuestionar los sesgos y estereotipos presentes en la enseñanza de las Matemáticas, y que sean capaces de generar espacios de aprendizaje donde todos los estudiantes puedan sentirse representados y valorados.

En síntesis, el taller busca generar una toma de conciencia entre los docentes sobre su papel en la construcción de una Educación Matemática que no solo forme en habilidades técnicas, sino que también promueva el desarrollo ciudadano, la equidad de género y la integración de valores en el aula a partir de la identificación de sus perspectivas de enseñanza. A partir de la discusión de resultados de la investigación y la reflexión crítica sobre la práctica docente, se pretende proporcionar herramientas para mejorar la enseñanza de las Matemáticas desde una perspectiva más inclusiva y transformadora.

Referencial teórico

El análisis de las perspectivas docentes en Educación Matemática muestra la diversidad de enfoques que los educadores adoptan, los cuales evolucionan según sus experiencias y contextos. La enseñanza de las Matemáticas se concibe de manera interdisciplinaria, incorporando elementos de la Psicología, la Sociología y la Filosofía, lo que permite comprender sus procesos

más allá del aula. El pensamiento matemático se reconoce como una competencia esencial en la educación, promoviendo habilidades como la abstracción, la justificación y la modelización. Además, su relación con la ciudadanía cobra relevancia en la formación de individuos críticos y participativos, mientras que los estudios de género evidencian la necesidad de eliminar desigualdades en el aprendizaje matemático. Finalmente, la integración de valores en la enseñanza matemática se destaca como un componente clave para el desarrollo integral de los estudiantes.

Perspectivas docentes

Se adopta la definición de Pratt (2002), quien considera las perspectivas como "un conjunto interrelacionado de creencias e intenciones que dan dirección y justificación a nuestras acciones". Según este autor, las creencias se refieren a lo que el profesor piensa sobre la enseñanza; las intenciones, a lo que pretende lograr; y la acción, a lo que hace o planea hacer al enseñar. Pratt (2002) identifica cinco tipos de perspectivas: transmisión, desarrollo, aprendizaje, crianza o nutrición, y reforma social, que no actúan de manera aislada pudiendo coexistir en una misma posición docente. La perspectiva de transmisión se centran los esfuerzos en transmitir conocimientos de manera eficiente y precisa.

En la perspectiva de aprendizaje, la enseñanza se extiende fuera del aula, enfocándose en la socialización de los estudiantes. La perspectiva de desarrollo se basa en la psicología del aprendizaje, donde los estudiantes construyen su propio mapa cognitivo para interpretar el mundo. En la perspectiva de crianza o nutrición el objetivo principal es ayudar a los estudiantes a sentirse seguros de sus logros y a creer en sí mismos. La perspectiva de reforma social se centra en ideales o principios para buscar una sociedad mejor. No debe esperarse, en consecuencia, que la perspectiva de un docente se encaje exclusivamente en una de las 5 categorías que establece Pratt, se trata de identificar la tendencia que ella muestra y establecer la posición que tiene y las posibilidades de cambio o modificación que puede asumir en un futuro inmediato.

Enfoques de investigación en Educación Matemática

Algunos autores defienden la tesis que apoya la Psicología del conocimiento, expresando que "el ser humano se desarrolla a través de la construcción de la interacción dialéctica y la adaptación al entorno sociocultural, sustentada con los procesos de internalización y externalización que engendran la conciencia —entendida la externalización como una re-elaboración de la internalización y no una copia— y para el cual el sistema de signos es especialmente importante, ya que se trata de la representación" (Fávero, 2005a; Fávero, 2007b; Fávero, 2007a).

De este hecho se esbozan cuatro aspectos teóricos-conceptuales: interacción entre los reglamentos cognitivos y las normas sociales; el papel de la mediación semiótica en el proceso de desarrollo psicológico humano; los efectos de los sistemas de signos en el desarrollo psicológico de la cognición y las comunicaciones individuales; y la toma de conciencia de que las acciones humanas no son al azar, por el contrario, se trata de prácticas sociales con un contenido que les da fundamento.

Considerar estos aspectos en la práctica de la enseñanza, significa admitir no sólo que el ser humano es activo en su interacción dialéctica sociocultural, sino también implica cambiar el énfasis de la diada alumno-conocimiento, para la tríada profesor-estudiante-conocimiento, lo que significa admitir que la actividad en el proceso de enseñanza-aprendizaje está mediado.

Por otra parte, desde la perspectiva sociocultural de la Educación Matemática, que surge, según Lerman (2006) de la concepción del conocimiento matemático como un proceso social y cultural, además, históricamente, apartándose un poco de los enfoques psicológicos y cognitivos, esta perspectiva ha crecido con el auge del constructivismo social. Se comienzan a visibilizar algunos elementos como las interacciones sociales en el aula, la relevancia del contexto, la influencia de espacios extraescolares, entre otros; que hasta hace poco tiempo no se les daba importancia en los procesos de enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

La Educación Matemática Crítica (EMC) es una línea de investigación que se interesa por el estudio de la Matemática destacando su papel en la sociedad como fuente de apropiación de la justicia social, la equidad y la democracia. En sus planteamientos Skovmose (1999) intentaba proveer fundamentos para interpretar y aclarar prácticas educativas con el propósito de “abrir la posibilidad para crear un lenguaje que haga surgir nuevas visiones sobre lo que pueden ser las Matemáticas escolares, si se tiene como preocupación educativa el desarrollo de una ciudadanía crítica” (p. XIII). El concepto de crítica, lo define como una actividad de pensamiento y de reacción ante una crisis, en donde se relacionan sujetos críticos y un objeto de crítica (el poder formativo de las Matemáticas).

En este sentido, Skovmose y Valero (2012) proponen que para que se dé una democracia, se deben tener en cuenta cuatro elementos fundamentales: colectividad (grupo de personas); transformación (se reúnen para pensar en el desarrollo), deliberación (toma de decisiones) y coflexión (procesos de reflexión colectivos); aspectos importantes en la formación ciudadana. También estos autores proponen cinco escenarios potenciales para la Educación Matemática y la democracia: 1) las Matemáticas interactúan con otras disciplinas, en particular con la democracia; 2) interacción en el aula; 3) organización de la Matemática escolar; 4) estratificación y examen y 5) globalización y cuarto mundo.

Por otra parte, la escuela transmite estereotipos de género de distintas maneras, por ejemplo las expectativas diferenciadas y estereotipadas de los docentes, respecto a las habilidades y el posible rendimiento de estudiantes hombres y mujeres; los docentes transmiten sus expectativas a través de las relaciones e interacciones en la cotidianidad del aula; en este sentido, Leñero (2010) define los estereotipos de género como “las concepciones que se asumen sin que medie reflexión alguna (como si ya estuvieran fijas de una vez y para siempre) y a modelos sobre cómo son y cómo deben comportarse la mujer y el hombre” (p. 20).

Para la Educación Matemática es esencial reconocer que los estereotipos de género no son solo un reflejo de las actitudes y creencias sociales más amplias, sino que también son perpetuados y reforzados a través de prácticas educativas; los docentes de Matemáticas desempeñan un papel crucial en dismantelar estas nociones preconcebidas y en fomentar un entorno de aprendizaje inclusivo y equitativo. Los estereotipos de género pueden influir

significativamente en la manera en que los estudiantes se perciben a sí mismos y en sus actitudes hacia las Matemáticas.

En cuanto a los valores en la enseñanza de las Matemáticas, Bishop y Clarkson (2000), los conceptualizan como cualidades afectivas profundas que los profesores promueven y estimulan a través de las Matemáticas escolares. Además, destacan tres clases de valores que los profesores transmiten: los valores generales de la educación (honestidad y buen comportamiento), los valores matemáticos (racionalismo, apertura o transparencia) y los valores específicamente de la Educación Matemática (examinación, sabiduría comportamiento matemático eficiente)

Consideraciones sobre el Pensamiento Matemático

En el proceso educativo de básica y media en Colombia, se reconoce la necesidad de fortalecer en los estudiantes una forma de pensar que trascienda la mera memorización de hechos y procedimientos. Schoenfeld (1993) afirma que esta capacidad no se limita al razonamiento deductivo, sino que implica una comprensión más amplia del conocimiento matemático, incluyendo la interpretación de cantidades, magnitudes, formas y sus relaciones.

Segura y Romero (2000), plantean que el pensamiento matemático abarca, entre otros, el razonamiento lógico, la creatividad, el modelado y las operaciones, resaltando así su carácter estructural. Por su parte Cantoral et al. (2005), lo conciben como una actividad que surge tanto en contextos profesionales como en ambientes cotidianos, donde los conceptos y técnicas se desarrollan a partir de la resolución de problemas reales.

Vanegas (2013) sostiene que las propuestas curriculares más recientes promueven en los docentes la tarea de fortalecer el razonamiento para analizar situaciones concretas mediante modelos matemáticos, además de fomentar la comunicación como herramienta fundamental. Este enfoque busca superar la visión limitada a los objetos matemáticos, integrando dimensiones más amplias de la formación humana.

En este marco, la Educación Matemática tiene el compromiso de responder a demandas globales y nacionales relacionadas con una educación para todos, con atención a la diversidad, a la interculturalidad y particularmente a la “formación de ciudadanos y ciudadanas con las competencias necesarias para el ejercicio de sus derechos y sus deberes democráticos” (MEN, 2006, p. 46). Por tanto, el desarrollo de estas capacidades constituye un eje fundamental del currículo escolar.

Estrategia para desarrollar el taller

Las estrategias metodológicas del taller han sido diseñadas con base en dos elementos clave: los resultados del inventario de perspectivas docentes y los relatos contruidos por los participantes sobre su experiencia en la enseñanza de las Matemáticas. A partir de estos insumos, se desarrollarán actividades orientadas a la reflexión crítica, el análisis de casos y la construcción de propuestas didácticas con enfoques inclusivos y transformadores.

El proceso iniciará con la identificación de las perspectivas predominantes entre los docentes, lo que permitirá reconocer tendencias en la forma en que conciben y llevan a cabo la enseñanza de las Matemáticas. Posteriormente, los relatos personales servirán como base para comprender cómo las experiencias previas han influido en sus creencias y prácticas pedagógicas. Este análisis conjunto posibilitará la construcción de estrategias concretas para fortalecer la enseñanza del pensamiento matemático desde una perspectiva crítica, integrando valores, ciudadanía y equidad de género en el aula.

Finalmente, el taller busca proporcionar herramientas prácticas que permitan a los docentes replantear sus metodologías y adaptar sus prácticas pedagógicas a contextos educativos diversos. Mediante la colaboración y el intercambio de experiencias, se espera que los participantes tomen conciencia sobre los alcances de la enseñanza de las Matemáticas, generen compromisos y estrategias aplicables en sus entornos educativos, promoviendo así un cambio significativo en la enseñanza.

Durante el desarrollo del taller se proponen las siguientes actividades:

- Aplicación del inventario de perspectivas de Pratt: Los participantes completarán un inventario diseñado para identificar sus perspectivas de enseñanza según el modelo de Pratt.
- <http://teachingperspectives.com> (el test tiene una versión en español, se puede llenar en línea y a la vuelta de correo envían las respuestas de forma inmediata) Tiempo estimado: 20 minutos
- Narrativas docentes: cada participante narrará (en forma oral) al grupo una breve descripción de su trayectoria hasta convertirse en docente, reflexionando sobre los factores que han influido en su práctica pedagógica. Tiempo estimado 25 minutos (depende del número de participantes)
- Análisis y reflexión de las perspectivas emergentes: A partir de los resultados del inventario y las narrativas, se realizará un análisis grupal (teniendo en cuenta las respuestas gráficas del test y las historias de vida) sobre cómo las perspectivas docentes influyen en la enseñanza del pensamiento matemático. Se fomentará la discusión sobre la relación entre pensamiento matemático y la formación integral en el aula, a partir de sus propias experiencias. Tiempo estimado: 45 minutos
- Estudio de casos y discusión grupal: Se presentará las experiencias de los sujetos participantes de la investigación inicial, mostrando la evolución y transformaciones de sus perspectivas de enseñan. Los participantes discutirán estrategias y desafíos en la implementación de estos enfoques en sus contextos educativos. Tiempo estimado: 30 min.
- Conclusiones y compromisos: Se realizará una síntesis de los aprendizajes obtenidos y los participantes expresarán sus reflexiones sobre cómo pueden mejorar su práctica docente en función de los aspectos abordados en el taller. Tiempo estimado: 30 minutos

Referencias

- Bishop, A., y Clarkson, P. (2000). ¿Qué valores piensa usted que está enseñando cuando enseña matemáticas? 1-7.
- Bruner, J. (1963). *El proceso de la educación*. México: Hispanoamericana.
- Bruner, J. (1991a). *Actos de Significado. Más allá de la revolución cognitiva*. Madrid: Alianza Editorial.
- Cantoral, R., Farfán, R. M., Cordero, F., Alanís, J. A., Rodríguez, R. A., y Garza, A. (2005). *Desarrollo del Pensamiento Matemático*. México, México: Trillas.

- Dewey, J. (1995). *Democracia y educación. Una introducción a la filosofía de la educación*. Ediciones Morata.
- Fávero, M. H. (2005a). *Psicologia e conhecimento. Subsídios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender*. Brasília: Universidade de Brasília.
- Fávero, M. H. (4 de March de 2007a). Semiotic mediation, psychological development process and social representation: towards a theoretical and methodological integration. *Europe's Journal of Psychology*(9).
- Fávero, M. H. (2007b). Psychopedagogic practice in school inclusion and in research in the development of numeric competence. En E. Macera Martínez, y C. A. Pérez Gamba (Ed.), *XII Conferencia Interamericana de Educación Matemática* (pp. 1-9). Santiago de Querétaro: Edebéméxico.
- Felicetti, L., y Pineda, A. (2016). Didáctica y pensamiento matemático en educación infantil. *Educação Por Escrito*, 7(2), 253-262. <https://doi.org/https://doi.org/10.15448/2179-8435.2016.2.24109>
- Freire, P. (1972). *Pedagogía del oprimido*. Siglo XXI.
- Giroux, H. (2003). *Pedagogía y política de la esperanza. Teoría, cultura y enseñanza. Una antología crítica*. Amorrortu editores.
- Hernández, J. C., Castaño, C. V., Quiñones, S., y Marin, P. (2024). ¿“Formación integral”? Resemantización y vínculo con el pensamiento crítico. *Pedagogía y Saberes*(61), 6-22. <https://doi.org/https://doi.org/10.17227/pys.num61-20216>
- Leñero, M. (2010). *Equidad de género y prevención de la violencia en primaria*. México: Secretaría de Educación Pública, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Lerman, S. (2006). Cultural psychology, anthropology and sociology: the developing strong social turn. En J. Maasz, y W. Schlöglmann, *New Mathematics Education Research and Practice* (pp. 171-188). Rotterdam: Sense Publishers.
- MEN. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas. Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y hacer con lo que aprenden*. Ministerio de Educación Nacional. https://doi.org/https://www.mineducacion.gov.co/1621/articles-340021_recurso_1.pdf
- Ministerio de Educación Nacional MEN. (2002). *Estándares para la excelencia en la Educación*. Bogotá: Creamos alternativas Ltda.
- Pratt, D. (2002). Good teaching: one size fits all? En J. Bass, *An Um-date on Teaching Theory*. San Francisco: Jovita Ross-Gordon.
- Rodriguez, M. E. (2013). La educación matemática en la con-formación del ciudadano. *Revista de Estudios Interdisciplinarios en Ciencias Sociales*, 15(2), 215-230.
- Ruiz Diaz, H. J. (2024). *Perspectivas de docentes de educación básica y media sobre relaciones entre pensamiento matemático, ciudadanía, género y valores*.
- Schoenfeld, A. (1993). Learning to Think mathematically: problem solving, and sense making in mathematics. En D. Grows, *Hand-Book of research on mathematics teaching and learning* (p. 234). New York: MacMillan.
- Segura, D., y Romero, J. (2000). Las matemáticas en el aula: posibilidades de construcción significativa. *Planteamientos educación*, 63-78.
- Skovmose, O. (1999). *Hacia una filosofía de la educación matemática crítica*. Bogotá: Una empresa docente Universidad de los Andes.
- Tanguila, I. R., Pilamunga, L. C., Paladines, S., y Valencia, E. (2024). El Enfoque Transdisciplinar en el Aprendizaje de la Matemática: Un Abordaje que Inspira la Formación Integral. *Revista Social Fronteriza*, 4(5). [https://doi.org/https://doi.org/10.59814/resofro.2024.4\(5\)425](https://doi.org/https://doi.org/10.59814/resofro.2024.4(5)425)
- Ursini, S. (Marzo de 2014). Afectos y diferencias de género en estudiantes de secundaria de bajo desempeño en Matemáticas. *Educación Matemática*, 245-269.
- Valero, P. (2004). Postmodernism in Mathematics Education: Challenges and Possibilities. *PME*.
- Valero, P. (2012). Perspectivas sociopolíticas en la educación matemática. En O. Skovmose, y P. Valero, *Educación matemática crítica. Una visión sociopolítica del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas* (pp. 195-216). Bogotá: Universidad de los Andes.
- Vanegas, Y. (2013). *Competencias ciudadanas y desarrollo profesional en matemáticas*. Barcelona: Universitat de Barcelona.



Posición y valor de las cifras en la escritura convencional de los números: Reflexiones de maestras de primaria de Quebec

Mireia **Saboya**

Université du Québec à Montréal

Canada

Saboya.mireille@uqam.ca

Lily **Bacon**

Université du Québec en Abitibi-Témiscamingue

Canada

Bacon.lily@uqat.ca

Nadine **Bednarz**

Université du Québec à Montréal

Canada

descamps-bednarz.nadine@uqam.ca

Sabrina **Héroux**

Université du Québec à Montréal

Canada

heroux.sabrina@uqam.ca

Caroline **Lajoie**

Université du Québec à Montréal

Canada

lajoie.caroline@uqam.ca

Jean-François **Maheux**

Université du Québec à Montréal

Canada

maheux.jean-francois@uqam.ca

Resumen

En un proyecto de investigación colaborativa en Quebec en el que participaron asesores educativos, maestras de primaria e investigadores, nos enfrentamos a cuestionamientos sobre la numeración. Las maestras (con un máximo de 3 años de experiencia) relatan y cuestionan intervenciones que, según nuestra interpretación, podrían fomentar una actividad controlada en los alumnos sobre la posición y el valor de las cifras en la escritura de los números. Las reflexiones que plantean son de interés para la formación inicial y continua del profesorado.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación primaria; Numeración; Control; Posición; Valor; Intervenciones de maestras; Formación de profesores.

Contexto del estudio

Numerosos estudios se han centrado en la enseñanza y el aprendizaje de la numeración decimal posicional en la escuela primaria. Desde los años 80, por ejemplo, Bednarz y Janvier (1984a), cuestionan su enseñanza:

Los resultados y las observaciones nos revelan el escaso apoyo [al alumno] que aporta la enseñanza corriente de la numeración. Centrada en la escritura convencional, esta enseñanza pone más énfasis en el bagaje simbólico y el vocabulario técnico que en el significado que el niño debe otorgar a la escritura. De hecho, éste interpreta la escritura en términos de segmentación, orden y posición sin darle a la posición un verdadero significado en términos de agrupamientos. (p. 30)

Los investigadores que se han interesado en esta temática destacan la dificultad de los alumnos para percibir el valor posicional de los números. Algunos alumnos interpretan el número 342 como un 3 yuxtapuesto a un 4 y un 2 en términos de orden —centenas, decenas, unidades— sin identificar los diferentes agrupamientos subyacentes posibles: 3 agrupamientos de 100, 4 de diez, 2 unidades, pero también 34 agrupamientos de diez y 2 unidades, o incluso 30 agrupamientos de diez y 42 unidades, etc. (Bednarz y Janvier, 1984a). Los intercambios entre las unidades de numeración pueden resultar problemáticos, ya que algunos alumnos no ven 100 como 10 decenas. Además, aunque el uso de objetos físicos en la enseñanza, como bloques multibase o agrupaciones de diversos objetos, ayuda a los alumnos a comprender la estructura del sistema decimal, las dificultades aparecen cuando deben pasar a la escritura numérica y, por lo tanto, trabajar directamente con números escritos.

Otros estudios han examinado secuencias de enseñanza diseñadas por investigadores para mejorar esta situación, pero éstas parecen presentar ciertas limitaciones. Tempier y Chambris (2017) destacan que el recurso que desarrollaron permite la construcción de conocimientos relacionados con el principio de posición, pero señalan resistencias en los alumnos en cuanto a las relaciones entre las posiciones. Koudogbo y al. (2017) observan que, en Quebec, 26 años después, las dificultades señaladas por Bednarz y Janvier (1984a) siguen siendo actuales. También subrayan que la secuencia desarrollada durante tres años con un mismo grupo de alumnos de 6 a 10 años (Bednarz y Janvier, 1984b) tendría un efecto positivo, pero destacan que el docente tiene dificultades para aplicar las “cualidades didácticas [de] esta secuencia [...] probablemente por falta de herramientas didácticas, falta de formación en estas herramientas o falta de tiempo” (p. 77).

Se observan, en efecto, dificultades entre los docentes para llevar a cabo sesiones de enseñanza orientadas a una comprensión profunda de la escritura numérica (Menotti y Ricco, 2007; Mounier, 2013). También es notoria la fuerte dependencia del material concreto en algunos docentes, quienes tienen dificultades para prescindir de él. Al fomentar la participación activa de los maestros de primaria en un programa de formación continua, Clivaz (2016) relata la toma de conciencia de una docente ante un error cometido por un alumno ($5 \text{ centenas} + 12 \text{ decenas} + 3 \text{ unidades} = 515$), discutido en el grupo. La maestra se da cuenta de que esta dificultad en los intercambios entre unidades, decenas y centenas podría deberse a su propia manera de explicar.

Nuestro estudio también prioriza la perspectiva de los docentes, haciéndolos partícipes del debate. El objetivo es destacar los cuestionamientos y las inquietudes que sienten las maestras en torno a la enseñanza y el aprendizaje de la posición de las cifras en la escritura de los números (como en la pregunta “¿Cuál es la cifra de las decenas?”) frente a su valor (ilustrado por la pregunta “¿Cuántas decenas hay?”). Esta temática surge de encuentros reflexivos que involucran a asesores pedagógicos, maestras e investigadores, y abre el camino a reflexiones sobre la formación inicial y continua.

Marco teórico

Para analizar las reflexiones planteadas por maestras sobre la numeración decimal posicional, recurrimos a un marco sobre la actividad de control. En didáctica de las Matemáticas, algunos investigadores se han interesado al control ejercido sobre la actividad matemática y en el papel fundamental que éste desempeña en la resolución de una tarea por parte de los alumnos, ya que se trate de la resolución de problemas, de los aspectos operativos relacionados con el cálculo o del desarrollo de razonamientos matemáticos. El control podría constituir un elemento clave en el aprendizaje de las Matemáticas, como lo demuestran los estudios sobre la verificación o la validación, procesos con los que el control suele estar asociado. Las dificultades a las que se enfrentan los alumnos con respecto a la comprensión de nuestro sistema de numeración cuestionan el control que el alumno ejerce sobre la actividad matemática. Su aprendizaje parece enfrentarse al problema del sentido que el alumno atribuye a nuestro sistema de numeración.

La actividad de control implica una determinada manera de abordar una tarea matemática, ejerciendo una reflexión, mostrando atención frente a los errores, y manifestando un cuestionamiento tanto sobre el procedimiento como sobre la respuesta. El control se basa en la expresión de una reflexión, una toma de distancia y una pausa antes, durante y/o al final de la resolución de una tarea (Saboya, Bednarz y Hitt, 2015). El control se apoya en distintas dimensiones, entre ellas la previsión del resultado o del procedimiento, la verificación, el control semántico, el control sintáctico y la flexibilidad. Resolver tareas relacionadas con nuestro sistema de numeración implica la manifestación de una actividad de control en sus diferentes componentes.

Nuestro sistema de numeración indo-árabe se basa en el uso de diez símbolos (las cifras) que permiten representar números y operar con ellos. La numeración decimal posicional que rige nuestro sistema se fundamenta en dos principios (Tempier, 2016):

- Principio posicional: el valor de una cifra depende de su posición en el número.
- Principio decimal: cada unidad de un orden equivale a 10 unidades del orden inferior.

Estos dos principios son complementarios. El principio posicional explica cómo la ubicación de una cifra influye en su valor, mientras que el principio decimal define las relaciones entre las unidades (agrupamientos de 10). El agrupamiento conduce al principio de intercambio, que se aplica en las operaciones. Por ejemplo, en la suma, se forman agrupamientos y agrupamientos de agrupamientos (cuando hay llevadas), mientras que en la resta, se deshacen los agrupamientos y agrupamientos de agrupamientos (cuando hay préstamos).

Fosnot y Dolk (2001) explican, para los números hasta 99, la dificultad de la unificación, es decir, de considerar que diez, forma una nueva unidad, la decena. La introducción de la centena dificulta esta relación al introducir las relaciones entre dos unidades de órdenes inferiores. Esto lleva a considerar la centena como cien unidades simples, diez decenas y una centena simultáneamente (Thanheiser, 2009). Es esta flexibilidad en la interpretación posible de la centena en relación con la escritura numérica la que permite una comprensión profunda de la numeración. Esta flexibilidad, combinada con un control semántico (basado sobre el significado), es signo de un control. Además, Tempier (2016) distingue los casos canónicos, por

ejemplo, 3 centenas, 2 decenas y 1 unidad = 321, de los casos no canónicos que requieren conversiones entre unidades, como, por ejemplo, 5 centenas + 12 decenas y 3 unidades = 623. Así, para encontrar 623, no basta con saber asociar cada unidad con su rango (principio posicional), también hay que saber que 12 decenas = 1 centena + 2 decenas porque 10 decenas = 1 centena (relación entre las unidades, principio decimal). Thanheiser (2009) presenta dos descomposiciones diferentes del número: 456 puede ser interpretado como 4 centenas, 5 decenas y 6 unidades, que él llama "reference unit" o como $400 + 50 + 6$, denominado "groups of ones". Así, la estructura de la numeración es mixta (Ross, 1989), es tanto aditiva como multiplicativa.

De estos estudios se desprende que la interpretación de un número escrito como una concatenación de cifras es opaca, ya que oculta que las cifras no tienen todas el mismo valor y que existe una relación decimal entre los valores de estas cifras. Ser capaz de decodificar un número y de extraer su significado es un indicador de control. Así, el principio posicional está relacionado con un control sintáctico (que se refiere a la sintaxis de los números) y el principio decimal se vincula con un control semántico (la estructura de los números) (ver, por ejemplo, Osana y Barilaro, 2024) y se basa en la capacidad para coordinar los agrupamientos de diferentes órdenes. Los recursos disponibles para los docentes proponen ejercicios que implican estos dos tipos de control (ver figura 1). El truco de la flecha roja (a la izquierda), utilizado cuando se busca el valor posicional de un dígito, corresponde a un control sintáctico: encapsulamos la cifra y todo lo que está a su izquierda. El ejercicio con los bloques multibase (a la derecha) es un ejemplo de control semántico: el valor posicional se apoya en una representación con los bloques y expresa la centena en decenas.

En rappel Pour savoir combien il y a de dizaines de mille dans un nombre sans en faire la représentation, il faut considérer le chiffre des dizaines de mille ainsi que tous les chiffres qui se trouvent à sa gauche. On fait la même chose pour toutes les positions. Dans le nombre 349 658, il y a 3496 centaines. <table border="1"> <tr> <th>U. M.</th> <th>CM</th> <th>DM</th> <th>UM</th> <th>C</th> <th>D</th> <th>U</th> </tr> <tr> <td>3</td> <td>4</td> <td>9</td> <td>6</td> <td>5</td> <td>8</td> <td></td> </tr> </table> JE M'EXERCE 1. Trouve la valeur de chaque chiffre en rouge. <table> <tr> <td>a) 375 087</td> <td>b) 888 219</td> </tr> <tr> <td>c) 471 730</td> <td>d) 491 402</td> </tr> <tr> <td>e) 628 971</td> <td>f) 524 381</td> </tr> <tr> <td>g) 926 392</td> <td>h) 726 283</td> </tr> </table> Traducción: Para saber cuántas decenas de mil hay en un número sin representarlo, es necesario considerar la cifra de las decenas de mil así como todas las cifras que se encuentran a su izquierda. En el número 349 658, hay 3496 centenas. Referencia: Décimale, 5^e año, p. 4	U. M.	CM	DM	UM	C	D	U	3	4	9	6	5	8		a) 375 087	b) 888 219	c) 471 730	d) 491 402	e) 628 971	f) 524 381	g) 926 392	h) 726 283	La valeur de position (suite) La valeur d'un chiffre dépend de la position qu'il occupe dans le nombre. Exemple: <table border="1"> <tr> <th></th> <th>6124</th> <th>1642</th> <th>2461</th> <th>4216</th> </tr> <tr> <td>Nombre</td> <td>6124</td> <td>1642</td> <td>2461</td> <td>4216</td> </tr> <tr> <td>Valeur</td> <td>6000</td> <td>600</td> <td>60</td> <td>6</td> </tr> <tr> <td>Position</td> <td>unités de mille</td> <td>centaines</td> <td>dizaines</td> <td>unités</td> </tr> </table> Attention! Dans le nombre 1642, le 6 occupe la position des centaines et il vaut 600. Par contre, il n'y a pas seulement 6 centaines dans ce nombre. Regarde bien... Sépare l'unité de mille en 10.  Tu as donc 16 dans ce nombre Referencia: Caméléon, 3e año, p.2		6124	1642	2461	4216	Nombre	6124	1642	2461	4216	Valeur	6000	600	60	6	Position	unités de mille	centaines	dizaines	unités
U. M.	CM	DM	UM	C	D	U																																					
3	4	9	6	5	8																																						
a) 375 087	b) 888 219																																										
c) 471 730	d) 491 402																																										
e) 628 971	f) 524 381																																										
g) 926 392	h) 726 283																																										
	6124	1642	2461	4216																																							
Nombre	6124	1642	2461	4216																																							
Valeur	6000	600	60	6																																							
Position	unités de mille	centaines	dizaines	unités																																							

Figura 1. Extractos de libros de texto utilizados en Quebec.

Finalmente, tener control también se traduce en la previsión del resultado antes de cualquier resolución, una previsión definida a menudo como una estimación del orden de magnitud del resultado (Coppé, 1993). Esta anticipación en general lleva posteriormente a una verificación, otra componente del control. En este texto, nos centramos en el docente, en las intervenciones que menciona y que pueden favorecer una actividad de control ejercida por los alumnos durante la enseñanza y el aprendizaje de la numeración decimal posicional. Diversos

trabajos se han interesado en identificar las intervenciones orientadas al desarrollo del control en los alumnos. Se trata, por ejemplo, de establecer una fase de validación, de cuestionar los alumnos sobre el significado mediante el "por qué", o de interrogarlos sobre una elección fundamentada de material o de estrategias.

Elementos metodológicos

El estudio presentado aquí aborda los cuestionamientos de maestras de primaria de Quebec sobre la numeración decimal posicional. Se enmarca en un proyecto de investigación colaborativa (Bednarz, 2013) más amplio, que se interesa en la transición entre la formación inicial (f.i.) en la enseñanza de las Matemáticas, los primeros años de ejercicio profesional y la formación continua (f.c.). Este tipo de investigación reconoce la complejidad de las profesiones y la existencia de un saber experiencial. Este proyecto involucra tres tipos de actores que aportan una visión complementaria sobre esta transición desde el interior de sus respectivos contextos: seis investigadores-formadores que han intervenido o están interviniendo en f.i., siete asesores pedagógicos que intervienen en f.c. y catorce maestras de primaria con un máximo de 3 años de experiencia en la profesión. Las declaraciones reportadas en este texto provienen de encuentros reflexivos¹ en subgrupos compuestos por dos investigadores-formadores, de cuatro a seis maestras y de dos a tres asesores pedagógicos. Identificaremos a las maestras como MA1 a MA14. En los encuentros reflexivos, las docentes compartían con el grupo experiencias vividas en el aula, a las cuales reaccionaban los investigadores y los asesores pedagógicos, aportando su perspectiva basada en su experiencia investigadora, en el caso de los investigadores, y en el acompañamiento docente, en el caso de los asesores.

Cuestionamientos surgidos durante los intercambios sobre la numeración

En los encuentros reflexivos, los intercambios revelan que las maestras perciben una diferencia en la enseñanza de la numeración decimal posicional entre el primer ciclo (primer y segundo año, alumnos de 6 a 8 años) y el tercer año (alumnos de 8 a 9 años). De hecho, en el tercer año de primaria, las maestras deben introducir un vocabulario que no se ha abordado en los niveles anteriores: "Hay que aprender 'el valor', es decir, saber cuántas unidades hay en una decena y ser capaz de decir cuántas decenas hay en 442 [la respuesta esperada es 44]." (MA11). Las maestras se refieren así a un vocabulario que aparece en un documento oficial del Ministerio de Educación (p. 6): "posición, valor de la posición". Al respecto, en este documento también se especifica que en este ciclo "se debe hacer énfasis en el valor de la posición utilizando material con agrupamientos no evidentes y no accesibles (material para el cual los agrupamientos son simbólicos; ej.: ábaco, dinero)". (p. 5). En lo que sigue resaltaremos entre paréntesis las componentes del control que se expresan a través de los comentarios de las maestras.

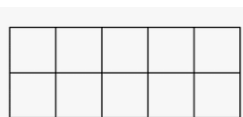
Actividad con macarrones: primer ciclo de primaria

Dos maestras (MA3 y MA10) nos informan que han diseñado una actividad, la "fábrica de macarrones"², enfocada en el trabajo sobre la numeración decimal posicional. MA3 destaca que

¹ Los encuentros tuvieron lugar en setiembre 2022, diciembre 2022 y diciembre 2023.

² La "fábrica de macarrones" es una actividad desarrollada por los asesores pedagógicos de la región, inspirada en el entorno contextual de las cajas de cereales de Bednarz y Janvier (1985) en 1er y 2do grado.

su objetivo es introducir la centena y dar sentido al valor posicional (*control semántico*). Los alumnos se organizan en equipos, y cada equipo recibe un bote con macarrones. MA3 actúa como la "jefa" de la fábrica de macarrones y solicita la ayuda de los niños para contar el número de macarrones en cada bote. Mientras circula por la clase, debe ser capaz de decir: "Ok, 200, ok, tienes 180, así rápidamente a simple vista". La maestra tiene la intención de mostrar a los alumnos la relevancia de los agrupamientos (*control semántico*). Se disponen diferentes bolsas (pequeñas y medianas) sobre el escritorio de la maestra. Estas les permitirán a los alumnos formar agrupamientos, pero la maestra no menciona esto directamente. MA3 aclara que, para llevar a cabo esta actividad, los alumnos deben saber contar en saltos de diez: "Ellos ya tienen el automatismo de hacer paquetes de diez, agrupamientos de diez". Durante la actividad, MA3 y los alumnos permanecen en el contexto de los macarrones: "No teníamos en absoluto el vocabulario de unidades, decenas, centenas. Íbamos realmente solo con macarrones, los pequeños sacos, luego los sacos medianos para nuestros paquetes de diez, luego nuestros paquetes de 100". La centena, vista como el paso de un agrupamiento a un agrupamiento de agrupamientos (10 sacos pequeños), cobra todo su sentido cuando los alumnos cuentan, por ejemplo, dieciséis paquetes de diez macarrones.



Cabe destacar que la maestra propone a los alumnos lo que ella llama una "caja de diez", un cuadrilado que muestra dos filas de 5 casillas superpuestas: "Y luego debían poner el macarrón en la caja de diez, y cuando estaba llena, la daban al saco pequeño porque eso formaba su agrupamiento." (*Verificación*)

MA3 observa a algunos alumnos que cuentan los macarrones uno por uno. MA10 hace la misma observación y declara que los alumnos se dan cuenta de que contar uno por uno no es eficiente. Otros alumnos solo hacen paquetes de 10 y no pasan a los paquetes de 100. MA3 interviene entonces, enfocándose en la relevancia de un agrupamiento de agrupamientos para ver rápidamente la cantidad (*control semántico*). La maestra articula lo que se hace con el material en el contexto y la escritura numérica (*control semántico y sintáctico*), lo que MA10 denomina "hacer la transferencia a la escritura". Además, MA3 pregunta el número de paquetes de diez en el número 140, buscando así a desarrollar la flexibilidad en la escritura combinada a un control semántico. Finalmente, destacamos que la maestra MA3 observa que el trabajo realizado por los alumnos a través de la actividad de la "fábrica de macarrones" conduce a la construcción del orden de magnitud de la centena. Así, después de haber realizado esta actividad, propone a los alumnos contar diferentes cantidades de objetos como botones o palitos y se da cuenta que los alumnos son capaces de estimar (*anticipación*).

Actividad del número del día y el lazo: segundo ciclo de primaria

En otro grupo, MA6 comparte con el grupo el reto que se presenta en el 2º ciclo de primaria respecto a la formalización a través del lenguaje: es necesario desvincularse de las representaciones concretas y hacer la distinción entre posición y valor de posición. La docente observa que persisten las dificultades entre los alumnos. Por ejemplo, algunos alumnos identifican 4 decenas en 542 (posición, control sintáctico) en lugar de 54 (valor de posición, control semántico). Para superar estas dificultades, MA6 implementa una actividad llamada "el número del día". Esta actividad consiste en proporcionar a los alumnos, todas las mañanas, un número para el cual deben encontrar la posición y el valor de posición de unas de las cifras que

componen el número. Esta actividad rutinaria y de corta duración le permite intervenir inmediatamente después de que los alumnos expresan dificultades. Utiliza la imagen de un vaquero y su lazo para ayudarlos a identificar el valor de posición. Incluso llega a usar un lazo en clase y hace que algunos alumnos desempeñen el papel de las decenas. Esta metáfora del lazo recuerda la estrategia de la flecha roja presentada anteriormente (ver figura 1). Las intervenciones de MA6 se basan en el desarrollo de un control principalmente sintáctico mediante la imagen del lazo que utiliza para ayudar a los alumnos a realizar la tarea. La maestra destaca que, a pesar de sus esfuerzos, los alumnos siguen teniendo dificultades para distinguir el valor de un número de su posición. Entonces se cuestiona la necesidad de que los alumnos deban hacer esta distinción. MA6 expresa sus reservas y las limitaciones que experimenta en su entorno escolar con respecto al desafío posición/valor de posición. ¿Es necesario que los alumnos sepan distinguir el vocabulario “posición” y “valor de la posición”?

Discusión y conclusión

Los encuentros reflexivos entre maestras, investigadores y asesores pedagógicos ponen de relieve cuestionamientos provenientes de las maestras en torno a la enseñanza y el aprendizaje de nuestro sistema de numeración. Las maestras se preguntan sobre la necesidad de que los alumnos aprendan un vocabulario formal: “posición” y “valor de posición” en tercer año de primaria, vocabulario que deben movilizar en ejercicios como: “Encuentra la posición y el valor posicional del dígito 8 en el número 375 087”. Las intervenciones que implementan las maestras responden a un control meramente sintáctico, en el cual los alumnos suelen utilizar una flecha o la imagen de un lazo para encontrar el valor posicional de una cifra en un número dado. La distinción entre “posición” y “valor de posición” se hace entonces mediante la repetición de ejercicios dados cada día. Además, las maestras observan que esta distinción entre “posición” y “valor de posición” se da de manera natural en el primer ciclo de primaria, donde los alumnos activan de forma complementaria el principio posicional y decimal (Tempier, 2016) sin utilizar el vocabulario formal. Lo hacen a través de actividades como la de la fábrica de macarrones. Las intervenciones de las maestras promueven, como hemos visto, un control semántico y una flexibilidad, que se expresan mediante la acción de hacer o deshacer agrupamientos con material. Estas acciones están articuladas con la escritura simbólica (control semántico y sintáctico). Además, una caja de diez está disponible para los alumnos como medio de verificación, y posteriormente se les invita a estimar colecciones. Todas estas intervenciones, que se basan en el desarrollo de una actividad controlada refuerzan la comprensión de las especificidades de nuestro sistema de numeración. Cabe señalar que “posición” y “valor de posición” son palabras muy similares, podríamos incluso decir que son parónimos, lo que dificulta su distinción. Así, la ruptura entre el control desarrollado en segundo y en tercer grado parece ocurrir cuando se aborda la escritura numérica sin el apoyo de un contexto significativo o con material. Con el uso de un vocabulario específico, varios alumnos parecen perder el sentido de los agrupamientos. Nos parece que esta necesidad de formalismo, que se expresa entre otras cosas en los recursos destinados a los maestros, proviene de prácticas establecidas desde hace mucho tiempo. Y eso que documentos ministeriales (Fascículo C, 1982) denuncian el dominio de parte de los alumnos de la jerga especializada “posición” y “valor de posición”: “Cuando le pedimos a los niños que nos digan (...) cuántas decenas hay, cuál es el dígito que ocupa la posición de las decenas (...) no debemos sorprendernos si el niño (...) no comprende completamente su alcance y si sus respuestas no siempre coinciden con lo que el maestro espera”. (Fascículo C, 1982, p. 10).

Estas inquietudes surgieron en el espacio de discusión, la zona interpretativa compartida que se establece en una investigación colaborativa, destacando la reflexión didáctica de las maestras sobre el sistema decimal posicional. Nos parece que, a la luz de las reflexiones planteadas, este tema de la formalización entre posición y valor de posición debería ser objeto de una reflexión profunda por parte de los formadores, tanto los de la formación inicial como los de la formación continua, así como de los tomadores de decisiones y los autores de los libros de texto. En la formación inicial y continua, resulta interesante plantear las siguientes reflexiones: ¿Por qué, en tercer año, el alumno debe hacer la distinción entre “posición” y “valor de posición” con números dados, tal como se presenta en varios libros de texto? ¿No sería más natural que el alumno movilizara en la acción, por ejemplo, a través de las operaciones con números naturales, la “posición” y el “valor de posición” de los números en forma simbólica sin recurrir a estas denominaciones?

Referencias y bibliografía

- Barilaro, M., & Osana, G. (2024). La maîtrise imparfaite des unités de numération en base dix chez les enfants et adultes. Présentation au séminaire de didactique des mathématiques. Université du Québec à Montréal.
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1984a). La numération : les difficultés suscitées par son apprentissage. *Grand N*, 33, 5-31.
- Bednarz, N., & Janvier, B. (1984b). La numération : Une stratégie didactique cherchant à favoriser une meilleure compréhension. *Grand N*, 34, 5-17.
- Bednarz N. (Dir.) (2013). *Recherche collaborative et pratique enseignante : regarder ensemble autrement*. Editions L'Harmattan.
- Clivaz, S. (2016). Développement des connaissances mathématiques pour l'enseignement au cours d'un processus de lesson study. *Actes du séminaire national de l'ARDM*.
- Deblois, L. (1996). Une analyse conceptuelle de la numération de position au primaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 16(1), 71-128.
- Fosnot, C-T. y Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing number sense, addition, and subtraction*. Portsmouth, NH: Heineman.
- Koudogbo, Giroux, J., & De Cotret, S. (2017). La numération de position : où en sont les connaissances d'élèves québécois? *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 17(3), 199-218.
- Menotti, G., & Ricco, G. (2007). Didactic practice and the construction of the personal relation of six-year-old pupils to an object of knowledge: Numeration. *European Journal of Psychology of Education*, 22, 477-495.
- Ministère de l'Éducation, du Loisir et du Sport (MELS). (2009). *Progression des apprentissages au primaire : Mathématique*. Gouvernement du Québec.
- Ministère de l'Éducation, du Québec (MEQ) (1982). *Guide pédagogique. Primaire. Mathématique. Les nombres naturels. Fascicule C*. Québec : Ministère de l'Éducation, DGDP, Gouvernement du Québec.
- Mounier, É. (2013). Y-a-t-il des marges de manœuvres pour piloter la classe durant une phase de bouclage ? *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 33(1), 79-113.
- Ross, S. H. (1989). Parts, wholes and place value: A developmental view. *Arithmetic Teacher*, 36, 47-51.
- Saboya, M., Bednarz, N., & Hitt, F. (2015). Le contrôle exercé en algèbre: conceptualisation et analyses en résolution de problèmes. *Annales de didactique et de sciences cognitives*, 20, 61-100.
- Tempier, F. (2013). *La numération décimale à l'école primaire. Une ingénierie didactique pour le développement d'une ressource*. Université Paris-Diderot - Paris VII.
- Tempier, F. (2016). Composer et décomposer : un révélateur de la compréhension de la numération chez les élèves. *Grand N*, 98, 67-90.
- Tempier, F., & Chambris, C. (2017). Concevoir une ressource pour l'enseignement de la numération décimale de position. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, 37(2-3), 289-332.
- Thanheiser, E. (2009). Preservice Elementary School Teachers' Conceptions of Mutidigt Whole Numbers. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40, 251-281.



Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática da região Sul do Brasil: Um olhar para a formação de professores

Kauê Monteiro **Pascotto**
Universidade Franciscana
Brasil
kaue.machado@ufn.edu.br

Luis Fernando **Pizzatto**
Universidade Franciscana
Brasil
luis.pizzatto.@ufn.edu.br

Lucas Flores **Lehnhart**
Universidade Franciscana
Brasil
lehnhartlucas@gmail.com

Silvia Maria de Aguiar **Isaia**
Universidade Franciscana
Brasil
sisaia@ufn.edu.br

Luis Sebastião Barbosa **Bemme**
Universidade Franciscana
Brasil
luis.bemme@ufn.edu.br

Resumo

Nesta comunicação temos como objetivo discutir o modo como os Programas de Pós-graduação - PPGs em Ensino de Ciências e Matemática do sul do Brasil tem abordado a formação continuada de professores de Matemática. Tal estudo é de cunho qualitativo, numa perspectiva documental. Fizeram parte do corpus de análise dissertações e teses oriundas de nove PPGs localizados nos três Estados da região sul do Brasil. Os resultados indicam que existem diferentes focos de atenção quando considerado os interesses de pesquisas desenvolvidas neste contexto, no entanto, o número de investigações ainda não pequenas se comparadas com o contingente de teses e dissertações defendidas.

Palavras-chave: Pesquisa bibliográfica; Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática; Formação inicial de professores; Formação continuada de professores; Formação docente.

Introdução

A formação de professores é uma área do conhecimento, investigação e propostas, que tem como foco a compreensão dos processos pelos quais os professores, aprendem o exercício da docência, o que lhes possibilita intervir não somente no desenvolvimento do seu ensino, mas também no currículo das instituições onde trabalham, visando deste modo o melhoramento da qualidade da educação (Garcia, 1999).

Deste modo entendemos que há uma relação muito próxima entre a melhoria dos processos de ensino e aprendizagem e a qualificação dos processos formativos docentes, sejam eles iniciais ou continuada, uma vez que o modo como o professor entende e organiza o seu ensino, está fortemente vinculado aos processos formativos que ele vivenciou ao longo da sua trajetória formativa.

Neste sentido, entendemos a Pós-graduação na área de ensino é um espaço importante para o desenvolvimento de investigações que tenha como foco de pesquisa a formação de professores nos seus mais distintos contextos. No entanto, esta área ainda está se consolidando já que sua constituição é mais recente se comparada a área da educação, e nesse sentido, pesquisas voltadas para este cenário podem ajudar a compreender e melhorar as ações que são desenvolvidas neste PPGs.

Provocados por essa questão, nesta comunicação temos como objetivo discutir o modo como os Programas de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do sul do Brasil tem abordado a formação continuada de professores de Matemática.

Referencial Teórico

A formação docente tem um papel fundamental no cenário atual, uma vez que ela vai além da atualização científica, pedagógica e didática do professor, se configurando como uma possibilidade para a criação de espaços de participação e reflexão onde os sujeitos aprendem a se adaptarem para a mudança e a incerteza, cada vez mais presentes no trabalho do professor (Imbernón, 2011).

Nesse viés surgem os Programas de Pós-graduação na área de Ensino de Ciências e Matemática que podem se converter em um espaço que favorece o desenvolvimento de pesquisas sobre a formação docente, uma vez que a qualidade dos processos de ensino e aprendizagem estão fortemente associados aos modelos formativos que os professores vivenciam, tanto na formação inicial, quanto na formação continuada.

A área de Ensino de Ciências e Matemática surge nos anos 2000, sendo esta um esforço coletivo entre diferentes profissionais de distintas áreas que se dedicaram as questões relacionadas aos processos de ensino de aprendizagem de forma inter/multidisciplinar (Brasil, 2009). No entanto, quando olhamos as linhas de pesquisas destes programas é possível verificar que muitos deles já possuem uma linha de formação, o que evidencia que não podemos pensar os processos de ensino e aprendizagem, descolados desse campo.

Nesse cenário entendemos que a Pós-graduação na área do ensino pode desenvolver uma dupla função. A primeira delas é se converter em um espaço formativo para os próprios sujeitos que estão em processo de pesquisa, uma vez que se faz necessário a criação de espaços no qual o sujeito possa refletir sobre seus saberes e fazeres, expor suas fragilidades e inseguranças, ao mesmo tempo que se sinta legitimado e valorizado pelos conhecimentos que ele possui (Imbernón, 2011).

A segunda função é desenvolver pesquisa voltadas para a compreensão do modo como está se dando e conseqüentemente como podemos qualificar os processos formativos docente, já que nesse espaço costuma-se congrega sujeitos com distintas trajetórias formativas e experiências profissionais diversas, que podem aliar às suas práticas, constructos teóricos que permitam compreender as múltiplas dimensões que compõe a docência.

Deste modo, a formação continuada se consolida a partir de situações problemáticas que podem ser compartilhadas na busca por soluções. Assim, esse espaço da Pós-graduação pode ser um local de colaboração onde o professor pode refletir sobre os problemas que lhes concernem e buscar soluções em grupo ou de forma individual (Imbernón, 2010).

Metodologia

Este estudo é de caráter qualitativo do tipo bibliográfico. A pesquisa bibliográfica é realizada a partir do levantamento de referências teóricas já publicadas, sendo que seu objetivo é recolher informações sobre um tema a respeito do qual se buscar dar uma resposta (Fonseca, 2002).

Para levantamento dos Programas de Pós-graduação que iriam fazer parte desse estudo, utilizamos a Plataforma Sucupira, onde definimos os seguintes critérios: i. área básica: Ensino de Ciências e Matemática; ii. área de avaliação: Ensino; iii. Situação do Programa: em funcionamento; iv. modalidade: acadêmico e v. região: sul. A partir desses critérios foi gerado uma lista com 12 PPGs, no entanto, dois foram desconsiderados por não estarem voltados para a Matemática. A tabela 1 apresenta os Programas onde as buscas foram realizadas.

Tabela 1
Programas de Pós-graduação onde foi realizado a busca.

	Programa	Instituição de Ensino	Observação	Números de trabalhos
01	Educação em Ciências e em Matemática	Universidade Federal do Paraná (UFPR)	2011 - 2024 Uma tese não estava disponível	05
02	Educação em Ciências, Educação Matemática e Tecnologias Educativas	Universidade Federal do Paraná (UFPR)	2023 - 2024	02
03	Educação Matemática	Universidade Estadual do Paraná (Unespar)	2021 - 2024	-
04	Educação Matemática e Ensino de Física	Universidade Federal de Santa Maria (UFSM)	2015 - 2024	01
05	Educação para a Ciência e a Matemática	Universidade Estadual de Maringá (UEM)	2006 - 2024	01
06	Ensino de Ciências e Educação Matemática	Universidade Estadual de Londrina (UEL)	2003 - 2025 Duas teses não estavam disponíveis	12
07	Ensino de Ciências e Educação Matemática	Universidade Estadual de Ponta Grossa (UEPG)	2017 – 2024 Uma dissertação não estava disponível	-
08	Ensino de Ciências e Matemática	Universidade Franciscana (UFN)	2016 - 2024	01
09	Ensino de Matemática	Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)	2019 - 2024	01
Total				23

Fonte: organização dos autores. 2025.

A partir dessa listagem foi acessado os repositórios de cada um desses Programas de Pós-graduação e identificada, pelo título, as pesquisas que tiveram como foco a formação continuada de professores. Este levantamento identificou vinte e sete pesquisas, no entanto, quatro destas pesquisas não estavam disponíveis no momento da busca, restando vinte e três trabalhos.

Resultados e discussões

A partir dos vinte e três trabalhos identificados nessa busca, podemos definir cinco pontos focais nas quais essas pesquisas podem ser enquadradas. A Figura 1 apresenta uma síntese dessa organização. A construção destes pontos focais está associada ao objetivo de pesquisa das investigações identificadas.

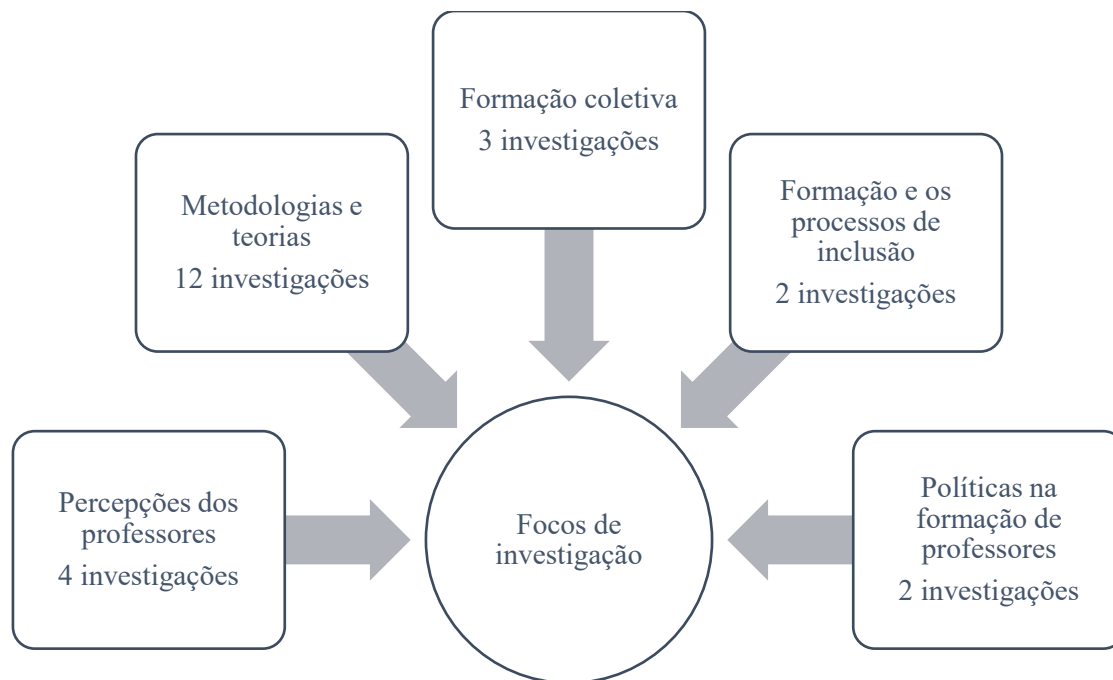


Figura 1. Organização dos focos de investigação.

O primeiro foco de investigação é sobre a **percepção que professores** em formação continuada possuem sobre os processos formativos que eles vivenciam. Para ilustrar este foco selecionamos a pesquisa de Manosso (2012) que tem como objetivo apresentar as enunciações de professores de Matemática em relação as práticas de formação continuada que são ofertadas na rede pública estadual do Paraná, em especial com professores que possuíam mestrado e haviam participado do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE). Participaram deste estudo nove professores.

Em suas considerações a autora pontua que os sujeitos da pesquisa pontuam que os cursos de curta duração acabam não tendo muito significado e trazendo poucas contribuições para o seu saber matemático, sendo estes apenas informativos (Manosso, 2012).

O segundo foco de investigação é sobre as **metodologias e teorias** na formação de professores. Foi possível identificar metodologias como o uso das Tecnologias e a Análise de Erros, já no campo das teorias destaca-se a Atividade de Estudo e as Comunidade de Prática. Para ilustrar esse foco apresentamos a tese de Rocha (2023) que teve como objetivo geral “analisar um curso de formação continuada de professores de Matemática sobre Programação Visual, sob os vieses do Pensamento Computacional e do Pensamento Matemático” (p. 8).

A autora pontua que sua investigação revelou que as atividades de Programação Visual favorecem o desenvolvimento do Pensamento Matemático dos estudantes, e deste modo o processo formativo é fundamental para que os professores possam compreender as ferramentas e estratégias do Pensamento Computacional e do Pensamento Matemático de forma significativa (Rocha, 2023).

O terceiro foco de investigação está nos processos formativos constituídos levando em conta a **coletividade**. Ilustra esse foco a dissertação de Reinheimer (2020) que teve como objetivo “investigar a postura dos professores de Matemática do Ensino Fundamental do município de Nova Hartz/RS e região, participantes de um curso de formação continuada na modalidade à distância e inseridos em diferentes espaços virtuais” (p. 7). Para isso a autora utiliza-se de uma fundamentação teórica sobre espaços virtuais e trabalho coletivo.

As considerações deste estudo apontam para a necessidade de uma permanente reflexão sobre a importância, valorização e manutenção de ações de formação, sejam elas iniciais ou continuadas (Reinheimer, 2020).

No quarto foco de investigação encontramos pesquisas que estão voltadas para a formação continuada com interesse nos processos de **inclusão**. Para ilustrar esse foco trazemos a dissertação de Souza (2013) que teve como objetivo “compreender a realidade de tais contextos educacionais inclusivos e contribuir com os debates e estudos sobre o processo de inclusão de alunos surdos na educação básica” (p. 7)

A autora pontua em suas considerações que os professores de Matemática ainda possuem muitas dificuldades com a inclusão do aluno surdo, pois existe falta de aprofundamento teórico desses profissionais, além dos ambientes educacionais não estarem estruturados de acordo com os processos de inclusão (Souza, 2013).

O último foco de atenção está nas pesquisas que trazem aspectos das **políticas públicas** como um dos elementos de investigação. Ilustra este foco de atenção a pesquisa de Martos (2022). Este estudo teve como objetivo “inventariar e analisar as produções didático-pedagógicas resultantes do Programa de Desenvolvimento Educacional (PDE-PR), elaboradas por professores de Matemática atuantes em Curitiba e Região Metropolitana” (p. 6).

As considerações desse estudo indicam que é possível perceber um movimento na direção de compreender a Matemática e seu ensino, bem como a postura dos professores que estão cada vez mais atentos as necessidades da comunidade escolar, trazendo questões e problemas como objetos de estudo da Matemática (Martos, 2022).

Considerações finais

Nesta comunicação temos como objetivo discutir o modo como os Programas de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática do sul do Brasil tem abordado a formação continuada de professores de Matemática.

O levantamento realizado nos permitiu pontuar cinco focos de atenção distintos. Essa categorização tomou como base o interesse de cada pesquisa, não tendo como pretensão ser um modelo fechado, muito menos uma categorização final, mas uma forma de organizar os dados de modo a nos provocar a pensarmos em temáticas e situações que podem ser trazidas para o contexto da formação continuada.

Embora tenhamos identificados pesquisas sobre ações de formação continuada de professores de Matemática em sete dos nove PPGs pesquisados, o número de investigações sobre este tema ainda é pequeno se comparado as demais pesquisas encontradas. No entanto, salientamos que também foi identificadas ações voltadas para a formação inicial dos professores de Matemática e também pesquisas sobre a formação do professor de Ciências (Física, Química e Biologia).

Esse estudo é um primeiro olhar para este cenário que merece um olhar mais aprofundado sobre essa temática, afim de que possamos compreender, e, consequentemente contribuimos para a qualidade desses processos formativos que ocorrem no espaço da Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática.

Referências e bibliografia

- Brasil. (2009). Coordenação de Aperfeiçoamento do Pessoal de Nível Superior – CAPES. Diretoria de Avaliação – DAV. Documento da Área de Ensino de Ciências e Matemática. Brasília. Disponível em: www.capes.gov.br.
- Fonseca, J. J. S. (2002). *Metodologia da pesquisa científica* [Apostila]. UEC.
- García, C. M. (1999). *Formação de professores: Para uma mudança educativa*. Porto Editora.
- Imbernón, F. (2011). *Formação docente e profissional: Formar-se para a mudança e a incerteza* (9ª ed.; S. C. Leite, Trad.). Cortez.
- Imbernón, F. (2010). *Formação continuada de professores*. Artmed.
- Martos, G. *Produções didáticos-pedagógicas na formação continuada de professores de Matemática: o PDE Paraná em foco*. (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná).
- Manosso, M. V. B. (2012). *Relações com o saber: professores de Matemática e seus pontos de vista sobre a formação continuada do Estado do Paraná*. (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná).
- Reinheimer, M. A. (2020). *Do coletivo ao individual e vice-versa: uma experiência de trabalho coletivo com o uso combinado de diferentes Espaços Virtuais na formação continuada de professores de matemática*. (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul).
- Rocha, F. S. M. (2023). *Relações entre o pensamento matemático e o pensamento computacional: compreensões a partir d um curso de formação continuada de professores de matemática*. (Universidade Federal de Paraná).
- Souza, M. C. (2013). *Contextos educacionais inclusivos de alunos surdos: ações frente à realidade inclusiva de professores de matemática da educação básica*. (Dissertação de mestrado, Universidade Estadual de Londrina).



Raciocínio matemático e as oportunidades de aprendizagem profissional do professor que ensina Matemática: práticas e ações do formador

Giane Fernanda Schneider **Gross**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil

giane.fer@gmail.com

André Luis **Trevisan**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil

andreluistrevisan@gmail.com

Eliane Maria de Oliveira **Araman**
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Brasil

eliane.araman@gmail.com

Este estudo teve a intenção de compreender como as ações do formador contribuem para gerar Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) no que diz respeito ao Raciocínio Matemático (RM). A análise, de caráter qualitativo, tomou como dados excertos em áudio e vídeo de discussões realizadas no primeiro encontro de um processo formativo para professores que ensinam Matemática na Educação Básica. Como resultado, destaca-se que as ações do formador geraram OAP envolvendo conhecimentos tanto matemáticos quanto didáticos, na perspectiva do RM, em especial, por meio de reflexão de práticas em sala de aula e reconhecimento de características das tarefas matemáticas potenciais para estimular a mobilização de processos de raciocínio matemático dos estudantes.

Palavras-chave: Aprendizagem Profissional; Formação de professores; Formador; Raciocínio Matemático; Tarefas Matemáticas.

Introdução

Entender o que é e como desenvolver, no Ensino de Matemática, o Raciocínio Matemático (RM) apresenta-se como temática de investigação emergente, tanto em pesquisas científicas internacionais quanto nacionais (Trevisan & Araman, 2021; Araman, Serrazina & Ponte, 2019; Ponte, Quaresma & Mata-Pereira, 2020). Apesar da relevância do tema, em geral orientações curriculares não apresentam, de forma explícita, uma definição ou direção para seu efetivo desenvolvimento junto aos estudantes (Gross, Souza & Trevisan, 2022).

O conceito de Oportunidades de Aprendizagem Profissional (OAP) adotado neste estudo tem, como um dos elementos fundamentais, os formadores (Ribeiro & Ponte, 2020). Ao considerar esses aspectos, mostra-se fundamental compreender como o papel e as ações do formador podem potencializar OAP aos professores, em especial, quando discutem o RM, nosso foco de interesse.

Com o objetivo de compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar OAP, no que diz respeito ao RM, identificamos neste estudo as ações do formador e possíveis OAP geradas a partir dessas ações. Como uma conjectura inicial, reconhecemos que ações realizadas por formadores em um processo formativo podem gerar OAP docentes (Aguar, Doná, Jardim & Ribeiro, 2021; Gross, Martens, Trevisan, Araman & Oliveira, 2023). Para análise e interpretação, foram considerados dados oriundos de um processo formativo, especificamente do primeiro encontro, a partir da utilização de uma Tarefa de Aprendizagem Profissional (TAP) (Smith, 2001; Ribeiro & Ponte, 2020), que permitiriam que os professores participantes ampliassem seus conhecimentos sobre o RM a partir do papel e das ações de dois formadores (Ribeiro & Ponte, 2020), inspirando-se no quadro de referência de Ferreira, Ribeiro e Ponte (2023).

Referencial Teórico

Lannin et al. (2011), no livro “*Developing Essential Understanding of Mathematical Reasoning*”, apresentam o desenvolvimento do RM, que ocorre por meio de um processo evolutivo de conjecturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos. Os autores pontuam que para conseguir colocar em prática em sala de aula esses processos, faz-se necessário proporcionar aos estudantes: raciocinar de forma abstrata e quantitativa, construir argumentos que sejam viáveis, procurar e fazer uso de diferentes estruturas, expressar regularidades e construir argumentos que possibilitem criticar outras formas de raciocínio.

Uma possibilidade são os ambientes de formação continuada que proporcionem OAP docentes relacionadas ao RM. Nesse pressuposto, destacam-se os estudos de Ribeiro e Ponte (2020) que propõem o modelo *Professional Learning Opportunities for Teachers* (PLOT) – Oportunidades de Aprendizagem Profissional para Professores, por intenção de subsidiar a organização de processos formativos e o reconhecimento de OAP por eles geradas. O modelo, teórico e metodológico, é organizado a partir de três domínios: 1) Papel e Ações do Formador (PAF); 2) Tarefas de Aprendizagem Profissionais (TAP); e 3) Interações Discursivas entre os Participantes (IDP).

A respeito do formador, o compreendemos como um profissional encarregado de ensinar professores que podem ser iniciantes ou com mais tempo de experiência na profissão (Martignone, Ferretti & Rodríguez-Muñiz, 2022). O formador faz uso de diferentes metodologias de ensino, ao considerar o conhecimento oriundo das experiências, pesquisas e aprofundamentos da Educação Matemática. A organização, os conhecimentos e as ações desempenhadas pelo formador, para a realização de um processo formativo, podem ser orientadas pela teoria (de acordo com a temática a ser trabalhada), pelas mobilizações dos professores em práticas que possibilitem discutir episódios que ocorrem em sala de aula e, também, a partir de diferentes momentos de trabalho e reflexão individual e, especialmente, coletiva, gerando assim a oportunidade de aprender (Ribeiro & Ponte, 2020).

Essas ações podem ser direcionadas por meio de TAP, planejadas pelo formador para possibilitar discussões e reflexões que envolvam conhecimentos tanto matemáticos quanto didáticos e que oportunizem OAP (Ribeiro & Ponte, 2020), de modo a contribuir para a ampliação dos conhecimentos dos professores. Para Smith (2001), é importante que as TAP permitam que o professor reflita sobre sua prática da sala de aula.

Quanto às IDP, em um processo formativo, devem ser realizadas discussões matemáticas e didáticas que possibilitem a argumentação e a justificação, bem como a mobilização da linguagem matemática.

A partir do objetivo proposto neste estudo, destacamos a pesquisa de Ferreira et al. (2023), que investiga práticas de uma formadora de professores que ensinam Matemática enquanto um modelo especificamente voltado às ações do formador, organizadas na Tabela 1.

Tabela 1

Classificação das práticas e ações do formador durante as discussões coletivas

Práticas do Formador	Descrição	Ações do Formador
Estabelecer uma comunidade de aprendizagem	Proporcionar um ambiente em que os professores se sintam seguros e encorajados a compartilhar suas ideias e práticas	Elogiar e incentivar
		Brincar
		Apoiar
		Compartilhar experiências pessoais
		Convidar
Interpretar as interações com os professores e entre os professores	Atribuir significado e sentido às diferentes interações	Validar
		Parafrasear (revoicing)
		Estender/Ampliar
		Solicitar esclarecimentos
		Ouvir
Estabelecer conexões	Estabelecer relações com elementos internos e externos ao processo formativo	Esclarecer/explicar
		Relacionar
Desafiar os professores a avançar em seus conhecimentos	Lançar questões desafiando os professores a avançar em seus conhecimentos	Retomar
		Contrapor
		Questionar

Sistematizar Aprendizagens	Fazer uma síntese das discussões e conhecimentos relacionando com os objetivos da formação	Resumir os tópicos principais da discussão
		Recuperar os conhecimentos prévios

Fonte: Ferreira et al. (2023)

Os autores destacam, na pesquisa, que as práticas realizadas pela formadora geraram ações categorizadas em processos formativos que envolvem discussões coletivas, a contar das “orquestrações e das interações discursivas” (Ferreira *et al.*, 2023, p. 684) entre os participantes. Segundo Ferreira *et al.* (2023), esse tipo de prática possibilitou a orientação de processos formativos, a construção de conhecimentos, o desenvolvimento de habilidades dos formadores e direções para a formação de formadores de professores.

Metodologia de Pesquisa

Como metodologia, utilizou-se a pesquisa qualitativa, proposta por Gil (2008) como um processo que considera as atividades realizadas, a coleta, a análise e a interpretação dos dados de acordo com o referencial teórico e, por fim, a redação a partir dos olhos dos pesquisadores. Delineado o percurso, este estudo tem a intenção de compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar OAP no que diz respeito ao RM. Para isso, serão identificadas as práticas e ações do formador à luz da pesquisa de Ferreira et al. (2023) e as ocorrências reveladas por meio da interpretação dos dados que dizem respeito ao RM.

Para tal, apresentamos discussões e análises do primeiro encontro realizado de um processo formativo, com intenção de verificar o desenvolvimento profissional docente a partir das discussões coletivas que compõe uma comunidade de prática de aprendizagem envolvendo reflexões e trocas de experiências que contemplem o RM. O processo formativo foi planejado e implementado por três formadores no primeiro semestre de 2023, sendo dois deles o primeiro e segundo autor deste estudo. Seus participantes eram professores que ensinavam Matemática na Educação Básica do estado do Paraná. Para organização, foi dividido em três etapas: 1) Apresentação e aspectos gerais do RM (encontro 1); 2) Entendimentos Essenciais do RM (encontros 2 a 4); e 3) Ciclo de Planejamento, Desenvolvimento e Reflexão (PDR) (encontros 5 a 9). O público, no primeiro encontro, totalizou 13 professores (nomes fictícios): Paula, Eloísa e Salete (lecionavam nos anos iniciais do Ensino Fundamental); Fátima, Rebeca, Serena, Roberta, Silvia e Livia (lecionavam nos anos finais do Ensino Fundamental); e Félix, Bianca, Fernanda e Natália (lecionavam no Ensino Médio).

Iniciou-se com a apresentação dos três formadores (aqui denominados 1, 2 e 3). Também, foi solicitado que os participantes se apresentassem e relatassem o nível de formação e os interesses na participação do processo formativo. Após este primeiro momento, foram dedicados momentos individuais e coletivos aos aspectos gerais do RM, considerando os conhecimentos prévios dos professores e as primeiras experiências com o tema.

Para o momento coletivo, os professores foram divididos em três grupos (separados nas salas temáticas, ferramenta disponível no Google Meet), para resolver a primeira TAP (Figura 1). Essa TAP1 tinha por objetivo levantar conhecimentos prévios dos participantes e instigá-los a analisar, ainda sem um conhecimento teórico sistematizado, alguns aspectos relacionados ao RM

de estudantes do 5º ano ao resolver uma tarefa matemática. A separação dos grupos foi realizada com a intenção de organizar os grupos com professores que lecionavam em diferentes níveis de ensino, Ensino Fundamental anos iniciais, Ensino Fundamental anos finais e Ensino Médio. O formador 2 organizou a divisão dos grupos de modo que professores com diferentes experiências, níveis de atuação e distintas formações fizessem parte do mesmo grupo, com o intuito de gerar interações e discussões (Ribeiro & Ponte, 2020). Os professores foram divididos em três grupos: 1 (Fernanda, Salette, Félix, Silvia e Serena); 2 (Livia, Natália, Roberta e Paula); e 3 (Fátima, Rebeca, Bianca e Eloísa).

Estudo Coletivo – Encontro 1

1ª parte: Resolva a tarefa matemática a seguir, discutindo com seu grupo possíveis estratégias para resolução.

1) Renato formou no Geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro, depois preencher a tabela abaixo:

	Figura 1	Figura 2	Figura 3
Área	9 cm^2	O dobro da área da figura 1	O triplo da área da figura 1
Perímetro			

Agora mostre para Renato como fez para formar essas figuras escrevendo ou realizando os cálculos.

2ª parte: A tarefa que você resolveu foi proposta a uma turma do 5º ano. A partir de um trecho de discussão da dupla Bruno e Maria, e da análise do registro escrito entregue à professora, o que podemos dizer sobre o raciocínio matemático desses estudantes? Discuta com seu grupo.

Transcrição de áudio envolvendo a resolução da tarefa matemática.

(Obs.: F1 significa Fala 1, F2 significa Fala 2, ...)

F1 - Bruno: Tarefa 3. 1 Renato formou no geoplano um quadrado com área 9 cm^2 e precisa encontrar o perímetro. Depois preencher a tabela abaixo. Tá.

F2 - Maria: Então significa que cada quadrado é 1 centímetro, né?

F3 - Bruno: É. Então, a gente tem que fazer um de 9.

F4 - Maria: Sim, assim?

F5 - Bruno: Não, mais aí tem? Espera. A precisa fazer 5 mais 4.

F6 - Maria: Pronto. Aí, fiz um quadrado, 3 por 3.

F7 - Bruno: [contando os quadradinhos] 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Então vai ser esse [referindo-se a construção do quadrado no geoplano].

F8 - Maria: O perímetro vai ser? 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12. [contando os segmentos que formam o quadrado de 9 cm^2 no geoplano].

F9 - Bruno: Tá, então 12. Agora, tem que fazer o dobro. Vai ser 24, o dobro.

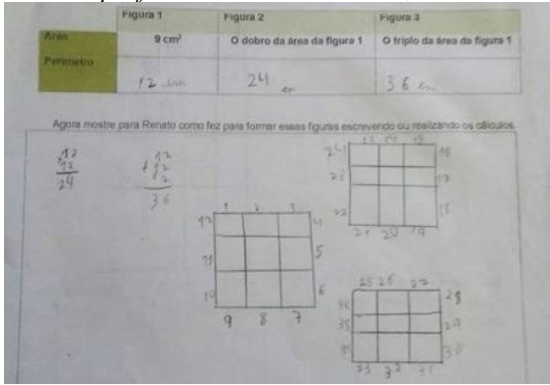


Figura 1. TAP1 (acervo da pesquisa)

Para resolução da TAP1, foi disponibilizado um tempo de trinta minutos. Na sequência, os professores retornaram ao grupo geral e compartilharam as discussões realizadas nos pequenos grupos.

As discussões realizadas, tanto nos pequenos grupos quanto no geral, foram gravadas e transcritas. Na sequência, os trechos de falas foram selecionados a partir dos momentos que ocorreram ações do formador 2 (Ferreira et al., 2023), segundo autor deste estudo. Para as análises, são considerados os trechos selecionados na discussão no grupo geral depois da resolução da TAP1 realizada em pequenos grupos.

Análises e discussões dos dados

O primeiro grupo compartilhou as discussões referentes à resolução da tarefa matemática que haviam ocorrido no pequeno grupo, pontuando que seria necessário encontrar o dobro da área, e realizar o cálculo da raiz quadrada deste valor para encontrar o perímetro do quadrado. A professora Serena relatou que a tarefa não deixou claro se teria que ser um quadrado, pois era uma tarefa aberta, podendo, assim, encontrar retângulos com tais características. Serena pontuou também que não estava claro o que se esperava quanto ao preenchimento dos espaços para as figuras 1, 2 e 3.

O formador questionou os participantes, logo os incentivou a pensarem em outras possibilidades de figuras:

[1.24] Formador: E quando a gente pensa nessa figura que vai ter uma certa área, no caso, dezoito centímetros quadrados, a gente também tem a possibilidade de ela ser um quadrado ou ter outro formato, vocês pensaram no retângulo, mas ocorreu para alguém que essa figura poderia ser um triângulo? Há um triângulo cuja área é dezoito centímetros quadrados? Alguém consegue descrever para mim um triângulo de área dezoito centímetros quadrados?

[1.25] Félix: Triângulo de base seis e altura seis dezoito né?

[1.26] Formador: Se a base do triângulo for seis e a altura seis, vamos imaginar esse triângulo como sendo um triângulo retângulo, um triângulo que tem um ângulo reto pra ficar mais fácil aqui para pensar. A área de um triângulo é a [medida da] base multiplicada pela [medida da altura] altura, seis vezes seis trinta e seis, dividido por dois é 18. Também atenderia o comando da questão. E nesse caso, o perímetro dele não seria imediato de determinar, porque a gente teria dois lados [catetos] e teria necessidade de calcular o terceiro, que é o lado que fica na frente do ângulo reto [hipotenusa]. Quando eu penso em um quadrado, eu não tenho dois números inteiros que multiplicados resultam em dezoito. Mas eu posso provocar uma discussão com o meu aluno a respeito da natureza desses números que estou procurando. Mas será que tem dois números que eu multiplico um pelo outro resultado dá dezoito?

Após questionar os participantes para que pensassem em uma possibilidade de construção de triângulos que correspondesse ao que foi pedido na tarefa, o formador esclareceu a necessidade de ampliação de conjecturas elaboradas pelos estudantes, que podem ser instigadas pelos professores. Outras figuras podem ser pensadas para resolver a tarefa, por mais que os valores das medidas não estejam contidas no conjunto dos números inteiros. Esse tipo de ação, realizada em sala de aula, possibilita aos estudantes que estendam seus raciocínios e utilizem outros métodos e hipóteses para resolver tarefas e desenvolver o RM. Nesse pressuposto, é destacado por Lannin et al. (2011) que o reconhecimento dos diferentes domínios de validade de uma determinada conjectura e a identificação da limitação dos domínios são processos importantes para fins de generalização, pois ajudam a compreender quando ela poderá ser

aplicada. É importante que o professor estimule o estudante a avaliar a possibilidade de estender uma generalização para outras situações, com intenção de verificar se o domínio apresenta algum tipo de limitação e, assim, validá-la ou então refutá-la.

O formador resumiu os tópicos da discussão a respeito da tarefa Matemática resolvida pela dupla de estudantes Bruno e Maria:

[1.27] Formador: as situações que eu levo para o meu aluno precisam favorecer a ele estabelecer hipóteses, estabelecer conjecturas, formular e resolver problemas utilizando diferentes conceitos. Então a ideia aqui foi que vocês tivessem um momento para se colocar enquanto estudantes e que vocês refletissem um pouco sobre os diferentes conceitos, que de alguma maneira vocês mobilizaram, para resolver o problema que foi proposto ou para formular outros a partir de interpretações que estiveram do enunciado. É esse tipo de dinâmica que, de alguma maneira, a gente quer que se faça presente nas aulas de matemática quando a gente pensa em uma intenção de desenvolver o chamado raciocínio matemático.

O formador esclareceu a importância de os professores refletirem sobre as tarefas aplicadas no contexto escolar, para que elas sejam motivadoras para o desenvolvimento do RM, e para que contribuam para gerar novos conhecimentos matemáticos para os estudantes.

O formador concluiu o primeiro encontro com algumas explicações de aspectos conceituais e teóricos do RM, apresentando os referenciais teóricos (Lannin et al., 2011) considerados para organização e planejamento do processo formativo, bem como as intenções de gerar OAP (Ribeiro & Ponte, 2020) a respeito do desenvolvimento do RM. A partir das análises dos trechos destacados, apresentamos na próxima seção uma discussão acerca das práticas e ações realizadas pelo formador com intenção de gerar OAP a respeito do RM.

Interpretação dos dados: resultados encontrados

Para Gil (2008), a interpretação dos dados é um processo que sucede as análises e que, em especial, na pesquisa qualitativa, é compreendido como um método que necessita de um olhar do pesquisador para além das leituras dos dados, que considere a fundamentação teórica apresentada. Sendo assim, com inspiração nas categorizações realizadas por Ferreira et al. (2023), apresentamos a Tabela 2, que contém as práticas e as ações realizadas pelos formadores durante as discussões com os participantes.

As práticas e ações do formador foram identificadas pelos autores a partir de estudos e pesquisas (Trevisan, Negrini, Falchi & Araman, 2023; Trevisan, Silva, Silva & Ribeiro, 2023; Trevisan et al., 2020) que apresentam interesse em vislumbrar ações que podem ser executadas em processos formativos e que procuram gerar OAP a respeito do desenvolvimento do RM.

Tabela 2

Classificação das práticas e ações do formador durante discussões coletivas

Práticas do formador	Ações do formador	Trecho (s)	Ocorrência em relação ao RM
Interpretar as interações com os professores e entre os professores	Esclarecer	[1.26]	O formador esclareceu que é preciso ampliar o pensamento do estudante

Desafiar os professores a avançarem em seus conhecimentos	Questionar	[1.24]	O formador desafiou os professores a estenderem seus pensamentos para outros domínios
Sistematizar aprendizagens	Resumir	[1.27]	O formador fez uma síntese das discussões e conhecimentos relacionando com os objetivos da formação

Como o objetivo deste estudo é identificar as OAP que se relacionam com o RM, evidenciamos na quarta coluna quais são as ocorrências que geraram as oportunidades de aprendizagens. Salienta-se que não foram todas as ações do formador ao longo da discussão que geraram ocorrências em relação ao RM.

Como esse estudo analisou o primeiro encontro do processo formativo, salientam-se as ações de questionar, esclarecer e resumir tópicos. A ação de questionar, realizada pelo formador, buscou estabelecer uma comunidade de aprendizagem a partir dos desafios e questionamentos lançados aos professores durante as discussões (Ferreira et al., 2023). Em especial, neste estudo essas ações foram um norte para os participantes ampliarem seus conhecimentos com outras possibilidades de resoluções das tarefas matemáticas, desafiando-os a anteciparem soluções a partir de diferentes representações. É possível notar no trecho [1.24] a ação de questionar, realizada pelo formador, para que os professores pensem que a tarefa pode se estender para diferentes domínios. Nesses trechos, o formador frisou a importância de buscar outras figuras para encontrar o dobro e triplo das áreas e dos perímetros. Nesse caso, fez-se necessário envolver a identificação da aplicação da generalização, reconhecendo o domínio relevante e considerando cuidadosamente o domínio para refinar essas declarações, a fim de que sejam verdadeiras para domínios mais amplos (Lannin et al., 2011).

As interações discursivas (Ribeiro & Ponte, 2020) realizadas pelos professores e formadores acentuam a importância do planejamento de tarefas que possibilitem o desenvolvimento desse processo.

Todavia, frisa-se que os resultados apresentados no primeiro encontro do processo formativo foram de grande relevância para a formação dos professores participantes. As ações realizadas pelo formador proporcionariam discussões e compartilhamento de conhecimentos, o que geraria OAP a partir do conhecimento docente a respeito do RM e do planejamento e elaboração de tarefas matemáticas que contribuam para o desenvolvimento do RM nos estudantes.

Considerações Finais

Mediante o objetivo de compreender como as ações do formador de professores que ensinam Matemática contribuem para gerar OAP no que diz respeito ao RM, destacam-se as ações, inspiradas na pesquisa de Ferreira et al. (2023): esclarecer, questionar e resumir tópicos. A partir dessas ações, foram geradas OAP que destacam a ampliação do conhecimento docente a respeito do RM e o planejamento e elaboração de tarefas matemáticas que contribuam para o desenvolvimento do RM nos estudantes.

As OAP incluíram a importância de conhecer diferentes formas de expressar o RM. No que se refere às tarefas matemáticas, o formador pontuou que elas precisam ser planejadas e elaboradas com a intenção de possibilitar que os estudantes construam diferentes hipóteses que reconheçam situações particulares e que estendam seus raciocínios para diferentes domínios.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com o apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq e da Fundação Araucária de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico do Estado do Paraná (FA).

Referências e bibliografia

- Aguiar, M.; Doná, E. G.; Jardim, V. B. F. & Ribeiro, A. J. (2021). Oportunidades de aprendizagem vivenciadas por professores de matemática: desvelando as ações e o papel do formador durante um processo formativo. *Acta Scientiae*, 23(4), 112-140.
- Araman, E. M. D. O.; Serrazina, M. D. L. & Ponte, J. P. (2019). “Eu perguntei se o cinco não tem metade”: ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. *Educação Matemática Pesquisa*, 21(2), 466-490.
- Ferreira, M. C. N.; Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2023). Práticas e Ações do Formador de Professores que Ensinam Matemática na Orquestração de Discussões Coletivas. *Bolema*, Rio Claro (SP). 37(76), 666-687. Disponível em: <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v37n76a14>. Acesso em: jan. 2025.
- Gil A. C. (2008). *Métodos e técnicas de pesquisa social*. 6. ed. Editora Atlas AS.
- Gross, G. F. S.; Martens, A. S.; Trevisan, A. L.; Araman, E. M. D. O. A. & Oliveira, P. B. (2023). Planejamento de uma tarefa matemática: ações do formador em um Estudo de Aula. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 12(29), 406-427.
- Gross, G. F. S.; Souza, A. V. P. & Trevisan, A. L. (2023). Raciocínio matemático em documentos e orientações curriculares: o que a literatura destaca?. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática (REnCiMa)*, 14, 1-23.
- Lannin, J.; Ellis, A. B. & Elliot, R. (2011). *Developing essential understanding of mathematical reasoning: Pre-K Grade 8*.
- Martignone, F., Ferretti, F. & Rodríguez-Muñiz, L. J. (2022). What aspects can characterize the specialised knowledge of a mathematics teacher educator?. *Educación Matemática*, v. 34, n. 3. Disponível em: <https://doi.org/10.24844/EM3403.11>. Acesso em: jan. 2025.
- Ponte, J. P. D.; Quaresma, M. & Mata-Pereira, J. (2020). Como desenvolver o raciocínio matemático na sala de aula?. *Educação e Matemática*, 156, 7-11.
- Ribeiro, A. J. & Ponte, J. P. (2020). Um modelo teórico para organizar e compreender as oportunidades de aprendizagem de professores para ensinar matemática. *Zetetike*, 28, 1-20. Disponível em: <https://doi.org/10.20396/zet.v28i0.8659072>. Acesso em: jan. 2025.
- Smith, M. K. (2001). *The Learning Organization*. The Encyclopedia of Informal Education.
- Trevisan, A. L. & Araman, E. M. D. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. *Bolema*, 35, 158-178.
- Trevisan, A. L.; Negrini, M. V.; Falchi, B. & Araman, E. M. O. (2023). Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. *Educação e Pesquisa*, 49, 1-21.
- Trevisan, A. L.; Ribeiro, A. J. & Ponte J. P. (2020). Professional Learning Opportunities Regarding the Concept of Function in a Practice-based Teacher Education Program. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 15, 1-14.
- Trevisan, A. L.; Silva, D. I. B.; Silva, J. M. P. & Ribeiro, A. J. (2023). Oportunizando Aprendizagens Profissionais a Professores: interações discursivas em um processo formativo. *Bolema*, 37, 688-708.



Saberes contruidos en formación de maestros en servicio en el área de Matemática. Estudio comparativo entre dos dispositivos: curso y territorio

Mariana **Corujo** Zubelso

Universidad CLAEH (Centro Latinoamericano de Economía Humana)

Uruguay

mcorujozubelso@gmail.com

Resumen

Esta investigación tiene como objetivo analizar los saberes producidos en relación a las prácticas de enseñanza de Matemática en la formación en servicio de maestros de escuelas de Tiempo Completo de Uruguay. Se estudian dos dispositivos de formación con modalidades distintas: Curso y Territorio. Aunque el país cuenta con una amplia trayectoria en formación en servicio, los pequeños cambios que los docentes identifican en sus prácticas cotidianas no habían sido considerados ni categorizados. El diseño metodológico es cualitativo, basado en la Teoría Fundamentada, y se utiliza la entrevista como técnica central para recolectar información. A través de la codificación, se construyen categorías que permiten analizar cómo los dispositivos impactan la construcción de saberes en la enseñanza de la Matemática, en el contexto de la Educación Inicial y Primaria. El enfoque se centra en identificar lo que los dispositivos habilitan o limitan en dicho proceso.

Palabras clave: Curso; Enseñanza de la Matemática; Dispositivo de formación; Saberes docentes; Territorio.

Definición y relevancia del problema

En el contexto educativo de Uruguay, la formación en servicio de los docentes es esencial para el desarrollo profesional continuo, con el objetivo de mejorar las prácticas pedagógicas. A lo largo de los años, varias iniciativas formativas han sido implementadas, como el Proyecto de Apoyo a la Mejora de la Calidad de la Educación Inicial y Primaria en Uruguay (PAEPU). Desde su creación en 1998, este programa ha buscado contribuir al desarrollo de los maestros de

Escuelas de Tiempo Completo (ETC), proporcionando formación en diversas áreas, incluida la enseñanza de la Matemática.

Sin embargo, aunque existen varios estudios sobre la efectividad de estos dispositivos, pocos se han centrado en los saberes producidos por los docentes a través de estas experiencias formativas, ni en cómo estos saberes perduran en las prácticas pedagógicas una vez finalizado el proceso formativo. Además, las investigaciones previas se han enfocado en evaluar los dispositivos de manera aislada y no en cómo cada uno de estos generan saberes docentes específicos.

Este vacío es lo que motiva la presente investigación, cuyo objetivo es analizar cómo los saberes producidos en la formación en servicio, particularmente en la enseñanza de la Matemática, se manifiestan en maestros que han participado en dos modalidades formativas diferentes: el curso masivo y la modalidad de formación en territorio. Este estudio pretende ofrecer una comprensión más profunda de los efectos de estas formaciones y proporcionar evidencia para la toma de decisiones en la mejora de las políticas educativas.

Este estudio tiene una gran relevancia tanto a nivel teórico como práctico. Desde el punto de vista teórico, la investigación aporta al conocimiento sobre la construcción de saberes docentes en el contexto de la formación en servicio. La mayoría de los estudios existentes han evaluado el impacto de los dispositivos de formación sin profundizar en los saberes que los docentes desarrollan durante su participación en estos programas. Al centrarse en los saberes producidos, este trabajo contribuye a una mejor comprensión de cómo la formación docente afecta las prácticas pedagógicas.

Desde el ámbito de las políticas educativas, este estudio es relevante porque puede proporcionar datos que ayuden a mejorar los programas de formación en servicio en Matemática, asegurando que los dispositivos utilizados sean más eficaces. Identificar los saberes producidos por los docentes en diferentes modalidades formativas permitirá crear estrategias más ajustadas a las necesidades del sistema educativo y las realidades del aula.

A nivel práctico, los resultados de la investigación ofrecerán información valiosa para identificar qué estrategias pedagógicas son más efectivas en cada modalidad formativa. Además, esta investigación busca visibilizar los saberes de los maestros, otorgándoles un papel central como sujetos activos en la construcción del conocimiento sobre la enseñanza de la Matemática.

Objetivos del trabajo

El objetivo general de esta investigación es analizar los saberes producidos en la formación en servicio de los maestros de Escuelas de Tiempo Completo en relación con sus prácticas de enseñanza de la Matemática, al comparar dos dispositivos formativos con modalidades distintas: el curso masivo y la formación en territorio.

Los objetivos específicos son:

- a- Identificar los saberes producidos por los maestros en ambos dispositivos formativos y su perdurabilidad una vez finalizado el proceso formativo.

- b- Describir esos saberes, explorando cómo los docentes perciben lo aprendido en cada modalidad de formación.
- c- Categorizar los saberes descritos, sistematizando los tipos de saberes que emergen de cada dispositivo formativo.
- d- Comparar los saberes producidos en ambos dispositivos, destacando las diferencias y similitudes entre el curso masivo y la formación en territorio.

Estado del arte

La investigación sobre la formación en servicio de los docentes ha ganado relevancia en los últimos años. Varios estudios nacionales e internacionales han abordado los efectos de los dispositivos formativos en los saberes docentes, pero pocos se han centrado en la comparación de diferentes modalidades formativas y en la permanencia de los saberes a largo plazo.

En Uruguay, investigaciones como las de Arámburu y otros (2014), dentro del marco del PAEPU, han evaluado el impacto de la formación en servicio en los maestros de Educación Primaria. Este estudio se centró en la valoración de los docentes sobre los cursos y las dificultades para consolidar cambios duraderos, pero no profundizó en los saberes construidos a partir de la formación. Por otro lado, el estudio de Dibot y otros (2019), realizado por el INEE, analizó la implementación del programa de formación permanente en las Escuelas de Tiempo Completo, destacando aspectos como el carácter territorial y situado de la formación. Sin embargo, tampoco abordó específicamente los saberes producidos durante la formación.

En América Latina, investigaciones como las de Alliaud y Suárez (2011) en Argentina, han documentado cómo los docentes producen y recrean saberes a partir de sus experiencias pedagógicas. Estos estudios resaltan la importancia de la experiencia docente en la construcción del saber pedagógico. En Chile, Mayorga (2013) también analizó los saberes construidos por los docentes a través de dispositivos formativos que promueven el intercambio de saberes. En su estudio, Mayorga destaca que la posibilidad de intercambio está condicionada por ciertos factores institucionales.

En el ámbito internacional, el estudio de Ferry (1997) sobre los efectos de la formación docente, realizado en el marco del proyecto COPIE, propone una tipología de tres modelos de formación: el modelo centrado en las adquisiciones (conocimiento disciplinar y saber hacer), el modelo centrado en el proceso (experiencias formadoras que incluyen aspectos sociales e intelectuales), y el modelo centrado en el análisis (integración de conocimiento y experiencia mediante el análisis de situaciones singulares). Este enfoque es útil para pensar cómo los diferentes dispositivos formativos pueden incidir en los saberes de los docentes.

En conjunto, estos estudios destacan la importancia de considerar tanto los saberes teóricos adquiridos en la formación como los saberes prácticos construidos a través de la experiencia docente. Esta investigación, al comparar dos modalidades formativas diferentes, busca llenar el vacío existente en la literatura sobre cómo los dispositivos formativos inciden en la construcción y permanencia de los saberes docentes, focalizados en la enseñanza de la Matemática.

Referencial teórico

En el campo de la docencia nos referimos a la formación permanente como un continuo que supera la formación inicial de grado. Formarse, como indica la palabra, implica tomar una forma, en este caso una forma de ser docente. En ese recorrido, no se trata exclusivamente de adquirir conceptos transmitidos por otros, sino que se trata de un proceso de construcción de identidad del oficio de profesor (Ferry, 2016). Es un trayecto singular que implica la transformación del sujeto en compañía de otros que funcionan como mediadores, incluido el formador (Souto, 2016).

Esas experiencias de formación producen saberes en el sentido de capacidades o componentes de identidad, saberes que no son “vertidos” por el formador hacia el docente en formación, sino que quien se forma, transforma a partir de lo que porta previamente (Barbier, 1999). Particularmente, la formación continua sucede cuando el docente ya se encuentra en el transcurso de su ejercicio profesional. En palabras de Ferry (1997) el docente transitoriamente “abandona la actividad profesional para volver a este espacio intermediario, transicional, que es el tiempo y el lugar de la formación.” (p.60)

La formación implica organizar experiencias, distando de la mera transmisión de conocimientos, y recae en las características de esas experiencias las huellas que la formación marque en los sujetos participantes (Barbier, 1999). Dicha organización de las propuestas formativas da lugar a distintos dispositivos de formación que implican siempre, la combinatoria de diversas instancias articuladas para que el cursante pueda formarse de manera integradora al pasar y participar en ellas. Esta idea de dispositivo de formación encuentra su sustento epistemológico y filosófico en la noción foucaultiana de dispositivo. El dispositivo de formación constituye un modo de organizar la experiencia formativa del sujeto. En palabras de Ferry (2016) ... “cuando se habla de dispositivo se habla de ciertas condiciones de la formación que son los soportes de la formación” (p. 55). El dispositivo resulta ser un medio necesario para la formación.

Este estudio se enfoca en la comparación de dos dispositivos de formación permanente. Por un lado, el curso refiere a una propuesta formativa masiva -en torno a 70 cursantes por dupla de formadores- que se desarrolla en ocho jornadas anuales los días sábados, con frecuencia mensual y tareas a distancia. Por otro lado, la formación en territorio implica la ida de los formadores a las escuelas, cada 15 días durante un semestre, en horario de clases para trabajar con los maestros en forma individual, duplas o tríos. Además de una reunión mensual con todo el colectivo docente en el espacio de coordinación institucional.

Los espacios de formación dan lugar a la construcción de saberes que en este estudio se consideran desde la perspectiva teórica desarrollada por Tardif cuyas tesis principales son: los docentes son sujetos de conocimiento y poseen saberes específicos de su oficio; su práctica, o sea, su trabajo cotidiano no es sólo un lugar de aplicación de saberes producidos por otros, sino también un espacio de producción, de transformación y de movilización de saberes que le son propios. (Tardif, 2004, p. 174)

En este contexto conceptual, se caracteriza como saber “únicamente a los pensamientos, ideas, juicios, discursos, argumentos que obedezcan a cierta exigencia de racionalidad” (Tardif, 2004, p.146). Esta exigencia implica que el docente pueda dar razones acerca de su acción o de su discurso. Prima la posibilidad de argumentación por sobre el contenido de verdad de las razones que exponga. Esos saberes se categorizan en: saberes de la formación profesional, saberes disciplinarios, saberes curriculares y saberes experienciales o prácticos. Estos últimos tienen un estatus diferente a los anteriores en tanto están formados por todos los demás “pero traducidos, ‘pulidos’ y sometidos a las certezas construidas en la práctica y en la experiencia” (2004, p. 41). Este estudio intenta recoger aquellos saberes experienciales que tienen su origen en los saberes de la formación profesional y disciplinarios en cuanto a la propuesta formativa de PAEPU para maestros de Escuelas de Tiempo Completo en el área de Matemática.

En cuanto a la enseñanza de la Matemática, los dispositivos de formación estudiados en esta investigación toman como referencia teórica la Didáctica francesa que considera aspectos epistemológicos, sociales y cognitivos de las diferentes interacciones entre el saber, los alumnos y el maestro, teniendo en cuenta el contexto particular del aula de clase. A estas ideas subyace una noción cultural e histórica de la disciplina:

Hacer matemáticas es un trabajo del pensamiento que construye los conceptos para resolver problemas, que plantea nuevos problemas a partir de conceptos así construidos, que rectifica los conceptos para resolver problemas nuevos, que generaliza y unifica poco a poco los conceptos en los universos matemáticos que se articulan entre ellos, se estructuran, se desestructuran y se reestructuran sin cesar. (Charlot, 1986)

Algunas de sus vertientes más destacadas son la Teoría de las Situaciones Didácticas, TSD (Brousseau, 1986; 1998); la Teoría de los Campos Conceptuales, TCC (Vergnaud, 1990; 1994) y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, TAD (Chevallard, 1992; 1999); Teoría de registros de representación semiótica (Duval, 1993, 1999).

Metodología

La metodología de este estudio se basa en un enfoque flexible, reflexivo y profundo que busca captar la experiencia vivida de los docentes, utilizando diversas técnicas cualitativas que se complementan entre sí para obtener una visión integral de los saberes construidos en la formación docente en Matemática.

El diseño metodológico propuesto se enmarca dentro de la Teoría Fundamentada, la cual permite una inmersión profunda en las experiencias sociales de los sujetos estudiados. Según Strauss y Corbin (1998), en este diseño la teoría emerge de los datos recogidos, sin partir de una hipótesis preconcebida. Este enfoque se caracteriza por su flexibilidad, ya que las categorías no deben definirse a priori, sino que surgen del análisis de los datos en el campo.

Se emplean diversas técnicas de recolección de datos, todas orientadas a captar las experiencias y saberes de los docentes. Las entrevistas semi-estructuradas son esenciales para explorar en profundidad los saberes de los docentes, permiten indagar sobre los saberes construidos a partir de las experiencias de formación, entendiendo los saberes como aquellos conocimientos racionalizables que los docentes pueden explicar (Tardif, 2004). Además, se

recurre al análisis de documentos escritos, como registros y planificaciones, lo que permite complementar los relatos orales de los participantes. Otra técnica clave es el uso del grupo focal que permite generar nuevos hallazgos a partir del intercambio de perspectivas y experiencias, lo que enriquece el análisis. La bitácora del investigador es también una herramienta fundamental para registrar el proceso de investigación, incluyendo avances, ideas y reflexiones que surgen durante el trabajo de campo (UAP, s/f).

La muestra del estudio está compuesta por ocho docentes de Escuelas de Tiempo Completo (ETC) que participaron en los cursos de formación en servicio de Matemática y en la formación en territorio. La selección de estos docentes se realizó mediante un muestreo cualitativo intencional, considerando criterios de relevancia y representatividad geográfica, con un equilibrio entre docentes de la capital y del interior del país.

La investigación se caracteriza por una alta implicancia de la investigadora en el proceso, ya que ella misma fue parte del equipo de formación en Matemática de PAEPU durante el período 2016-2018. Esta implicancia se reconoce como una influencia en la interpretación y análisis de los datos, lo que se gestiona a través de la movilidad del punto de vista y el uso de la triangulación de técnicas, datos e investigadores (Denzin y Lincoln, 2013). La triangulación permite obtener un enfoque holístico del fenómeno estudiado, lo que enriquece la interpretación de los datos y aporta mayor validez al estudio.

Principales resultados

Similitudes y Diferencias en los saberes producidos

Se identificaron categorías compartidas entre ambos dispositivos formativos, así como algunas particulares de cada uno. Las categorías compartidas incluyen saberes relacionados con aspectos conceptuales, intervenciones docentes (antes, durante y después del aula), y el análisis didáctico. Sin embargo, también se hallaron diferencias notables en la manera en que estas categorías se desarrollaron en cada dispositivo.

- a- Saberes Conceptuales: En ambos dispositivos, las maestras mencionaron conocimientos vinculados a contenidos matemáticos y a la teoría sobre la enseñanza de la Matemática. No obstante, la bibliografía y el marco teórico se abordaron de manera diferente. En el curso, la teoría se presentó como base para la intervención docente en el aula, mientras que en el territorio se utilizó como herramienta para abordar y resolver problemas específicos surgidos en las prácticas docentes.
- b- Intervenciones Docentes: En cuanto a las intervenciones docentes, se observó que, en el curso, las maestras se centraban más en las intervenciones previas y posteriores al aula, mientras que en el territorio se identificaron más intervenciones dentro del aula. Esto sugiere que el dispositivo territorio ofreció una mayor oportunidad para que las maestras experimentaran y reflexionaran sobre sus prácticas pedagógicas en un contexto más cercano y personalizado.
- c- Actividades Modélicas, Secuencias y Práctica Reflexiva: El curso se asoció con actividades modélicas, que permitían a las maestras observar y aprender de las experiencias de otros docentes. En contraste, el territorio facilitó la creación de secuencias

didácticas y una práctica reflexiva más arraigada, donde las maestras se enfocaron en analizar y mejorar sus propias prácticas pedagógicas, con un enfoque en la reflexión continua.

La Relación entre Teoría y Práctica

La relación entre la teoría y la práctica en ambos dispositivos fue fundamental, aunque el flujo de esta relación varió. En el curso, la teoría proporcionaba el marco para la intervención en el aula, mientras que, en el territorio, la teoría servía para dar respuesta a situaciones prácticas. Esta distinción subraya cómo los contextos de formación (curso vs. territorio) influyen la manera en que los maestros aplican el conocimiento en su práctica diaria.

Alcances y limitaciones de los dispositivos

El estudio también destaca que, aunque los dos dispositivos presentaron características valiosas, cada uno tenía limitaciones que influenciaron los saberes contruidos. En el curso, el tiempo y espacio para la formación eran óptimos, pero la relación masiva entre formadores y maestros limitaba la interacción personalizada. En el territorio, el espacio para la reflexión compartida fue valioso, pero las condiciones institucionales, a menudo adversas, dificultaban el aprovechamiento total de esta oportunidad formativa.

Continuidad y complementariedad entre los dispositivos

Una conclusión clave del estudio es la existencia de una continuidad entre los saberes contruidos en ambos dispositivos. En el grupo focal, las maestras coincidieron en que había una conexión entre los saberes del curso y del territorio, identificando un “antes y un después” en sus carreras docentes, donde cada dispositivo aportaba elementos complementarios. Mientras que el curso les ofreció herramientas teóricas y prácticas generales, el territorio les permitió profundizar y reflexionar sobre su aplicación en contextos reales.

El impacto de la formación en las carreras docentes

Las maestras participantes coincidieron en que su experiencia de formación representó un punto de inflexión en sus carreras profesionales. La formación en servicio en Matemática, tanto en el curso como en el territorio, les proporcionó una base sólida para su práctica docente y les permitió construir una identidad profesional más fuerte. Sin embargo, algunas maestras señalaron que las condiciones del territorio no siempre permitían aprovechar al máximo el potencial de la formación.

Conclusiones

El estudio concluye que los dispositivos de formación (curso y territorio) generan saberes distintos pero complementarios. Mientras que el curso favorece la adquisición de conocimientos generales y la reflexión teórica, el territorio se enfoca en la aplicación práctica y la reflexión sobre las experiencias docentes concretas. Ambos dispositivos tienen ventajas y limitaciones, y es importante considerar estos factores al diseñar programas de formación para maestros.

Además, se resalta la importancia de un enfoque de formación híbrido que combine lo mejor de ambos dispositivos, promoviendo espacios de reflexión continua y trabajando de manera cercana con los formadores. Este enfoque híbrido podría aprovechar tanto la teoría del curso como la práctica reflexiva del territorio, y ofrecer un espacio idóneo para el aprendizaje situado y la construcción de saberes profesionales.

Finalmente, el estudio sugiere que la formación en servicio tiene un impacto duradero en la carrera docente, sirviendo como base fundamental para el desarrollo profesional y la construcción de identidad del maestro. Sin embargo, los contextos institucionales y las condiciones de cada dispositivo de formación juegan un papel crucial en la efectividad de este proceso formativo.

Bibliografía

- Alliaud, A. y Suárez, D. (comps.). (2011). *El saber de la experiencia. Narrativa, investigación y formación docente*. Facultad de Filosofía y Letras, UBA/ CLACSO.
- Arámburu, G. et. al (2014) *Formación profesional y prácticas de enseñanza de la Matemática. Investigación sobre el impacto de acciones de Formación en Servicio en los maestros de Educación Primaria*. ANEP - CODICEN -CEIP
- Barbier, J (1999) *Prácticas de Formación. Evaluación y Análisis*. Novedades educativas.
- Brousseau, G. (1986). Fundamentos y métodos de la didáctica de las matemáticas. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7 (2): 33-115.
- Charlot, B. (marzo, 1986). *La epistemología implícita en las prácticas de enseñanza de las matemáticas*. Conferencia dictada en Cannes. Recuperado de:
<https://docs.google.com/file/d/0B2tNpJnvdpZJdERTV1otYTR4VjA/edit>
- Denzin, N. y Lincoln, Y. (comps.) (2013). *El campo de la investigación cualitativa*. Vol. III. Gedisa.
- Dibot, G. et. al (2019) *Estudio cualitativo de la formación permanente en escuelas de tiempo completo de educación primaria. Análisis de implementación del programa y valoración de los actores participantes. Informe de resultados*. INEE.
- Dibot, G. et. al (2019) *Observación de Aula (Objetivo de Desarrollo del Proyecto de Mejoramiento de la Calidad de la Educación Inicial y Primaria en Uruguay, Banco Mundial) en escuelas de tiempo completo de educación primaria. Segundo informe de resultados*. INEE.
- Duval, R. (1999) *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle.
- Ferry, G (1997). *El trayecto de la formación. los enseñantes entre la teoría y la práctica*. Paidós
- Ferry, G (2016) *Pedagogía de la formación. Novedades Educativas*. UBA
- Mayorga, L. (2013). *Saberes docentes y relaciones colaborativas entre el profesorado de algunas escuelas básicas de Santiago de Chile*.
- Strauss A. y Corbin J. (1998) *Bases de la investigación cualitativa. Técnicas y procedimientos para desarrollar la teoría fundamentada*. Ed. Universidad Antioquia.
- Souto, M (2016) La formación en las prácticas. Sentidos, tensiones, alternativas. *Praxis Educativa (Arg)*, vol. 25, núm. 1, 1-16, 2021 Universidad Nacional de La Pampa.
- Tardif, M. (2004) *Los saberes del docente y su desarrollo profesional*. Narcea.
- Vergnaud. G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Récherches en Didactique des Mathématiques*, 10(23), 133-170. Recuperado de
http://www.fundesuperior.org/Articulos/Pedagogia/Teoria_campos_conceptuales.pdf



Sobre el diseño de un espacio de formación posgradual de profesores de Matemáticas para el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente”

Luis Ángel **Bohórquez** Arenas
 Universidad Distrital Francisco José de Caldas
 Colombia
labohorqueza@udistrital.edu.co

Resumen

En la presente comunicación se presenta el diseño de un entorno de formación posgradual de profesores de Matemáticas. Este seminario tuvo como objetivo primordial el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” respecto a la planeación y diseño de actividades fundamentadas en decisiones teóricas en la socioepistemología, vinculadas a la proporcionalidad por parte de los profesores de Matemáticas. En principio se describirán las consideraciones teóricas que fundamentan cómo es a partir del diseño de espacios de aprendizaje de profesores se pueden desarrollar aspectos de la competencia docente “mirar profesionalmente”. Un resultado importante es precisamente la presentación del diseño y algunos aspectos sobre la implementación de este.

Palabras Clave: Competencia docente “mirar profesionalmente”; Desarrollo de la competencia; Diseño de espacio de aprendizaje; Formación de profesores en ejercicio; Situaciones de aprendizaje para profesores.

La competencia “mirar profesionalmente” y su desarrollo

La formación de profesores de Matemáticas (para esta comunicación nos centraremos en propuestas de desarrollo profesional) debe proporcionar conocimiento que permita a los profesores desarrollar su capacidad de reconocer e interpretar los elementos relevantes en una situación de enseñanza de las Matemáticas como paso previo a decidir qué hacer a continuación. Un reto importante, al que se enfrenta el formador de profesores es el de proporcionar los medios para que los futuros profesores y profesores en ejercicio puedan usar las ideas de la didáctica de

la Matemática necesarias para propiciar aprendizajes en sus estudiantes y generar nuevo conocimiento desde la propia práctica. Comprender el desarrollo de esta competencia docente y los contextos que pueden apoyarla es en estos momentos una agenda de investigación internacionalmente reconocida en el ámbito de la Educación Matemática (Cai et al., 2017).

Ivars et al. (2020) afirman que una enseñanza eficaz implica observar a los estudiantes, escuchar atentamente sus ideas y explicaciones, planificar los objetivos y utilizar la información para tomar decisiones de instrucción. Este hecho obliga a los profesores a desarrollar una mayor flexibilidad para “darse cuenta” o reconocer el pensamiento de los estudiantes mientras están enseñando (van Es & Sherin, 2002; van Es et al., 2008), a tomar conciencia de lo que ocurre en sus aulas y de cómo debe realizar la gestión del proceso enseñanza-aprendizaje (Bohórquez & D’Amore, 2018; Mason, 2002a, 2002b, 2011).

“Darse cuenta” es un movimiento o cambio de atención por parte del profesor (Mason, 2011). Esto implica, Mason (2011), que hay un aumento de la sensibilidad por parte del profesor a los detalles de las situaciones de aprendizaje, evitando juicios, contenido emocional y las generalidades. Según Ivars et al. (2020), estos procesos de atención de micro nivel establecidos por Mason (2011) pueden verse en las tres habilidades interrelacionadas que mencionan Jacobs et al. (2010) en la caracterización de la competencia docente “mirar profesionalmente”. Las tres habilidades a las que se refieren Jacobs et al. (2010) son: identificar los elementos matemáticos relevantes en las estrategias de los estudiantes; interpretarlos y decidir qué hacer en la enseñanza con base a las comprensiones de los estudiantes. La competencia docente “mirar profesionalmente” y su relación con la construcción del pensamiento matemático de los niños ha demostrado ser un terreno fértil y vigente para los investigadores de la Educación Matemática.

Teniendo en cuenta lo expuesto por Mason, (2002, 2011) y las habilidades expresadas por Jacobs et al. (2010) es posible inferir que, en las acciones del profesor en el aula de clase, la identificación se encuentra en un primer nivel de reconocimiento de aquellos asuntos de interés que acontecen en las situaciones de enseñanza aprendizaje. Sin embargo, cuando los asuntos considerados como evidencias de la práctica se vinculan con ideas y principios teóricos más generales el profesor logra una interpretación real de lo acontecido (van Es & Sherin, 2002). Asimismo, la interpretación de lo identificado permite al profesor la toma de decisiones fundamentadas sobre la instrucción. Este asunto, no trivial, permite el paso de la evaluación de lo que ocurre en los procesos de enseñanza-aprendizaje a la valoración reflexiva del hacer del profesor.

Amador, Gillespie, et al. (2024); Amador, Glassmeyer, et al. (2024); van Es y Sherin (2002) y Fernández et al. (2024) han presentado como resultados de sus investigaciones que es posible desarrollar la competencia docente “mirar profesionalmente” en profesores de Matemáticas, siempre y cuando sean capaces de progresar en las descripciones generales de las situaciones de aula y proporcionar interpretaciones basadas en evidencias. Una de las formas de promover esta competencia es diseñar entornos de aprendizaje y las tareas profesionales que forman parte de estos. Estos entornos son implementados en programas de formación de profesores de Matemáticas, los cuales deben permitir el análisis del aprendizaje de los profesores y el desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente. El ciclo de trabajo permitirá modificar tanto las tareas propuestas como el entorno de aprendizaje (Fernández et al., 2023). En

palabras de Llinares y Fernández, (2021) y Fernández et al., (2023) son los ciclos de investigación de un experimento de enseñanza.

Esta comunicación se presenta el diseño del espacio de formación posgradual de profesores de Matemáticas que se diseñó pretendiendo responder a las dos preguntas de investigación que se presentan a continuación:

1. ¿Cómo los profesores hacen uso de elementos teóricos (la socioepistemología) para planificar clases sobre la proporcionalidad?
2. ¿Cómo se modifica la planeación de situaciones de aprendizaje a partir de la práctica?

Diseño del entorno de aprendizaje para los profesores de Matemáticas

Este entorno de aprendizaje se diseñó para un grupo de profesores de Matemáticas en ejercicio que cursaban segundo semestre de una maestría en educación en una universidad oficial de la ciudad de Bogotá (Colombia). El objetivo curricular de este entorno de aprendizaje era que los docentes reconocieran la importancia de tener un conocimiento didáctico y matemático para planear situaciones de aprendizaje en sus estudiantes sobre la proporcionalidad. El conocimiento didáctico en Educación Matemática que se esperaba que los profesores aprendieran para usarlo en sus planeaciones era la socioepistemología (Balda, 2022; Cantoral et al., 2014).

Basándose en el objetivo curricular se diseñaron ocho sesiones de clase, cada una con propósitos y actividades específicas las tareas propuestas en cada sesión (figura 1). De igual manera, se construyeron instrumentos que les permitieran a los profesores profundizar sobre los aspectos vinculados a la socioepistemología y a la proporcionalidad. Asimismo, los profesores tienen un repositorio en línea en donde pueden encontrar tanto los instrumentos, herramientas y literatura complementaria que le permite profundizar en los tópicos presentados en cada uno de los instrumentos. Este tipo de diseño tiene como fundamento la idea de que aprender a enseñar es un proceso en el que los profesores dotan de significado y usan instrumentos para realizar las actividades que definen la práctica del profesor, esto es, para resolver problemas profesionales (Bohórquez et al., 2011; Llinares, 2013a, 2013b).

Desde la perspectiva de aprendizaje anterior, en el diseño de este espacio se reconoció que el conocimiento es inseparable de los contextos y las actividades en las que se desarrolla, por tanto, este espacio de formación posgradual de profesores de Matemáticas se estructuró de tal forma que las actividades incorporaran la idea de que se aprende a partir de la participación, la reflexión y la colexión (Balda & Bohórquez, En prensa), como un acto intencional de mirarse por medio de su hacer en el desarrollo de las prácticas de enseñanza.

Este espacio de formación asumió la participación de los profesores por medio de varias actividades o situaciones. La primera situación, propuesta para la sesión 1, presenta una situación en la que deben planear una clase para enseñar proporcionalidad. En este caso tienen la posibilidad de elegir la población, el grado (o curso en donde se desarrollará) y el tipo de modelo de planeación que pondrán en juego. La segunda gran actividad ocurre en la sesión 4 en donde los profesores efectuaran el diseño de una propuesta fundamentada en los principios de la Socioepistemología tomando como base el trabajo desarrollado en dos sesiones previas (Sesión 2 y 3). Esto es, de la sesión 2 la exposición de una experta socioepistemología donde presenta los

fundamentos de la teoría y de la sesión 3 la discusión de estos principios teniendo en cuenta instrumentos (conceptuales) entregados a cada estudiante. La presentación de estos diseños se hará en la sesión 5.

El momento vinculado con la práctica de los profesores en la formación posgradual es la prueba piloto en donde implementaran sus diseños a estudiantes de educación básica o media. La exposición de los resultados obtenidos con los grupos de estudiantes que eligieron se efectuara en la sesión 6 y 7. En estas exposiciones los profesores presentaran los pro y contras de sus diseños. Es decir, hablaran sobre los aspectos (tipos de preguntas, instrucciones, actividades, tareas, etc.) que consideran exitosos y aquellos que no lo fueron. Estos análisis se realizarán teniendo en cuenta los instrumentos que han recibido en cada una de las sesiones y establecerán consideraciones sobre los posibles cambios que harán a su propuesta. En otras palabras, tomarán de decisiones fundamentadas en la observación profesional para el rediseño de la propuesta. El diseño del seminario se aprecia en la figura 1.

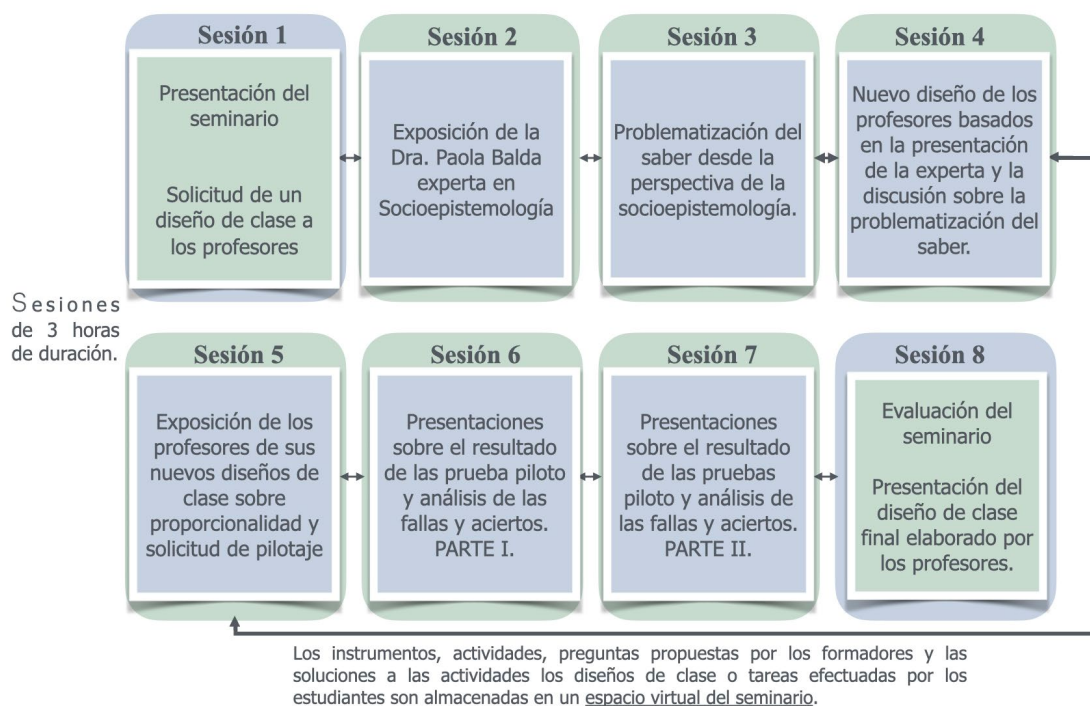


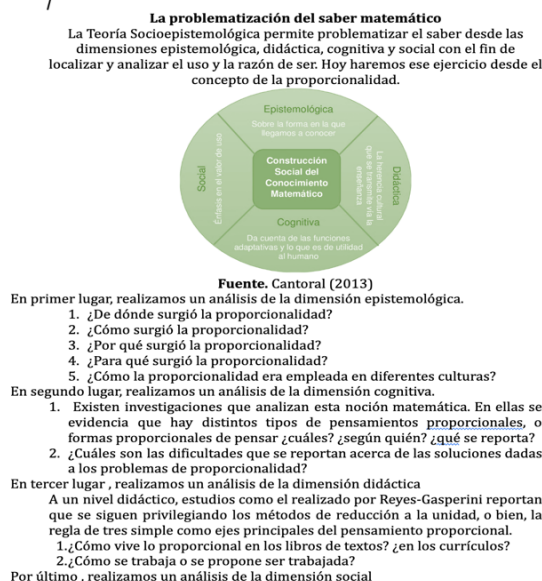
Figura 1. Estructura del espacio de formación diseñado

Fuente: propia

Ejemplo de instrumentos diseñados para entregar a los profesores del espacio de formación

En la sesión 2 del espacio de formación, como se mencionó anteriormente, los profesores escucharan la exposición de la Dra. Paola Balda sobre los fundamentos de la Socioepistemología. En esta misma sesión reciben dos instrumentos. Uno de ellos se centraba la proporcionalidad, particularmente sobre aspectos asociados a la epistemología, a su uso y algunos aspectos epistemológicos. El segundo instrumento (figura 2) estaba centrado en explicar lo que se entiende por problematicación del saber basado en el artículos de Cantoral et al. (2014) y Balda (2022). Estos dos artículos también se dejaron en el repositorio por si los estudiantes del

espacio de formación deseaban profundizar sobre los aspectos presentados en el instrumento.



Bajo la mirada socioepistemológica, con base en su dimensión social, se concibe que los conocimientos se dotan de significados a través de su uso (funcionamiento y forma, para qué y cómo). En este caso, la noción de proporcionalidad se resignificará en cuanto el individuo pueda reconocer a ésta como la relación que existe entre magnitudes cuya peculiaridad es que su razón se mantiene constante (reconocimiento de su naturaleza). Para ello, es necesario recurrir a los orígenes de la construcción de este conocimiento emergente de la sociedad misma como respuesta a la incommensurabilidad, como así también, a los distintos marcos de referencia en los cuales puede encontrarse (leyes físicas, relaciones entre magnitudes de las áreas de las figuras geométricas, compra-venta en la vida cotidiana, entre muchas otras) para generar situaciones de aprendizaje que privilegien los distintos tipos de razonamientos y pensamientos proporcionales que en este saber matemático subyacen.

1. ¿Cuáles son aquellos invariantes sociales que surgen en distintos marcos de referencia donde la proporcionalidad vive a través del uso?
2. ¿Para qué y cómo vive la proporcionalidad en diversos escenarios?
3. ¿Qué asuntos sobre el surgimiento de lo proporcional prevalecen en los distintos marcos de referencia?
4. ¿Cuáles son las prácticas que acompañan la construcción del objeto?

Referencias

Cantoral, R. (2013). *Teoría Socioepistemológica de la Matemática Educativa: Vol. I* (Gedisa, Ed.).

Figura 2. Instrumento entregado a los profesores para orientar la problematización el saber.

Fuente: tomado de Balda & Bohórquez (En prensa)

Resultados

En la sesión 1, como se mencionó anteriormente, los profesores diseñaron una situación que permitiera a sus estudiantes el aprendizaje de la proporcionalidad. En la figura 3, se observa la descripción y preguntas que dos profesores L y T (tomando las iniciales de sus nombres) del grupo presentaron al finalizar la sesión.

- Inicio:**
1. Se inicia la clase preguntando a los estudiantes: ¿Qué significa que dos cosas son proporcionales?
 2. Se presentan ejemplos de situaciones de la vida diaria en las que se observa la proporcionalidad, como:
 - o Si compro 2 manzanas por \$1.000, ¿cuánto costarán 4 manzanas?
 - o Si un carro recorre 100 kilómetros en 1 hora, ¿cuántos kilómetros recorrerá en 2 horas?
 3. Se les pide a los estudiantes que identifiquen la variable dependiente y la variable independiente en cada ejemplo.
- Desarrollo:**
1. Se divide la clase en grupos pequeños y se le entrega a cada grupo una actividad diferente para resolver.
 2. Las actividades pueden ser:
 - o Completar una tabla de proporcionalidad.
 - o Graficar una situación de proporcionalidad.
 - o Resolver un problema de proporcionalidad.
 3. Los grupos trabajan en equipo para resolver las actividades y luego presentan sus resultados al resto de la clase.
- Conclusión:**
1. Se realiza una lluvia de ideas para resumir los conceptos aprendidos sobre la proporcionalidad.
 2. Se les pregunta a los estudiantes: ¿En qué otras situaciones de la vida diaria podemos encontrar la proporcionalidad?
 3. Se asigna una tarea para realizar en casa, como:
 - o Buscar ejemplos de proporcionalidad en periódicos o revistas.
 - o Inventar un problema de proporcionalidad y resolverlo.

Figura 3. Diseño inicial presentado por los profesores L y T.

Fuente: Tomado de Bohórquez y Balda (2024).

En este diseño inicial los profesores L y T se aprecia una amplia influencia de lo

establecido en el discurso Matemático Escolar habitual. Se aprecia que algunas actividades son muy semejantes a los diseños que aparecen en algunos textos escolares. Las preguntas propuestas no introducen al estudiante al desarrollo del pensamiento proporcional y posiblemente no permitan el tránsito por diversas formas de pensamiento.

En el diseño presentado por los profesores L y T en la sesión 5. Los profesores hacen un análisis de las dimensiones del saber durante el desarrollo del curso. Presentan una reflexión sobre su práctica usual en contraste con los aspectos teóricos que se evidencian en el instrumento que les fue entregado sobre modelos del pensamiento proporcional (Reyes-Gasperini, 2016). Además, estudiaron aspectos acerca del origen de la noción de proporción. De igual manera, lograron establecer cómo la noción de proporción estaba presente en ciertas culturas que, aunque diferían, de lo propuesto por Euclides coincidían con la idea de reconocer a la comparación como emergente social permanente en todos los contextos, esto con relación a la dimensión epistemológica (Bohórquez & Balda, 2024).

Ahora bien, sobre la dimensión social propuesta en la socioepistemología los profesores tomaron como base no sólo la exposición de la experta sino profundizaron con un artículo del repositorio en donde Balda (2022) presenta una propuesta de trabajo. Esto les permitió construir una idea de planeación de una manera más amplia por medio de un cambio de relación con el saber, lo cual se observó en la sesión 6 en donde los profesores discutían sobre sus diseños iniciales y lo que hacían hasta ese momento. En síntesis, coincidiendo con autores como Amador, Gillespie, et al. (2024); Amador, Glassmeyer, et al. (2024); van Es y Sherin (2002) y Fernández et al. (2024), el diseño de espacios de aprendizaje para profesores permite desarrollar aspectos de la competencia docente “mirar profesionalmente”.

Referencias Bibliográficas

- Amador, J. M., Gillespie, R., Choppin, J., & Carson, C. D. (2024). Characteristics of mathematics coaches' suggestions to teachers. *Mathematical Thinking and Learning*.
<https://doi.org/10.1080/10986065.2023.2300862>
- Amador, J. M., Glassmeyer, D., & Brakonietcki, A. (2024). Teachers' noticing of proportional reasoning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, January. <https://doi.org/10.1007/s10857-024-09625-7>
- Balda, P. (2022). Estructura para el diseño de situaciones de aprendizaje desde un enfoque socioepistemológico. *Investigación e Innovación En Matemática Educativa*, 7, 1–24. <https://doi.org/10.46618/iime.148>
- Balda, P., & Bohórquez, L. A. (En prensa). Propuesta de investigación basada en diseño en un curso de formación postgradual con profesores de matemáticas. En F. Wanderer, F. Longo, & A. Castrillón-Yepes (Eds.), *Entre saberes y fronteras: Docencia e inquietudes contemporáneas*. Universidade Federal do Rio Grande do Sul.
- Bohórquez, L. A., & Balda, P. (2024). Cambio de concepciones de un grupo de profesores de matemáticas sobre el diseño de situaciones de aprendizaje de la proporcionalidad en un curso de formación continuada. *Revista Internacional del Magisterio: Educación Matemática*, 122, 22–25.
- Bohórquez, L. A., Bonilla, M., Narváez, D., & Romero, J. (2011). Sobre el uso de instrumentos conceptuales y técnicos en la formación de profesores. En Á. Ruiz (Ed.), *XIII CIAEM-IACME* (pp. 435–446).
- Bohórquez, L. A., & D'Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, 13, 85–103. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.228>
- Bohórquez, L., & Balda, P. (2024). Cambio de concepciones de un grupo de profesores de matemáticas sobre el diseño de situaciones de aprendizaje de la proporcionalidad en un curso de formación continuada. *Magisterio, educación y pedagogía*, 122, 20–25.

- Bohórquez, L., & D’Amore, B. (2018). Factores que apoyan o limitan los cambios de concepciones de los estudiantes para profesor de matemática sobre la gestión del proceso de enseñanza-aprendizaje. *Avances de Investigación en Educación Matemática.*, 13, 85–103. <https://doi.org/10.35763/aiem.v0i13.228>
- Cai, J., Middleton, J. A., Schack, E. O., & Fisher, M. H. (2017). *Teacher Noticing: Bridging and Broadening Perspectives, Contexts, and Frameworks* (E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm, Eds.). Springer International Publishing. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-46753-5>
- Cantoral, R., Reyes-Gasperini, D., & Montiel, G. (2014). Socioepistemología, Matemáticas y Realidad. *Revista Latinoamericana de Etnomatemática*, 7, 91–116.
- Es, E. V., & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers’ Interpretations of Classroom Interactions. *Article in Journal of Information Technology*. <https://www.researchgate.net/publication/252692170>
- Es, E. A. van, Sherin, M. G., Mason, J., Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2008). Mathematics teachers’ “learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 244–276. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.005>
- Fernández, C., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2024). Prospective secondary teachers’ noticing of students’ thinking about the limit concept: Pathways of development. *ZDM – Mathematics Education*, 0123456789. <https://doi.org/10.1007/s11858-024-01573-z>
- Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A Learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers’ Noticing of Students’ Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(3), 529–548. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09973-4>
- Jacobs, V. R., Lamb, L. L. C., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children’s mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 41(2), 169–202. <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.41.2.0169>
- Llinares, S. (2013a). El desarrollo de la competencia docente “mirar profesionalmente” la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. *Educar em Revista*, 50, 117–133. <https://doi.org/10.1590/S0104-40602013000400009>
- Llinares, S. (2013b). Professional Noticing: A Component of the Mathematics Teacher’s Professional Practice. *Sisyphus Journal of education*, 1(3), 76–93.
- Mason, J. (2002a). Researching your own practice. *The discipline of noticing*.
- Mason, J. (2002b). *Researching Your Own Practice: The Discipline of Noticing* (1a ed.). Routledge Falmer.
- Mason, J. (2011). Noticing: Roots and branches. En M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.), *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers’ eyes* (pp. 35–50). Routledge.
- Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: Una alternativa para la transformación y la mejora educativa. [Tesis de Doctorado]*. Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN. [PhD Thesis].
- van Es, E. A., Sherin, M. G., Mason, J., Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2008). Mathematics teachers’ “learning to notice” in the context of a video club. *Teaching and Teacher Education*, 24(2), 244–276. <https://doi.org/10.1016/j.tate.2006.11.005>
- van Es, E., & Sherin, M. (2002). Learning to Notice: Scaffolding New Teachers’ Interpretations of Classroom Interactions. *Article in Journal of Information Technology*. <https://www.researchgate.net/publication/252692170>



Uma proposta de jogo digital de adição no *Scratch* para crianças com Transtorno do Espectro Autista atendidas em Sala de Recursos

Inácio Antônio **Athayde-Oliveira**
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
Brasil

inacio.athayde@edu.se.df.gov.br

Kamila Alves de **Morais**
Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal
Brasil

kamilaalvez@gmail.com

Rui **Seimetz**
Universidade de Brasília
Brasil

rseimetz@unb.br

Resumo

Neste trabalho apresentamos uma pesquisa sobre como podemos utilizar a plataforma *Scratch* no ensino da operação matemática da adição, para crianças com Transtorno do Espectro Autista (TEA). A relação entre jogos e educação tem ganhado destaque, especialmente pelo potencial de engajamento e de incentivo que proporcionam aos educandos. A pesquisa foi aplicada em ambiente escolar, individualmente, para atender necessidades específicas identificadas anteriormente de estudante com TEA. Acredita-se que o uso dessa ferramenta nas aulas de Matemática aumente a atenção e o interesse dos educandos autistas. O processo foi conduzido por meio da aplicação de um jogo educativo, conforme a peculiaridade de cada educando, tendo como finalidade comprovar novos caminhos e recursos motivacionais para alcançar melhores resultados na aprendizagem.

Palavras-chaves: Adição no Scratch; Jogo Digital; Sala de Recursos; Scratch; Transtorno do Espectro Autista (TEA).

Introdução

Para este trabalho desenvolveu-se uma pesquisa sobre como podemos utilizar a aplicação de um jogo digital da plataforma *Scratch* como ferramenta de ensino para crianças com Transtorno do Espectro Autista (TEA).

A pesquisa foi aplicada na Escola Classe 17 de Taguatinga. Essas crianças, além de enfrentarem dificuldades em habilidades sociais, muitas vezes encontram barreiras adicionais no aprendizado de conceitos matemáticos, como a adição. Acredita-se que o uso dessa ferramenta nas aulas de Matemática aumente a atenção e o interesse dos alunos, valorizando o processo de ensino e aprendizagem dos aprendizes autistas.

As Salas de Recursos no cenário da Educação Inclusiva

No Distrito Federal, as salas de recursos são implementadas de acordo com as diretrizes nacionais. Porém, diferentemente de outros estados, elas são estruturadas da seguinte forma: Salas de Recursos Generalistas, Sala de Recursos Específica de Estudante Surdos/com Deficiência Auditiva, Sala de Recursos Específica de Estudante Cegos/com Deficiência Visual, Sala de Recursos Específica de Estudante com Altas Habilidades/Superdotação e Sala de Recursos Generalista Bilíngue.

Salas de Recursos Multifuncional

No contexto educacional brasileiro, o Programa de Implantação de Salas de Recursos Multifuncionais, instituído pelo MEC/SEESP por meio da Portaria Ministerial nº 13/2007, é fundamental dentro do Plano de Desenvolvimento da Educação (PDE). Este programa fornece apoio técnico e financeiro para assegurar o acesso ao ensino regular e a oferta do Atendimento Educacional Especializado (AEE) para alunos com deficiência, Transtornos Espectro do Autismo (TEA) e/ou altas habilidades/superdotação.

O Decreto nº 6.949/2009 promulga que pessoas com deficiência tenham acesso a um sistema educacional inclusivo em todos os níveis, bem como tenham medidas necessárias para garantir que as circunstâncias sejam favoráveis ao seu sucesso e participação, para que possam ter acesso, em igualdade de condições ao sistema educacional.

As Salas de Recursos Multifuncionais são espaços com materiais e tecnologias que facilitam o acesso ao currículo e a participação efetiva desses alunos no ambiente escolar. Nesse local existe o Atendimento Educacional Especializado (AEE), sendo um serviço educacional que complementa e/ou suplementa a formação dos estudantes público-alvo da educação especial, proporcionando-lhes os recursos e estratégias pedagógicas necessárias para seu desenvolvimento acadêmico e social.

Em nossas atividades e práticas de sala de aulas, salientamos a importância dos professores das Salas de Recursos no suporte à inclusão nas escolas. Entretanto, para isso, os professores devem adequar as necessidades do educando com deficiência, e que busquem novos caminhos

para oferecer recursos e serviços adequados à necessidade de cada um. Essa atuação torna-se importante para inclusão dos estudantes público-alvo da educação especial no ambiente escolar.

As diretrizes operacionais da educação especial para AEE na educação básica, estabelecidas pelo Decreto nº 6.571/2008, apontam para a importância da funcionalidade e aplicabilidade dos recursos pedagógicos e de acessibilidade na sala de aula comum do ensino regular. Elas enfatizam a necessidade de:

estabelecer articulação com os professores da sala de aula comum, visando à disponibilização dos serviços, dos recursos pedagógicos e de acessibilidade e das estratégias que promovem a participação dos alunos nas atividades escolares (Decreto nº 6.571, 2008, Art. 13 VIII).

Nesse aspecto, o trabalho colaborativo entre o professor da sala de recursos e o professor das salas comuns é fundamental tornar um ambiente escolar acessível para os estudantes com deficiência. Essa ação em conjunta podem definir estratégias pedagógicas que facilitem o acesso dos estudantes com Transtornos do Espectro Autista (TEA), por exemplo, atividades lúdicas e práticas pedagógicas inclusivas que respeitem a individualidade desses estudantes. Vale salientar que essa parceria ajuda a mediar a compreensão dos conteúdos e a promover o desenvolvimento das habilidades dos alunos em questão, tornando a aprendizagem mais eficaz e significativa.

Assim, é crucial que todos os envolvidos no processo educacional estejam comprometidos com práticas pedagógicas que assegurem todos os estudantes as mesmas oportunidades de aprendizado. As atividades lúdicas em sala de aula servem como ferramenta para auxiliar compreensão dos conteúdos. Segundo (Silva e Silva e Seimetz, 2019, p.125) as "atividades práticas pedagógicas inclusivas ajudam a melhor desenvolvimento no processo de ensino aprendizagem".

A colaboração entre professores das Salas de Recursos Multifuncionais (SRM) e das salas comuns é fundamental. As autoras (Malheiro e Mendes, 2017, p. 31) ressaltam a necessidade de ressignificar conteúdos e ensinar novos conceitos, destacando que, muitas vezes, “durante os atendimentos as professoras de educação especial priorizam o apoio emocional e psicológico, detrimento do suporte pedagógico de que os alunos necessitam frequentar o ensino comum”.

Malheiro e Mendes (2017) enfatizam a importância de uma implementação eficaz do AEE nas SRM, com a avaliação contínua dos alunos atendidos e o acompanhamento do seu desenvolvimento escolar. Elas refletem sobre a personalização do serviço de AEE, essencial para atender às diversas necessidades dos alunos, tornando a educação inclusiva verdadeiramente eficaz e significativa.

Sala de Recursos Generalista e Especificas do Distrito Federal

A Sala de Recursos faz parte de uma proposta voltada para a inclusão escolar, buscando condições de acessibilidade aos estudantes para que permaneçam no processo de ensino e de aprendizagem. A implementação dessas diferentes modalidades de salas de recursos no Distrito Federal representa um compromisso com a educação inclusiva. A legislação vigente fornece um suporte robusto para a criação de ambientes educacionais que promovam a equidade e o respeito à diversidade. Entretanto, vale pontuar que é fundamental que a Secretaria de Educação do

Distrito Federal investiu em capacitação de profissionais e na melhoria das infraestruturas para garantir o sucesso do AEE.

O atendimento pedagógico é dividido e obedece a dois modelos básicos: salas de recursos generalistas e específicas, cada uma voltada para as necessidades dos estudantes, a saber: a sala de Recursos Generalista aborda os estudantes com Deficiência Física, Deficiência Múltipla, Deficiência Intelectual e Transtorno do Espectro Autista em Classe Comum Inclusiva e Classe de Integração Inversa; a sala de Recursos Generalista Bilíngue desenvolve Libras e Língua Portuguesa com Atendimento Educacional Especializado aos estudantes que têm deficiências associadas à Surdez/Deficiência Auditiva em Escola própria de estudantes Surdos e a sala de Recursos Específica é destinada para os estudantes com Deficiência Visual, Deficiência Auditiva, Surdocegueira ou comportamento de Altas Habilidades/Superdotação.

Salienta-se que a Sala de Recursos Generalista é fundamental para os alunos com Transtorno do Espectro Autista (TEA), especialmente no desenvolvimento do raciocínio lógico. Este espaço oferece um ambiente estruturado e adaptado, permitindo que os educandos com TEA possam se engajar de maneira mais eficaz nas atividades educativas. O acesso a materiais e estratégias pedagógicas específicas contribui significativamente para o desenvolvimento das habilidades cognitivas e sociais desses estudantes, promovendo sua autonomia e capacidade de resolução de problemas.

Metodologia

O trabalho em questão trata de uma pesquisa qualitativa. Segundo Godoy (1995, p.62), essa abordagem valoriza o contato direto e prolongado do pesquisador com o ambiente e a situação que está sendo estudada. Neste contexto, este trabalho busca desenvolver uma aplicação de jogo digital utilizando a plataforma *Scratch*, observar a viabilidade do uso dessa ferramenta para o ensino de adição para estudante com TEA.

A escolha dessa ferramenta se deve à sua popularidade e facilidade de uso, o que a torna ideal para o desenvolvimento de aplicações educacionais. O foco do jogo é ensinar o conceito de adição para educandos com TEA, sendo projetado para ser interativo e envolver os educandos em atividade que reforcem o aprendizado da Matemática de forma lúdica.

A pesquisa foi realizada na Escola Classe 17 de Taguatinga, localizada na região central de Taguatinga, sendo que os estudantes são residentes em localidades próximas da região como: Vicente Pires, Taguatinga Norte, Águas Claras. No relato da professora do AEE, a escola possui condições financeiras favoráveis e os estudantes têm acesso a suporte psicológico e psicopedagógico. Ela destaca a importância de um sistema integrado de apoio ao aluno.

A pesquisa foi aplicada a cinco crianças com TEA, matriculadas na Escola referida, em turma regular, na faixa etária de 7 a 10 anos, com atendimento complementar na sala de recursos, em turno contrário de matrícula. Neste trabalho apresentamos dados relacionados a criança 1 e relatamos características de todas que participaram das atividades.

A criança 1 denominada C1 tem 10 anos, diagnosticada com Transtorno do Espectro Autista (TEA) de nível de suporte 02, possui acompanhamento com Psicólogo e psicopedagógico fora do ambiente escolar, apresentou um comportamento de resistência ao ser convidado a participar de atividades na sala de recursos.

A criança C2 tem 9 anos, que possui Síndrome de Down e TEA suporte 1, o estudante mencionado realiza acompanhamento com fonoaudiólogo e psicólogo fora do ambiente escolar. Esses profissionais desempenham um papel crucial no desenvolvimento de habilidades de comunicação e no manejo de questões emocionais e comportamentais.

A Criança 3 - C3 tem 9 anos de idade, possui Transtorno do Espectro Autista (TEA) de suporte nível 01, faz uso do medicamento Aripiprazol 10 ml, possui acompanhamento com neurologista, psicopedagogia, fonoaudiólogo fora do ambiente escolar. Durante uma atividade escolar, foi necessário adaptar o ambiente de aprendizagem para atender melhor suas necessidades específicas.

A Criança 4 – C4 tem 7 anos, possui o diagnosticado com Transtorno do Espectro Autista (TEA) suporte de nível 01, utiliza medicamento Risperidona 1 ml, acompanhamento com Neurologista e Psicomotor. Durante a atividade em questão, o estudante demonstrou um desempenho positivo, produtivo e facilidade em correlacionar as instruções do jogo.

A Criança 5 – C5, 9 anos, do 4º ano, diagnosticado com Transtorno do Espectro Autista (TEA) suporte 02, utiliza 6 gotas de *canabidiol* e realiza acompanhamento Fonoaudiólogo e Psicólogo. Durante a atividade, o educando demonstrou um nível exemplar de concentração, essa habilidade foi fundamental para facilitar a sua assertividade no jogo proposto.

Este trabalho foi desenvolvido em seis etapas: 1ª) Verificação da possibilidade de conduzir a pesquisa dentro da Sala de Recursos da Escola Classe 17 de Taguatinga; 2ª) Obtenção de autorizações; 3ª) Avaliação diagnóstica mediante a observação durante o atendimento da professora com as crianças autorizadas com intuito de verificar o nível de aquisição de conhecimento matemático referente as operações básicas para pensar nas questões envolvidas no jogo; 4ª) Elaboração do jogo, focando em criar um ambiente envolvente e educativo. A temática espacial foi escolhida como cenário, proporcionando um pano de fundo fascinante e estimulante para os jogadores. O personagem narra as operações de soma para guiar os educandos.; 5ª) Aplicação do jogo de adição, sendo especialmente desenvolvido para atender às necessidades das crianças com TEA. O planejamento do jogo foi pautado na oportunidade de um material digital que possa contribuir para o aprendizado dos estudantes TEA e como ele pode ser recebido pelos alunos em questão. Sendo que a regra do jogo envolve apresentar uma sequência de somas a serem resolvidas. Cada resposta correta permite ao jogador progredir. Para aumentar o dinamismo do jogo, foram incluídos elementos interativos, como sons visam manter o interesse dos alunos e, desenvolvido com dois níveis de dificuldade progressiva, projetados para desafiar os alunos à medida que avançam; 6ª) Análises das observações obtidas pela pesquisadora durante a aplicação do jogo *Scratch* de adição, especialmente desenvolvido para educandos com Transtorno do Espectro Autista (TEA). O objetivo central foi avaliar como os participantes interagem com o jogo, bem como analisar o envolvimento dos alunos durante a atividade. Além

disso, buscou-se observar melhorias em habilidades específicas, como resolução de problemas, memória e atenção.

Apresentação e análise dos resultados

A criação de um jogo de adição na plataforma *Scratch* precisa ser pautada em diversos blocos de programação que são utilizados para desenvolver a lógica e a mecânica do jogo. A Figura 1 – Programação do jogo mostra os blocos envolvidos para criação do jogo aplicado com os estudantes TEA.

No jogo adição do *Scratch* utilizou-se um cenário de uma viagem ao espaço, em que os estudantes precisam responder algumas perguntas que são feitas em português oral e escrito, as respostas são apresentadas visualmente, onde os estudantes têm três opções de respostas, e para cada resposta correta o jogador obtém 10 pontos.

Inicialmente, as operações de adição são mais simples, tendo o uso de desenho de foguetes para que o estudante possa fazer uma associação com a pergunta. Como funciona a tela inicial apresenta exibido desenho demonstrativo de uma pergunta o jogador recebe uma pergunta de adição, por exemplo: "Qual é a soma de $2 + 3$?", imagem de dois foguetes mais três foguetes, o jogo pode incluir diferentes níveis de dificuldade, começando com somas simples e progredindo para números maiores à medida que o jogador avança. A Figura 2 – Questão Nível Iniciante apresenta uma operação de adição $5 + 3$ e o estudante pode observar essa operação em desenho. Na imagem o estudante pode fazer uma associação da operação de forma visual.

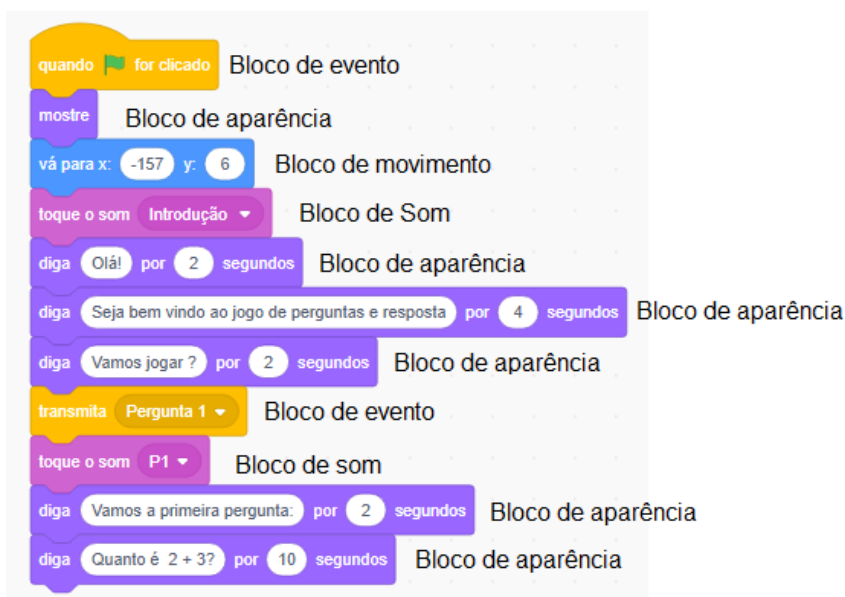


Figura 1 – Programação do jogo (Fonte: Autores (2024)).



Figura 2 – Questão Nível Iniciante (Fonte: Autores(2024)).

A criança C1 antes da atividade, apresentou resistência a ir à sala de recursos, no primeiro contato com o jogo não quis saber das instruções. Apesar dessa reação, ele não apresentou dificuldades em utilizar *mouse* e *notebook* para jogar, o que indica um nível de familiaridade com a tecnologia. Este aspecto foi importante para sua interação inicial com o jogo. No entanto, esta resistência não impediu que ele se envolvesse e obtivesse progresso significativo ao participar de uma atividade específica. Na segunda tentativa C1 tornou-se mais receptivo às instruções do jogo e com isso atingiu desempenho significativamente melhor. As instruções ajudaram-no a compreender que as imagens no jogo eram representações de operações matemáticas. Essa compreensão foi um ponto de virada, permitindo-lhe resolver as questões de maneira mais assertiva. Após entender a lógica por trás das imagens e o que elas representavam no contexto das operações matemáticas, C1 mostrou-se mais confiante e envolvido.

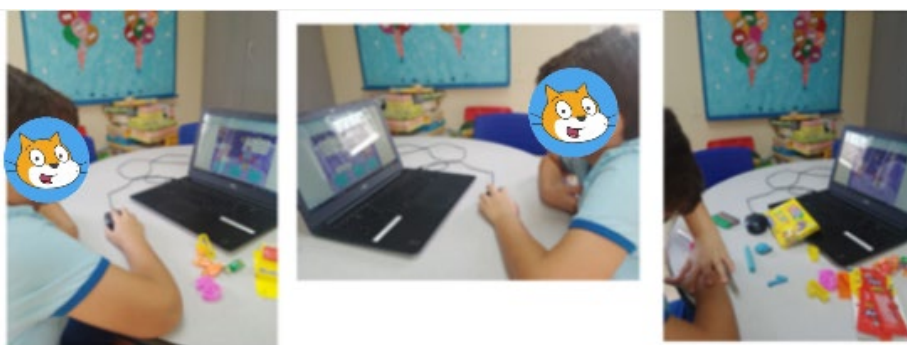


Figura 3 – Fotos da aplicação do jogo de C1 (Fonte: Autores (2024)).

Considerações finais

Ensinar adição a crianças com Transtorno do Espectro Autista (TEA) pode ser uma tarefa desafiadora, sendo que cada criança com autismo é única, com suas próprias necessidades e estilos de aprendizado. Observamos durante a pesquisa que a incorporação de elementos visuais

e interativos no jogo digital revelou-se benéfica no processo de aprendizagem dos estudantes com TEA na sala de recursos. Esse recurso não apenas facilitou a compreensão e a retenção de informações, mas também estimulam o interesse e a motivação dos estudantes, a aplicação de jogo digital em contextos educacionais inclusivos oferece oportunidades valiosas para apoiar a aprendizagem e o desenvolvimento de educando com necessidades especiais, promovendo um ambiente de ensino mais acessível e adaptado às suas necessidades individuais.

Durante a aplicação do jogo digital de adição observou-se uma notável facilidade na integração dos estudantes com TEA com a tecnologia, isso refletido pela familiaridade da geração atual com dispositivos tecnológicos, o que contribui para um ambiente de aprendizado mais dinâmico e envolvente.

Acreditamos que o trabalho com o *Scratch* promove, em paralelo à aprendizagem, uma consciência mais crítica dos alunos frente à sua relação com a tecnologia. Pode despertar para se perceberem para além de meros consumidores de produtos tecnológicos. Entenderem que também é possível criar, ter maior autonomia para se expressarem (FREIRE, 1996).

Em suma, a integração do jogo digital no ambiente educacional é uma estratégia poderosa para promover a inclusão e o desenvolvimento de estudantes com TEA. Ao criar um espaço de aprendizagem adaptado, motivador e acessível, é possível proporcionar a esses alunos uma experiência educacional enriquecedora e significativa.

Referências e bibliografia

- Brasil, Presidência da República. MEC/SEESP. Portaria Normativa nº13. Dispõe sobre Programa de Implantação de Salas de Recursos Multifuncionais. *Diário Oficial da União*, Brasília. nº 80, 26/4/2007, Seção 1, p. 418.
- Brasil, Presidência da República. Decreto nº 6.571, de 17 de setembro de 2008. Dispõe sobre o atendimento educacional especializado, regulamenta o parágrafo único do art. 60 da Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996, e acrescenta dispositivo ao Decreto nº 6.253, de 13 de novembro de 2007. *Diário Oficial da União*, Brasília. 18 de setembro de 2008, Seção 01.p.26.
- Brasil, Presidência da República. Decreto nº 6.949, de 25 de agosto de 2009. Promulga a Convenção Internacional sobre os Direitos das Pessoas com Deficiência e seu Protocolo Facultativo. *Diário Oficial da União*, Brasília. nº 163, 26 de agosto de 2009, Seção 01.p.3.
- Godoy, A.S. (1995). *Pesquisa Qualitativa – tipos fundamentais*. Revista de Administração de Empresas. São Paulo:RAE, v.35, p.20-29, maio/junho.
- Malheiro, C.A. e Mendes, N.G.L. (2017). *Sala de recursos multifuncional: Formação, Organização e Avaliação*. Jundá - SP. Paco 1 ed.
- Silva, D.M.G., Silva, W.P.& Seimetz,R. (2019). Metodología de Ensino em Matemática. Em M. D. Braga, J.E. Menezes, W.P. Silva e R. Seimetz (Eds.) *Tangram como proposta pedagógica mediadora para o ensino de um estudante com autismo*. Jundá - SP.
- Silva, J.M. da, Nunes, V.B. (2018). Construção de objetos de aprendizagem com o uso do Scratch para a potencialização do raciocínio lógico matemático. V Concefor 2018. Disponível em: <https://concefor.cefor.ifes.edu.br/wp-content/uploads/2018/08/4622-7691-1-DR>. Acesso em: 02 de dezembro de 2024.

Índice alfabético de autores

Adriana Richit, 85
Alfonso Romero Huertas, 77
Aluska Dias Ramos de Macedo Silva, 94
Amador Augusto Paredes Chavez, 60
Ana Paola Castillo Domenech, 119
André Luis Trevisan, 169
Ariana Rodríguez Flores, 53
Augusta Osorio Gonzales, 45, 60
Brigitte Johana Sánchez Robayo, 102
Caíque Oliveira, 131
Carlos Mario Jaramillo López, 29, 111
Caroline Lajoie, 154
Celia Elizabeth Villagra, 37
Ceneida Fernández Verdú, 10
David Fernando Méndez Vargas, 29
Edith Marcela Chorolque, 37
Eliane Maria de Oliveira Araman, 169
Elizabeth Advíncula Clemente, 45
Eric Figueroa González, 123
Evelio Bedoya Moreno, 68
Fabiana Ramos Savani, 131
Giane Fernanda Schneider Gross, 169
Helmer Jesús Ruiz Díaz, 146
Henry Alexander Ramírez Bernal, 19
Igor dos Santos Lima, 139
Inácio Antônio Athayde-Oliveira, 193
Isabel Hortensia Miguez, 37
Isabella Revelo Mera, 68
Jean-François Maheux, 154
Jorge Luis Gutiérrez Villegas, 119
José Luis Bossio Vélez, 111
Kamila Alves de Moraes, 193
Kauê Monteiro Pascotto, 162
Lily Bacon, 154
Lizbeth Alvarado Vargas, 53
Lucas Flores Lehnhart, 162
Lucas Marinho Mendonça Dos Santos, 139
Luciana Lemos, 1
Luis Ángel Bohórquez Arenas, 186
Luis Fernando Pizzatto, 162
Luis Sebastião Barbosa Bemme, 162
Marcela Luciano Vilela de Souza, 121
Márcia Rodrigues Leal, 1
Mariana Corujo Zubelso, 178
Marianela Alpizar Vargas, 10

Maritza Luna Valenzuela, 45
Mauri Luís Tomkelski, 85
Miluska Osorio Martínez, 45
Mireia Saboya, 154
Nadine Bednarz, 154
Omar Hernández Rodríguez, 123
Paulo Eugênio da Silva, 131
Raquel Carneiro Dörr, 1
Regina da Silva Pina Neves, 1, 94
Rui Seimetz, 139, 193
Sabrina Héroux, 154
Salvador Llinares Ciscar, 10
Saúl E. Méndez Larios, 119
Silmara Louise da Silva, 121
Silvia Maria de Aguiar Isaia, 162
Yamily Colón Negrón, 123
Yilton Riascos Forero, 146
Yuriko Yamamoto Baldin, 94
Zaida Margot Santa-Ramírez, 29, 111

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025



ISBN: 978-9945-30-194-6



www.redumate.org