

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025

**Uso de tecnologías digitales en la
Educación Matemática**



**Volumen 8. *Memorias IV CEMACYC*
República Dominicana, 2025**

**Patrick Scott, Yuri Morales y Angel Ruiz
Editores**



© 2025

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe (REDUMATE)

www.redumate.org

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025

[Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]

Editado por Patrick Scott, Yuri Morales y Ángel Ruiz. Colaboradora: Sarah González

Volumen 8: Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática

ISBN Obra Completa: 978-9945-30-168-7

ISBN Volumen: 978-9945-30-201-1

Todos los materiales incluidos en esta publicación pertenecen a la Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe.

Estos materiales están bajo una [licencia de Creative Commons Reconocimiento-NoComercial-CompartirIgual 4.0 Internacional](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

En la reproducción de cualquier parte de este libro se deben consignar: los créditos a los autores y a la *Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe*.

Cada autor es responsable del contenido del documento que declara de su autoría o coautoría y libera a REDUMATE y editores de este libro de toda responsabilidad por contenido que pueda lesionar el derecho de terceros. Cada autor ha declarado que su trabajo no ha sido publicado previamente y que todos los datos y referencias a materiales publicados fueron debidamente identificados con su respectivo crédito e incluidos en las referencias bibliográficas.

Para citar la obra completa

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc>

Ejemplo para citar un volumen

Scott, P., Morales, Y. y Ruiz, A. (Eds.). (2025). *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC*. Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1>

Ejemplo para citar un artículo

Artigue, M. (2025). La enseñanza de las Matemáticas frente a los retos del mundo actual. En P. Scott, Y. Morales y A. Ruiz (Eds.), *Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025* [Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe]: *Vol. 1. Trabajos invitados del IV CEMACYC* (pp. 18-29). Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe; Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra. <https://redumate.org/memorias-iv-cemacyc-volumen-1>

Contenidos

<u>Presentación</u>	i
<u>Actividades enchufadas para potencializar el pensamiento computacional en Matemáticas en grado once</u> Jesus Andres Jaimes-Leon, Sonia Valbuena-Duarte	1
<u>Aprendiendo las coordenadas polares con GeoGebra</u> José Luis Henostroza Gamboa	3
<u>Aprendizagem ativa de geometria com o GeoGebra</u> Pedro Pimenta, António Domingos, Cristina Costa	11
<u>Comportamento de trajetórias no plano de fases: Uma discussão com calculadora gráfica</u> Franciele Santos Teixeira, Sueli Liberatti Javaroni, Maria Teresa Zampieri, Mariana Matulovic da Silva Rodrigueiro	19
<u>Construyendo el aprendizaje: Estadística gamificada con Minecraft Education</u> Yilmar Stiven Barreto, William Stevens Perea	27
<u>Desarrollo del Pensamiento Computacional a través de la Matemática Escolar en Secundaria</u> Juan Martínez Marín, Sonia Valbuena Duarte, Alejandro Rosas Mendoza	30
<u>Descubriendo la Probabilidad en mi entorno: Laboratorio virtual para el aprendizaje de la Probabilidad</u> Jéssica Jiménez-Moscoso, Alejandra Sánchez-Ávila	32
<u>Dificuldades de licenciandos em Matemática em uma atividade investigativa com uso da realidade aumentada</u> William Vieira, Igor Rocha Siqueira, Roberto Seidi Imafuku	35
<u>Dilema ético de los docentes dominicanos al usar la IA</u> Miledis Teresa Tavaréz Marzan, Danitza Soledad Mirabal Aybar	43
<u>Do desafio à solução: Explorando o potencial da modelagem 3D no Ensino da Geometria</u> Carmen Vieira Mathias, João Ygor Dias Cardoso, Quendra Silva Cartier Larangeira	51
<u>El uso combinado de tecnologías en la resolución de un problema geométrico real motivado por el diseño de un juego</u> Diego Lieban	53
<u>El uso del podcast para la comunicación digital en la enseñanza de las Matemáticas</u> Darwin Peña González, Roberto Torres Peña	62

<u>Ensino de formas geométricas espaciais com estudante autista: Possibilidades do uso da plataforma Wordwall</u>	70
Suzilei Magosso Araújo Alabarces, Claudia Ines Horn, Ieda Maria Giongo	
<u>Estimación por intervalo de media y proporción poblacional usando GeoGebra: Una experiencia didáctica en cursos STEM</u>	78
Wilson Rodríguez Calderón, Myriam Rocío Pallares Muñoz	
<u>Experiencias de laboratorio híbridas (HyLab): Algoritmo ElGamal</u>	86
Carmen Caiseda, Alvaro Lecompte, Eddie Arrieta-Arrieta, Omayra Rivera-Castro, Carlos Martínez-Bonilla	
<u>Exploração de conteúdos matemáticos e do currículo com calculadora gráfica</u>	94
Franciele Santos Teixeira, Bruno de Moraes Turci, Sueli Liberatti Javaroni	
<u>Explorando la geometría con GeoGebra e inteligencia artificial: Un enfoque innovador para la Educación primaria</u>	101
Marco Gutiérrez Montenegro	
<u>Explorando las matrices a través de mapas conceptuales colaborativos en Coggle</u>	108
Carmen Rodríguez Poveda, Iselgis De Diego Vásquez	
<u>Explorando las potencialidades de la Inteligencia Artificial en la planificación de clases de Matemáticas, de la teoría a la resolución de problemas</u>	117
Edgar Esaúl Saucedo Becerra, Mónica del Rocío Torres Ibarra	
<u>Explorando los beneficios y limitaciones de la inteligencia artificial en la planeación docente</u>	125
Darwin Peña-González, Roberto Torres-Peña	
<u>FotoGebra e Inteligencia Artificial: Innovación en la creación de problemas matemáticos y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje</u>	132
Karina Amalia Rizzo	
<u>Geogebra RA: Exploración espacial en la resolución de problemas</u>	142
Rafael Martinez	
<u>IA generativa en la formulación y resolución de problemas</u>	144
Aitana Martín-Ferraz, Alexander Hernández, Matías Camacho-Machín	
<u>Implicación parental en el aprendizaje de las matemáticas en primaria: Una experiencia en línea</u>	152
José María Marbán, Matías Arce, Ana Maroto	
<u>Integración del Aula Invertida y Laboratorio en la formación del profesorado</u>	154
José David Vargas	

<u>Integrando IA en la Educación Superior: Análisis del Aprendizaje en resolución de problemas de ingeniería a través del Cálculo Integral</u>	156
Ellery Chacuto López, Liceth Niño Camacho, Joaquín Pomares Blaise	
<u>Interfaces tangibles y juegos serios para fomentar el razonamiento lógico-matemático y el pensamiento computacional en el estudiantado de Educación Superior</u>	165
Juan Carlos Sandí-Delgado, Mainor Alberto Cruz-Alvarado, Roberto Mesén-Hidalgo	
<u>Invariantes Geométricos como uma possibilidade didática</u>	173
Renan Severo Ferreira, Carmen Vieira Mathias	
<u>La clase invertida en modalidad virtual: Una experiencia preuniversitaria</u>	182
Ronald Quesada Córdova	
<u>La programación informática como herramienta para trabajar el álgebra en el aula</u>	190
Fabienne Venant	
<u>Minecraft como herramienta didáctica para el reforzamiento de la Geometría Analítica</u>	198
Marco Diego Sáenz Trejos	
<u>Modelagem matemática e tecnologias digitais: Ensino de áreas de triângulos com base nos pressupostos metodológicos da Sequência Fedathi</u>	205
Raimundo Nonato Barbosa Cavalcante, Joalisson Rego Pavão, José Gleison Alves da Silva, Maria José Costa dos Santos, Jorge Carvalho Brandão	
<u>Modelagem matemática e GeoGebra no estudo de Equações Diferenciais Ordinárias</u>	213
Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, Amáble Jeovana Neiris Mesquita, Marcio Vieira de Almeida	
<u>Pensamiento Computacional como herramienta para la enseñanza del Principio de Inducción Matemática mediante sumas consecutivas</u>	221
Marcio Vieira de Almeida, Geison Duvan Gomez-Acuña	
<u>Pensamento Computacional: Integração entre a Robótica e a Matemáticas</u>	224
Joseane Marques Flores, Agostinho Iaquan Ryokiti Homa	
<u>Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento estadístico apoyado con el software Jamovi</u>	232
Julio Marín Sánchez, Eithel Trigueros Rodríguez	
<u>Recurso didáctico interactivo como apoyo al aprendizaje en el curso de Precálculo</u>	236
Ismael Hernández Hernández	
<u>Secuencia didáctica para el aprendizaje de la parábola mediado por el chorro de agua, tracker, geogebra y la fotografía</u>	244
Rafael Pantoja Rangel, Rafael Pantoja González	

<u>Trabajo matemático realizado por estudiantes de segundo de secundaria al desarrollar evaluaciones virtuales sobre funciones cuadráticas</u>	248
Andrés Valdés, Catalina Palacios, Jorge Gaona, Andrea Vergara	
<u>Uso de juegos digitales para la enseñanza de la probabilidad: Diseño e implementación en el aula</u>	256
María Paz Gazzola, María Rita Otero	
<u>Utilización de Geogebra en el proceso de enseñanza aprendizaje de algunos problemas de optimización con aplicación de la derivada</u>	265
Antonio Rey Roque	
<u>Índice alfabético de autores</u>	274

Presentación

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 es el título de las *Memorias del IV Congreso de Educación Matemática de América Central y El Caribe* (IV CEMACYC) que se llevó a cabo en Santo Domingo, República Dominicana, del 2 al 7 de noviembre de 2025.

Este congreso fue organizado por la [Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe](#) (REDUMATE) y la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra (PUCMM). Este cuarto congreso tuvo un gran éxito con más de 300 ponencias con ponentes de 29 países que decidieron venir a esta región. Esto duplica la cantidad de ponencias que se suelen presentar en los CEMACYC. Es ahora un congreso consolidado, con mucho prestigio. La comunidad internacional decidió integrarse a este evento. El impacto regional es impresionante.

El congreso tuvo casi 800 participantes. Más de 400 docentes de la República Dominicana se beneficiaron directamente de conferencias, talleres, comunicaciones, carteles, sesiones informativas, reuniones de grupo, exposiciones de libros.

Varias instituciones dominicanas, con lucidez, apoyaron a sus maestros (incluso de lugares alejados del país) y aprovecharon esta valiosa oportunidad. Esto constituye un impacto formidable para la educación local.

En 2013 REDUMATE y la PUCMM organizaron el I CEMACYC. Muchos docentes aún recuerdan con orgullo el primer congreso y agradecen haber estado también en este. Hay una relación estratégica entre REDUMATE y PUCMM. República Dominicana es un foco clave para apoyar los esfuerzos regionales.

Esos días de noviembre completaron un proceso de tres años de preparación internacional y local, con autores, revisores, coordinadores de temas, equipos de plataforma (casi 200 personas), que ha apoyado cuidadosamente el fortalecimiento de capacidades en esta región.

En los textos que recogemos aquí domina un gran nivel científico. Una de las características permanentes de los CEMACYC es, precisamente, su cultivo de la mayor calidad académica; la cual es producto de un diseño intelectual estratégico innovador y de grandes esfuerzos por individuos y equipos durante muchos meses antes del congreso. A diferencia de otros eventos, los CEMACYC piden las propuestas de ponencias de manera extensa y administra cuidadosamente la revisión por medio de una plataforma tecnológica (los textos aprobados pueden leerse y descargarse en nuestras plataformas varios meses antes del congreso).

Es una perspectiva de organización académica profesional muy seria. Por eso es por lo que, en primer lugar, deseo agradecer formalmente la labor comprometida del *Comité Científico Internacional* con un especial reconocimiento a los *Directores de tema*, y a los casi 200 *Revisores científicos*.

En esta oportunidad, dadas las condiciones de las plataformas tecnológicas libres disponibles, diseñamos una innovadora estrategia complementaria para la organización del congreso mediante dos sitios web: sitio oficial con toda la información y

articulación de la preparación del evento (usamos WordPress), y el sitio para ponencia con base en *Open Journal Systems*. Agradecemos el trabajo de la Dirección de estas plataformas.

Agradecemos el valioso patrocinio de la *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI). Debe recordarse que REDUMATE nació en Costa Rica, en el año 2012, dentro del *Capacity and Networking Project* (CANP) de ICMI. Con ya cuatro congresos exitosos y múltiples acciones educativas en la región, de impacto internacional, esta Red CANP es un ejemplo y un modelo.

En el IV CEMACYC fueron esenciales los apoyos del [*Comité Interamericano de Educación Matemática*](#) y del [*Proyecto Reforma Matemática*](#) en Costa Rica en la organización científica y en la logística tecnológica del congreso.

El *Comité Organizador Local* en la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra, aparte de las acciones usuales, proporcionó un ambiente humano muy especial, con una gran hospitalidad. Nuestro agradecimiento a los colegas por haber asumido la logística multifacética de este congreso, que dejó recuerdos inolvidables en la comunidad de participantes.



Foto de grupo del IV CEMACYC

Educación Matemática en América Central y El Caribe 2025 tiene 11 volúmenes con base en los temas del congreso:

1. Trabajos invitados del IV CEMACYC
2. Formación inicial de profesores
3. Formación continua y desarrollo profesional
4. Dimensiones culturales, políticas, económicas, y ambientales, de las Matemáticas y de la Educación Matemática
5. Currículo y evaluación
6. Historia y filosofía de las Matemáticas y de la Educación Matemática
7. Resolución de problemas y modelización en Educación Matemática
8. Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática
9. Investigación en Educación Matemática.
10. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Preescolar y Primaria
11. Estrategias para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Media y Educación Superior

Los textos de las ponencias invitadas (conferencias plenarias, conferencias paralelas, sesiones temáticas, mesa redonda, minicursos, homenaje a Eduardo Mancera) y ponencias abiertas (comunicaciones, talleres, pósteres en papel y digitales), presentadas efectivamente en el congreso, han sido incluidas en esta colección digital de volúmenes. *REDUMATE* desea agradecer a todos los autores que presentaron sus trabajos en el IV CEMACYC.

La organización detallada y la edición en sus diversas dimensiones fue realizada por Patrick Scott (Estados Unidos), con el apoyo de Yuri Morales (Costa Rica). Nuestra compañera Sarah González se encargó de tramitar su registro en República Dominicana (que contó con el respaldo de la Pontificia Universidad Católica Madre y Maestra). Expreso nuestro agradecimiento a Rick, Yuri y a Sarah.

Los enlaces de estos volúmenes se han colocado en las página web oficial de REDUMATE: <https://redumate.org/>.

Esperamos que la publicación de estos trabajos contribuya al progreso de la Educación Matemática en América Central y El Caribe.

Saludos afectuosos



Ángel Ruiz

Presidente

Consejo Internacional

Red de Educación Matemática de América Central y El Caribe

16 diciembre 2025



Actividades enchufadas para potencializar el pensamiento computacional en Matemáticas en grado once

Jesus Andres **Jaimes-Leon**

Universidad del Atlántico

Colombia

jandresjaimes@mail.uniatlantico.edu.co

Sonia **Valbuena-Duarte**

Universidad del Atlántico

Colombia

soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

La integración del pensamiento computacional en el aula de clases en el gado undécimo de educación secundaria en Colombia en la asignatura de matemáticas presenta un enfoque novedoso en la forma en la forma de enseñar matemáticas utilizando recursos digitales como físicos. Diversos autores se han expresado acerca de cómo el desarrollo de las sub-habilidades del pensamiento computacional potencializan las habilidades matemáticas, además diversos autores han hablado acerca de cómo la utilización de actividades enchufadas permite incrementar la motivación de los estudiantes para la clase de matemáticas. La presente investigación se enfoca en el análisis de como actividades enchufadas que buscan incrementar las sub-habilidades del pensamiento computacional ayudan a mejorar las habilidades matemáticas de los estudiantes. Los resultados sugieren que la utilización de actividades enchufadas para el desarrollo del pensamiento computacional cuando se enfocan a las matemáticas permite que los estudiantes se apropien de los conceptos.

Palabras clave: Actividades enchufadas; Didácticas de las matemáticas; Pensamiento Computacional

Descripción del problema y justificación

En la actualidad el pensamiento computacional es denominado como una de las habilidades del siglo XXI (Díaz & Silvain, 2020). Trabajar para desarrollar de esta habilidad,

debe de ser una de las prioridades en los procesos educativos, la asignatura de matemáticas se ve altamente privilegiada debido a que al momento de potencializar las sub-habilidades del pensamiento computacional estas permiten una mayor comprensión de los objetos matemáticos, además de que la utilización de las actividades enchufadas permite incrementar la motivación de los estudiantes por la asignatura.

Marco teórico

El pensamiento computacional es una habilidad que no es exclusivamente de los desarrolladores de software, sino que todas las personas debemos de tenerlos (Wing, 2006). El pensamiento computacional está conformado por seis sub-habilidades las cuales son pensamiento algorítmico, pensamiento lógico, depuración, abstracción, reconocimiento de patrones y descomposición (Green tic, 2022).

Metodología

La investigación se desarrolla bajo un enfoque cualitativo, con el propósito de comprender la influencia de las actividades enchufadas en el aprendizaje de las matemáticas. Más que centrarse en los resultados cuantificables, el estudio busca analizar las percepciones y experiencias de los participantes.

Para ello, se adopta un diseño de estudio de caso, aplicado a un curso de grado once en una institución educativa. La recolección de información se realizó mediante entrevistas semiestructuradas, permitiendo obtener datos detallados sobre las opiniones y experiencias de los participantes en relación con las actividades implementadas.

Reflexiones finales

Se evidenció que las sub-habilidades del pensamiento computacional ayudan a mejorar las habilidades matemáticas. Lo cual permite elaborar actividades enchufadas las cuales sean retadoras para generar motivación en los estudiantes

Enlace a poster digital:

https://docs.google.com/presentation/d/1MMYL_Fyww16trJxZ0QQvzRWhbaDH-KqG/edit?usp=sharing&ouid=102413785607153803084&rtpof=true&sd=true

Referencias y bibliografía

- Díaz, E. C., & Silvain, G. L. (2020). El pensamiento computacional. Nuevos retos para la educación del siglo XXI. *Virtualidad, Educación y Ciencia*, 11(20), 115-137.
- Gobierno de Colombia y British Council. (2022). *Introducción a GREEN TIC, guía pedagógica para docentes que orientan el pensamiento computacional*. https://prismic-io.s3.amazonaws.com/green-tic/27f59188-8410-410a-a7e7-de8d69530f82_S1+Gu%C3%A1+Introducci%C3%B3n+a+GreenTIC.pdf
- Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.



Aprendiendo las coordenadas polares con GeoGebra

José Luis **Henostroza** Gamboa

Pontificia Universidad Católica del Perú / Sociedad Peruana de Educación Matemática
Perú

jhenost@pucp.pe

Resumen

El tema de coordenadas polares se estudia por primera vez en el curso de Cálculo Integral, tercer semestre de Estudios Generales Ciencias en nuestra universidad. Se introduce el tema de coordenadas polares para luego resolver problemas de recta tangente, área de regiones y longitud de curvas polares haciendo uso del cálculo diferencial e integral. Con la finalidad de que los estudiantes aprendan este tema que es nuevo para la mayoría, les proponemos actividades de exploración, descubrimiento, análisis y síntesis con ayuda del software GeoGebra. El objetivo del presente taller es analizar con los participantes un conjunto de actividades guiadas, dirigidas a estudiantes universitarios, las cuales buscan propiciar la exploración, descubrimiento y análisis de situaciones en el sistema de coordenadas polares, con apoyo de GeoGebra. Proponemos también un espacio de reflexión con los participantes acerca de cómo trabajamos con nuestros estudiantes el tema de coordenadas polares desde las características propias de cada universidad.

Palabras clave: Cálculo integral; Coordenadas polares; Educación Matemática; Educación para jóvenes; Educación superior; Enseñanza presencial; GeoGebra.

Introducción

La educación superior en cualquier país necesita responder a las demandas sociales que inciden directamente en la educación de los futuros ciudadanos en general. En el documento Modelo Educativo PUCP (2023) se resalta que la sociedad de la información principalmente demanda un cambio en el paradigma educativo. Pasar de la transmisión de conocimientos a la formación de profesionales mediante el fomento del aprendizaje autónomo, autodirigido, significativo y constructivo.

Dicho modelo educativo (PUCP) responde a factores que influyen en la educación universitaria, prácticamente a nivel mundial. En Rosaura, Martínez y Valladares, por ejemplo, se resalta que los futuros profesionales en el mundo actual necesitan desarrollar y fortalecer competencias para analizar y resolver problemas, tomar decisiones bien pensadas en un mundo en constante cambio, comunicarse de manera efectiva, aprender permanentemente y hacer uso eficaz de las TIC en su medio familiar y laboral.

Bennasar-García, M., Guerrero, J., y Zambrano-Leal, N. sugieren que los docentes, en particular en el contexto universitario latinoamericano, deben estar preparados y actualizados en métodos, recursos idóneos para los temas de su especialidad, y en instrumentos para la evaluación justa, objetiva de los aprendizajes de sus estudiantes.

Respecto al tema de coordenadas polares, Vicent, R., Granado, F., Pariche, Anner señalan que, en general, dicho tema suele obviarse en la enseñanza o abordarse tangencialmente. En algunos contextos universitarios, el tema de coordenadas polares se desarrolla en cursos de precálculo. En otros, como la PUCP, el tema está inmerso en el curso de Cálculo Integral. Es un tema nuevo para la mayoría de alumnos y con mucha información para procesar e integrar en un tiempo corto. Estas consideraciones nos motivan a proponer el presente taller, donde será importante el intercambio de experiencias entre todos acerca de cómo facilitar el aprendizaje de las coordenadas polares en los estudiantes.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

Los cursos de cálculo integral en la formación científica básica de los estudiantes que se orientan a las ciencias e ingeniería tienen como tema central el concepto de integral definida. Luego se trabajan diversos métodos para calcular integrales definidas y algunas aplicaciones geométricas y físicas. Por ello, los estudiantes necesitan estar familiarizados con el sistema de coordenadas polares, las semejanzas y diferencias con el sistema cartesiano y el comportamiento algebraico y gráfico de las ecuaciones en coordenadas polares. Esto es necesario para el planteo correcto de las integrales que permitan calcular áreas y longitudes.

Considerando estos factores optamos en la PUCP por una metodología de enseñanza-aprendizaje que posibilite que los estudiantes se familiaricen de modo activo y en poco tiempo con las curvas polares de uso más frecuente en el cálculo integral. Esta metodología combina método expositivo participativo, uso de herramientas visuales y lo que es más importante: actividades de exploración y descubrimiento para el estudiante, donde interactúe con el software GeoGebra. El propósito general del taller es presentar estas actividades a los participantes, analizarlas y dialogar acerca de su efectividad y de cómo mejorarlas o adaptarlas al contexto de trabajo de cada colega.

Referencial teórico

Elementos conceptuales acerca de coordenadas polares

La teoría fundamental sobre coordenadas polares se presenta en textos de Precálculo. En Stewart (2004) por ejemplo leemos acerca del sistema de coordenadas polares, ubicación de

puntos en el plano, ecuaciones que relacionan las coordenadas cartesianas y las coordenadas polares de un mismo punto. La diferencia fundamental entre coordenadas cartesianas y coordenadas polares radica en que un punto que se representa en coordenadas polares como (r, θ) puede representarse algebraicamente de infinitas maneras, dadas por $((-1)^n r, \theta + n\pi)$, para cualquier número entero n . Este hecho trae como consecuencia que una ecuación en coordenadas polares, digamos de la forma $E(r, \theta) = 0$ pueda escribirse en la forma $E((-1)^n r, \theta + n\pi) = 0$, para n entero. De este modo, ecuaciones algebraicamente distintas en coordenadas polares pueden resultar equivalentes.

Uso de recursos informáticos en la educación matemática

La producción e incorporación de las llamadas tecnologías de información y comunicación tiene ya un historial importante, y hoy en día todos nosotros somos en mayor o menor grado parte de ese historial. Sánchez Ilabaca (1993) nos presenta una clasificación interesante de los recursos informáticos existentes en ese entonces. Muchos de ellos siguen vigentes, pero han evolucionado en versiones, potencialidades y presentación para ser más accesibles y más atractivos para los usuarios.

En este devenir histórico, las TIC no podían quedar al margen de los procesos de enseñanza y aprendizaje en los distintos niveles educativos, y en particular, en la educación matemática. Quienes estamos vinculados con la enseñanza somos protagonistas de esta historia. Como todo en la vida, el uso de los recursos informáticos tuvo y tendrá siempre ventajas, desventajas, peligros, dudas. García, et al. (1995) a este respecto sugiere a los maestros que conviertan a las calculadoras gráficas, hojas de cálculo, recursos multimedia, software educativo, recursos de internet en herramientas para potenciar las competencias en sus estudiantes mediante la visualización, la propuesta de actividades no rutinarias que fomenten el sentido crítico y especialmente la construcción de conocimientos por descubrimiento.

Es importante mencionar que las TIC bien usadas deben estar al alcance de todos, atender a la diversidad. Lucy Barquero (1996) nos da ejemplo de ello al tratar acerca de la computación como medio de apoyo en el aprendizaje de la población con discapacidad, en Costa Rica.

GeoGebra y su uso en la educación matemática

GeoGebra es un software libre, de geometría dinámica, que por esta característica facilita la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, el álgebra, y también estadística, probabilidades y cálculo.

Carrillo (2011) resalta que las versiones más recientes del software se adaptan prácticamente a cualquier tema de matemáticas en secundaria, bachillerato y superior, pero también señala que ya existe una versión pensada en el apoyo para primaria.

Castellanos (2010) resalta que la característica dinámica de GeoGebra posibilita que los estudiantes interactúen con los objetos geométricos para manipularlos, construir relaciones, formular conjeturas respecto a sus construcciones, repetir los procesos cuantas veces lo necesiten, cambiar la apariencia de los objetos geométricos.

Como profundización de esta idea, el National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2015) afirma que el software en general es una ayuda tecnológica para que el estudiante aprenda, les dé sentido a las ideas matemáticas, razone y comunique a otros su pensamiento matemático.

Con estas ideas trabajamos el tema de coordenadas polares en el curso de Cálculo Integral para alumnos del tercer ciclo de estudios conducentes a carreras de ciencias e ingeniería del siguiente modo: Se dispone de 8 horas cronológicas distribuidas en cuatro clases de dos horas para el tema. En las primeras dos horas el docente presenta el sistema de coordenadas polares, sus características, relaciones con el sistema cartesiano, aspectos generales de las ecuaciones en coordenadas polares. La exposición se apoya con el uso de GeoGebra y de paso los estudiantes aprenden a configurarlo para coordenadas polares.

Durante el fin de semana antes de la siguiente clase los estudiantes deben trabajar con las actividades que analizaremos en el presente taller. La finalidad de estas actividades es que el estudiante mediante la exploración generalice y obtenga conclusiones acerca de las curvas más usadas en coordenadas polares como las rosas, caracoles y lemniscatas. Si bien los estudiantes pueden interactuar entre sí, cada uno de ellos, de manera individual, deberá subir en el repositorio del curso sus conclusiones de las primeras cinco actividades, para que el docente las analice.

En la siguiente sesión de dos horas los estudiantes se organizan en grupos de cuatro integrantes cada uno, dialogan acerca de las conclusiones obtenidas por cada uno y elaboran una síntesis de conclusiones grupales. Dos o tres grupos voluntariamente pueden exponer esas conclusiones a todo el salón. El profesor valida o afina según sea en caso dichas conclusiones. Ya teniendo claro el comportamiento de las curvas polares tipo rosa los estudiantes divididos en los mismos grupos responden la siguiente actividad donde las indicaciones son más generales y se requiere que acuerden una estrategia y luego organicen la información obtenida por cada uno para obtener conclusiones como grupo.

Con todo ello, en la siguiente clase podemos abordar problemas de área de regiones o longitudes de curvas conocidas. En caso de curvas que no son conocidas, por lo general brindamos una gráfica sin ejes para que los estudiantes ubiquen el polo y los ejes, siempre con el apoyo de GeoGebra si lo necesitan, y de sus capacidades en trigonometría especialmente.

Estrategia para desarrollar el taller

En concordancia con todo lo presentado hasta el momento, proponemos a los participantes la ejecución y el análisis de las actividades utilizadas con los alumnos. Se espera el diálogo acerca de su pertinencia, experiencias similares que desarrollen los participantes, sugerencias para su mejoramiento. Se espera que, al socializar estas actividades con colegas de otros contextos (docentes universitarios, de bachillerato o en general quien tenga interés en este taller) todos podamos obtener insumos específicos y pertinentes que permitan mejorar las herramientas didácticas para que estas sean cada vez más efectivas para el aprendizaje de los estudiantes.

Proponemos distribuir el tiempo disponible para el taller del siguiente modo: Presentación del tema del taller, la dinámica de su desarrollo y resolución conjunta de la Actividad 1 (20 minutos). Desarrollo y análisis individual de las actividades propuestas (30 minutos). Diálogo en parejas (20 minutos). Conversatorio (40 minutos). Si alguien necesita alguna ayuda acerca del manejo del GeoGebra, entre todos podemos ayudarnos.

Actividad 1: ¿Para qué coordenadas polares? ¿No es suficiente lo que inventó Descartes?

Varios autores, como por ejemplo Vincent, et al. (2016) justifican la presencia del tema de coordenadas polares en el currículo universitario porque este sistema hace más sencillo el estudio de curvas que en coordenadas cartesianas no se pueden analizar. Y además (por ejemplo, en nuestro curso posterior de Cálculo en varias variables) agregamos otros sistemas como coordenadas paramétricas, cilíndricas y esféricas. La primera actividad es un problema de lugar geométrico, cuya respuesta es una de estas curvas.

Actividad 1: ¿No son suficientes las coordenadas cartesianas?

Resolvamos el siguiente problema: Un segmento $\overline{AB}$ de longitud 8cm tiene su extremo A en el eje x y su extremo B en el eje y. Si dichos extremos se deslizan sobre sus ejes, halle la ecuación del lugar geométrico que describe el pie de la perpendicular trazada desde (0,0) al segmento.

Figura 1. Actividad 1.

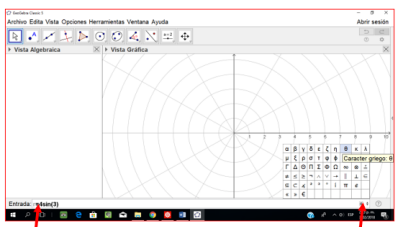
Con los participantes del taller resolveremos el problema y visualizaremos en GeoGebra el lugar geométrico. Su ecuación es $(x^2 + y^2)^3 = 64x^2y^2$ en cartesianas y $r = 4\text{sen}(2\theta)$ en polares.

Actividad 2: Graficamos una curva polar

En concordancia con las ideas que subyacen a esta propuesta, estimulamos al estudiante a que explore, manipule, investigue, anote sus conclusiones y las comparta. Solo tiene que seguir las indicaciones que se le dan como guía en este camino.

Por ejemplo, grafiquemos la curva $r = 4\text{sen}(3\theta)$.

Paso 1:

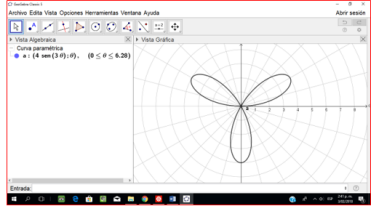


Escribimos en la barra de entrada $r=4\text{sen}(3\theta)$

Para escribir θ debemos pulsar el sitio indicado con la flecha y seleccionar el carácter griego θ .

Paso 2:

Luego de haber escrito en la barra de entrada $r=4\text{sen}(3\theta)$, como se ha indicado, apretamos Enter. El resultado será la siguiente pantalla:



En la Vista Algebraica queda guardada nuestra ecuación. Notemos que el programa lo trata en forma paramétrica y por defecto, grafica la ecuación para $\theta \in [0, 2\pi]$. Para explorar, descubrir y aprender más sobre esta ecuación tipo rosa, podemos modificar la ecuación y el intervalo de valores.

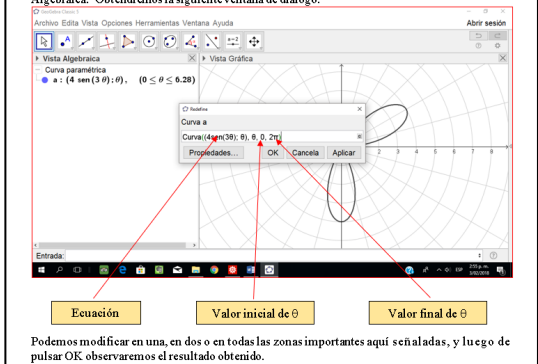
Figura 2. Actividad 2.

Actividad 3: Conocemos más de cerca las variables r y θ

El objetivo aquí es que los participantes, poniéndose en el rol de estudiantes, observen la relación entre los valores de θ y la gráfica que obtiene. En el taller reflexionaremos si conviene a los alumnos usar otras herramientas como calculadoras y hojas de cálculo.

Paso 1:

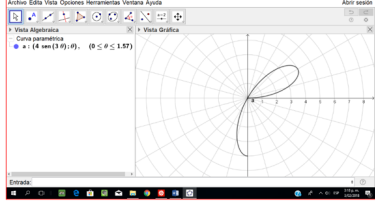
Para empezar a investigar sobre esta gráfica hacemos doble clic sobre la entrada en la Vista Algebraica. Obtendremos la siguiente ventana de diálogo:



Puedemos modificar en una, en dos o en todas las zonas importantes aquí señaladas, y luego de pulsar OK observaremos el resultado obtenido.

Paso 2: Formación de la curva polar.

Por ejemplo, modificamos 2π por $\frac{\pi}{2}$ (borrando y escribiendo $\pi/2$)



Observemos qué parte de la gráfica se forma cuando $\theta \in [0; \frac{\pi}{2}]$

Tabula con calculadora y presta atención cuándo r es positivo, cuándo r es cero y cuándo r es negativo.

Efectúa otras modificaciones en el intervalo de valores de θ y observa qué parte de la curva polar se obtiene. Verifica mediante la tabulación de valores los resultados obtenidos.

Figura 3. Actividad 3.

Actividad 4: Variaciones en torno al parámetro a en $r = a \sen(3\theta)$.

Esta actividad tiene como propósito que los participantes (en el rol de estudiantes) descubran por experimentación cómo influye en la forma de la gráfica el valor de a .

- Grafica las curvas: $r = \frac{1}{2}\sen(3\theta)$, $r = 6\sen(3\theta)$, $r = -4\sen(3\theta)$.
- Grafica luego las curvas: $r = \frac{1}{2}\cos(3\theta)$, $r = 6\cos(3\theta)$, $r = -4\cos(3\theta)$
- Responde a las siguientes preguntas acerca de las ecuaciones $r = a \sen(3\theta)$ y $r = a \cos(3\theta)$

1. ¿A cuál de los ejes es simétrica la curva $r = a \sen(3\theta)$?
2. ¿A cuál de los ejes es simétrica la curva $r = a \cos(3\theta)$?
3. ¿Cómo influye $|a|$ en la gráfica?

4. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a \sen(3\theta)$ cuando $a > 0$?
5. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a \sen(3\theta)$ cuando $a < 0$?
6. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a \cos(3\theta)$ cuando $a > 0$?
7. ¿Hacia donde "apunta" la curva $r = a \cos(3\theta)$ cuando $a < 0$?

Figura 4. Actividad 4, preguntas de exploración.

Actividad 5: Variaciones en torno al parámetro n en $r = 4 \sen(n\theta)$.

En esta actividad el estudiante tiene la oportunidad de utilizar los deslizadores. Esta herramienta permite diferenciar el comportamiento de la gráfica cuando n es entero y cuando n

no es entero. Solo el primer caso tiene que ver con curvas polares de uso constante. Se guía al estudiante para configurar el deslizador (por si no lo recuerda).

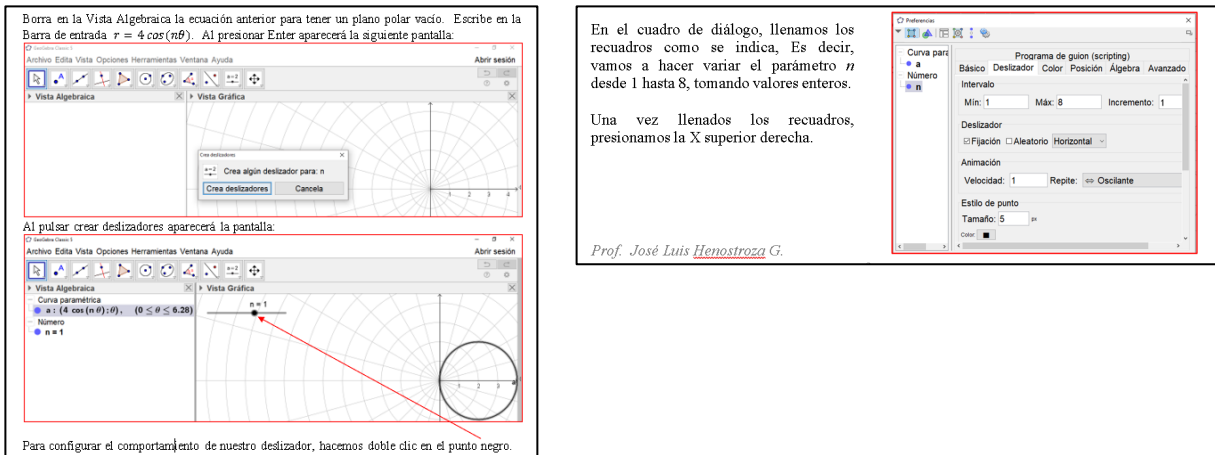


Figura 5. Actividad 5, generar un deslizador y configurar sus opciones.

Se le indica al estudiante en la ficha impresa de la actividad que mueva el deslizador y observe cuántos pétalos tiene la gráfica cuando n es par, cuando n es impar. Que haga el mismo análisis con $r = a \sin(n\theta)$ usando el mismo deslizador, y que concluya cuáles son las semejanzas y diferencias.

Actividad 6: Conociendo la familia de caracoles en coordenadas polares

Ya teniendo claro el comportamiento de las curvas polares tipo rosa los estudiantes distribuidos en los mismos grupos desarrollarán la siguiente actividad donde las indicaciones son más generales y se requiere que acuerden una estrategia y luego organicen la información obtenida por cada uno para obtener conclusiones como grupo. En el taller los participantes propondrán actividades similares de acuerdo a cómo trabajan con sus estudiantes el tema de coordenadas polares.

Te invitamos a utilizar el Geogebra para explorar las gráficas polares de la forma

$$r = a + b \sin(\theta), r = a + b \cos(\theta), \text{ con } a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Cuestión previa

Como primera tarea obtén las ecuaciones polares equivalentes de

$$r = a + b \sin(\theta) \text{ y } r = a + b \cos(\theta)$$

¿Porqué es suficiente considerar solamente $a > 0$?

Figura 6. Actividad 6, obtener las ecuaciones equivalentes del caracol.

Actividad
Observa las características más saltantes de la gráfica obtenida, luego de dar diversos valores a las constantes a y b . Basta con considerar $a > 0$. Las siguientes preguntas te ayudarán a organizar las conclusiones (que luego compartirás con tu grupo)
1. ¿Cuál es la principal diferencia entre una gráfica “tipo seno” y una gráfica “tipo coseno”?

2. ¿Qué cambio importante observas en ambas gráficas cuando b es positivo y cuando b es negativo?

3. Considera $a > 0$ y $b > 0$ y observa las características de la gráfica según los diversos valores de la razón $\frac{a}{b}$.

Figura 7. Actividad 6, preguntas de exploración.

Referencias y bibliografía

- Barquero, Lucy. (1996). La computación como medio de apoyo en el aprendizaje para la población con discapacidad. *Memorias III Congreso Iberoamericano de Informática Educativa*.
<https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=6873125>
- Bennasar-García, M., Guerrero, J., y Zambrano-Leal, N. (2021). Pedagogía y formación docente universitaria hoy en Latinoamérica, una visión epistemológica. *Praxis & Saber*, 12(29), e11267. <https://doi.org/10.19053/22160159.v12.n29.2021.11267>
- Carrillo de Albornoz, Agustín. (2010). GeoGebra. Un recurso imprescindible en el aula de Matemáticas. *Unión*, 23, 201–210. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/issue/view/30/28>
- Castellanos, Idania. (2012). *Visualización y razonamiento en las construcciones geométricas utilizando el software GeoGebra con alumnos de II de Magisterio de la E.N.M.P.N.* [tesis de magíster, Universidad Pedagógica Nacional Francisco Morazán]. Biblioteca Virtual Miguel de Cervantes.
<https://www.cervantesvirtual.com/obra/visualizacion-y-razonamiento-en-las-construcciones-geometricas-utilizando-el-software-GeoGebra-con-alumnos-de-ii-de-magisterio-de-la-enmpn/>
- García, A., Martínez, A., Miñano, R. (1995). *Nuevas tecnologías y enseñanza de las matemáticas*, 19–28. Síntesis.
- National Council of teachers of mathematics. (2015). *De los principios a la acción. Para garantizar el éxito matemático para todos*. 89–100. México: Editando libros.
- Pontificia Universidad Católica del Perú. Modelo Educativo PUCP (2023). 14–37
<https://s3.amazonaws.com/files.pucp.edu.pe/homepucp/uploads/2016/08/02171957/Modelo-Educativo-2023-web-2.pdf>
- Rosaura, R., Martínez, R., y Valladares, L. (2010). *Innovación en la educación superior*. México: FCE.
- Sánchez Ilabaca, Jaime. (1993). *Informática educativa*. 91–114. Universitaria.
- Stewart, J., Redlin, L., Watson, S. (2004). *Precálculo*, 650–661. International Thompson Editores.
- Vicent, R., Granado, F., Pariche, Anner. (2019, 5–10 de mayo). *Propuesta para la enseñanza/aprendizaje de las coordenadas polares con GeoGebra*. [Comunicación]. V Conferencia Interamericana de Educación Matemática, Medellín, Colombia.
<https://conferencia.ciaem-redumate.org/index.php/xvciaem/xv/paper/viewFile/35/267>



Aprendizagem ativa de geometria com o Geogebra

Pedro Pimenta

Agrupamento de Escolas da Caparica, EDUNOVA.ISPA

Portugal

pedropimenta@aecaparica.pt

António Domingos

Universidade Nova de Lisboa, FCT NOVA, EDUNOVA.ISPA

Portugal

amdd@fct.unl.pt

Cristina Costa

Instituto Politécnico de Tomar, Ci2, EDUNOVA.ISPA

ccosta@ipt.pt

Resumo

O uso do GeoGebra no ensino da matemática é amplamente recomendado na literatura. Em Portugal, é recomendado no currículo, que inclui também ações estratégicas de ensino, com propostas de tarefas para implementar estas práticas na aprendizagem da matemática. A estratégia de aprendizagem ativa é apresentada na literatura como uma abordagem de aprendizagem significativa e eficaz para garantir o envolvimento dos alunos na aprendizagem. Neste trabalho, implementámos uma tarefa de aprendizagem ativa, utilizando o GeoGebra, em geometria, numa turma de alunos do 3.º ano, que nunca tinham utilizado esta ferramenta digital antes. Os resultados de aprendizagem são analisados, com uma metodologia qualitativa, comparando as avaliações anteriores dos alunos na mesma disciplina, sem o uso de tecnologia digital. Os resultados indicam que os alunos realizaram a atividade proposta com motivação, e que o seu desempenho com o GeoGebra foi melhor do que sem o GeoGebra.

Palavras-chave: Geogebra; Geometria; Aprendizagem ativa; Motivação; Tarefa; Implementação curricular; Ensino básico.

Introdução

Em junho de 2024, numa turma do 3.º ano de uma escola primária em Portugal, o primeiro autor deste estudo organizou uma aula de geometria utilizando o GeoGebra (GGB) (em particular, o *GGB Classroom*), em linha com os currículos portugueses que mencionam, em particular, a necessidade de "Proporcionar o uso de um ambiente de geometria dinâmica para explorar (...) a reflexão de figuras planas", no contexto do objetivo de aprendizagem "Obter a imagem de uma figura plana simples por reflexão, a partir de eixos de reflexão (...)" (DGE, 2021). O uso do GGB no ensino da matemática é amplamente recomendado na literatura, e vários estudos têm demonstrado que ajuda a motivar os alunos a aprender matemática, bem como contribui para melhorar os resultados dos alunos (por exemplo, Zhang et al., 2023; Romero Albaladejo & García López, 2024). As tarefas realizadas no GGB, em que os alunos exploram determinadas aplicações ou fazem construções utilizando as suas ferramentas, são instrumentos de aprendizagem ativa, pois a aprendizagem depende da participação ativa dos alunos (Bakar & Ismail, 2020). Neste estudo, descrevemos e analisamos uma tarefa que promove a aprendizagem ativa utilizando o GGB, considerando "tarefas" como atividades de ensino e aprendizagem realizadas no ambiente escolar (Gimeno, 2000).

Propõe-se a seguinte questão de investigação: Os alunos estão mais motivados e podem melhorar o seu desempenho utilizando o GGB com uma abordagem de aprendizagem ativa? Uma vez que a maioria dos estudos nesta área tem sido realizada em níveis etários mais avançados, este artigo constitui um importante contributo, nomeadamente no que diz respeito à aprendizagem ativa e à utilização do GGB junto de alunos do ensino básico.

Referencial teórico

Esta secção está organizada em duas subsecções: Aprendizagem ativa e Aprendizagem da Matemática com o GeoGebra.

Aprendizagem ativa

"A Estratégia de Aprendizagem Ativa é uma abordagem de aprendizagem significativa e eficaz para garantir o envolvimento dos alunos na aprendizagem e melhorar a compreensão dos conteúdos" (Bakar & Ismail, 2020, p.1). Este envolvimento pode melhorar a motivação, o principal preditor de atitudes em relação à matemática (Mata et al., 2012). A investigação tem apontado vantagens no processo de aprendizagem em que o aluno assume um papel ativo e, por sua vez, o professor promove a aprendizagem ativa. De acordo com Gillispie (2016), a aprendizagem ativa aumenta o envolvimento e a compreensão dos alunos. A eficácia do ambiente pedagógico das tecnologias de aprendizagem ativa na motivação dos alunos foi verificada experimentalmente por Bochkareva et al (2020). As práticas ativas de aprendizagem observadas por Stieha et al (2024) foram correlacionadas com resultados positivos de aprendizagem, sendo o uso da tecnologia apontado como promotor dessa aprendizagem (Ally, 2009; Buckner & Kim, 2014).

Aprendizagem da Matemática com o GeoGebra

O GGB foi concebido, como descreve Hohenwarter (2013), para combinar a geometria dinâmica com a álgebra computacional, para o ensino e aprendizagem da matemática. A literatura aconselha amplamente o uso do GGB no ensino. Atualmente, é uma plataforma de ensino e aprendizagem que permite aos professores atribuir tarefas aos alunos, recolher o seu trabalho, combinar aplicações como geometria dinâmica com questionários, entre outras opções (www.geogebra.org). É uma ferramenta rica que pode contribuir para melhorar as práticas pedagógicas e aprendizagens mais significativas (Zengin, 2019; Weinhandl et al., 2020; Lyublinskaya & Cabral, 2023). Vários estudos têm demonstrado a influência positiva do GGB na aprendizagem. Por exemplo: García et al. (2020) demonstraram que os alunos valorizam positivamente as tarefas propostas e o uso do GGB para as desenvolver, o que facilitou a compreensão e o aprofundamento de conceitos geométricos; Zulnaidi e Zamri (2017) mostraram que os alunos que utilizam o GGB, em comparação com um grupo controle sujeito a métodos ditos convencionais, têm maior conhecimento matemático conceitual e processual; Zhang et al. (2023) demonstraram um efeito positivo do GGB como uma ferramenta de visualização dinâmica para melhorar o desempenho dos alunos; no trabalho de Romero Albaladejo e García López (2024), a introdução do GGB na aula ajudou a motivar os alunos a usar computadores, promovendo a perseverança, precisão e autonomia necessárias para sustentar processos de pensamento matemático de complexidade crescente; Martinez H. et al. (2025) mencionam que o uso da geometria dinâmica ajuda a fortalecer as habilidades cognitivas dos processos de pensamento que sustentam a resolução de problemas; por fim, Hidayat et al (2024) argumentam que o uso do GGB tem um impacto na relação entre a compreensão do conceito e o envolvimento do aluno na aprendizagem da matemática. Em Portugal, os novos currículos de matemática para o ensino básico (DGE, 2021) prescrevem a utilização de ambientes como o GGB na aprendizagem, apresentando "ações estratégicas de ensino" como "Executar construções em ambientes de geometria dinâmica que mobilizem lugares geométricos, polígonos regulares, relações entre ângulos e isometrias (...)".

Metodologia

Utilizou-se uma metodologia com enfoque num paradigma qualitativo e interpretativo (Cohen et al., 2018). Participaram no estudo 21 alunos de uma turma do 3.º ano, e a sua professora, experiente, reconhecida por seu empenho e competência pela comunidade escolar, incluindo pais e alunos. A tarefa (<https://www.geogebra.org/m/gk2uppnbn>) foi elaborada na plataforma *geogebra.org* pelo primeiro autor deste estudo (formador de professores, nomeadamente na Sociedade Portuguesa de Matemática, certificado pelo Ministério da Educação, e autor de manuais escolares de matemática e recursos educativos digitais utilizados nas escolas portuguesas) e foi atribuída aos alunos através da *GGB classroom*.

No primeiro item da tarefa, os alunos tiveram acesso a uma construção dinâmica (*applet*), precedida da seguinte instrução: «Mover os pontos A, B, C, D ou E e observar as mudanças na reflexão». No segundo item da tarefa, os alunos tiveram acesso a dois *applets*; em ambos, perante uma figura e um eixo de reflexão (horizontal e vertical, considerando os objetivos essenciais de aprendizagem constantes no currículo do 3.º ano), os alunos, dotados das ferramentas necessárias, deviam construir o respetivo transformado pela reflexão (Figura 1).

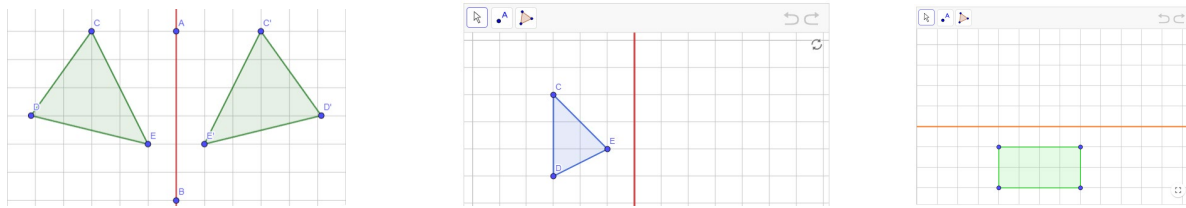


Figura 1. Itens 1, 2.1 e 2.2 da tarefa.

No terceiro ponto, propôs-se a construção de um transformado por um eixo de reflexão não horizontal nem vertical, indo além das aprendizagens essenciais referidas no currículo. No terceiro item, dado um eixo, os alunos tinham de construir um polígono à sua escolha e, em seguida, obter o polígono transformado por reflexão, relativo a esse eixo, usando a ferramenta automática do GGB.

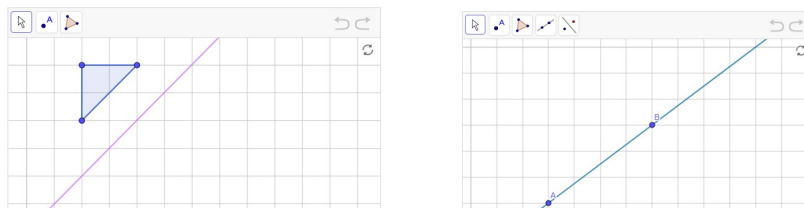


Figura 2. Itens 2.3 e 3. da tarefa.

No final da atividade, os alunos responderam a um questionário de satisfação, selecionando uma de três opções: Gostei (muito); Gostei (mais ou menos); Não gostei. As produções e respostas dos alunos foram armazenadas na respetiva área, na conta do autor, e depois analisadas do ponto de vista da investigação, sendo garantido o anonimato dos alunos (e da professora). Após a atividade, os resultados foram analisados com uma "*Informal conversational interview*" (Cohen et al., 2018) com a professora, complementada por uma troca de mensagens, por *e-mail*. O desempenho dos alunos nesta atividade foi comparado com o desempenho numa atividade proposta pela professora um mês antes, precedida de uma apresentação do conteúdo, na qual a professora explorou as tarefas propostas numa página do livro didático (Figura 3), e propôs a resolução de uma ficha de avaliação, em papel, que incluía dois itens referentes a reflexões.



Figura 3. Exemplo no manual de texto.

Na lição do livro, antes do exemplo, foi dada a seguinte definição de «reflexão da figura»: «Numa reflexão da figura, em relação a uma linha (eixo de reflexão), a figura e a imagem resultantes da reflexão são geometricamente iguais. Se dobrarmos a folha ao longo do eixo de reflexão, a figura original e a sua imagem sobrepõem-se ponto a ponto». Na ficha proposta pela

professora (Figura 4), no primeiro item, os alunos tinham de desenhar os eixos de simetria das figuras dadas, em papel, usando o lápis. Num segundo item, os alunos tiveram de desenhar o transformado de uma dada figura em relação a um eixo de reflexão.



Figura 4. Primeiro e segundo itens da ficha da professora.

Recolha e apresentação dos dados

Os dados foram recolhidos por meio da observação participante (Cohen et al., 2018) da atividade pelo primeiro autor, análise das produções dos alunos e respostas ao questionário, entrevista com a professora e os dados apresentados pela professora, em relação às práticas já realizadas sobre o mesmo tema. A tarefa proposta começou com a professora apresentando o autor da tarefa à turma. Em seguida, a única instrução dada aos alunos sobre a atividade foi como aceder à tarefa na *GGB classroom*. O trabalho foi realizado individualmente, num computador portátil. Os professores envolvidos foram chamados pelos alunos para prestar alguma ajuda, mas apenas com questões técnicas, como acesso à internet ou manipulação de *hardware*. Em geral, os alunos começaram por explorar a primeira aplicação e depois passaram para as construções necessárias, sem dificuldades. Os resultados apresentados na Tabela 1 emergiram da análise das produções dos alunos.

Tabela 1

Percentagem de alunos que completam corretamente as tarefas

Item	2.1	2.2	2.3	3
(%)	76%	90%	71%	71%

Como exemplo, apresentam-se três produções de alunos relativas ao item 2.1.:

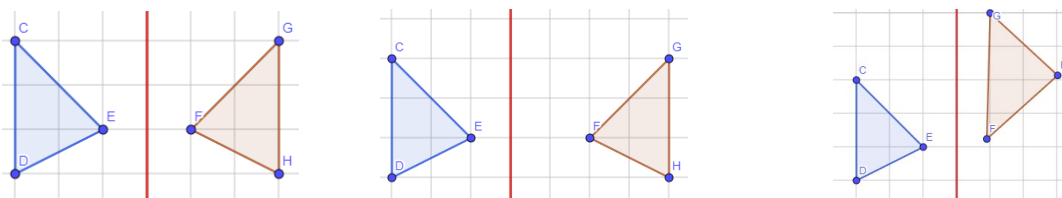


Figura 7. Construções dos alunos (item 2.1.)

Na construção correta (primeira da Figura 7), os alunos foram capazes de aplicar todas as propriedades de reflexão para obter a imagem transformada correta. Na segunda construção o aluno apenas não consegue preservar a igual distância de pontos correspondentes ao eixo de reflexão; à direita, o aluno apenas respeita a propriedade básica de que, numa reflexão, um

triângulo é transformado em outro triângulo, nem mesmo garantindo que o triângulo transformado seja geometricamente igual ao original.

Os resultados do questionário de satisfação em relação à atividade foram os seguintes:

Tabela 2

Resultados do questionário de satisfação.

Descritor	Gostei (muito)	Gostei (mais ou menos)	Não gostei
Estudantes (#)	18	2	1

Quanto ao único aluno que 'não gostou' de fazer a atividade, apresentam-se algumas das suas construções:

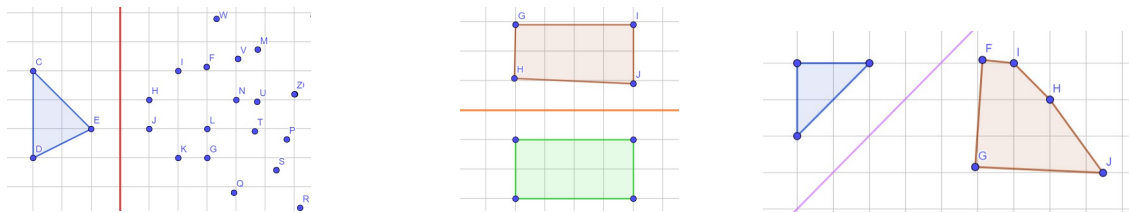


Figura 8. Construções do aluno que não gostou de fazer a atividade

Parece claro que as dificuldades desse aluno não estavam relacionadas com manipulação das ferramentas digitais, uma vez que foi capaz de marcar pontos e construir polígonos, mas sim ao domínio dos conceitos matemáticos necessários.

Em relação aos itens da ficha previamente aplicada pela professora, obtiveram-se os seguintes resultados:

Tabela 2

Resultados do questionário de satisfação

Número	1.º	2.º
% de construções corretas	50%	61%

Quando questionada sobre a opção metodológica seguida, nomeadamente se já tinham utilizado o GGB anteriormente, a professora disse: «Lemos esta matéria na página 137 (...) do livro didático; no final da página 138 fala do GGB; eu abri e fiz para que eles pudessem vê-lo através do projetor, mas numa passagem muito rápida. (...) Em geral, são bons alunos e não melhores, devido à distração constante e também porque há muito conteúdo para esta faixa etária e às vezes não há tempo para explorar mais, jogar, consolidar melhor no final.»

Análise dos dados

Comparando os resultados apresentados nas Tabelas 1 e 3, o desempenho dos alunos foi melhor na atividade em que utilizaram o GGB, quando comparados aos resultados obtidos na ficha de avaliação convencional, na qual não utilizaram essa tecnologia digital. Nos casos de

construções corretas, os alunos foram capazes de utilizar corretamente as ferramentas digitais e aplicaram corretamente as propriedades matemáticas, o que lhes permitiu obter a imagem correta por reflexão. Quanto aos alunos que não conseguiram completar a atividade corretamente, verificou-se, em geral, que os erros cometidos foram resultado da não aplicação correta das propriedades matemáticas, não havendo dificuldade em dominar as ferramentas digitais (Figura 7). Em relação ao caso apresentado na Figura 8, pode-se apenas concluir que as dificuldades não estavam relacionadas ao domínio das ferramentas digitais. A maioria dos alunos respondeu que tinha gostado (muito) de fazer a atividade. Verificamos que o aluno que não gostou e os dois alunos que não responderam foram alunos que não conseguiram concluir a atividade corretamente. Em geral, os alunos não tiveram dificuldade em utilizar a ferramenta, apesar de ser a primeira utilização, mesmo não tendo recebido qualquer explicação inicial ou quaisquer instruções para além daquelas para acesso à tarefa.

Discussão e considerações finais

Verificou-se que os alunos realizaram a tarefa motivados, com o GGB (Tabela 2), satisfeitos por estarem a usar computadores, como nas experiências de García et al (2020) e Romero Albaladejo e García López (2024). Em geral, tiveram um bom desempenho, demonstrando que tinham aprendido e eram capazes de mobilizar as propriedades. Em média, quando comparados os resultados de avaliação obtidos na atividade GGB com a atividade convencional, o desempenho dos alunos foi 22% superior. Estes resultados estão em consonância com as conclusões de Zulnaidi e Zamri (2017). Parece, portanto, que a exploração inicial do *applet*, manipular a figura original ou o eixo de simetria e verificar as mudanças no transformado, foi vantajosa para a aprendizagem, quando comparada à visualização do exemplo e da definição do livro didático, como nos resultados de Zhang et al (2023) e Hidayat et al (2024). No entanto, não consideramos estes resultados determinísticos, pois há limitações, nomeadamente o facto de os itens propostos para a tarefa GGB não serem os mesmos que os itens propostos na ficha de trabalho do professor (embora equivalentes quanto à complexidade) ou o facto de os alunos terem tido contacto com o conteúdo antes de realizarem a tarefa, o que pode também ter contribuído para a melhoria dos resultados. Ainda assim, parece razoável interpretar que a utilização do GGB teve um efeito positivo na aprendizagem e permitiu que os alunos realizassem a atividade com motivação. Houve também uma relação entre o gosto de realizar a atividade e o sucesso na sua realização, com uma relação entre o gosto e a competência na realização da atividade, o que evidencia a importância da motivação para o sucesso em matemática (Mata et al., 2012). Parece coerente, de acordo com os resultados obtidos, afirmar que os alunos utilizaram as ferramentas disponibilizadas no GGB sem dificuldade, num primeiro contacto com esta ferramenta, com motivação, e com uma influência positiva na aprendizagem. A professora mostrou-se satisfeita com o sucesso da tarefa, notando que os alunos "absorvem tudo", mas não recorre a esta prática com mais frequência devido a limitações de tempo, sugerindo que acredita poder impedir a cobertura curricular completa. Em suma, afirmamos que os alunos estão mais motivados e podem melhorar o seu desempenho utilizando o GGB com uma abordagem de aprendizagem ativa. Sugerimos, por fim, que mais pesquisas sejam realizadas neste campo, com uma prática mais contínua deste tipo de tarefas, para que os casos em que os alunos não conseguem aprender possam ser mais bem analisados.

Referências e bibliografia

- Ally, M. (2009). *Mobile Learning: Transforming the Delivery of Education and Training*. Athabasca University Press.
- Bakar, M. A. A., & Ismail, N. (2020). Mathematical Instructional: A Conceptual of Redesign of Active Learning with Metacognitive Regulation Strategy. *International Journal of Instruction*, 13(3), 633–648. <https://doi.org/10.29333/iji.2020.13343a>
- Bochkareva, T. N., Akhmetshin, E. M., Zekiy, A. O., Moiseev, A. V., Belomestnova, M. E., Savelyeva, I. A., & Aleynikova, O. S. (2020). The Analysis of Using Active Learning Technology in Institutions of Secondary Vocational Education. *International Journal of Instruction*, 13(3), 371–386. ERIC.
- Buckner, E., & Kim, P. (2014). Integrating technology and pedagogy for inquiry-based learning: The Stanford Mobile Inquiry-based Learning Environment (SMILE). *PROSPECTS*, 44(1), 99–118. <https://doi.org/10.1007/s11125-013-9269-7>
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2018). *Research Methods in Education*. Routledge.
- Direção Geral de Educação (2021). Aprendizagens Essenciais | Articulação com o perfil dos alunos. https://www.dge.mec.pt/sites/default/files/Curriculo/Aprendizagens_Essenciais/3_ciclo/ae_mat_7.o_ano.pdf. Consultado 24/02/2024
- García, M. J., Eguia, I., Etxeberria, P., & Alberdi, E. (2020). Implementation and assessment of interdisciplinary activities through dynamic applets for the study of geometry. *Formacion Universitaria*, 13(1), 63–70. Scopus. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062020000100063>
- Gillispie, V. (2016). Using the flipped classroom to bridge the gap to generation Y. *Ochsner Journal*, 16(1), 32–36.
- Hidayat, R., Noor, W. N. W. M., Nasir, N., & Ayub, A. F. M. (2024). The role of GGB software in conceptual understanding and engagement among secondary school student. *Infinity Journal*, 13(2), 317–331. Scopus. <https://doi.org/10.22460/infinity.v13i2.p317-332>
- Hohenwarter, M. (2013). GGB 4.4 – from Desktops to Tablets. *Indagatio Didactica*, 5(1), Artigo 1. <https://doi.org/10.34624/id.v5i1.4296> s
- Lyublinskaya, I. & Cabral, M. (2023). Effect of GGB explorations combined with art-based practices on in-service teachers’ understanding of geometric transformations. In P. Drijvers, C. Csapodi, H. Palmér, K. Gosztonyi, & E. Kónya (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (CERME13) (pp. 2720–2727). Alfréd Rényi Institute of Mathematics and ERME.
- Martínez H., L. J., Paloma P., L. L., & Ruiz O., F. J. (2025). Learning the Parabola Mediated by Problem-Solving, Semiotic Representations, and Applets in GGB. *International Journal of Mathematics and Computer Science*, 20(1), 101–108. <https://doi.org/10.69793/ijmcs/01.2025/herandez>
- Mata, M. de L., Monteiro, V., & Peixoto, F. (2012). Attitudes towards Mathematics: Effects of Individual, Motivational, and Social Support Factors. *Child Development Research*, 2012, 1–10. <https://doi.org/10.1155/2012/876028>
- Romero Albaladejo, I. M., & García López, M. D. M. (2024). Mathematical attitudes transformation when introducing GGB in the secondary classroom. *Education and Information Technologies*, 29(8), 10277–10302. Scopus. <https://doi.org/10.1007/s10639-023-12085-w>
- Stieha, V., Earl, B., Hagens, H., Haynes, M., Ulappa, A., Bond, L., & Oxford, J. T. (2024). An exploration of the relationship between active learning and student motivation in STEM: A mixed methods study. *Advances in Physiology Education*, 48(3), 621–638. <https://doi.org/10.1152/advan.00247.2022>
- Weinhandl, R., Lavicza, Z., Hohenwarter, M., & Schallert, S. (2020). Enhancing Flipped Mathematics Education by Utilising GGB. *International Journal of Education in Mathematics, Science and Technology*, 8(1), 1–15.
- Zengin, Y. (2019). Development of mathematical connection skills in a dynamic learning environment. *Education and Information Technologies*, 24(3), 2175–2194. <https://doi.org/10.1007/s10639-019-09870-x>
- Zhang, Y., Wang, P., Jia, W., Zhang, A., & Chen, G. (2023). Dynamic visualization by GGB for mathematics learning: A meta-analysis of 20 years of research. *Journal of Research on Technology in Education*. <https://doi.org/10.1080/15391523.2023.2250886>
- Zulnaidi, H., & Zamri, S. N. A. S. (2017). The Effectiveness of the GGB Software: The Intermediary Role of Procedural Knowledge on Students’ Conceptual Knowledge and Their Achievement in Mathematics. *Eurasia Journal of Mathematics Science and Technology Education*, 13(6), 2155–2180. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01219a>



Comportamento de trajetórias no plano de fases: Uma discussão com calculadora gráfica

Franciele Santos **Teixeira**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

fs.teixeira@unesp.br

Sueli Liberatti **Javaroni**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

sueli.javaroni@unesp.br

Maria Teresa **Zampieri**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

mt.zampieri@unesp.br

Mariana Matulovic da Silva **Rodrigueiro**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

mariana.matulovic@unesp.br

Resumo

Neste artigo apresentamos uma discussão desenvolvida com graduandos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, campus Rio Claro, acerca da trajetória da solução de um sistema de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) no plano de fases. Ao conceber esse estudo, discutimos a visualização destas trajetórias com calculadora gráfica e fizemos o movimento de análise qualitativa do que era exibido no visor deste artefato. Como resultados, ressaltamos a importância de abordar diferentes maneiras de discutir com os futuros professores de Matemática sobre análise qualitativa de sistemas de EDO e como a visualização auxiliou os graduandos a interpretar as soluções obtidas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino de Equações Diferenciais Ordinárias; Ensino Superior; Experimentação-com-Tecnologias; Formação Inicial.

Definição e relevância do problema

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) são fundamentais para descrever fenômenos dinâmicos do cotidiano. Elas permitem modelar processos que envolvem variação contínua no tempo ou no espaço, oferecendo uma base rigorosa para a compreensão e previsão de diversas situações do cotidiano, tais como: um objeto em queda, crescimento exponencial de bactérias etc. Além disso, servem como base para métodos numéricos e técnicas de solução aproximada, sendo importantes para diversos ramos da Matemática aplicada (Boyce, Diprima & Meade, 2020). As EDO são também caracterizadas por construção de modelos, em que “muitos dos princípios, ou leis, que regem o comportamento do mundo físico são proposições, ou relações, envolvendo a taxa segundo a qual as coisas acontecem. Representadas em linguagem matemática, as relações são equações, e as taxas são derivadas. Equações contendo derivadas são equações diferenciais” (Boyce, Diprima & Meade, 2020, p. 1.). Podemos ressaltar que ao buscarmos uma dada solução de uma equação diferencial, “procuramos identificar um ou mais valores reais que satisfaça a equação. Porém, quando queremos ‘resolver’ uma EDO estamos ‘construindo’ uma função que venha satisfazer a equação diferencial dada” (Javaroni, 2007, p. 30, grifo da autora). Dessa maneira, é necessário perceber que para encontrar a solução de uma equação diferencial, isto é, uma família de funções apropriada, é preciso associar que os problemas e modelos são diferentes e que o processo de modelagem não pode ser reduzido a uma simples lista de regras (Javaroni, 2007; Boyce, Diprima & Meade, 2020).

Considerando a busca pelas soluções das EDO, nos centramos naquelas em que não há possibilidade de ter uma resposta analítica, ou seja, as funções que são soluções para as equações diferenciais não possuem uma forma explícita. Quando esses casos ocorrem, precisamos procurar outras maneiras de interpretar e observar o comportamento das soluções e isso muitas vezes é feito sem resolver, efetivamente, as equações (Boyce, Diprima & Meade, 2020). Dessa maneira, podemos analisar, por exemplo, a estabilidade das soluções de modo qualitativo por meio do plano de fases da solução encontrada. O plano de fases consiste em uma representação gráfica utilizada para analisar qualitativamente o comportamento de soluções de sistemas de EDO, especialmente em sistemas bidimensionais. Embora a criação de retratos de fase precisos, do ponto de vista quantitativo, necessite de auxílio computacional, é possível, em geral, esboçar retratos de fase à mão que são precisos do ponto de vista qualitativo e podem ser utilizados para esse fim (Boyce, Diprima & Meade). A análise do plano de fases de um sistema de EDO é feita a partir dos autovalores e autovetores da matriz associada e esse movimento é realizado de modo a identificar a estabilidade da solução e seu comportamento, que pode ser classificado em: nó, espiral, ponto de sela, entre outros. Uma das possibilidades para que as trajetórias no plano de fases sejam investigadas é com o uso das tecnologias digitais, considerando aspectos de exploração e visualização por meio da mídia.

Em vista disso, a partir de algumas noções de EDO e experimentação-com-tecnologias, desenvolvemos um estudo com discentes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Universidade Estadual Paulista (Unesp), no campus de Rio Claro, São Paulo. Nesse estudo, os educandos foram convidados a discutir, em grupos, algumas questões presentes numa folha de atividade, usando a calculadora gráfica. Com esse movimento, buscamos abordar o seguinte questionamento: o que emerge das interpretações e discussões com estudantes sobre exploração das trajetórias no plano de fases com calculadora gráfica?

Ressaltamos ainda que este trabalho está vinculado ao projeto "Ensino e aprendizagem de Matemática: possibilidades para a prática do professor"¹, que é uma parceria entre membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM) e a Casio Brasil Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda, com gerenciamento administrativo da Fundação para o Desenvolvimento da Unesp (Fundunesp).

Referencial Teórico

Para abordar o uso da tecnologia digital, mais especificamente a calculadora gráfica, nos baseamos na experimentação-com-tecnologias. A experimentação-com-tecnologias pode ser entendida como a integração das tecnologias no processo de ensino e aprendizagem para um estudo conceitual ou exploração matemática, de modo que o discente seja convidado a pensar com a mídia (Borba & Villarreal, 2005). Esse pensar com a tecnologia está atrelado a possibilitar que o estudante crie conjecturas e teste hipóteses com o artefato e, para além disso, o conhecimento que pode ser produzido nesse movimento é qualitativamente diferente do que o produzido com outras tecnologias, como por exemplo, o lápis e o papel (Borba & Villarreal, 2005). Outro aspecto considerado é a visualização, pois a partir dela associações e interpretações podem ser criadas, relacionando tanto o produto e a imagem visual em si quanto o processo e a atividade do “ver” (Arcavi, 2003).

Dessa maneira, a experimentação-com-tecnologias, conforme discutida por Borba & Villarreal (2005), potencializa a visualização gráfica ao permitir interações dinâmicas com representações matemáticas. Softwares e demais artefatos digitais possibilitam a manipulação de objetos matemáticos em tempo real, favorecendo a compreensão de conceitos abstratos. Essa abordagem está alinhada à visão de Arcavi (2003) sobre a visualização, que destaca seu papel essencial na construção do significado matemático. As tecnologias ampliam esse potencial da visualização ao oferecer múltiplas representações e simulações, possibilitando maneiras para que o aprendizado seja mais intuitivo. Portanto, entendemos a experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) expande as possibilidades da visualização matemática no ensino, particularmente no ensino de EDO, quando queremos fazer um estudo qualitativo de equações que nem sempre apresentam uma solução que dê para ser representada analiticamente de forma explícita.

Desenvolvimento metodológico e conceitual

A pesquisa abordada neste artigo foi desenvolvida ao longo do segundo semestre de 2022, em que a primeira autora foi monitora da disciplina de EDO na Unesp, campus Rio Claro. Durante o semestre, em parceria com o professor da disciplina, foi possível delimitar e elaborar uma oficina com calculadora gráfica com os graduandos do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da universidade. Para o processo de elaboração, levamos em consideração as anotações do diário do campo da pesquisadora, colocações do professor da turma referente às dificuldades dos estudantes e as respostas registradas nas provas dos discentes. Dessa maneira, ao delimitar a oficina buscamos trabalhar colaborativamente com o professor responsável.

¹ O projeto foi aprovado no processo nº 3221/2021 – CCP – FUNDUNESP.

Uma das dificuldades dos estudantes relatada pelo docente da disciplina foi a visualização das trajetórias das soluções das EDO no plano de fases e a partir disso foi sugerido que tal conteúdo fosse discutido com a calculadora gráfica. Ressaltamos que a atividade desenvolvida na oficina foi computada como parte da nota final dos discentes a pedido do professor, portanto, fomos responsáveis por elaborar em conjunto com o docente um plano de aula² e corrigir os apontamentos feitos pelos estudantes na folha de atividades³ disponibilizada.

Projetamos uma oficina para ser desenvolvida em duas etapas no contraturno da aula de EDO, ou seja, no período da tarde e com horário combinado com os estudantes. A oficina teve duração de quatro horas, em que na primeira parte da atividade abordamos algumas propriedades de matrizes e integral, além da interpretação de um sistema de equações diferenciais com valores dados, e a segunda para discutir a trajetória no plano de fases do sistema representado na Figura 1. Entendemos que o movimento de dividir em etapas foi importante para que os estudantes pudessem se habituar com os recursos presentes na calculadora gráfica, utilizados ao longo da atividade.

Neste texto focaremos nas discussões feitas pelos estudantes ao analisar o sistema de equações diferenciais, presente na Figura 1, considerando a variação de uma das entradas da matriz do sistema linear homogêneo. Os dados tratados neste texto são oriundos do registro do diário de campo, folha de atividade respondida pelos discentes e arquivos salvos da calculadora gráfica.

$$X' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} X$$

Figura 1. Sistema homogêneo discutido com os estudantes (Boyce, Diprima & Meade, 2020).

A partir do sistema de equações diferenciais, os seguintes questionamentos foram feitos: “descreva como as soluções dependem qualitativamente de α ; qual é o comportamento das trajetórias no plano de fases” (Dados de pesquisa, 2022). Destacamos que esse exercício foi retirado do livro de Boyce, Diprima & Meade (2020) e isso foi algo comentado com os graduandos. Os estudantes estavam habituados a fazer exercícios presentes no livro, entretanto buscamos abordar com eles uma outra maneira de desenvolver as propostas presentes no material didático utilizado pelo professor, que comumente eram resolvidas utilizando lápis e papel. Antes de discorrermos sobre algumas discussões feitas pelos graduandos, julgamos pertinente apresentar mais detalhadamente as funcionalidades da calculadora gráfica utilizadas durante a oficina, a saber: “Exe-Matriz” e “KhiCas”.

O modelo da calculadora utilizada para o desenvolvimento da atividade foi a fx-CG50. Essa calculadora possui 24 aplicativos em sua interface, sendo um deles o “Exe-Matriz”, que possibilita que outros sejam baixados em sua memória, como no caso do “KhiCas”.

² <https://drive.google.com/file/d/1oID-t33JdPLILFN-36JBtq0GTForK7fE/view?usp=sharing> - Acessado em: 15 fev. 2025

³ <https://drive.google.com/file/d/1h58CZzZm2EUbxQx3zkbqIUvF6yWIAgQo4/view?usp=sharing> - Acessado em: 15 fev. 2025

Na funcionalidade “Exe-Matriz” há a possibilidade de trabalhar com derivada, integral, matriz, vetores, entre outros. Dentro deste recurso é possível resolver uma integral, entretanto é retornado apenas o resultado, ou seja, conseguimos desenvolver apenas integrais definidas. Quando se tem o intuito de manipular variáveis, podemos recorrer à funcionalidade “KhiCas”.

O KhiCas é uma versão de software de um sistema de álgebra operacional para alguns modelos de calculadoras, entre eles o utilizado na oficina, que pode ser instalado como uma funcionalidade na fx-CG50. A partir dessa funcionalidade é possível realizar cálculos de modo que incógnitas e variáveis sejam entendidas como tal. Por exemplo, se calcularmos $\frac{d(x^2)}{dx}$, obteremos como resposta $2x$, enquanto que se a mesma operação for realizada na funcionalidade “Exe-Matriz”, sem definir o ponto x a ser calculado, aparece no visor da calculadora um erro de sintaxe.

Salientamos que as duas funcionalidades foram utilizadas em momentos distintos com os graduandos: a funcionalidade Exe-Matriz para observar algumas propriedades e discutir uma forma de demonstrar que uma afirmação é falsa - pensando em contra exemplos e a funcionalidade KhiCas para trabalhar o campo de direções de soluções.

Para iniciar a discussão, disponibilizamos para os estudantes um tutorial referente às funcionalidades “Exe-Matriz” e “KhiCas”. Para a abordagem envolvendo propriedades de integral e matrizes, questionamos os estudantes se a integral do produto é o produto das integrais e se a multiplicação de matrizes é comutativa, de modo a justificarem o porquê da conclusão obtida. Essas indagações foram feitas, pois ao discutir com o professor da disciplina e observar as respostas nas avaliações que os estudantes fizeram, eles haviam assumido a veracidade de tais propriedades para a resolução de exercícios. Dessa forma, buscamos abordar como poderíamos verificar se as afirmações eram verdade, culminando na demonstração por contra exemplo.

Após as reflexões sobre propriedades de integrais e matrizes, os graduandos foram convidados a refletir para além dos cálculos que já estavam habituados a fazer ao solucionar os exercícios nas aulas. Para dar início a esse movimento, determinamos a matriz de Jordan, autovalores e autovetores, associados a matriz A referente ao sistema $X' = AX$, diretamente na calculadora gráfica, conforme observamos na Figura 2:

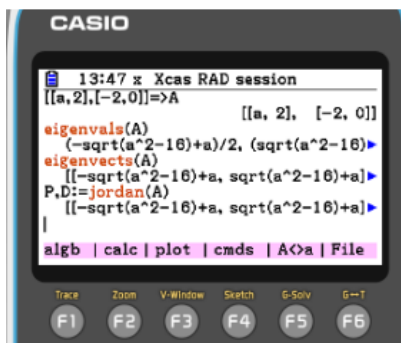


Figura 2. Interface do ambiente "KhiCas" na calculadora gráfica (Dados de pesquisa).

Ou seja, na Figura 2 fizemos o procedimento de definir a matriz A , em seguida calculamos os autovalores (eigenvals) para então calcularmos os autovetores (eigenvects) e por fim a matriz P e D^4 . Com esses dados em mãos, para o primeiro questionamento que envolvia a análise qualitativa da solução, os estudantes precisaram interpretar o que acontecia com as raízes advindas do cálculo dos autovalores da matriz e esse processo também foi feito utilizando a calculadora.

Para observar o que ocorria no sistema de EDO e como ficaria seu campo de direções, discutimos sobre $\sqrt{\alpha^2 - 16}$. Para essa etapa, convidamos os estudantes a analisar primeiro o cálculo e indicar o que pensavam que acontecia, baseando-se no que haviam visto ao longo das aulas. Em seguida, foram indagados sobre o que significava falar que o comportamento das trajetórias seria um nó assintoticamente estável, um nó instável e assim por diante e como poderíamos relacionar isso a variação de α .

Ao longo do desenvolvimento da oficina, focamos em discutir as interpretações feitas pelos estudantes no sistema de equações, representado na Figura 1, e identificar que, apesar de estarem com a mesma proposta de atividade, as respostas foram dadas de maneiras diferentes. Isto é, alguns graduandos optaram por representar o desenho visto na calculadora e outros focaram nos números testados para cada um dos intervalos obtidos para a interpretação dos autovalores e autovetores da matriz, que dependiam de α . Na Figura 3 podemos observar uma análise feita da trajetória do plano de fases por um dos grupos, em que eles apontam alguns valores para α e indicam que a interpretação foi obtida a partir da calculadora gráfica.

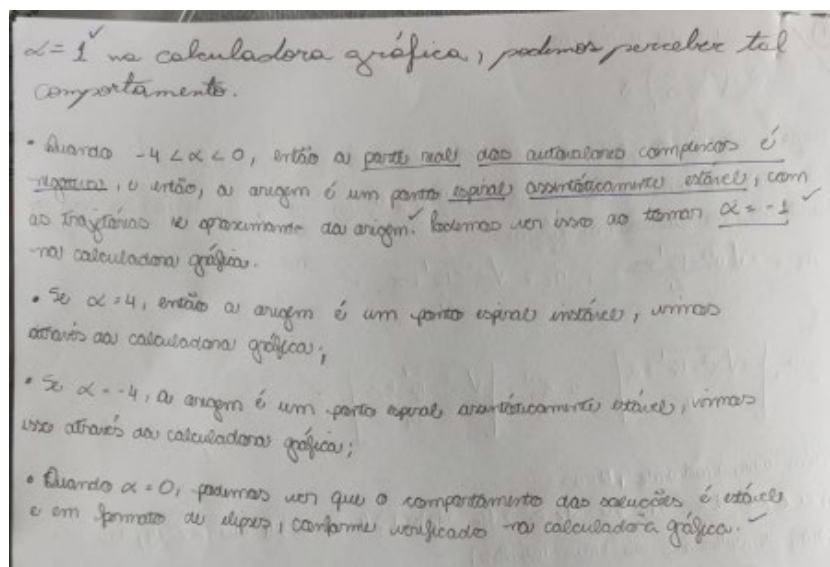


Figura 3. Recorte da análise do grupo e interpretações para a variação de α (Dados de pesquisa).

O grupo que fez a discussão presente na Figura 3 optou por testar mais valores além de $\alpha = 4$ e $\alpha = -4$, ressaltando que havia algumas trajetórias que aparentavam ser "mais rápidas" e outras "mais lentas". Esse aspecto foi discutido, pois indagamos se tais afirmações fariam sentido ao

⁴ Nesse processo efetuamos cálculos de modo que $P^{-1}AP = D$, em que dizemos que a matriz A é semelhante a matriz D ou que a matriz A é diagonalizável.

pensarmos na trajetória do plano de fases. Além disso, o apontamento feito pelo grupo, presente na Figura 3, sobre explicarem que a solução foi observada a partir do que foi exibido no visor da calculadora gráfica, foi algo geral nas respostas da turma. Portanto, salientamos as interpretações feitas por meio da visualização (Arcavi, 2003; Borba & Villarreal, 2005), ou seja, salientamos que os estudantes testaram outros valores para α com a calculadora, podendo observar e criar hipóteses do que viam em seu visor.

A fim de que os estudantes criassem conjecturas observando o que ocorria com o plano de fases, pedimos para que, utilizando alguns comandos presentes no tutorial, gerassem o campo de direções na calculadora e explicitassem o que viam. Esse movimento foi associado com as justificativas dos estudantes ao que era visualizado e com o que tinham visto na teoria. Por exemplo, se $\alpha = 4$ então a origem é um ponto espiral. Na Figura 4 a seguir, exibimos o visor da calculadora com os campos de direções para $\alpha = 4$, $\alpha = -4$ e $\alpha = 0$.



Figura 4. Interface da calculadora gráfica para os valores de $\alpha = -4$, $\alpha = 0$ e $\alpha = 4$ (Elaborado pelas autoras).

Neste ponto, julgamos importante destacar que apesar da calculadora explicitar a matriz de Jordan, os autovalores e os autovetores do sistema, a resposta obtida ainda precisou ser analisada pelos discentes, o que ressalta o aspecto de que mesmo que a tecnologia retorne o resultado, a interpretação do que é obtido parte do estudante e de sua interação com a mídia. A partir dessa justificativa, discutimos com os graduandos até que ponto a solução seria válida e se poderíamos confiar apenas no que era visualizado.

Ao tomar esses aspectos, buscamos abordar com os graduandos e refletir sobre o nosso olhar e a importância da visualização, tanto para a criação de conjecturas e interpretações quanto como até que ponto ela pode ser usada como parâmetro para afirmações na Matemática. Logo, no que tange à visualização, percebemos que os estudantes relacionaram o que era observado no visor da calculadora gráfica com a teoria vista em sala de aula ao apontar o comportamento das trajetórias. Com isso, ressaltamos que houve um processo de interpretação e reflexão sobre as imagens geradas com a tecnologia, de modo que puderam pensar sobre o que aparecia no display e desenvolver o entendimento sobre a temática estudada (Arcavi, 2003; Borba & Villarreal, 2005). Salientamos que a possibilidade de realizar testes e o rápido *feedback* (Borba & Villarreal, 2005) da calculadora auxiliou nesse processo de visualização pelos estudantes.

Portanto, destacamos que os discentes puderam atrelar a teoria vista em aula com a possibilidade de testar os valores no sistema, ou seja, entraram num processo de experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) a partir da visualização da trajetória no plano de fases com a calculadora gráfica, por meio de reflexões sobre o que era retornado na tecnologia

(Arcavi, 2003). Evidenciamos que esse tipo de abordagem gerou um movimento na sala de aula em que os graduandos puderam discutir até que ponto o que estava sendo visto poderia ser válido ou não e quais poderiam ser as possíveis justificativas para isso.

Resultados/conclusões

Ao longo do texto, apresentamos um recorte de uma discussão feita com estudantes do curso de Licenciatura e Bacharelado em Matemática da Unesp, campus Rio Claro. A partir de uma parceria com o professor da disciplina, desenvolvemos uma oficina com os graduandos para abordar as trajetórias do plano de fases de um sistema de equações diferenciais.

Para a discussão com os graduandos focamos na experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) e na visualização (Arcavi, 2003) gerada pela mídia, buscando atrelar compreensões qualitativas de resoluções de equações diferenciais. Ressaltamos que esse movimento foi feito de modo distinto pelos estudantes, o que é característica de um ambiente em que essa perspectiva teórica é abordada. Além disso, destacamos o diálogo com o professor da disciplina, de modo a considerar as dificuldades notadas em dúvidas ao longo das aulas, erros observados em provas, entre outros, para a elaboração da oficina.

Com o exposto neste trabalho, buscamos suscitar discussões acerca de propostas para além da mídia lápis e papel na sala de aula (Borba & Villarreal, 2005) no ensino superior, de modo que os estudantes possam visualizar no processo de ensino e aprendizagem outras maneiras de abordar um conteúdo. Entendemos que esse tipo de abordagem é importante, já que os graduandos são professores em formação e atuarão na rede básica de ensino ou até mesmo superior e, conhecer diferentes maneiras de tratar o mesmo conteúdo faz parte do seu processo formativo. Dito isto, compreendemos que para que um professor possa desenvolver atividades exploratórias, com tecnologias, de modo que o estudante tenha a possibilidade de experimentar práticas de ensino diferentes da tradicional, é necessário que ele tenha contato na formação inicial com diferentes tipos de metodologias.

Por fim, esperamos que as ideias trazidas neste trabalho contribuam com a discussão na área de ensino e aprendizagem com estudantes do ensino superior, principalmente das áreas de Licenciaturas e Bacharelado em Ciências Exatas de maneira geral, contribuindo no pensar na importância de experimentar com a tecnologia e o uso de diferentes abordagens com os professores em formação.

Referências e bibliografia

- Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning of mathematics. *Education Studies in Mathematics*, 52(3), 215–241.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer. (Mathematics Education Library, 39).
- Boyce, W. E., DiPrima, R. C., & Meade, D. B. (2020). *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno* (11a ed.). LTC. <https://doi.org/978-85-216-3712-7>
- Javaroni, S. L. (2007). *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias* (Tese de doutorado). Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.



Construyendo el aprendizaje: estadística gamificada con Minecraft Education

Yilmar Stiven **Barreto**
Universidad del Valle
Colombia
yilmar.barreto@correounivalle.edu.co

William Stevens **Perea**
Universidad del Valle
Colombia
william.perea@correounivalle.edu.co

Introducción

El proyecto realizado con estudiantes de los grados sexto y séptimo de secundaria busca desarrollar la habilidad en la resolución, planteamiento de problema, razonamiento e interpretación por medio de un enfoque educativo innovador utilizando como herramienta el programa Minecraft: education edition para la enseñanza de conceptos estadísticos y probabilísticos. Los objetivos principales presentados son conjeturar, predecir, justificar y concluir situaciones estadísticas, iniciando con actividades prácticas, como experimentos con dispensadores y crianza de ovejas del videojuego, este enfoque por medio de la gamificación y el aprendizaje experimental para incentivar y fomentar el pensamiento crítico es los estudiantes.

Antecedentes

El proyecto se fundamenta en estudios previos como "Approximating Mathematical Constants using Minecraft" (Galindo-Domínguez, 2019), donde se demostró la eficacia de entornos gamificados para enseñar conceptos abstractos. Además, se retoman principios de la gamificación (Teixes, 2014) y el aprendizaje colaborativo en entornos digitales (Moreira, 2010).

Metodología

Secuencia Didáctica

Organización estructurada de actividades de enseñanza-aprendizaje que tiene como objetivo guiar a los estudiantes hacia una construcción progresiva de conocimientos, como explicación de los conceptos básicos teóricos y operativos hasta la comparación entre los resultados experimentales y teóricos de sus hipótesis.

Gamificación

Se utilizan elementos, mecánicas y dinámicas propias de los juegos en contextos educativos, en la enseñanza de la estadística al integrar elementos y mecánicas propias de los videojuegos se permite crear entornos inmersivos donde los estudiantes puedan aprender conceptos estadísticos y probabilidad al implementar dinámicas como la recolección de datos.

Resultados

- Los estudiantes lograron comprender mejor la probabilidad al interactuar con experimentos dentro de Minecraft.
- La recolección y análisis de datos permitió que los alumnos realizaran inferencias estadísticas basadas en evidencia empírica
- La gamificación mejoró la comprensión de probabilidad y aleatoriedad al permitir contrastar teoría y experimentación, fortaleciendo el razonamiento lógico. Además, fomentó el pensamiento crítico y la formulación de hipótesis basadas en evidencia, integrando tecnología para acercar a los estudiantes al análisis de datos real.

Conclusiones

Minecraft: Education Edition resultó una herramienta eficaz para enseñar probabilidad y estadística en sexto y séptimo grado. La gamificación fomentó el pensamiento crítico, la resolución de problemas y el razonamiento lógico en un entorno inmersivo. Al convertir conceptos abstractos en experiencias prácticas, se logró una mayor comprensión y motivación en el aprendizaje.

Figuras



Figura 1. Minecraft education edition

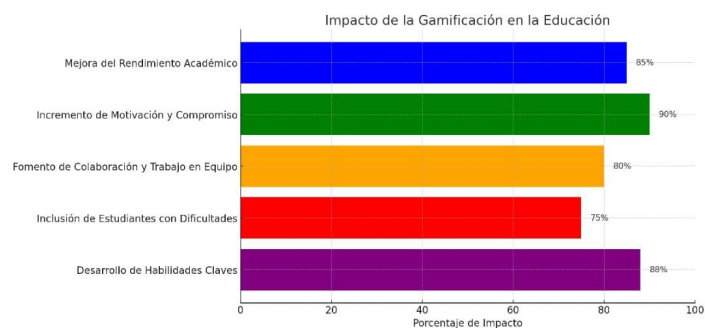


Figura 2. Gráfico gamificación



Figura 3. Actividad 4

Referencias y bibliografía

- Teixes, F. (2014). *Gamificación: fundamentos y aplicaciones*.
Moreira, M. A. (2010). El proceso de integración y uso pedagógico de las TIC. *Revista de Educación*, 352, 77-97.
Martínez-Padrón, O. J. et al. (2024). Sistemas de Creencias en Resolución de Problemas Probabilísticos. *Paradigma*, e2024002.
Galindo-Domínguez, H. (2019). Videojuegos en Educación Primaria: el caso *Minecraft*. *Pixel-Bit*, 55.



Desarrollo del pensamiento computacional a través de la Matemática escolar en secundaria

Juan **Martínez** Marín
Instituto Politécnico Nacional
México
jmartinezm2316@alumno.ipn.mx

Sonia **Valbuena** Duarte
Universidad del Atlántico
Colombia
soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Alejandro **Rosas** Mendoza
Instituto Politécnico Nacional
México
alerosas@ipn.mx

Resumen

Diferentes autores han resaltado los beneficios de la integración del Pensamiento Computacional (CT) y la Matemática escolar, ya que el CT entendido como una macrohabilidad compuesta por subhabilidades de las ciencias de la computación, mejora el aprendizaje de las Matemáticas. En consecuencia, han emergido modelos pedagógicos y políticas educativas orientadas al desarrollo del CT en el aula de Matemáticas. No obstante, en Colombia es notorio un déficit de CT en los estudiantes. El presente estudio analiza el desarrollo del CT en la Matemática escolar con estudiantes de secundaria. Para ello, se implementaron actividades enchufadas y desenchufadas, se analizaron el desempeño y la presencia de las subhabilidades de CT, propuestas por Wing (2006), en el desarrollo de las actividades realizadas por los estudiantes. Como resultado, se obtuvo que las subhabilidades de CT se desarrollan de forma casi secuencial durante la resolución de problemas en Matemáticas.

Palabras clave: Escolar; Matemática; Pensamiento Computacional; Resolución de Problemas; Secundaria.

Descripción del problema y justificación

Esta investigación aborda el análisis del desarrollo el Pensamiento Computacional, con el objetivo de fomentarlo y aplicarlo en la enseñanza de las Matemáticas en Colombia. Esto en aras de formar productores de tecnología y no consumidores, atendiendo a la brecha de creadores de tecnología (MinTIC, 2021) y el déficit de CT en los estudiantes en CT en Colombia (Fedesoft, 2023).

Marco teórico

Pensamiento Computacional y sus subhabilidades

El pensamiento computacional es un conjunto de procesos mentales que permite formular problemas y generar las respectivas soluciones para que una persona o un sistema computacional puedan ejecutarlas (Wing, 2006). Wing considera que el CT es una macrohabilidad compuesta por subhabilidades que interactúan entre sí y que permiten a los individuos resolver problemas complejos. Se destacan las siguientes: Abstracción, Descomposición, Pensamiento Algorítmico, Reconocimiento de Patrones, Validación y Depuración.

Metodología

Desde un enfoque cualitativo y un diseño de estudio de casos múltiple, se aplicaron actividades de CT en estudiantes de secundaria de una institución en Barranquilla/Colombia. La aplicación se hizo durante cinco meses y la información recogida se analizó a través de técnicas de observación no participante y de análisis de contenido.

Reflexiones finales

Se evidenció que las subhabilidades de CT se desarrollan de forma secuencial. Posibilitando su uso como una metodología para la resolución de problemas en Matemáticas y fuera de ella.

{Enlace a poster digital:

<https://docs.google.com/presentation/d/1yBgF3DUPsYWEUXbDYxH-5eudUvXwKm3z/edit?usp=sharing&oid=101051081129607091859&rtpof=true&sd=true>}

Referencias y bibliografía

- Fedesoft. (2023, marzo). *Bebras Colombia: Resultados 2022*. Federación Colombiana de la Industria de Software y Tecnologías Informáticas Relacionadas.
<https://drive.google.com/file/d/1OSiXTkgPRDRUahymZU7AdSrL9E9IzAZN/view>
- MinTIC (2021, febrero). “Colombia tiene déficit de programadores”: abren convocatoria para formar gratis a miles. Ministerio de Tecnologías de la Información y las Comunicaciones.
<https://www.mintic.gov.co/portal/inicio/Sala-de-prensa/Noticias/161923:Colombia-tiene-deficit-de-programadores-abren-convocatoria-para-formar-gratis-a-miles>
- Wing, J. (2006), Computational thinking, *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.
<https://doi.org/10.1145/1118178.1118215>



Descubriendo la Probabilidad en mi entorno: Laboratorio virtual para el aprendizaje de la Probabilidad

Jéssica **Jiménez-Moscoso**

Sección de Matemática, Universidad de Costa Rica

Costa Rica

jessica.jimenez_m@ucr.ac.cr

Alejandra **Sánchez-Ávila**

Universidad Estatal a Distancia

Costa Rica

alsanchez@uned.ac.cr

Introducción

Este laboratorio virtual tiene como objetivo fomentar el pensamiento crítico y reflexivo en el aprendizaje de la probabilidad, relacionándolo con el análisis de datos en situaciones de la cotidianidad.

Se pensó para apoyar la formación inicial de futuras personas docentes de matemática, con el fin de ofrecer una estrategia diferente para abordar algunos conocimientos de Probabilidad que se estudian desde la primaria hasta la secundaria, según el currículo escolar costarricense. Incluye videos y actividades interactivas propuestas para el uso tanto físico como digital, basados en contextos cotidianos de la persona usuaria. El diseño y confección de este material didáctico tiene estrecha relación con los principios de la Cultura Estadística.

Antecedentes

El currículo matemático costarricense vigente propone el estudio del área matemática denominada Estadística y Probabilidad, la primera se refiere a la descriptiva y la segunda a la inferencial, según se deduce de las definiciones brindadas por Batanero (2001, pp. 10-11). La formación universitaria en Estadística y Probabilidad, tanto para personas docentes de primaria como secundaria es escasa según Chaves (2007), Alpizar y Alfaro (2020).

Al respecto, Jiménez (2023) menciona que las personas participantes de su investigación indicaron que el uso de la tecnología digital impacta positivamente el estudio de la Estadística.

Por tanto, se propone la creación de un laboratorio virtual que a través de la simulación de situaciones lúdicas cotidianas y referentes a la Cultura Estadística (Salcedo, 2008), contribuya con la formación principalmente de la población de primaria y secundaria costarricense.

Procedimiento

La especialista de contenido elabora el guion y propone las actividades interactivas a partir de su investigación. La revisora del contenido lo aprueba para iniciar con la producción multimedial. El productor académico se reúne con las dos anteriores para determinar la metáfora, aclarar dudas, realizar sugerencias y elaborar un prototipo de mapa de navegación.

Luego, se contrata un diseñador encargado de crear los bocetos ilustrativos para el recurso, con el fin de que estos sean aprobados por los demás miembros del equipo.

Finalmente, el desarrollador hará uso de sus habilidades para programar el funcionamiento multimedial del recurso en cuestión, que incluye cuatro secciones: Importancia, sugerencias metodológicas, explicaciones y ejercicios.

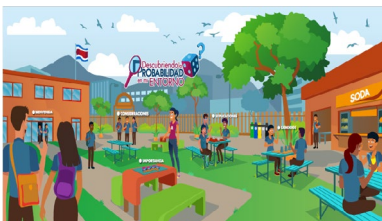


Figura 1. Página principal



Figura 2. Ejemplo de explicación



Figura 3. Ejemplo de ejercicio

Desafíos

Se pretende evaluar la funcionalidad del recurso implementándolo con docentes en formación de primaria y secundaria.

Se espera que los resultados de la evaluación evidencien: la ventaja de utilizar situaciones de la cotidianidad en la mediación pedagógica de esta área matemática; un impacto positivo en el aprendizaje de la Probabilidad a partir de los principios de la Cultura Estadística y los beneficios de usar las herramientas digitales para crear recursos didácticos interactivos y aumentar la comprensión de los contenidos estudiados por parte de las personas usuarias.

{Enlace a poster digital: <https://docs.google.com/presentation/d/1DUHlorX8-wQSYl-AGgnpg03OdSG1uAtt/edit?usp=sharing&ouid=101028196459748490451&rtpof=true&sd=true> }

Referencias y bibliografía

Alpízar, M. y Alfaro, A.L. (2012). Percepción de un grupo de docentes de educación primaria acerca de la preparación recibida durante su formación universitaria en cuanto al tema de las matemáticas. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 20(1), 1-31.
<https://revistas.ucr.ac.cr/index.php/aie/article/view/39978/40773>

Batanero, C. (2001). *Didáctica de la estadística*.

<https://www.ugr.es/~batanero/pages/ARTICULOS/didacticaestadistica.pdf>

Chaves, E. (2007). Inconsistencia entre los programas de estudio y la realidad de aula en la Enseñanza de la Estadística de Secundaria. *Revista Actualidades Investigativas en Educación*, 7(3), 1-35.

<http://revista.inie.ucr.ac.cr/autores/controlador/Article/accion/show/articulo/inconsistencia-entre-los-programas-de-estudio-y-la-realidad-de-aula-en-la-ensenanza-de-la-estadistica-de-secundaria.html>

Jiménez, J. (2023). *Fortalecimiento de las competencias digitales docentes en el uso de recursos tecnológicos para la aplicación de la metodología de resolución de problemas del profesorado de matemática, que labora en tres colegios de la Dirección Regional de Educación de Occidente*. [Tesis de maestría, Universidad Estatal a Distancia]. Repositorio institucional - Universidad Estatal a Distancia. Recuperado de:

<https://catalogosiidca.csuca.org/Record/UNED.000098985/Description>

Salcedo, A. (2008). Educación en Venezuela. El Caso de la Educación Básica y Media, ¿Formando una Cultura Estadística? *Ciencias Económicas*, 2(6), 47-65. <https://doi.org/10.14409/cc.v2i9.1128>



Dificuldades de licenciandos em Matemática em uma atividade investigativa com uso da realidade aumentada

William Vieira

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Brasil

wvieira@ifsp.edu.br

Igor Rocha Siqueira

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos. Bolsista de IC da FAPESP.
Brasil

igor.rocha@aluno.ifsp.edu.br

Roberto Seidi Imafuku

Centro de Pesquisa e Inovação em Educação Matemática e Formação de Professores (CEPIN) do Instituto Federal de São Paulo – IFSP campus Guarulhos
Brasil

roberto.imafuku@ifsp.edu.br

Resumem

Discute-se, neste artigo, as dificuldades reveladas por estudantes de licenciatura em Matemática em uma atividade investigativa sobre geometria plana e espacial com o uso da realidade aumentada. A atividade foi aplicada para 16 estudantes durante a Semana da Matemática ocorrida do campus onde eles estudam. Para as análises, são consideradas as fichas preenchidas e as gravações das telas dos celulares dos participantes. O raciocínio matemático e o desenvolvimento de seus processos é o referencial teórico adotado nas análises das respostas. De maneira geral, foram identificadas dificuldades dos participantes com os processos de classificar e justificar e dificuldades em definir um losango. Além disso, observou-se que alguns participantes justificaram conclusões baseados apenas na visualização dos objetos construídos.

Palavras-chave: Educação Matemática; Ensino e Aprendizagem; Raciocínio Matemático; Atividades Investigativas; TDIC; Realidade Aumentada; Formação de Professores; Brasil.

Introdução

As Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC) têm, cada vez mais, participado e transformado os diversos âmbitos da vida cotidiana e dos meios educacionais. A área da Educação Matemática também sofre a influência das TDIC, e professores e pesquisadores têm investigado sobre as possibilidades para os processos de ensino e de aprendizagem e a formação de professores que são colocadas com o desenvolvimento de novos recursos tecnológicos.

Para a área da Geometria, pesquisadores apontam a importância do uso de softwares de geometria dinâmica no ensino de diversos temas, pois estes podem potencializar processos de visualização de objetos, identificação de conceitos e propriedades, e formulação de conjecturas (Amorim; Reis; Ferreira, 2024; Soares, Santana, Santos, 2022).

Mais recentemente, a ferramenta de realidade aumentada (RA) tem se apresentado como um novo recurso tecnológico e suas potencialidades para o ensino de geometria espacial vêm sendo investigadas. Por exemplo, Blass e Junqueira (2023) avaliaram o desenvolvimento do pensamento visual-espacial a partir de atividades de envolveram o uso da calculadora GeoGebra com o recurso da RA (GeoGebraAR). Segundo os eles, os resultados indicaram que “(...) houve diferenças significativas na percepção visual-espacial dos sujeitos participantes da oficina com a inserção dos recursos de visualização GeoGebra Calculadora 3D e RA” (p. 11).

Gomes, Reis e Ferreira (2024) trabalharam atividades exploratórias sobre cubos, paralelepípedos, pirâmides, cilindros, cones e esferas com uso do GeoGebraAR para estudantes do segundo ano do Ensino Médio. Segundo os autores, as atividades aplicadas na investigação permitiram que os participantes trabalhassem o processo de visualização de objetos por diferentes perspectivas e foi uma nova maneira de desenvolver ideias, conceitos e propriedades dos sólidos geométricos. Em investigação junto a professores da educação básica, Batista e Monteiro (2023) desenvolveram atividades de ensino com o uso da RA e destacam, entre suas conclusões, que o uso desta tecnologia incentivou o trabalho coletivo, a partilha de descobertas e a discussão de ideias entre os docentes, situações que podem favorecer processos de ensino e de aprendizagem.

Embora, no período recente, diversos avanços tenham sido observados no ensino de Matemática com o uso de tecnologias, Lecrer e Pazuch (2020) destacam a necessidade de expansão de pesquisas que desenvolvam atividades de ensino com o uso de softwares de geometria dinâmica e que investiguem a formação de futuros professores.

Estes trabalhos indicam potencialidades do uso da RA para o ensino de Matemática e também colocam a necessidade de se pensar novas atividades, com o uso de tecnologias, que colaborem com os processos de ensino e de aprendizagem e a formação de professores. Pensando em colaborar com essas perspectivas, neste trabalho discutimos as dificuldade e ideias apresentadas por estudantes de Licenciatura em Matemática para uma atividade investigativa que envolve geometria plana e espacial com uso da RA. O desenvolvimento do raciocínio matemático e de seus processos é o referencial teórico adotado na pesquisa.

Referencial teórico

A partir de uma revisão sobre as diversas ideias e teorias que tratam da definição e/ou significado do raciocínio matemático, Jeannotte e Kieran (2017) identificam quatro perspectivas principais: a dicotomia entre atividade e produto, a natureza inferencial do raciocínio matemático, os objetivos e funções do raciocínio matemático, e os aspectos estruturais e processuais da Matemática. Trabalhando estas perspectivas com a perspectiva comportamental (*commognitive perspective*), definem o desenvolvimento do raciocínio matemático, e seus processos, na sala de aula como “(...) um processo de comunicação com os outros ou consigo mesmo, que permite inferir enunciados matemáticos de outros enunciados matemáticos” (Jeannotte & Kieran, 2017, p. 7). De maneira geral, os aspectos estruturais incluem as formas dedutiva, indutiva e abdutiva, e os aspectos processuais envolvem processos de identificação de semelhanças e diferenças (como generalizar, conjecturar, identificar padrões, comparar e classificar), processos de validação (como validar, justificar e provar), e o processo de exemplificação (Jeannotte & Kieran, 2017).

Sobre o desenvolvimento de processos do raciocínio matemático, Stylianides (2009) aponta que o processo de generalização e o de justificação das afirmações matemática desempenham papel essencial para a compreensão da Matemática em todos os níveis educacionais. Este autor define as atividades de conjecturar, de generalizar e de provar como fundamentais no processo de dar sentido e estabelecer conhecimento matemático, o que não envolve apenas a investigação de ideias ou objetos matemáticos, mas sim o levantamento de hipóteses e a identificação de relações que sustentam a veracidade ou a falsidade de uma determinada afirmação matemática.

Segundo Jeannotte e Kieran (2017), os processos de exemplificar, conjecturar, comparar e de classificar apoiam o desenvolvimento de generalizações e justificativas. O processo de exemplificar permite estabelecer afirmações sobre um problema ao produzir elementos que apoiam conjecturas, generalizações e justificativas. Os processos de comparar e de classificar permitem agrupar e/ou separar objetos matemáticos, com base em propriedades, características ou definições, a partir da identificação de pontos comuns e distintos. (Jeannotte & Kieran, 2017).

Na atividade investigativa discutida neste trabalho buscamos observar o desenvolvimento dos processos de conjecturar, comparar, classificar e justificar devido ao papel central que estes desempenham no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Materiais e métodos

Para atingir nossos objetivos, realizamos um minicurso durante a Semana de Matemática de uma instituição federal de ensino, que teve duas horas e quarenta minutos de duração. Tivemos a participação de 16 estudantes da Licenciatura em Matemática. Os participantes trabalharam em duplas e algumas foram previamente selecionadas para realizarem a gravação de tela e áudio de seus celulares, e utilizaram o gravador de tela do próprio celular. O critério de escolha das duplas gravadas foi a disposição e interesse destes em realizar as gravações. Quatro duplas realizaram as gravações. Embora tenham trabalhado em duplas, cada estudante respondeu sua própria ficha de atividade. Todos os celulares utilizados na investigação tinham o recurso da

RA disponível. Nenhum dos participantes havia tido contato com a RA anteriormente. Todos assinaram o termo de consentimento livre e esclarecido (TCLE) de participação na pesquisa e são tratados por pseudônimos na discussão dos resultados.

No início do minicurso realizamos uma explanação sobre a RA na calculadora 3D do aplicativo GeoGebra para celular e sobre ferramentas que seriam utilizadas na atividade. Em seguida, entregamos uma ficha com orientações de uma construção a ser realizada no GeoGebraAR, conforme destacado Figura 1. A ficha também apresenta duas questões que deveriam ser investigadas, discutidas e respondidas pelos participantes com base na construção realizada. Após a realização da atividade pelos participantes houve uma discussão coletiva, conduzida pelos pesquisadores, e dificuldades e dúvidas dos estudantes foram sanadas.

Construção:

- Abra o GeoGebra 3D e projete o ambiente da realidade aumentada (AR);
- Esconda os eixos coordenados;
- Construa dois pontos A e B;
- Utilizando a ferramenta "CUBO", construa um cubo clicando nos pontos A e B;
- Obtenha os pontos médios dos segmentos AE e CG;
- Construa os segmentos HI, IB, BJ, JH (você pode digitar o comando segmento(H,I) direto na caixa de comandos).

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

2) A figura construída é plana? Justifique sua resposta.

Figura 1. Logo reduzido de REDUMATE.

Com a questão 1, esperávamos que os participantes concluíssem, com base em seus conhecimentos sobre quadriláteros e apoiados pelas ferramentas de medição (ângulo e distância) do GeoGebraAR, que a figura formada é um losango. Entendemos que, ao resolverem a questão os estudantes mobilizariam os processos de classificação e justificação, uma vez que deveriam, a partir da identificação das medidas dos ângulos e dos lados, reconhecer que o quadrilátero formado é um losango e, resgatando a definição deste quadrilátero, justificar sua decisão.

Com a questão 2, esperávamos que os participantes, usando a ferramenta plano por três pontos do GeoGebraAR, construíssem planos usando três pontos distintos do losango e observassem na janela de álgebra do GeoGebraAR que as equações obtidas são equivalentes e, então, concluíssem que a figura formada é plana. Entendemos que, ao utilizarem a ferramenta plano por três pontos, os participantes deveriam mobilizar a definição de figuras planas e, a partir de um processo de comparação das equações obtidas e do resgate de conhecimentos sobre equações do plano e equações equivalentes, seriam capazes de classificar a figura e justificar suas conclusões. Seguimos com a discussão dos resultados.

Discussão dos resultados

Conforme destacamos anteriormente, nenhum dos participantes havia tido contato com a RA anteriormente, contudo não tiveram dificuldades em realizar a construção proposta neste ambiente. Além disso, o novo recurso tecnológico foi recebido com bastante entusiasmo e interesse pelos estudantes e, nas discussões que se seguiram à realização da atividade, muitos indicaram querer usar este tipo de recurso e de atividade em suas futuras aulas. A Figura 2 apresenta a construção realizada pela dupla João e Maria.

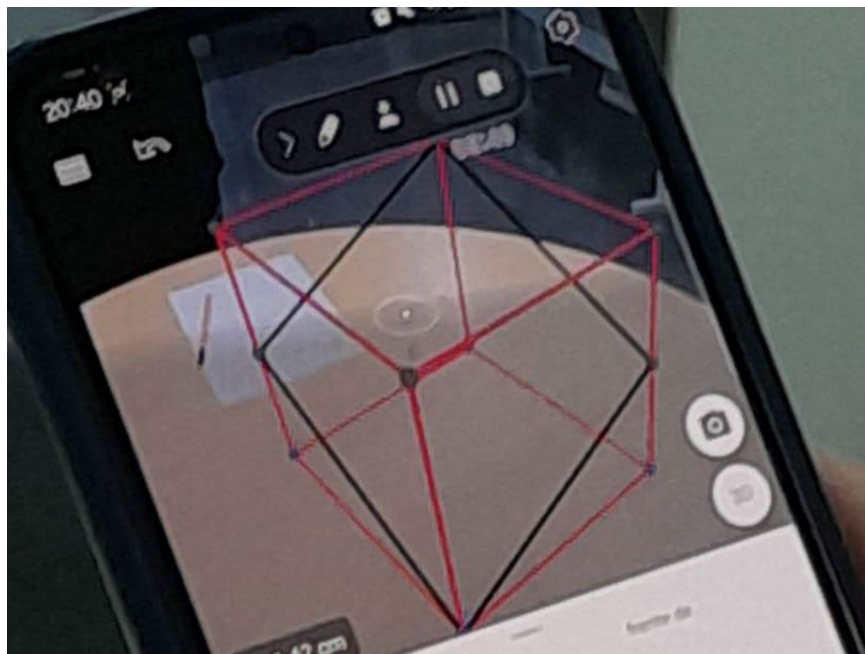


Figura 2. Construção realizada pela dupla João e Maria

Para a questão 1, apenas cinco dos 16 participantes conseguiu conjecturar, classificar e justificar que o quadrilátero construído é um losango, o que evidencia bons conhecimentos desses estudantes sobre a definição de quadriláteros, o estabelecimento de conjecturas e dos processos de classificação e justificação. A Figura 3 apresenta a resposta de Andrea, que exemplifica essa situação.

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

A figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH é um losango, pois todos os lados são congruentes, mas os ângulos opostos são congruentes e diferentes de 90° .

A figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH é um losango, pois todos os lados são congruentes, mas os ângulos opostos são congruentes e diferentes de 90° .

Figura 3. Resposta da participante Andrea para a questão 1.

Quatro participantes classificaram o quadrilátero como losango, porém não apresentaram justificativas que sustentassem suas conclusões. Dois participantes observaram apenas as medidas dos ângulos internos do quadrilátero e o classificaram como paralelogramo. A resposta de Beto (Figura 4) exemplifica essa situação.

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

É formado um ~~quadrado~~ paralelogramo, pois os ~~segmentos~~ ângulos são congruentes 2 a 2, sempre opostos

É formado um paralelogramo, pois os ângulos são congruentes 2 a 2, sempre opostos.

Figura 4. Resposta do participante Beto para a questão 1.

Outros dois participantes classificaram a figura apenas com quadrilátero, sem apresentar justificativa. Três participantes classificaram o quadrilátero como quadrado e a justificativa de Carlos (Figura 5) chama a atenção, pois está baseada na perspectiva da observação do objeto construído.

1) Qual a figura formada pela união dos segmentos HI, IB, BJ, JH? Justifique sua resposta.

A figura construída pode ser vista como quadrado a depender do ângulo de visão

A figura construída pode ser vista como quadrado a depender do ângulo de visão.

Figura 5. Resposta do participante Carlos para a questão 1.

Embora o processo de visualização seja um dos grandes beneficiados pelo uso das TDIC e particularmente pelo recurso da RA, a resposta de Carlos indica que os limites e usos das tecnologias digitais para os processos de ensino e de aprendizagem de Matemática precisam ser cuidadosamente trabalhados junto aos futuros professores, para que estes possam utilizá-las de forma coerente e significativa em suas aulas, e para que sejam, também, capazes de discutir esses limites com seus estudantes.

Para a questão 2 (Figura 1), oito participantes apontaram que a figura é plana, pois possui duas dimensões e está contida num plano. A resposta de Daniela (Figura 6) exemplifica essa situação.

2) A figura construída é plana? Justifique sua resposta.

Sim, possui duas dimensões. Confirmamos isso traçando um plano

Sim, possui duas dimensões. Confirmamos isso traçando um plano.

Figura 6. Resposta da participante Daniela para a questão 2.

Na gravação da dupla Daniela e Eduardo verificamos que eles observam o losango construído de várias perspectivas e conjecturam que trata-se de uma figura plana. Para confirmar a conjectura, constroem um plano pelos pontos I, J (pontos médios de AE e CG) e H (Figura 7a). Então, Daniela diz: “Veja se passa no B (quarto vértice do losango)” e, ao ouvir uma confirmação de Eduardo a partir de uma vista que avalia como pouco conveniente (Figura 7b), aponta: “Não, você tem que ver de lado”. Em seguida, recebe o celular das mãos de seu colega, muda a perspectiva de visualização da construção (Figura 7c) e destaca, com entusiasmo: “É plano! É plano!”.

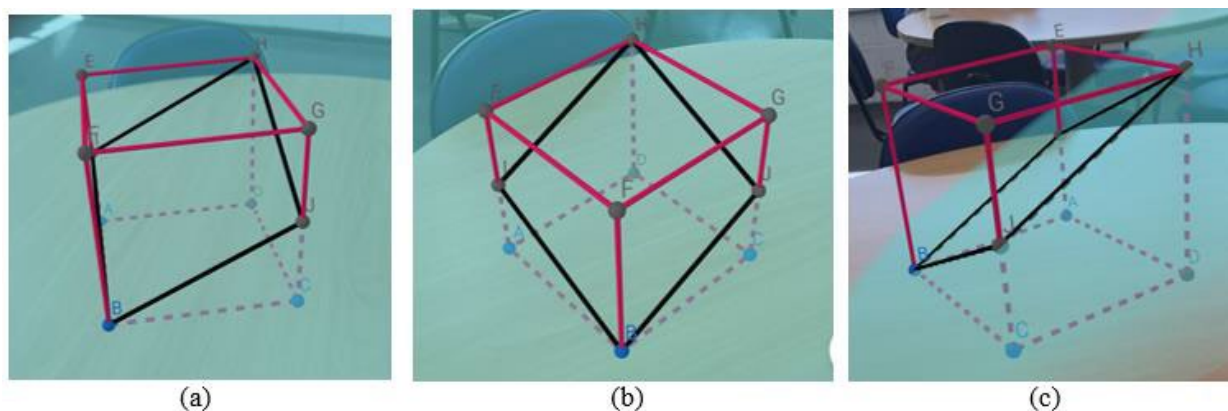


Figura 7. Vistas observadas pela dupla Daniela e Eduardo.

Em sua resposta, a dupla Daniela e Eduardo repete o problema observado para Carlos (Figura 5) e baseia sua decisão somente na observação da imagem. Nesse caso, é verdade que o ponto B pertence ao plano construído (e que a figura é plana), contudo apenas a visualização da construção não é suficiente para garantir este fato. Nenhuma das duplas gravadas construiu mais de um plano ou observou equações na janela de álgebra, conforme era esperado. Quatro participantes afirmaram que o quadrilátero construído é plano pois “não tem profundidade” e os demais quatro não apresentaram justificativa para suas decisões.

As respostas para a questão 2 indicam que boa parte dos participantes tem a ideia de que, para uma figura ser plana, ela precisa estar contida num plano. No entanto, também fica evidenciado pelas respostas dificuldades com o processo de justificação e uma tendência em pautar as decisões pela visualização dos objetos. O processo de comparação, que esperávamos observar no trabalho com as equações dos planos, não pode ser avaliado uma vez que nenhum dos participantes realizou a construção de mais de um plano.

Conclusões

Uma avaliação geral das respostas indica que, embora alguns estudantes tenham sido capazes de conjecturar, classificar e justificar corretamente que o quadrilátero da questão 1 é um losango, para a maioria dos participantes ficaram evidenciadas dificuldades com relação aos processos de classificação e de justificação do raciocínio matemático, além de dificuldades com os elementos necessários para definir um quadrilátero.

No caso da questão 2, boa parte dos participantes mostrou entender o que garante uma figura ser plana, contudo as justificativas apresentadas para isso se mostraram frágeis, pois foram baseadas apenas na visualização de objetos construídos.

Potencialidades da RA foram evidenciadas na realização da atividade, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento do processo de visualização e corroboram as posições defendidas por Blass e Junqueira (2023) e Gomes, Reis e Ferreira (2024). No entanto, o desenvolvimento da atividade também revelou que os limites do processo de visualização como suporte para a elaboração de justificativas em Matemática precisam ser cuidadosamente trabalhados e discutidos com estudantes e futuros professores. As conclusões tomadas por Carlos e pela dupla Daniela e Eduardo nas questões 1 e 2, respectivamente, evidenciam essa perspectiva.

Por fim, entendemos que a atividade investigativa aplicada na investigação cumpriu seu papel, pois foi recebida com bastante entusiasmo pelos participantes, possibilitou trocas e discussões entre eles, além de ter permitido que muitas dificuldades e confusões fossem reveladas e pudessem ser dirimidas.

Agradecimentos

À FAPESP, pela bolsa de Iniciação Científica concedida (processo no. 2023/14362-3)

Referências

- Amorim, S. L. G.; Reis, F. S. & Ferreira, N. (2024). A utilização integrada da realidade aumentada no software GeoGebra por meio de dispositivos móveis para a aprendizagem de geometria espacial no ensino médio. *VIDYA*, 44(1), 211–230. DOI: <https://doi.org/10.37781/vidya.v44i1.4771>
- Batista, C. C. y Paulo, R. M. (2023). Formação do professor para ensinar matemática com Realidade Aumentada: o que se mostra? *Boletim GEPEM*. n. 82, 66–82. <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/704>
- Blass, L.; Junqueira y S. M. S. (2023). Os modos do pensamento visual-espacial na inserção da calculadora GeoGebra 3D e realidade aumentada. *Revista Electrónica de Investigación en Educación en Ciencias*, 18(2), 1-11. DOI: <https://doi.org/10.54343/reiec.v18i2.362>
- Jeannotte, D. y Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 96, 1–16.
- Lecrer, O. P. V. G. y Pazuch, V. (2020). O ensino de Geometria Espacial: um panorama de pesquisas por meio de uma metassíntese. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 20(9), 38-61. DOI: <https://doi.org/10.33871/22385800.2020.9.20.38-61>
- Soares, F. R., Santana, J. R. & Santos, M. J. C. (2022). A realidade aumentada na aprendizagem de Geometria Espacial e as contribuições da Sequência Fedathi. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 13(4), 1-25.
- Stylianides, G. (2009). Reasoning-and-proving in school mathematics textbooks. *Mathematical Thinking and Learning*, 11(4), 258-288. DOI: <https://doi.org/10.1080/10986060903253954>



Dilema ético de los docentes dominicanos al usar la IA

Miledis Teresa **Tavarez** Marzan
Universidad Autónoma de Santo Domingo
República Dominicana
miledyst@gmail.com
Danitza Soledad **Mirabal** Aybar
Universidad Autónoma de Santo Domingo
República Dominicana
danitzamirabal920@gmail.com

Resumen

En los últimos años se experimentó una disrupción con el uso masivo de la tecnología en todos los aspectos, que reorientó el estilo de vida y de trabajo de los seres humanos. Desde el año 2023 entró en funcionamiento el CHAGPT, una Inteligencia Artificial de plataforma conversacional, que vino a acompañar diversos procesos produciendo una eclosión de aplicaciones innovadoras y planteándose discusiones éticas para su utilización. El sector educativo no quedó exento de ese proceso, las empresas desarrolladoras de software han creado diferentes aplicaciones de IA, no obstante, todas sus bondades, tanto la UNESCO (2022) como la ONU (2022) plantean a los Estados miembros recomendaciones éticas para regular su uso. Docentes y Gestores sienten muchas inquietudes acerca de la integración y el uso de la IA en sus centros educativos. Esta Investigación busca analizar cuáles son los dilemas éticos que enfrentan los Docentes al usarla en sus procesos educativos.

Palabras clave: Dilema Ético; Formación Docente; Innovación Educativa; Inteligencia Artificial; Tecnología.

Definición y relevancia del problema

Como investigadoras y formadoras de docentes del área de Matemática, se ha venido trabajando sobre la IA con el objeto de conocer las opiniones de los Docentes dominicanos sobre ellas y sus temores acerca de la utilización en su área. Desde el año 2023 se inició una

investigación exploratoria con Docentes dominicanos del área de Matemática y luego se extendió a otras áreas, debido a lo novedoso del tema y de las inquietudes encontradas.

Ante los primeros hallazgos se encontró que los Docentes querían conocer más sobre la IA, sus herramientas y solicitaban formación permanente y guiada, así como mejores condiciones tecnológicas y estructurales para los Centros Educativos. Además, se notó que tenían dudas de como integrarlas para que sus estudiantes pudiesen aprender ya que tienen algunas incertidumbres en relación a las tareas, los aprendizajes, las evaluaciones y los datos escolares frente a muchos delincuentes cibernéticos.

El Docente de cualquier área del conocimiento al usar la inteligencia artificial (IA) puede presentar diversos dilemas éticos, los cuales surgen de la necesidad de equilibrar los beneficios potenciales de la IA con las preocupaciones sobre la equidad, la privacidad, la autonomía, el papel del Docente en el Proceso Educativo, así como el rol de los estudiantes frente al proceso de aprender solo y el manejo de los conocimientos de la humanidad.

El campo de la Inteligencia Artificial (IA) en la Educación Matemática está experimentando un crecimiento exponencial, especialmente con la disrupción de herramientas como ChatGPT a partir de 2023. El estado del arte actual se centra en cómo la IA puede transformar la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, buscando personalizar, mejorar la eficiencia y la calidad de la experiencia educativa (Gemini, 2025).

Frente a esas dudas se elaboró la siguiente pregunta para esta investigación ¿cuáles son los dilemas éticos de los Docentes frente al uso de la IA en sus procesos educativos?, esto debido a que los Docentes se muestran positivos a integrar la IA, pero al desconocer sus alcances y manejo no están dispuestos a correr riesgos en sus procesos de enseñanza. De ahí que el objetivo general de la presente investigación es analizar cuáles son los dilemas éticos de los Docentes dominicanos frente al uso de la IA en sus procesos educativos con el fin de aportar en las estrategias dominicanas para el uso de la IA conforme a las recomendaciones de la UNESCO.

Referencial teórico

La Inteligencia Artificial se ha ido incluyendo en todos los procesos de la vida económica y social de la humanidad, de ahí que hay muchas investigaciones tratando de definir su actuación y sus consecuencias, desde sus inicios hasta la fecha actual en la que nos enfrentamos a una IA generativa. Se sabe que hay muchas ventajas en su utilización como herramientas de apoyo a las acciones humanas, pero ante la posibilidad de sustituir al ser humano en muchos oficios tradicionales se han creado alertas.

La Inteligencia Artificial (IA), como campo formal, surgió en la Conferencia de Dartmouth en 1956, donde John McCarthy acuñó el término y reunió a figuras clave como Marvin Minsky, Allen Newell y Herbert Simón. Estos pioneros exploraron la posibilidad de crear máquinas capaces de simular la inteligencia humana, abarcando el razonamiento, el aprendizaje y la resolución de problemas. Aunque las raíces conceptuales se remontan a pensadores como Alan Turing y su famoso "Test de Turing" en 1950, que planteaba la pregunta de si una máquina podía pensar, fue en Dartmouth donde se sentaron las bases para que la IA se estableciera como una

disciplina académica, marcando el inicio de un camino lleno de avances y desafíos. (Gemini, 2025).

La Inteligencia Artificial (IA) es una rama de las ciencias de la computación que se dedica al diseño y construcción de sistemas capaces de realizar tareas que, tradicionalmente, requieren inteligencia humana. Sus características principales incluyen la capacidad de aprender de datos (aprendizaje automático), razonar para resolver problemas, percibir su entorno (a través de datos sensoriales), comprender y procesar el lenguaje natural, y actuar de forma autónoma para lograr objetivos. (Gemini, 2025). A muchos les asusta esta posibilidad y se plantea que el factor crítico de la inteligencia humana está en la interpretación de la realidad, mientras que la inteligencia artificial tiene como factor de avance la eficacia y eficiencia en la interpretación de la realidad (Cabanelas, 2019).

La ONU (2022) y la UNESCO (2022) que son organizaciones de alcance mundial han fijado su posición ante la inminente permanencia de la Inteligencia Artificial, la definen como máquinas o sistemas informáticos con capacidades de aprendizaje parecidas al ser humano. En materia educativa, la IA ha tratado de resolver problemas relacionados con: Personalización del Aprendizaje, Evaluación y Retroalimentación Automatizada, Herramientas para el Desarrollo de Habilidades Computacionales, el Pensamiento Crítico, Integración con Metodologías Activas, Generación de Contenido y Ejercicios. Sin embargo, es importante abordar los desafíos y consideraciones éticas para garantizar que la IA se utilice de manera responsable y equitativa (UNESCO, 2025).

Ante el avance de la IA en todos los campos de la sociedad y de sus grandes posibilidades para aprender y dar soluciones sustituyendo al ser humano en algunos casos es necesario abordar el tema ético y sus dilemas. La ética se define como la rama de la filosofía que estudia la moral y el comportamiento humano, mientras que un dilema ético se presenta cuando una persona se enfrenta a una situación en la que debe elegir entre dos o más opciones de comportamiento, y cada una de ellas implica un conflicto entre valores o principios morales (Pombo, 2023).

Una de las recomendaciones de la (UNESCO, 2022) es que considera la ética como una base dinámica para la evaluación y la orientación normativa de las tecnologías de la IA, tomando como referencia la dignidad humana, el bienestar y la prevención de daños y apoyándose en la ética de la ciencia y la tecnología. En ese sentido aborda la ética de la IA como una reflexión normativa sistemática, basada en un marco integral, global, multicultural y evolutivo de valores, principios y acciones interdependientes, que puede guiar a las sociedades a la hora de afrontar de manera responsable los efectos conocidos y desconocidos de las tecnologías de la IA en los seres humanos, las sociedades, el medio ambiente y los ecosistemas, les ofrece una base para aceptar o rechazar las tecnologías de la IA.

El uso inminente y masivo de la IA, ha provocado que organizaciones e investigadores se hayan preocupado por la regulación ética en el uso de la misma. En ese sentido la Dra. Gabriela Ramos, subdirectora General del área de ciencias sociales de la (UNESCO, 2021), señala que:

La tecnología de inteligencia artificial aporta grandes beneficios en muchos ámbitos, pero sin unas barreras éticas corre el riesgo de reproducir los prejuicios y la discriminación del mundo real, alimentar las divisiones y amenazar los derechos humanos y las libertades fundamentales.

Por otro lado, Flores & García (2023), plantean aunar esfuerzos para la creación y puesta en marcha de un Observatorio Ético de IA en materia de Educación, de base transversal y multidisciplinar, cuyo propósito implique analizar iniciativas relevantes de IA aplicadas a este campo. Además, existe el Observatorio del impacto social y ético de la Inteligencia Artificial OdiselA, fundado en noviembre del 2020, el cual ha creado un documento que se llama Guía de buenas prácticas en el uso de la inteligencia artificial ética (Belloto, 2022).

Siendo el sector educativo el mayor responsable de orientar y formar adecuadamente a los ciudadanos, no debe estar ajeno a los avances tecnológicos (Tomalá, 2023). La IA se utiliza para mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje ya que, con su ayuda, los estudiantes pueden aprender de manera personalizada y autónoma, a su ritmo y con el apoyo de un tutor inteligente (Hattie, 2020). Estos aspectos son fundamentales para que los sistemas educativos puedan revolucionar, ya que los Docentes serían acompañados por tutores que organizan actividades para los alumnos que más necesitarían de ese apoyo, creando actividades novedosas y motivantes para el logro de los propósitos educacionales y que luego el docente puede ver como reportes generados por la IA acerca del progreso de cada alumno.

Se reconoce en la Matemática Educativa una herramienta poderosa que nos permite comprender el mundo que nos rodea, resolver problemas y tomar decisiones informadas (Gemini, 2025). Esta área favorece el desarrollo del pensamiento lógico, crítico y la resolución de problemas mediante otra forma de conocer el universo. Los Docentes tienen el temor de que al usar la IA se pierdan esas posibilidades en sus alumnos por lo que, aunque reconocen sus beneficios tienen dudas y no cree que esta herramienta le favorezca debido a las facilidades que aporta la Inteligencia Artificial que hasta les impide pensar inclusive, según expresan.

La relación entre la docencia en Matemáticas y la Inteligencia Artificial (IA) está transformando la forma en que se enseña y se aprende esta disciplina. La IA tiene el potencial de revolucionar la docencia en Matemáticas, haciendo que el aprendizaje sea más personalizado, interactivo y efectivo (Bravo, 2023). Por todo ello la Formación Docente en Inteligencia Artificial (IA) debe ser integral y práctica, enfocándose no solo en el conocimiento de las herramientas, sino también en el desarrollo de una mentalidad crítica y ética. Los programas deben capacitar a los educadores para comprender los fundamentos de la IA, explorar su potencial pedagógico para personalizar el aprendizaje y automatizar tareas administrativas, y a la vez, saber identificar y mitigar los sesgos algorítmicos y los riesgos éticos. (Gemini, 2025).

En la República Dominicana se están dando pasos importantes hacia la integración de la IA en la Educación Matemática, principalmente a través de la implementación de plataformas adaptativas, el uso de aplicaciones de IA para el aprendizaje personalizado y el desarrollo de una estrategia nacional de IA. Sin embargo, para una adopción más generalizada y exitosa, es fundamental abordar los desafíos relacionados con la infraestructura, la formación docente y la investigación contextualizada. (Gemini, 2025). Se han creado algunas iniciativas privadas y públicas para el uso de IA, se han adaptado algunas aplicaciones y se han creado un marco estratégico para las políticas públicas del uso de la IA. Los retos en el contexto dominicano son los siguientes: Brecha Digital e Infraestructura, Formación Docente, Resistencia al Cambio, Aspectos Éticos y Legales, Investigación y Desarrollo Local.

Metodología

Las investigadoras se plantearon una investigación mixta para poder analizar datos y valoraciones sobre la IA (con enfoques cualitativo y cuantitativo), no experimental, tipo exploratorio y descriptivo para indagar sobre el conocimiento, uso, importancia, inquietudes, dilemas éticos y percepción de los docentes acerca de la Inteligencia Artificial dentro del área de Matemática. Luego se amplió la población y se ha aplicado el instrumento a todos los Docentes que deseen apoyar para identificar los aspectos descritos.

Se utilizó una encuesta mediante un formulario de Google elaborado con 20 preguntas de las cuales 6 fueron cualitativas, 9 fueron cuantitativas y 5 generales. Con indicadores tanto personales como profesionales acerca de la Inteligencia Artificial y sus posibles dilemas éticos.

Hasta ahora se le ha aplicado a una muestra de 78 Docentes de todas las áreas y niveles educativos del país, quedando muy bien representada la Matemática, ya que es una muestra ubicada en eventos educativos del área. Se han analizado las respuestas tanto cualitativas como cuantitativas, usando los métodos de la inducción, deducción, síntesis y análisis, creando tablas propias para explicar los hallazgos de la investigación.

Análisis de resultados

Las investigadoras se sienten muy agradecidas ya que los Docentes de diferentes zonas del país han colaborado con esta investigación, rellenando el formulario enviado, aquí algunos resultados en relación a los dilemas éticos que se están destacando en este trabajo:

Tabla 1

Algunos datos generales sobre los Docentes dominicanos encuestados

Pregunta	Análisis cuantitativo	Análisis cualitativo
Edad de los encuestados	Un 66% están en rango del 30 a 50 años. Un 20% está en el rango de más de 50 años. Solo un 15 % está en el rango de menos de 30 años	La mayoría son docentes maduros que no están muy ligados al tema tecnológico.
Área que enseñan	62% Matemática, 38% otras.	Matemática más representada
Nivel que enseñan los Docentes	Un 81% son de secundaria, un 12% educación superior, Un 7% de primaria	Hay buena representación de los niveles del sistema educativo dominicano.
¿Familiarizados con el concepto de IA?	83% SI, 17% NO.	Han escuchado el tema, pero no hay una gran familiaridad con el concepto en si.
¿Has recibido formación en el uso de la IA?:	82% NO, 18% SI	Podemos ver la poca formación en el tema de IA.
¿Utilizas alguna plataforma de IA en tu práctica docente?	58% NO, 42% SI	Podemos ver que hay dudas en si usan o no esas plataformas, se notan desconocimiento de las IA.
¿Para qué las utilizas?		Planificación, revisión de contenidos, programar actividades interactivas, evaluar, ampliar conocimientos.
¿La IA puede mejorar la calidad de la Educación?	77% SI, 23% NO ESTAN SEGUROS	Podemos ver que si reconocen las ventajas de las IA

¿Utilizas IA para personalizar los aprendizajes de tus alumnos?	55% NO, 30% SI, 15% NO ESTAN SEGUROS	Se nota que hay dudas aun al usar esas herramientas de IA con los alumnos.
¿Cuál es tu nivel de confianza en el uso de la IA en la enseñanza?	80% confiable en cierta medida 14% muy confiado 6% nada confiable	De nuevo vemos el miedo y el dilema de falta de confianza en la IA
Años en servicio	De 1 a 43 años, mayor presencia entre 10 -25 años	Son docentes con experiencia docente no así tecnológica

Fuente: Encuesta aplicada a docentes dominicanos. Elaboración propia.

Análisis de la tabla 1: Se puede concluir que en esta muestra participan docentes maduros que no están muy ligados al tema tecnológico, dicen estar familiarizados con el concepto de IA, pero aun la mayoría no ha sido formada en el uso de la IA. Algunos han usado plataformas, pero generalmente para las labores docentes no tanto para los alumnos. Reconocen las ventajas de la IA pero no están seguros para usarlas por falta de confianza en el sistema.

Tabla 2

Desafíos y miedos al usar la IA

Aspectos negativos	Aspectos positivos	Dilema ético que enfrentan
No conocer las herramientas	Me pedirán más preparación	Dependencia tecnológica
No permiten la criticidad de los estudiantes	Nuevas formas de enseñar	Disponibilidad para todos
Los estudiantes pueden confiar en IA para sus tareas	Leer más para usar IA	Falta de consultas entre pares
Uso de hackers como Docentes	Saber preguntar mejor	Vulnerabilidad de sus datos
Perdida de autonomía	Crear actividades innovadoras	Plagio en sus trabajos
Manejo del conocimiento	Hay muchas informaciones y actividades para enseñar	Falta de Conectividad

Fuente: Encuesta aplicada a docentes dominicanos. Elaboración propia.

Análisis de la tabla 2: Los Docentes plantean que reconocen las ventajas de la IA, pero tienen miedos a esos dilemas que no estarían en sus manos resolver y que pondrían en manos de ciberataques sus procesos docentes.

Tabla 3

Sugerencias para usar la IA de forma segura y responsable

Formación que desean tener	Situaciones y dilemas docentes
Cursos y talleres permanentes	Que se aplique de forma correcta y con responsabilidad.
Talleres y cursos sobre el uso	No sustituir la educación tradicional totalmente por IA, sino que sea integrado.
Capacidad para conocer un trabajo correcto y la detención de trabajos con usos inadecuado por parte de los alumnos.	El desarrollo de la inteligencia artificial va muy rápido y hasta un poco de miedo da por el uso negativo que se le podría dar.
Competencias tecnológicas avanzadas	Reconocen es útil, aunque no se puede depender en lo absoluto de la IA.

Como conseguir plataformas confiables para los centros educativos	Moderación, creen que no hay fórmula mágica para promover el aprendizaje
Conocer y aplicar el reglamento ético sobre IA	Aplicar evaluaciones para saber dónde apoyar más el uso de la IA
Recursos para evaluar y organizar el PEA	Cuidar la privacidad de los usuarios

Fuente: Encuesta aplicada a docentes dominicanos. Elaboración propia.

Análisis de la tabla 3: Se puede ver de nuevo que reconocen tener falta de formación e incluso capacidades necesarias para conocer y aplicar la IA, pero entienden que hay muchos riesgos al usarlas.

Conclusiones

De acuerdo a los resultados obtenidos en esta investigación, existe la necesidad de que el sector educación se integre al proceso innovador que las nuevas tecnologías están impulsando, existen Docentes que investigan y hacen importantes aportes al cambio educativo, que alertan de los riesgos que se puedan generar del mal uso de la IA hacia las comunidades.

La enseñanza de la Matemática es muy importante, porque sirve para fomentar el desarrollo del pensamiento, para entender y conocer los cambios experimentados por la sociedad, así como transformar el desarrollo de la misma.

En el avance de la tecnología IA, los informáticos y desarrolladores han sido primordiales, pero, dadas las posibilidades y amplitud de su campo de acción, es necesario que estén sujetos a las regulaciones existentes y por construir.

El debate ético y las regulaciones requeridas en el uso de la IA, mas que tecnológico es de corte social, ya que afecta el accionar de la humanidad en sentido amplio.

Los Docentes dominicanos reconocen las ventajas de incursionar en las innovaciones para enseñar y que sus estudiantes tengan más posibilidades para aprender. Saben que la IA podría ayudarlos en sus planificaciones, manejo de contenidos y procedimientos más novedosos y por ello entienden que deberán ser capacitados de forma permanente para poder lograr su integración efectiva.

Los Docentes tienen sus dudas de que al integrar la IA a la Escuela hayan grandes cambios porque tendrá obstáculos debido a los problemas estructurales de los Centros Educativos, falta de conocimientos de docentes y gestores, falta de conectividad constante en los centros y hogares de los alumnos.

Además, plantearon que como no comprenden el sistema interno de la IA, temen por la seguridad de los datos, el manejo de la evaluación de los alumnos, la realidad de los aprendizajes, la realidad de los informes de cada alumno al personalizar los aprendizajes, la permanencia del sistema en los centros con dificultades de seguridad y sugieren que se mantenga la educación tradicional y se vaya integrando poco a poco la IA.

Se puede concluir que los dilemas manifestados por los Docentes dominicanos le impiden comprender y aplicar la IA en sus procesos áulicos ya que plantean una serie de dificultades como: desconfianza, temor, poco dominio tecnológico, sesgos algorítmicos en aplicaciones, brecha digital, infraestructuras inadecuadas, posible dependencia tecnológica, uso del plagio académico, hackeo de datos, resistencia al cambio, entre otras percepciones que sobre la IA tienen y les impide confiar en sus bondades para apoyar los aprendizajes de sus alumnos.

Referencias

- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L.C., & Muñoz-Catalán, M.C. (2013). Determining specialised knowledge for mathematics teaching. En B. Ubuz, C. Haser & M.A. Mariotti (Eds.). *Actas del CERME 8* (pp. 2985-2994). Middle East Technical University, CERME.
- Belloto Gómez, J. M. (2022). Guía de buenas prácticas en el uso de la inteligencia artificial ética. *OdiseIA. Observatorio del Impacto Social y Ético de la Inteligencia Artificial*, PricewaterhouseCoopers, S.L.
- Bravo Tejada, F. (2023). *10 mejores herramientas de IA de matemáticas (apps y software)*. Ecommercenews.pe. Recuperado de <https://www.ecommercenews.pe/marketing-digital/2023/ia-de-matematicas.html/>
- Cabanelas Omil, José. Inteligencia artificial ¿Dr. Jekyll o Mr. Hyde? *Mercados y Negocios*, núm. 40, 2019 Universidad de Guadalajara, México.
- Drnas de Clément, Z. (2022). Inteligencia artificial en el Derecho Internacional, Naciones Unidas y Unión Europea. *Revista Estudios Jurídicos*. Segunda Época, 22, e7524. <https://doi.org/10.17561/rej.n22.7524>
- Flores-Vivar, J. M., & García-Peñalvo, F. J. (2023). Reflexiones sobre la ética, potencialidades y retos de la Inteligencia Artificial en el marco de la Educación de Calidad (ODS4). *Comunicar*, 31(74), 37-47.
- García Briceño, B. (2023). 20 principales empresas de inteligencia artificial en el mundo. *Transformation Digital. Ecommerce New*.
- Gemini. (2025). *Plataforma de IA conversacional*.Google.com.
- Hattie, J. (2020). *Aprendizaje visible: retroalimentación*. Routledge.
- Pombo, C. (2023). ¿Cómo integrar a la inteligencia artificial en la educación de manera responsable? *BID Educación*. Recuperado de <https://blogs.iadb.org/educacion/es/inteligencia-artificial-educacion/>
- Ramos, G. (2021). La IA necesita una brújula ética: Entrevista con Gabriela Ramos. *El País* <https://elpais.com/internacional/2022-03-15/la-ia-necesita-una-brujula-etica.html>
- UNESCO. (2022) *Recomendación sobre la ética de la IA*. Francia.
- UNESCO. (2025) Conferencia “IA en América Latina y el Caribe: retos, estrategias y gobernanza para el desarrollo de la región”, Santiago de Chile, OREALC. <https://www.unesco.org/es/articles/una-inteligencia-artificial-etica-e-inclusiva-en-america-latina-y-el-caribe-la-unesco-presenta-su?hub=32618>



Do desafio à solução: Explorando o potencial da modelagem 3D no Ensino da Geometria

Carmen Vieira **Mathias**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

carmen@ufsm.br

João Ygor Dias **Cardoso**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

ygor2027@gmail.com

Quendra Silva Cartier **Larangeira**
Universidade Federal de Santa Maria
Brasil

quendrascl@gmail.com

A visualização sempre foi um ingrediente importante para a comunicação de ideias matemáticas. As figuras e modelos têm sido instrumentos na expressão de conceitos, mesmo antes de a linguagem matemática formal ser capaz de descrever as estruturas. Desde os registros numéricos em pedras até as exibições em telas de computador, a representação visual tem desempenhado um papel crucial na ampliação da linguagem matemática. Em particular, a visualização desempenha um papel importante na expansão do conhecimento geométrico (Giaquinto, 2007). Embora, para a maioria dos matemáticos as imagens não substituam as demonstrações, elas podem fornecer provas sem palavras (Mathias et al, 2019), que auxiliam na intuição sobre resultados e ideias. De fato, alguns matemáticos derivam ideias criativas e diretamente das imagens, embora essas abordagens muitas vezes não sejam evidentes em artigos ou livros didáticos. Apesar do surgimento de diversas tecnologias que permitem a visualização de objetos geométricos espaciais como conteúdos dinâmicos, a capacidade de manipular um objeto com as próprias mãos ainda é incomparável. As impressoras 3D, por exemplo, podem proporcionar essa experiência com relativamente pouco esforço.

Nesse contexto, o presente trabalho surge a partir dos relatos de experiências vivenciadas em duas oficinas sobre modelagem e impressão 3D, ministradas por integrantes de um projeto de ensino, pesquisa e extensão de uma universidade pública localizada no sul do Brasil. Essas oficinas foram realizadas em dois eventos, ocorridos entre julho e agosto de 2024. Durante as oficinas, os participantes tiveram a oportunidade de aprender, por meio de protocolos de construção previamente organizados, como realizar construções geométricas utilizando o

aplicativo Tinkercad, uma ferramenta online de design de modelos 3D em CAD (Desenho Assistido por Computador).

Entre as atividades propostas, uma delas foi inspirada em um dos 26 desafios de imaginação apresentados em Conway et al (2010, p.17): “que sólido tridimensional tem perfil circular visto de cima, um perfil quadrado visto de frente, e um perfil triangular visto de lado?” A resposta para essa questão consiste no que denominamos de cilindro chanfrado, uma peça que se distingue por cortes oblíquos, formando uma superfície inclinada - técnica amplamente utilizada na engenharia, marcenaria e no design industrial para melhorar tanto o aspecto funcional quanto estético dos objetos.

Inicialmente, foi proposta uma solução que demandava um número elevado de movimentos e operações no software. Dessa forma, foi sugerido que os participantes das oficinas encontrassem alternativas para desenvolver o mesmo objeto, utilizando menos movimentos e operações. A Figura 1 ilustra a primeira solução e o processo encontrado por um dos participantes.

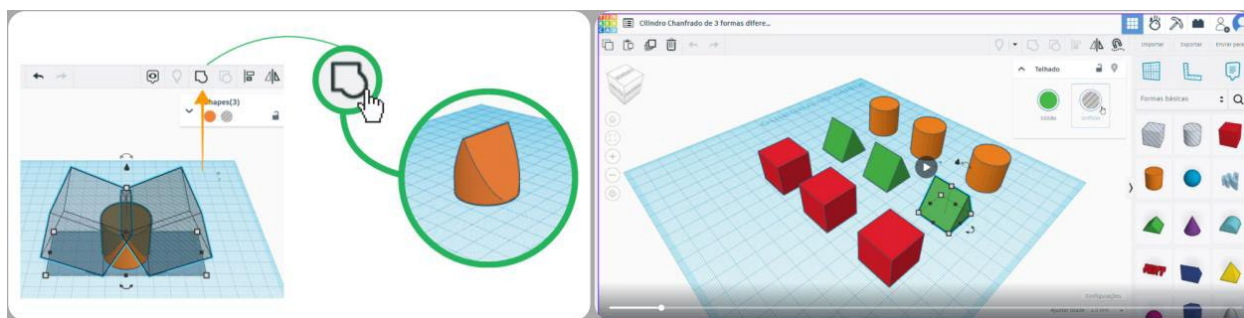


Figura 1. Solução apresentada aos participantes (a esquerda) e processo de solução proposta (a direita).

A solução proposta pelo participante consistia na interseção dos três sólidos geométricos, a partir de diferentes cortes. Esse desafio incentivou a criatividade, as habilidades de visualização espacial e a capacidade de resolução de problemas dos participantes, promovendo maior interação e colaboração entre eles. A visualização espacial é uma habilidade mental que envolve manobras no nível do objeto, como mudanças na posição ou forma de um objeto por meio de transformações ou decomposições (Battista et al., 2018). Em particular, após a conclusão das oficinas, ficou evidente a possibilidade de desenvolver outras estratégias para modelar o cilindro chanfrado, utilizando como base três sólidos geométricos fundamentais: cilindro, prisma de base triangular e paralelepípedo retângulo. Essas novas abordagens não só otimizaram o processo, como também proporcionaram uma compreensão mais profunda das relações geométricas e das possibilidades criativas na modelagem 3D, reforçando a importância dessa ferramenta no ensino da matemática e da geometria.

Referências e bibliografia

- Battista, M. T., Frazee, L. M., & Winer, M. L. (2018). Analyzing the relation between spatial and geometric reasoning for elementary and middle school students. In K. S. Mix, & M. T. Battista (Eds.), *Visualizing mathematics: The role of spatial reasoning in mathematical thought* (pp. 195–228). Springer.
- Giaquinto, M. (2007). *Visual thinking in mathematics*. Oxford University Press.
- Mathias, C. V., Da Silva, H. A., & Leivas, J. C. P. (2019). Provas sem palavras, visualização, animação e GeoGebra. *Revista do Instituto GeoGebra Internacional de São Paulo*, 8(2), 62-77. <https://doi.org/10.23925/2237-9657.2019.v8i2p062-077>



El uso combinado de tecnologías en la resolución de un problema geométrico real motivado por el diseño de un juego

Diego **Lieban**

Instituto Federal do Rio Grande do Sul

Brasil

diego.lieban@bento.ifrs.edu.br

Resumen

En este artículo buscamos ejemplificar cómo cuestiones de carácter matemático (más particularmente, geométrico) pueden ser introducidas en la problematización de una situación real, surgida en la creación de materiales para la enseñanza. Así, utilizamos el ejemplo utilizado para ilustrar cómo la perspectiva de la Cultura Maker y la Educación STEAM pueden integrarse como prácticas que sitúan a los estudiantes en una condición activa en sus procesos de aprendizaje. También aprovechamos para reflexionar sobre la articulación de la formación tecnológica, pedagógica y de contenidos en la realización de actividades que incentiven a los participantes – profesores y futuros profesores de Matemática – en desarrollar su postura crítica y colaborativa delante de un problema práctico a resolver.

Palabras clave: Construcción geométrica; Hexágono; GeoGebra; Educación STEAM.

Introducción

La experiencia reportada y discutida en este artículo proviene de un proyecto de investigación desarrollado en el IFRS – Campus Bento Gonçalves, que tiene como premisa involucrar estudiantes de nivel medio-técnico y superior (en este caso, Licenciatura en Matemáticas), en la elaboración y adaptación de materiales para la enseñanza en general. De esta forma, buscamos identificar las Matemáticas que aparecen en este proceso, además de acercar el público participante a nuevas tecnologías como las cortadoras láser y las impresoras 3D. Este proyecto también pretende integrar diferentes áreas del conocimiento y promover la creatividad y el pensamiento crítico a través de actividades prácticas y acciones interdisciplinarias. Al combinar las disciplinas de STEAM – Ciencia, Tecnología, Ingeniería, Arte y Matemática, el

objetivo es explorar soluciones innovadoras a desafíos reales y desarrollar habilidades como la resolución de problemas, la colaboración y la comunicación. El desarrollo de materiales físicos y digitales interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, con foco en la construcción y exploración dinámica de objetos, se introduce en este proyecto como un disparador para observar (y al mismo tiempo promover) la relación entre estudiantes, docentes en ejercicio y docentes en formación con el uso de las nuevas tecnologías. Así, el trabajo desarrollado busca también investigar el potencial y las limitaciones de GeoGebra como herramienta educativa y evaluar las perspectivas de introducción de recursos de impresión 3D y cortado láser en la educación.

Es en este contexto, surgió la invitación para presentar una actividad remota para una clase de un Programa de Posgrado en Enseñanza de las Matemáticas, en vista de la identificación del público participante con la herramienta. Sin embargo, es importante destacar que el manejo de tecnologías en la enseñanza de las Matemáticas no se limita, en este caso, a GeoGebra. Los programas de finalización de las piezas diseñadas sean para la confección en impresión 3D o cortado láser, también fueron considerados y suelen presentar buenas oportunidades de discusiones matemáticas, como ideas de proporcionalidad, porcentaje y unidades de medidas, por decir algunas. Esto cumple el importante papel de fortalecer el conocimiento tecnológico, pedagógico y de contenidos (TPACK) de una manera más articulada e integrada, como propone la visión transformadora y homogénea del TPACK (Niess, 2005). En este contexto, también se subraya el trabajo de involucrar a los participantes en los distintos niveles (especialmente en la formación docente) en entornos que favorezcan la creatividad, el pensamiento crítico, la colaboración y la comunicación (Harari, 2018).

Las metodologías activas presentes en la Educación STEAM y en la Cultura Maker, sea con la producción de materiales didácticos o propuestas de aprendizaje basado en proyectos/solución de problemas reales, también son abordadas en este trabajo desde la perspectiva de la Génesis Instrumental y las Estrategias Heurísticas de Polya. Ejemplos de modelos que pueden ser desarrollados y explorados como recursos físicos y digitales complementarios son rompecabezas geométricos, cadenas de ADN, estructuras moleculares, sistemas de mecanismos y engranajes, entre otros. Como motivación inicial y ante la necesidad de incentivar a profesores y futuros profesores de Matemáticas con prácticas más cercanas suyas, el proyecto centra (aunque no de forma restrictiva) sus acciones en la investigación y desarrollo de materiales que puedan ser recreados con aspecto lúdico o artístico para la enseñanza de las Matemáticas. Algunos de estos materiales están en línea con otros proyectos de larga escala y los cuales cuentan también con materiales creados con GeoGebra (<https://www.geogebra.org/u/quebracabezas>).

La plataforma GeoGebra está ampliamente difundida entre los docentes y ya se utiliza ampliamente para la enseñanza de las Matemáticas. En este trabajo se considera la posibilidad de adaptar algunos de los materiales digitales producidos en material físico manipulable. Para ello, utilizamos el recurso de corte láser e impresión 3D, implementado en GeoGebra en 2018. Estos ejemplos realzan la posibilidad de combinar (o alternar) recursos físicos y digitales, dependiendo de las realidades y contextos en que se apliquen.

La integración de los universos físico y digital ha acompañado el frenético desarrollo tecnológico y ha evolucionado rápidamente en los más diversos ámbitos: desde los exámenes de ultrasonidos 3D hasta simulaciones mecánicas en ingeniería, los diferentes modelos de representación dependen de conceptos clave de las Matemáticas, particularmente de su comprensión geométrica y espacial. A partir de esta premisa, algunas preguntas emergentes son “¿cómo se están preparando las escuelas para enfrentar la fusión de estos medios físicos y digitales?”, o “¿cómo se están preparando docentes y estudiantes para el uso de las tecnologías actuales en su formación y prácticas académicas o escolares (especialmente en lo referente a las Matemáticas como apoyo a otras áreas del conocimiento)?”. Estas preguntas y el desafío de cómo abordarlas nortean este estudio.

Los efectos del uso equilibrado de objetos manipulativos físicos y digitales han sido discutidos en investigaciones recientes en el sentido del desarrollo de las representaciones de los estudiantes en álgebra (por ejemplo, Suh y Moyer-Packenham, 2007) o el desarrollo de las habilidades de visualización y razonamiento espacial de los estudiantes de secundaria (Drickey, 2000). Además, hay sugerencias de algunos diseños de tareas sobre simetría de figuras geométricas planas y teselación que incluyen artefactos impresos en 3D para apoyar la comprensión de conceptos abstractos en diferentes niveles de educación (Donevska-Todorova, 2020; Leung y Donevska-Todorova, 2020). En Brasil, la nueva Base Curricular Nacional Común (BNCC, 2018) aboga por trabajar con el desarrollo de proyectos (modelos/prototipos) para que se pueda valorar el pensamiento crítico y creativo de los estudiantes (Peres et al., 2021; Harari, 2018; Robinson, 2019), además de destacar la importancia de recursos alternativos para diferentes registros de representación, con especial atención al uso de nuevas tecnologías.

Por otro lado, la resolución de problemas desde una perspectiva más interdisciplinaria implica la aplicación de habilidades matemáticas en nuevas formas o combinaciones que permitan una contextualización y utilización más pragmática de los conocimientos adquiridos. Con base en esto, se espera que los materiales creados puedan ser utilizados como herramientas de preparación para profesores en formación y en actividad.

Por último, conviene subrayar que parte de estas actividades o materiales refuerzan una tendencia a incorporar cada vez más el componente artístico en la Educación STEAM, en muchos casos. Además del aspecto creativo, la articulación de las artes con otras dimensiones contribuye al desarrollo de la comunicación o expresión, el pensamiento crítico y la sensibilidad frente a diferentes cuestiones presentes en las relaciones humanas. Mirar a través del lente de las artes no sólo amplía las capacidades reflexivas y perceptivas, sino que también alimenta la racionalidad, la afectividad y la emoción (Calil y Pugliese, 2017), ingredientes fundamentales para el desarrollo de la inteligencia intrapersonal e interpersonal (Teoría de las Inteligencias Múltiples, de Gardner).

Fundamentación teórica: una breve mirada a la Génesis Instrumental, las Estrategias Heurísticas de Polya y el Modelo TPACK

Según Bussi y Mariotti (2008), la estructura de la Génesis Instrumental, propuesta por Rabardel, está basada en la distinción entre artefacto e instrumento. Si bien el artefacto puede existir por sí solo, el instrumento es una composición del artefacto con esquemas de uso asociados. Para Stormowski (2015), la importancia de transformar un software, en nuestro caso

GeoGebra, en un instrumento es una evolución resultado de la reorganización y modificación de los esquemas de quienes lo utilizan, la estructuración de las acciones de los docentes y las relaciones con los conceptos matemáticos. En nuestro caso particular, los participantes vieron impactadas sus estrategias por los resultados proporcionados por el software en la medida en que el aspecto dinámico de sus construcciones dio lugar a ajustes en sus resultados. Observamos que GeoGebra contribuye a la reflexión de los participantes en tareas de simulación y a la reorganización de sus patrones de pensamiento, además de consolidar algunos conceptos matemáticos. Sin embargo, hay ocasiones en que estas transformaciones necesitan soporte externo de los mentores y, eventualmente, el apoyo de modelos físicos (Lieban y Lavicza, 2017).

El trabajo de Polya (1973) sobre resolución de problemas enumeró una variedad de estrategias heurísticas que pueden usarse para abordar una variedad de problemas, no sólo aquellos restringidos a las Matemáticas. En este trabajo consideramos como “el problema a resolver”, el reto de suavizar (redondear) las esquinas de las piezas hexagonales que se utilizarían en un juego de mesa. De hecho, identificamos diferentes estrategias que están fuertemente vinculadas al enfoque de Polya para el modelado geométrico y la resolución de problemas: estimar y verificar (ajustar a simple vista), usar simetría, pensar al revés (desde el final hasta el principio) y dividir el problema en problemas más pequeños, por ejemplo. Algunas de estas estrategias se ven favorecidas por el aspecto dinámico de la herramienta, como ya mencionado. Stender y Kaiser (2017) afirman que hay poca investigación empírica que explore cómo se pueden implementar estas estrategias heurísticas en la enseñanza en el aula. Sugieren que las estrategias heurísticas pueden ser “inducidas” por quienes realizan la actividad (docentes, mentores, tutores, etc.), haciendo referencia a su práctica pedagógica. Al considerar la llegada de la tecnología en este proceso, debemos recordar que no puede disociarse del conocimiento de contenido específico, y esto es precisamente de lo que trata el modelo TPACK.

Bueno et al. (2023) proponen que TPACK sea visto más como una mezcla homogénea de conocimiento que como una mezcla heterogénea. De esta forma, TPACK puede entenderse como una amalgama especial de conocimientos tecnológicos, pedagógicos y de contenidos. Esta percepción significa que TPACK es mayor que la simple suma de sus partes. Alguien que quiere enseñar geometría y que ha desarrollado TPACK no piensa, por ejemplo, en la discusión conceptual, seguida del enfoque didáctico para, finalmente, explorar el recurso tecnológico. Por el contrario, planifica las tres dimensiones en armonía, construyendo vínculos de conexión entre tecnología, pedagogía y contenidos. No hay necesariamente pasos preconcebidos a seguir, no hay un orden entre los tres dominios TPACK a tomar. Es un movimiento reflexivo de ida y vuelta que considera todo interconectado, a través de diferentes niveles de desarrollo de la enseñanza (pre-reconocimiento, reconocimiento, aceptación, adaptación, exploración y evolución) en relación a las tres dimensiones. Una discusión más detallada e ilustrada (<https://www.geogebra.org/m/ejrxak3h>) de este modelo se puede encontrar en el trabajo mencionado anteriormente (Bueno et al., 2023).

Metodología

De carácter cualitativo, consideramos la metodología de investigación desarrollada como un proceso continuo, donde el diseño de experiencias de enseñanza y la reflexión sobre los resultados se complementan a lo largo del proceso. Con un enfoque exploratorio y experimental,

el proyecto se centra en la integración física y digital para la Educación STEAM (énfasis en Matemáticas) y la Cultura Maker. En este caso, reportamos una actividad desarrollada con una clase de posgrado. Estos ciclos iterativos de diseño y análisis en este estudio están alineados con la Investigación Basada en el Diseño, que sigue una secuencia recursiva de los siguientes pasos (Klapwijk, 2017):

- | | |
|---------------------------------------|--|
| I. Explorar y formular el problema; | IV. Construir prototipos; |
| II. Generar y seleccionar ideas; | V. Probar y optimizar; |
| III. Generar y seleccionar conceptos; | VI. Presentar (para refinar ideas y volver al principio) |

La naturaleza exploratoria del estudio requiere un enfoque interpretativo que incluye métodos cualitativos con observaciones, registro y análisis de datos (Cohen et al., 2011) tanto para el desarrollo de prototipos físicos como digitales. Para crear los materiales, fueron considerados los siguientes criterios, según CAPES (2019), mayoritariamente en el contexto educativo centrado en finalidades sociales y solución de problemas reales:

- Impacto: relacionado con los cambios provocados por la introducción del Producto en el entorno social;
- Aplicabilidad: se refiere a la facilidad con que el Producto puede ser utilizado y la posibilidad de replicabilidad en diferentes entornos y grupos sociales;
- Innovación: entendida aquí como la intensidad del uso de nuevos conocimientos utilizados para crear el producto. Un producto derivado de la adaptación de conocimientos existentes se considerará un producto técnico y no tecnológico;
- Complejidad: representa el grado de interacción entre los diferentes participantes, relaciones y conocimientos necesarios para la elaboración y desarrollo del producto.

La evaluación de los materiales didácticos se realiza observando su utilización por parte de los más variados públicos que interactúan con ellos y que son puestos a disposición para su uso común en ferias, eventos y en el propio makerspace de la institución.

Resultados del problema de redondear las esquinas de una pieza hexagonal

A partir de la invitación para participar de una clase (online) del curso Tecnologías Digitales en Educación Matemática PPGEMAT-UFRGS, la idea fue compartir una experiencia reciente que tuvo lugar en el proyecto: la tarea de redondear las esquinas de un hexágono regular. La motivación para esto surgió de la propuesta de adaptar un juego de estrategia (Hive) para llevar a escuelas, ferias u otros eventos de divulgación científica. Desde la perspectiva de la Educación STEAM, el juego permite, por ejemplo, conexiones con la ciencia, por su temática de bichos y puede, por ejemplo, promover discusiones de clasificaciones o investigaciones respecto al comportamiento de locomoción de los seres representados y cómo esto se relaciona con el movimiento de las piezas del juego. La representación de los seres en las piezas bien puede constituir una obra artística de expresión gráfica. Aunque se pueden considerar otras conexiones, nos limitaremos al aspecto matemático de la tarea. Para evitar las puntas de los vértices, ya que era un juego que se practicaba entre niños, el problema era redondear las esquinas. Un prototipo ya finalizado del juego (junto al juego original) se puede ver en la Figura 1, a continuación.



Figura 1. Copia del juego Hive, ya con esquinas ligeramente redondeadas

Si bien existen herramientas ya preparadas en los programas de dibujo vectorial para redondear esquinas, la tarea parece apropiada para aplicaciones geométricas con las que estamos acostumbrados a trabajar en aula, pero que raras veces se exploran en contextos fuera de ella.

Así, el problema fue compartido con el público participante, quienes tuvieron la oportunidad de realizar sus construcciones a través de GeoGebra Classroom, un recurso que permite la visualización simultánea de las tareas (por quien las proponen) a medida que las realizan. A continuación, se presentan algunas de estas construcciones y sigue una breve discusión.

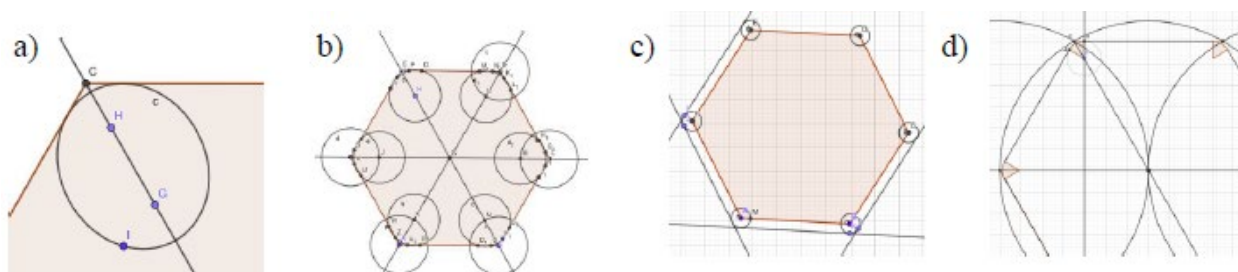


Figura 2. Construcción geométrica para reproducción del juego Hive con piezas redondeadas en las esquinas

En las construcciones a), b) y c), que fueron intentos originales de los participantes, con mínima intervención del docente, podemos identificar un aspecto muy común en el ejercicio de construcción geométrica, que es el ajuste, por deslizamiento, de puntos, para definir una condición necesaria (en este caso, la tangencia). Las construcciones a) y b) todavía comparten la estrategia de definir la bisectriz de uno de los vértices y luego repetirla para los demás. La idea de la bisectriz, según los participantes, surgió porque entendieron que el eje de simetría de la curva debía estar en esta línea (heurística de simetría y reducción a un problema menor). Curiosamente, en la solución a) se afirmó que el uso de elipses resolvería mejor el problema, lo que, desde el punto de vista de la construcción geométrica, implicaría definir dos puntos (los focos) en lugar de uno (centro del círculo). En b), es posible ver que el centro y el radio del círculo fueron elegidos arbitrariamente (aunque el centro está en la bisectriz). En detalle, se nota que no se cumple la condición de tangencia, aunque la solución parezca satisfactoria. En c), el pensamiento inverso (a partir de la “proyección” de la solución del problema) provocó que el hexágono construido inicialmente funcionara como un elemento auxiliar de la construcción y no como el que tendría esquinas redondeadas. Aun así, es posible notar que si bien se mantuvieron los radios del círculo para los diferentes vértices, la condición de tangencia también fue

establecida “a ojo” (de manera imprecisa). Para esta y otras construcciones, en cambio, cuando la etapa de construcción implicó transferir medidas, fueron planteadas diferentes estrategias correctas y parecían depender del nivel de familiaridad con la herramienta. Finalmente, en d), tenemos un registro de la construcción realizada luego de la discusión colectiva, observando las cuestiones de tangencia que parecían ser el mayor desafío del grupo. Cabe señalar que, en este caso, el hexágono inicial se construyó íntegramente utilizando los pasos de construcción clásicos con regla y compás y no utilizando el recurso de hexágono regular que ofrece GeoGebra. Definida la bisectriz de uno de los vértices y un centro en dicha recta, evaluamos qué condiciones necesitaríamos para garantizar la tangencia. Movilizado por la discusión, el grupo concordó (alguien sugirió y hubo consenso colectivo) que si la circunferencia debía ser tangente a los lados, entonces bastaba trazar la perpendicular a uno de los lados (que contenía el vértice de la bisectriz), pasando por el centro elegido. Así, tomando el centro previamente elegido, bastaría con crear una circunferencia con un extremo en el punto de intersección del lado del hexágono con la perpendicular construida, y tendríamos definida la curvatura de la esquina. Esta construcción también demostró que el centro podía reajustarse *a posteriori*, definiendo así una nueva curvatura para la esquina, pero respetando la misma condición de tangencia, por construcción.

Consideraciones finales

Este proyecto tiene como objetivo evaluar (con el desarrollo de prototipos físicos o digitales) el potencial de las innovaciones en tecnologías educativas para abordar cuestiones relacionadas con los usos actuales y futuros de estas tecnologías en la Educación Matemática y la educación STEAM/Cultura Maker. En concreto, estos objetivos pretenden abordar las siguientes cuestiones:

- Abordar el creciente énfasis en los entornos de aprendizaje interdisciplinarios y transdisciplinarios que vinculan las Matemáticas más estrechamente con otras disciplinas dentro de STEAM, y más recientemente la inclusión de las artes (Fenyvesi, 2016);
- Desarrollar y evaluar enfoques teóricos y metodológicos para fomentar habilidades, en particular la creatividad, cada vez más identificadas como inclusiones necesarias en el futuro de la educación (Burnard et al., 2016);
- Adoptar, desarrollar e integrar nuevas tecnologías innovadoras, incluidas la impresión 3D, el corte por láser y las tecnologías de aprendizaje adaptativo, cada una integrada en el entorno GeoGebra (Lavicza et al., 2018);
- Desarrollar cursos y recursos de formación docente, tanto en línea como fuera de línea, que permitan a los docentes utilizar las tecnologías de inmediato y considerar cómo se pueden integrar las innovaciones digitales en la enseñanza en el futuro.

Con este trabajo reforzamos la idea de que las metodologías de enseñanza (y de investigación) deben adaptarse para ajustarse a los rápidos cambios tecnológicos. Además, defendemos que el desarrollo profesional docente también debe enfatizar la asistencia continua para mantenerse al día con los cambios en las prácticas y pedagogías relacionadas a la tecnología.

Trabajar con nuevas tecnologías sin duda requiere enfrentarse a varios desafíos, desde cuestiones técnicas y de infraestructura hasta la resistencia de los participantes, ya sean profesores o estudiantes. Es un hecho que, muchas veces, dicha resistencia puede estar motivada

precisamente por las dificultades inicialmente mencionadas, como son la no disponibilidad de dispositivos al alcance del público, falta de espacio adecuado para instalaciones, insuficiente conexión a la red, escasez de recursos para mantenimiento, entre otras. Sin embargo, los obstáculos no pueden detenernos en busca de alternativas para que planteemos tareas que conecten la formación específica al contexto real. Para tanto, es fundamental que estas cuestiones no queden aisladas y se articulen con políticas públicas (inversiones en recursos y formación) que no se restrinjan a soluciones paliativas y para minorías.

Lamentablemente, la realidad en la que nos encontramos aún está muy lejos de un escenario ideal y es sabido que los recursos no siempre son de fácil acceso. Si bien la Cultura Maker y la Educación STEAM no necesariamente requieren de impresoras 3D o cortadoras láser, estos y otros recursos similares pueden ser cruciales para prácticas innovadoras que fomenten la creatividad y tienen un potencial significativo para fines educativos, además de ser un componente fundamental para la formación tecnológica de la sociedad. Por lo tanto, es fundamental que exista una estrecha colaboración entre los distintos sectores de la sociedad o entre las distintas instituciones educativas (universidades, escuelas primarias y secundarias e institutos de formación técnica y tecnológica) para facilitar el acceso a estos recursos y fortalecer la relación entre la investigación y la docencia.

Referencias y bibliografía

- BNCC (2018) *Base Nacional Comum Curricular*. Ministério da Educação. Brasil. Disponível em <http://basenacionalcomum.mec.gov.br>, acessado em 23.09.2019
- Bueno, R. W. S.; Niess, M. L.; Engin, R. A.; Ballejo, C. C.; Lieban, D. (2023) Technological Pedagogical Content Knowledge: exploring new perspectives. *Australasian Journal of Educational Technology* - AJET
- Burnard, P., Ross, V., Dragovic, T., Powell, K., Minors, H., Mackinlay, E. (2017) (Eds) *Building Interdisciplinary and Intercultural Bridges: Where Practice Meets Research and Theory*. eBook: BIBACC Publishing ISBN 978-0-9957727-0-0 (see www.bibacc.org)
- Bussi, M. G. B., & Mariotti, M. A. (2008) Semiotic mediation in the mathematics classroom: artifacts and signs after a Vygotskian perspective. *Handbook of International Research in Mathematics Education*, New York, p. 746–783.
- Calil, B. M.; Pugliese, G. P. STEM ou STEAM: Para que serve o ensino de Arte? Porvir: inovações em educação, 2 de outubro de 2017. Disponível em <https://porvir.org/stem-ou-steam-para-que-serve-o-ensino-de-arte/>. Acesso em: 22.03.2023
- Cohen, L., Manion, L., & Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education*, (7th ed.) London ; New York: Routledge.
- Donevska-Todorova, A. (2020). Problemorientiertes Lernen zur Leitidee Raum und Form in der Sekundarstufe mit Hilfe von DGS und 3D Druck. Beiträge zu Mathematikunterricht. GDM Jahrestagung (accepted).
- Drickey, N. A. (2000). *A comparison of virtual and physical manipulatives in teaching visualization and spatial reasoning to middle school mathematics students* (pp. 1-138). Utah State University.
- Fenyvesi, K. (2016) Bridges: A World Community for Mathematical Art. *Mathematical Intelligencer*.
- Harari, Y. N. (2018) 21 lições para o século 21. Companhia das Letras.
- Klapwijk, R. (2017). Creativity in Design. In C. Benson & S. Lawson (Eds.), *Teaching Design and Technology Creatively* (1st ed., pp. 5172). <https://doi.org/10.4324/9781315623153-5>
- Lavicza, Z., Hohenwarter, M., Fenyvesi, C., Prodromou, T., Diego-Mantecon, J. M., & P Lieban, D. (2018). Mathematics learning through arts, technology and robotics: multi-and transdisciplinary STEAM approaches. p. 110-122. *Proceedings of the 8th ICMI-East Asia Regional Conference on Mathematics Education* 7-11 May 2018, Taipei, Taiwan.
- Leung, A. & Donevska-Todorova, A. (2020). The Role of Technology in the Pragmatic-Abstract Continuum in Mathematics Curriculum Development and Task Design. In: Clark-Wilson, A., Donevska-Todorova, A., Fagianno, E., Trgalova, J. & Weigand, H.-G. (Eds.) *Mathematics Education in the Digital Age: Learning, Practice and Theory*. ERME Series Routledge (2020, accepted).

- Lieban, D., & Lavicza, Z. (2017). *Instrumental Genesis and Heuristic Strategies as frameworks to Geometric Modeling in connecting Physical and Digital Environments*
- Niess, M. L. (2005). Preparing teachers to teach science and mathematics with technology: Developing a technology pedagogical content knowledge. *Teaching and Teacher Education*, 21, 509–523.
<https://doi.org/10.1016/j.tate.2005.03.006>
- Peres, A.; Bertagnolli, S C.; Okuyana, F. Y. (2021) *Fabricação digital em espaços criativos educacionais*. Pimenta Cultural. São Paulo.
- Polya, G. (1973). *How to solve it. A new aspect of mathematical methods* (2nd ed.). Princeton University Press.
- Sinclair, N. and Rob
- Robinson, K. (2019) *Somos todos criativos - Os desafios para desenvolver uma das principais habilidades do futuro*. Benvirá.
- Stender, P., & Kaiser, G. (2017). The Use of Heuristic Strategies in Modelling Activities. Presented at the CERME 10.
- Suh, J., & Moyer-Packenham, P. (2007). Developing students representational fluency using virtual and physical algebra balances. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 26(2), 155-173



El uso del podcast para la comunicación digital en la enseñanza de las Matemáticas

Darwin **Peña** González

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Magdalena

Colombia

ddpenag@unimagdalena.edu.co

Roberto **Torres** Peña

Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad del Magdalena

Colombia

rtorres@unimagdalena.edu.co

Resumen

El presente trabajo se muestra una estrategia didáctica basada en podcasts para la enseñanza de Matemáticas escolares, implementada con docentes en formación. La actividad buscó fomentar la comunicación en el aula, integrar TIC e IA en la práctica docente y explorar su aplicabilidad. Los resultados de una encuesta sobre la actividad indicaron alta satisfacción, destacando la relevancia profesional, claridad en conceptos complejos y utilidad en el desarrollo de competencias tecnológicas. Las correlaciones más fuertes mostraron que la relevancia profesional, la satisfacción con el formato y el desarrollo de competencias estaban vinculados al impacto positivo percibido en la enseñanza. La actividad del podcast mostro ser una estrategia efectiva para promover la participación activa, el aprendizaje colaborativo y la aplicación de TIC e IA en la enseñanza de las Matemáticas, con potencial de replicarse en otros contextos.

Palabras clave: Competencias tecnológicas; Educación Matemática; Estrategias didácticas; Inteligencia artificial; Podcast; TIC.

Definición y relevancia del problema

La integración de tecnologías digitales en la Educación Matemática ha despertado un creciente interés en la investigación educativa debido a su potencial para transformar las prácticas docentes tradicionales. Herramientas como las TIC y la inteligencia artificial ofrecen

oportunidades para mejorar el aprendizaje, pero también plantean desafíos significativos en términos de adopción efectiva y relevancia pedagógica. Este interés surge de la necesidad de explorar cómo estas tecnologías pueden contribuir al desarrollo de competencias docentes, enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje, y preparar a los estudiantes para un mundo digitalizado.

Teniendo en cuenta lo anterior, en este trabajo se presentan los resultados de una estrategia didáctica, como el uso de podcasts, la cual puede ser efectiva para fomentar la participación activa, el aprendizaje colaborativo y la comprensión de conceptos en la Matemática escolar. Una encuesta realizada a participantes de la actividad mostró altos niveles de satisfacción, relevancia profesional percibida y claridad en el contenido presentado. Además, se identificó que el formato digital favoreció el desarrollo de competencias tecnológicas y la aplicabilidad práctica de lo aprendido en contextos educativos.

Por otra parte, el propósito principal de esta actividad fue introducir una herramienta tecnológica innovadora que facilitara la enseñanza de las Matemáticas mediante un enfoque interactivo y centrado en la comunicación. La intención fue no solo transmitir conocimiento, sino también explorar nuevas formas de enseñar y aprender Matemáticas que incorporaran TIC e IA como elementos clave en el proceso educativo.

Desde una perspectiva más amplia, este trabajo resalta la importancia de integrar tecnologías emergentes en la enseñanza de las Matemáticas para ampliar las oportunidades de aprendizaje y promover un enfoque más dinámico e inclusivo. La incorporación de estas herramientas no solo enriquece las metodologías docentes, sino que también redefine las formas en que los estudiantes interactúan con el conocimiento, preparándolos para los desafíos de un entorno global digitalizado. Este trabajo se enmarca dentro de los TSG (Topic Study Group), específicamente en “el papel y uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en los niveles secundario superior y terciario”. Además, se relaciona con el área de interés en la enseñanza y aprendizaje profesional de los docentes, donde los nuevos desafíos y oportunidades les permiten reflexionar sobre sus prácticas con y a través del uso de la tecnología. También aborda cómo alentar y apoyar a los docentes en la integración de tecnologías adecuadas en su práctica.

Referencial teórico

La integración de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y la inteligencia artificial (IA) en la enseñanza de las Matemáticas presenta importantes oportunidades para mejorar los resultados de aprendizaje. Se ha demostrado que la aplicación de tecnologías de IA en contextos educativos mejora la participación de los estudiantes, personaliza las experiencias de aprendizaje y facilita enfoques pedagógicos innovadores.

El podcast ha surgido como una herramienta transformadora en la enseñanza de las Matemáticas escolares, ofreciendo ventajas únicas que mejoran la participación, la comprensión y la retención de los conceptos matemáticos por parte de los estudiantes. La integración de podcasts en la enseñanza de las Matemáticas proporciona una alternativa a los métodos de enseñanza tradicionales, facilitando un entorno de aprendizaje más personalizado y flexible. Uno

de los principales beneficios del uso de podcasts en la enseñanza de las Matemáticas es la capacidad de atender diversas preferencias de aprendizaje. Las investigaciones indican que los estudiantes a menudo prefieren los recursos multimedia, como los podcasts de vídeo, a los libros de texto convencionales. Por ejemplo, Kay y Edwards (2012) descubrieron que los estudiantes de secundaria mostraban una marcada preferencia por aprender a través de podcasts de video, lo que les permitía controlar el ritmo y el tiempo de su aprendizaje, promoviendo así una experiencia educativa más individualizada. Esto coincide con los hallazgos de Dang et al. (2022), quienes señalaron que los podcasts pueden fomentar experiencias y resultados de aprendizaje positivos, particularmente en los campos STEM, al proporcionar contenido accesible que se puede consumir cuando el alumno lo desee.

Además, los podcasts pueden mejorar la comprensión de conceptos matemáticos complejos mediante el uso de ejemplos resueltos y aprendizaje basado en problemas. La evaluación de Kay y Kletskin (2012) de los podcasts de video basados en problemas demostró su eficacia en las Matemáticas de la educación superior, lo que sugiere que dichos formatos pueden mejorar significativamente la comprensión y la retención de los principios matemáticos. La naturaleza estructurada de los podcasts permite a los educadores presentar problemas matemáticos paso a paso, lo que puede ser particularmente beneficioso para los estudiantes que tienen dificultades con conceptos abstractos.

Por otra parte, el uso de podcasts puede ayudar a cerrar la brecha para los estudiantes que pueden enfrentar barreras en los entornos de aprendizaje tradicionales. Dang et al. (2022) enfatizaron que los podcasts basados en audio pueden promover la inclusión al reducir la ansiedad asociada con las grabaciones de video, lo que permite que los estudiantes se concentren más en el contenido que en su desempeño. Esto es particularmente relevante en aulas diversas donde los estudiantes pueden tener distintos niveles de confianza y conocimiento previo en Matemáticas.

Finalmente, la implementación de las TIC e IA en la educación no está exenta de desafíos. Guan (2023) señala que, si bien la IA tiene el potencial de mejorar los resultados de aprendizaje, se deben abordar cuestiones como las limitaciones de financiación, las preocupaciones sobre la privacidad y los distintos niveles de aceptación de los docentes para aprovechar plenamente sus beneficios. La necesidad de una formación y un apoyo adecuados a los educadores es fundamental para garantizar la integración eficaz de las herramientas de IA en el plan de estudios de Matemáticas. La combinación de las TIC y la IA, particularmente usando los podcasts en la Educación Matemática ofrece oportunidades transformadoras para mejorar los resultados de aprendizaje. Al personalizar las experiencias de aprendizaje, mejorar la participación de los estudiantes y fomentar prácticas pedagógicas innovadoras, estas tecnologías pueden contribuir significativamente a la eficacia de la Educación Matemática. Sin embargo, abordar los desafíos asociados con su implementación es esencial para maximizar su potencial.

Método y desarrollo

En el desarrollo de esta actividad se abordó desde un enfoque mixto, combinando análisis cualitativos y cuantitativos para comprender las percepciones de un grupo de docentes en formación en Educación Matemática sobre el uso de podcasts como herramienta didáctica. La

actividad estuvo orientada a explorar su efectividad en el desarrollo de competencias tecnológicas, la comunicación en el aula y la integración de TIC e IA en la enseñanza de las Matemáticas. Se trabajó con un grupo de 11 participantes, todos docentes en formación en enseñanza de las Matemáticas. La recolección de datos incluyó la aplicación de una encuesta con 21 preguntas en escala Likert, enfocadas en evaluar aspectos como relevancia profesional, satisfacción con el formato, desarrollo de competencias, comprensión del contenido y aplicabilidad práctica.

Para garantizar la validez y consistencia de los resultados obtenidos, se evaluó la confiabilidad de la encuesta mediante el coeficiente Alfa de Cronbach, utilizando el software SPSS. El análisis arrojó un valor de confiabilidad del 74.6 %, lo que indica una consistencia aceptable para instrumentos de este tipo en investigaciones educativas. Según George y Mallery (2003), valores de Alfa de Cronbach superiores a 0.70 se consideran aceptables, mientras que valores cercanos a 0.80 indican buena confiabilidad. Esto respalda la estabilidad y fiabilidad de las respuestas obtenidas en la encuesta.

En el análisis cuantitativo, se realizaron estadísticos descriptivos iniciales para identificar tendencias generales en las respuestas, incluyendo medias y desviaciones estándar. Posteriormente, se llevó a cabo un análisis de correlaciones entre las preguntas de la encuesta para identificar relaciones significativas entre las variables estudiadas. Los resultados mostraron correlaciones fuertes, como la existente entre la relevancia profesional percibida y el impacto positivo en la enseñanza, así como entre la satisfacción con el formato del podcast y la percepción de participación activa. Estas correlaciones indican que los participantes consideraron el podcast como una herramienta útil y atractiva para fomentar el aprendizaje colaborativo y el desarrollo profesional.

Por otro lado, el análisis cualitativo complementó los hallazgos mediante el estudio de los comentarios abiertos proporcionados por los participantes. Los datos cualitativos fueron categorizados en temas clave, como la claridad del contenido, la relevancia de los temas tratados y la aplicabilidad práctica en contextos educativos. El análisis de los resultados cuantitativos y cualitativos permitió una comprensión integral del impacto de esta estrategia didáctica. Este enfoque metodológico no solo resaltó la efectividad del podcast como herramienta innovadora en la enseñanza de Matemáticas, sino que también aportó evidencia empírica sobre su potencial para transformar prácticas docentes tradicionales mediante el uso de tecnologías digitales.

Resultados

Percepción sobre la actividad de Podcast

La encuesta realizada tuvo como objetivo evaluar las percepciones de 11 docentes en formación en Educación Matemática sobre el uso del podcast como herramienta didáctica. Se analizaron aspectos como la relevancia profesional, la claridad de los contenidos, el desarrollo de competencias tecnológicas, y la aplicabilidad de lo aprendido en la práctica docente. A continuación, se presentan los hallazgos clave derivados del análisis descriptivo y correlacional de las respuestas.

Resultados descriptivos

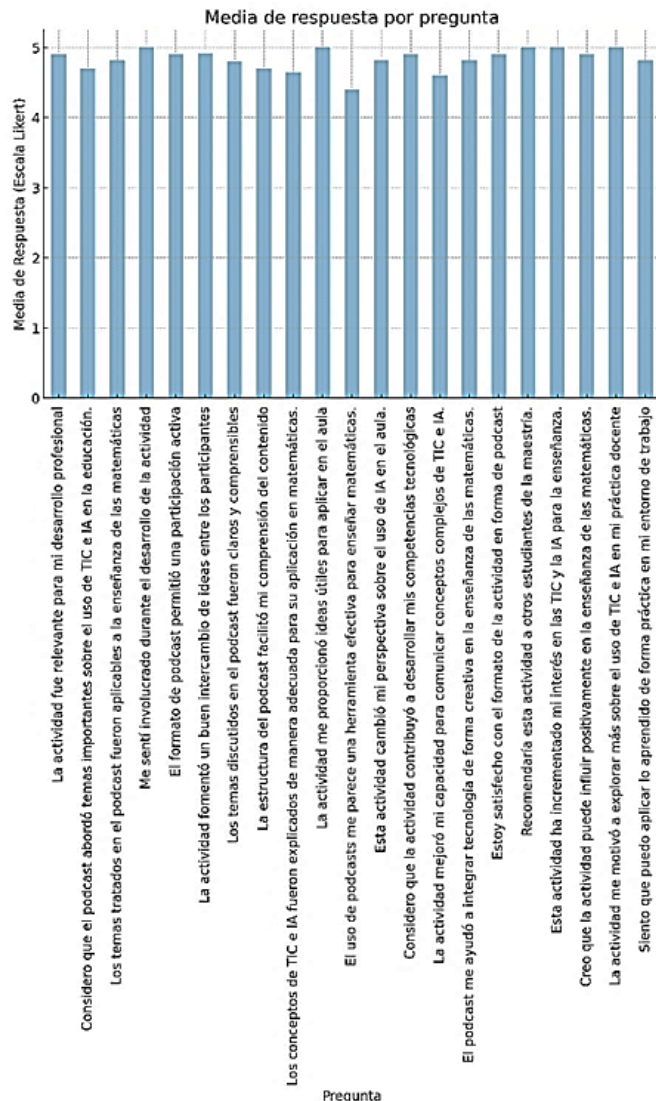


Figura 1. Promedio de las respuestas de la encuesta de percepción

La mayoría de los participantes calificaron de manera positiva la actividad en cuanto a su relevancia profesional (media: 4.5/5) y su aplicabilidad en el aula (media: 4.6/5). La satisfacción con el formato del podcast obtuvo un puntaje promedio alto (media: 4.7/5), reflejando aceptación y valoración positiva del recurso. En cuanto a los temas tratados en el podcast fueron percibidos como claros y comprensibles (media: 4.6/5), con la estructura del podcast facilitando la comprensión del contenido (media: 4.5/5). Por otra parte, Los participantes destacaron el impacto de la actividad en el desarrollo de sus competencias tecnológicas (media: 4.4/5). Además, hubo un cambio moderado en las perspectivas sobre el uso de inteligencia artificial en el aula (media: 4.1/5). (Ver Figura 1)

En términos generales los resultados mostraron que la mayoría de las calificaciones fueron altas, indicando una percepción positiva de la actividad. Las calificaciones fueron particularmente altas en términos de:

Relevancia profesional: Los participantes encontraron que la actividad era útil para su desarrollo profesional.

Compromiso y satisfacción: Los participantes se sintieron involucrados y satisfechos con el formato del podcast.

Aplicabilidad en la enseñanza de las Matemáticas: Los temas discutidos en el podcast fueron vistos como relevantes y aplicables a la enseñanza.

Por otra parte, Se identificaron ciertos valores atípicos en las respuestas, es decir, calificaciones que fueron significativamente más bajas que el promedio. Por ejemplo: Calificaciones de 4 en una escala Likert de 5 en preguntas relacionadas con la relevancia, la participación, y la efectividad del formato de podcast. Una calificación de 3 sobre la efectividad del uso de podcasts como herramienta para enseñar Matemáticas.

Estos valores atípicos indican que algunos participantes tuvieron percepciones menos positivas en comparación con la mayoría, lo que sugiere áreas donde se podrían hacer ajustes menores para mejorar la experiencia general.

Análisis de correlaciones

Se calculó una matriz de correlación para examinar la relación entre las respuestas a diferentes preguntas. Algunos hallazgos clave incluyen:

- **Correlaciones altas:** Se encontraron correlaciones fuertes entre la relevancia profesional y el impacto positivo en la enseñanza, así como entre la satisfacción con el formato y la participación activa. Esto sugiere que la percepción de valor profesional está estrechamente ligada a la calidad de la experiencia de aprendizaje.
- **Correlaciones bajas:** Se identificaron asociaciones más débiles entre preguntas relacionadas con el cambio de perspectiva sobre la IA y la capacidad para comunicar conceptos complejos, lo que podría indicar una menor conexión entre estos aspectos para algunos participantes.

Las correlaciones más fuertes reflejan que: Los participantes que encontraron la actividad relevante también creyeron que podría tener un impacto positivo en la enseñanza. La satisfacción con el formato de podcast estuvo relacionada con la percepción de que el formato permitía una participación. Aquellos que sintieron que desarrollaron competencias tecnológicas también valoraron el intercambio de ideas durante la actividad. Esto sugiere que la actividad fue percibida positivamente, especialmente en términos de relevancia profesional y oportunidades de aprendizaje colaborativo.

Por otra parte, el análisis de correlaciones entre las preguntas de la encuesta reveló varias relaciones significativas:



Figura 2. Imágenes de la actividad realizada: podcast

Relevancia profesional e impacto en la enseñanza: La correlación más alta (1.0) se encontró entre la percepción de relevancia profesional y el impacto positivo en la enseñanza de las Matemáticas, mostrando que los participantes valoraron la actividad por su utilidad directa en su práctica docente.

Satisfacción con el formato y participación activa: Los participantes que estaban satisfechos con el formato del podcast también percibieron que este facilitaba su participación activa ($r=0.87$). Esto sugiere que el diseño del recurso influye directamente en el nivel de interacción.

Desarrollo de competencias e intercambio de ideas: Una fuerte correlación ($r=0.83$) entre el desarrollo de competencias tecnológicas y el intercambio de ideas muestra que los aspectos colaborativos de la actividad estuvieron estrechamente vinculados con el aprendizaje de habilidades técnicas.

Aplicación práctica y comprensión del contenido: Los participantes que confiaban en poder aplicar lo aprendido en su práctica también encontraron que el podcast facilitaba la comprensión del contenido ($r=0.81$), destacando el enfoque práctico de la actividad.

Aunque la mayoría de los resultados fueron positivos, algunos participantes otorgaron puntajes ligeramente más bajos en ciertas áreas, como el cambio en la perspectiva sobre la inteligencia artificial (media: 4.1/5) y la efectividad del podcast como herramienta para comunicar conceptos complejos (media: 4.2/5). Esto sugiere la necesidad de incluir recursos complementarios o ejemplos más específicos para maximizar el impacto en estas dimensiones.

Los resultados anteriores, reflejan el éxito de la actividad basada en podcasts como una herramienta pedagógica innovadora en la formación docente en Matemáticas. Las correlaciones significativas destacan que la percepción de relevancia profesional y el impacto en la enseñanza están profundamente vinculados, lo que reafirma la importancia de diseñar actividades que respondan directamente a las necesidades prácticas de los docentes. Además, la satisfacción con el formato del podcast y su capacidad para fomentar la participación subrayan el rol clave del diseño en la motivación y el compromiso de los participantes.

Conclusiones

A partir del análisis de la actividad basada en podcasts como herramienta didáctica en la Educación Matemática, podemos concluir que esta estrategia fomenta una integración significativa de TIC e IA en la enseñanza, promoviendo el desarrollo de competencias tecnológicas, la participación activa y el aprendizaje colaborativo. Los resultados obtenidos muestran que el diseño y formato de la actividad permiten una comprensión clara de conceptos complejos y su aplicación práctica en contextos educativos reales. El enfoque metodológico utilizado, que incluyó un análisis cuantitativo y cualitativo, resalta la relevancia de este tipo de herramientas para la formación docente. En primer término, la percepción positiva de los participantes sobre la relevancia profesional y el impacto en la enseñanza refuerza la importancia de explorar recursos digitales innovadores que potencien las prácticas educativas. En segundo término, la evaluación de la confiabilidad del instrumento utilizado demuestra la validez de los resultados y subraya la importancia de contar con herramientas rigurosas en la investigación educativa.

Esta actividad muestra que la integración de tecnologías no solo mejora el proceso de enseñanza y aprendizaje, sino que también permite a los docentes reflexionar sobre su práctica profesional, abordando problemáticas específicas del aula y generando oportunidades para su desarrollo profesional. Finalmente, esta experiencia marca un punto de partida para extender el uso de herramientas tecnológicas a escenarios más complejos, como la enseñanza en contextos multigrado o con estudiantes con diversas necesidades educativas. La consolidación de estas estrategias fortalecerá la formación docente y promoverá el diseño de actividades innovadoras, alineadas con los estándares educativos actuales y las demandas de un entorno digital.

Referencias y bibliografía

- Dang, D., Moughnyeh, S., Stephens, E., Convers, V., Adkins-Jablonsky, S., & Raut, S. (2022). A pandemic pivot: podcast as an active engagement tool in the classroom and beyond. *Coursesource*, 9. <https://doi.org/10.24918/cs.2022.34>
- George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows Step by Step: A Simple Guide and Reference*. 11.0 Update (4th ed.). Boston: Allyn & Bacon.
- Guan, H. (2023). Advantages and challenges of using artificial intelligence in primary and secondary school education. *Journal of Education Humanities and Social Sciences*, 22, 377-383. <https://doi.org/10.54097/ehss.v22i.12469>
- Kay, R. and Edwards, J. (2012). Examining the use of worked example video podcasts in middle school mathematics classrooms: a formative analysis / étude sur l'utilisation de podcasts d'exemples pratiques dans des classes de mathématiques à l'école secondaire de premier cycle. *Canadian Journal of Learning and Technology*, 38(3). <https://doi.org/10.21432/t2pk5z>
- Kay, R. and Kletskin, I. (2012). Evaluating the use of problem-based video podcasts to teach mathematics in higher education. *Computers & Education*, 59(2), 619-627. <https://doi.org/10.1016/j.compedu.2012.03.007>



Ensino de formas geométricas espaciais com estudante autista: Possibilidades do uso da plataforma Wordwall

Suzilei Magosso Araújo **Alabarces**
Universidade do Vale do Taquari - Univates
Brasil
suzilei.alabarces@universo.univates.br

Claudia Ines **Horn**
Universidade do Vale do Taquari - Univates
Brasil
cihorn@univates.br

Ieda Maria **Giongo**
Universidade do Vale do Taquari - Univates
Brasil
igiongo@univates.br

Resumo

O texto tem por objetivo explicitar as possibilidades e limitações do uso da plataforma Wordwall no ensino de formas geométricas espaciais com um estudante autista. A opção pela Geometria - formas geométricas espaciais - justifica-se devido a relevância deste tópico como área de estudo, o que demanda uma abordagem pedagógica especializada para estudantes com Transtorno do Espectro Autista (TEA). Assim, a Sequência Didática que contém tarefas envolvendo a plataforma foi desenvolvida para um estudante de 11 anos com TEA, regularmente matriculado no 5º ano do Ensino Fundamental e que frequenta, no contraturno, a sala de recursos. Os materiais de pesquisa foram constituídos por gravações, posteriormente transcritas, fotos e materiais produzidos pelo estudante. A análise, descritiva, evidenciou a potencialidade da plataforma, pois permitiu o engajamento ativo, bem como uma forma dinâmica e prazerosa de o estudante sistematizar os conhecimentos.

Palavras-chave: Transtorno do Espectro Autista; Ensino de Matemática; Formas Geométricas Espaciais; Wordwall.

Definição e relevância do problema

O texto analisa as possibilidades e limitações do uso da plataforma Wordwall no ensino de formas geométricas espaciais com um estudante autista. A opção pela Geometria - formas geométricas espaciais - justifica-se devido a relevância deste tópico como área de estudo, o que demanda uma abordagem pedagógica especializada para estudantes com Transtorno do Espectro Autista (TEA). Assim, a Sequência Didática que contém tarefas envolvendo a plataforma foi desenvolvida para um estudante de 11 anos com TEA, regularmente matriculado no 5º ano do Ensino Fundamental. Esse estudante frequenta a Sala de Recursos Multifuncionais duas vezes por semana, no contraturno escolar, em uma escola pública estadual localizada em Várzea Grande/MT, Brasil

As tarefas foram planejadas de acordo com as diretrizes da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que destaca a representação e a construção de sólidos geométricos como parte fundamental do desenvolvimento do pensamento matemático. Essa representação pode ser feita por meio de materiais manipuláveis ou uso de softwares. Aliado, é importante que o professor conheça seu estudante autista, fazendo uso de recursos que o auxiliem nesse processo de sistematização dos conhecimentos diante do desafio de trabalhar com crianças com deficiência. Esse posicionamento se faz necessário, pois cada estudante possui um ritmo próprio para a construção de suas aprendizagens. Com base nesse pressuposto, as tarefas oferecem uma abordagem dinâmica e estimulante para o ensino de formas geométricas espaciais, essencial para o desenvolvimento de habilidades cognitivas dos estudantes autistas, promovendo a exploração, a associação e a construção de conhecimento, tornando-os protagonistas de seu próprio processo de aprendizagem.

Nessa ótica, a plataforma Wordwall busca auxiliar no ensino dos conceitos fundamentais de Geometria, como vértices, arestas, faces e a identificação e classificação de formas geométricas espaciais. Além disso, a abordagem pode contribuir significativamente para os processos de ensino e aprendizagem desses conceitos matemáticos essenciais, atendendo às necessidades pedagógicas específicas dos estudantes com TEA. As tarefas foram estruturadas com base em uma sequência programada de forma criteriosa, considerando materiais previamente conhecidos pelo estudante, bem como incluiu-se objetos presentes em seu cotidiano, respeitando sua individualidade. Essa abordagem tem como objetivo conectar o conhecimento prévio com os novos conceitos a serem trabalhados.

Referencial teórico

O Transtorno do Espectro Autista (TEA) é classificado como um distúrbio do desenvolvimento com bases neurobiológicas, sendo submetido a critérios primordialmente clínicos (Schwartzman, 2011). Isso significa que é essencial observar e analisar os comportamentos manifestados pela criança, já que não é viável defini-lo de outra maneira. Nessa perspectiva, é imprescindível conhecer o autismo, sua definição, características e em que consiste essa patologia, pois, até há pouco tempo, era visto como loucura ou psicose.

O termo autismo foi utilizado pela primeira vez, pelo psiquiatra austríaco Bleuler, em 1911, para caracterizar o alheamento social de alguns pacientes. Considerado um comportamento esquizofrênico, o termo refere-se a um dos critérios do diagnóstico adotados para identificar a esquizofrenia, ou seja, os quatro A de Bleuler: alucinações, afeto, ambivalência e autismo. Ou seja, a criança que sinalizasse perda de contato com a realidade, isolando-se num mundo próprio, o que impossibilitava a comunicação com as demais pessoas era diagnosticada como autista (Bosa, 2002).

Em 1943, o médico austríaco, Dr. Léo Kanner, residente nos Estados Unidos, que desenvolveu a primeira pesquisa referente ao autismo, num artigo intitulado “Distúrbios Autísticos do Contato Afetivo”, descreveu pela primeira vez a noção de autismo, forjada por Eugen Bleuler como um dos principais sintomas da esquizofrenia (Bleuler, 1993). Kanner observou em 11 crianças, desde a infância, características de um comportamento de extremo isolamento e um desejo obstinado pela manutenção da ausência de mudanças (Brasil, 2015). Segundo Kanner (1997, p. 243), o “isolamento autístico extremo as levava a negligenciar, ignorar ou recusar o contato com o ambiente, e esse comportamento podia estar presente desde os primeiros meses de vida”. As crianças autistas também apresentaram dificuldades na comunicação, manifestando uma linguagem pouco comunicativa, como a modificação de pronomes e propensão a repetições, caracterizada por um discurso repleto de clichês, sem ser uma verdadeira “conversa”, bem como mostravam atitudes motoras afetadas. Para descrever esses sintomas, já perceptíveis na primeira infância, Kanner usou o termo “autismo infantil precoce”. Portanto, os estudantes com TEA, ao serem estimulados, aprendem de forma diferenciada e singular, porém, é sabido que nem sempre os resultados serão apresentados da forma como o professor espera. Por isso, segundo Cunha (2014), convém que o foco na educação escolar esteja nos processos de aprendizagem e não nos resultados, desenvolvendo, no ensino da Matemática, práticas pedagógicas tendo ciência de que não existem técnicas ou metodologias únicas.

À luz do que foi indicado, a Matemática nos oferece a Geometria, que está presente em várias expressões do mundo físico. Ao observarmos nosso entorno, podemos identificar as diferentes formas geométricas, tanto na natureza quanto nas criações humanas, como nas esculturas, nos quadros, esboços, artesanatos, edificações entre outras. Dessa forma, é importante promover discussões acerca dessa área da Matemática, para facilitar a aprendizagem dos estudantes. Segundo Pontes (2000, p. 165), “a Geometria pode ainda constituir um tema unificador na aprendizagem da Matemática, na medida em que fornece formas de representação com forte apelo visual para vários tópicos da Matemática”. Assim, a Geometria não apenas enriquece o entendimento dos conceitos matemáticos, mas também oferece uma base visual que pode integrar diversos temas e facilitar a compreensão dos estudantes.

Método e desenvolvimento conceitual

Os ritos referentes à ética em pesquisa foram cumpridos com os termos de aceite da escola e dos pais. O estudante também esteve presente e foi informado de maneira clara sobre as situações de aprendizagem planejadas e a importância de sua participação. Após receber uma

explicação sobre os objetivos e procedimentos da pesquisa, demonstrou compreensão e concordância com sua participação, formalizando sua decisão por meio da assinatura do Termo de Assentimento do Menor, no qual autorizou o uso de seu nome e imagem para os fins específicos do estudo. A opção pela pesquisa qualitativa se mostrou potente, pois de acordo com Minayo (2003), a pesquisa qualitativa diz respeito ao domínio das definições; logo, está ligada a uma realidade que não pode ser quantificada, devendo, portanto, ser interpretada pelo pesquisador. Nesse sentido, segundo a autora, “[...] a abordagem qualitativa aprofunda-se no mundo dos significados das ações e relações humanas, um lado não perceptível e não captável em equações, médias e estatísticas” (Minayo, 2003, p. 22). Assim, ao optar pela aproximação de um estudo de caso, foi viável empregar diversas ferramentas metodológicas para reunir informações, o que, conforme Yin (2005), viabiliza uma investigação que se mantém fiel às características de eventos da vida real. Essa investigação permite esclarecer uma decisão específica ou um conjunto de decisões, explorando as razões que levaram a tomá-la, bem como examina como a metodologia foi aplicada e analisa os resultados obtidos. A abordagem do estudo de caso tem como foco a compreensão aprofundada de escolhas específicas, analisando os motivos subjacentes à implementação da metodologia e os resultados alcançados.

Quanto ao uso de diferentes instrumentos de pesquisa para a produção de dados, uma das opções de registro foi a gravação. Para defini-la, recorre-se às contribuições teóricas de Bortoni-Ricardo (2008, p. 62), para quem “a gravação eletrônica em vídeo ou áudio tem uma grande vantagem na coleta de dados, porque permite ao observador, ‘revisitar’ os dados muitas vezes para tirar dúvidas e refinar a teoria que está construindo”. Ao contrário de outros métodos de produção de dados, a gravação possibilitou que eu revisasse ações e comportamentos, como também propiciou a reflexão e a análise da prática, por meio dos próprios conceitos. Conforme Dessen e Borges (1998), a utilização de múltiplos recursos possibilita a condução de pesquisas estruturadas, promovendo uma produção de dados mais ampla, que favorece a compreensão aprofundada do fenômeno em estudo, cujo resultado é uma diversidade de dados rica e extensa. Corroborando os autores referenciados acima, que destacam a importância das gravações durante a aplicabilidade da pesquisa, no presente estudo, os dez encontros foram gravados na íntegra. A transcrição desses encontros serviu de base para a produção dos dados analisados. Da mesma forma, o uso de fotografias é um recurso ilustrativo, isto é, imagens para registrar momentos importantes da execução da pesquisa, conforme recomendado por Magalhães (2014, p. 42), para quem representa “um meio de recolha de informações fundamental para a concretização da investigação, uma vez que ajuda a recordar acontecimentos vivenciados no contexto”.

Convém destacar que as tarefas foram desenvolvidas em dez encontros, com cerca de uma hora e meia cada envolvendo, além do uso da plataforma, tarefas com o uso de materiais manipuláveis. Ao colocar em prática a proposta da sequência didática, o foco foi a **observação** do andamento das situações de aprendizagem, tanto no ambiente externo da escola, no pátio, quanto na Sala de Recursos Multifuncionais. Essa observação consistiu em acompanhar atentamente a participação e a interação do estudante ao executar as ações propostas, bem como ao explorar os materiais sugeridos em todos os encontros. O estudante está alfabetizado, lê com fluência, embora utilize somente letras maiúsculas. Além disso, durante os diálogos, tende a evitar o contato visual com as pessoas que estão falando e apresenta estereotipias motoras, como

movimentos com as mãos, quando está muito feliz ou agitado. Já na primeira etapa da intervenção, foi possível identificar que o estudante tem habilidade com o computador e com o *Chromebook*. Os jogos foram selecionados com o objetivo de fortalecer as habilidades do estudante autista e consolidar o conhecimento sobre formas geométricas espaciais, promovendo uma aprendizagem mais interativa e envolvente. Na plataforma, estes foram projetados com sons suaves, para evitar que o estudante seja perturbado por ruídos altos.

Resultados

As tarefas foram desenvolvidas na plataforma após contato prévio com o conteúdo das formas geométricas espaciais, assim, os jogos digitais desempenharam papel importante no reforço dos conhecimentos adquiridos. Além disso, as situações de aprendizagem podem funcionar como ferramentas avaliativas, tanto no sentido de diagnóstico, para avaliar o que o estudante já aprendeu e informar o planejamento de novas situações, quanto como instrumentos de avaliação, para medir o progresso e a compreensão do conteúdo. Nesta nova etapa dos trabalhos com o estudante com TEA, também surgiram adversidades. Assim, a condução de cada jogo exigiu, não apenas conhecimento prévio do aparato tecnológico, mas também uma adaptação constante às emoções e aos comportamentos imprevisíveis do estudante. Essas experiências foram cruciais para ajustar e reorientar os encontros. Além disso, foi necessário explorar minuciosamente os jogos digitais previamente planejados, garantindo uma condução satisfatória das situações de aprendizagem posteriores.

De fato, houve momentos em que o estudante demonstrou impaciência e irritabilidade. A pesquisadora então interveio afirmando que “Se você for ficar nervoso, vamos parar de jogar. Lembra do combinado? O estudante então respondeu: “Não!!! Eu não quero parar!”, recebendo a orientação de “Então fique calmo. Você consegue, mas leia as perguntas devagar, com atenção e errar faz parte do jogo”. Ato contínuo, explicitou que “Se você ficar nervoso, não vou poder continuar fazendo atividades com você no computador nas próximas aulas”.

A imprevisibilidade é marcante no comportamento dos autistas, sendo um grande desafio os professores. É relevante considerar que, quando as regras, as rotinas e as expectativas são sempre as mesmas, os estudantes sabem o que esperar, o que pode reduzir a ansiedade e ajudá-los a se sentirem mais confortáveis e confiantes. A comunicação calma, clara e assertiva, aliada ao reforço positivo também pode desempenhar um papel importante no manejo do comportamento e na promoção de um ambiente de aprendizagem positivo. Explorar estratégias que podem ser utilizadas para lidar com essa imprevisibilidade e os benefícios de um ambiente estruturado para estudantes autistas pode auxiliar nessa construção do conhecimento. Assim, nas veredas dos jogos digitais, o estudante não aceitava perder e demonstrava irritabilidade. Na ocasião do jogo “Questionário”, com 15 perguntas de todo o conteúdo estudado, recomeçou duas vezes, pois errava e não aceitava continuar. Ele não parou de jogar até responder corretamente a todas as perguntas; porém, ficou muito irritado e agressivo ao longo do processo, conforme expresso na figura a seguir:



Figura 1: Estudante manipulando os jogos

No entanto, é possível criar oportunidades que permitam ao indivíduo autista não apenas alcançar seu potencial máximo, mas também contribuir de maneira significativa em diversos contextos sociais e profissionais. Por exemplo, o jogo "Estoura Balões" requer concentração elevada e agilidade no controle dos dispositivos, como o mouse. Naquele dia, o estudante questionou: "Hoje tem jogo no computador?" A pesquisadora respondeu que "Sim, porém antes de iniciarmos, vamos rever o que pode e o que não pode fazer. E como combinamos, hoje eu vou escolher o jogo e você escolhe o cenário". Imediatamente, eufórico, o estudante expressou que "sim, sim"!

Nesse jogo, durante o deslocamento de um trem, os vagões apresentam nomes de objetos, enquanto os balões flutuantes no céu levam representações de formas geométricas espaciais. Desse modo, o desafio para o estudante consiste em identificar o balão correspondente à forma geométrica associada ao nome do objeto presente no vagão em movimento e estourá-lo, permitindo que a forma caia no vagão correto. Esse exercício promove o desenvolvimento simultâneo de habilidades cognitivas e motoras em estudantes com TEA, facilitando a associação entre a representação visual e a nomenclatura das formas geométricas espaciais. Esse jogo passa por vários níveis e cada um apresenta maior grau de dificuldades. A figura 2 evidencia uma tela do jogo.



Figura 2: Jogo dos balões no wordwall

Diante do entusiasmo do estudante com a realização desta e de outras tarefas na plataforma, havia a preocupação com o nível de dificuldades dos jogos, dentre eles, o “Labirinto das Formas e suas Planificações”, que exigia um nível maior de destreza no manuseio do mouse e conhecimento no sentido de o jogador ser rápido na execução das tarefas. Esperava-se a reação de descontentamento dele. Todavia, o estudante foi desafiado e, embora agitado para não deixar o jogo vencê-lo, respondia corretamente a cada pergunta, identificando as formas geométricas espaciais e suas planificações que haviam sido trabalhadas. Conclui-se que essa estratégia educacional auxiliou o estudante na sua compreensão e permitiu que progredisse em conhecimentos; para isso, foi crucial observar suas reações e respostas, estar atento aos significados criados que, posteriormente, poderão ser explorados e reorganizados.

Conclusão

É importante destacar que essas abordagens não esgotam todas as possibilidades, pois, à medida que o professor conhece melhor seu estudante, pode desenvolver outras técnicas para facilitar o trabalho pedagógico. O uso dos jogos no aplicativo *Wordwall* desempenhou papel crucial na consolidação do aprendizado do estudante. Os jogos deste aplicativo, como “Labirinto das Formas e suas Planificações”, “Associação”, e “Abra a caixa”, entre outros, não apenas proporcionaram uma experiência interativa e envolvente, mas também serviram como ferramenta eficiente para avaliar o impacto da sequência didática. Através das respostas entusiasmadas e assertivas do estudante, foi possível observar que os objetivos pedagógicos estavam sendo alcançados, permitindo autonomia do estudante no manuseio dos aparatos tecnológicos. Ao final de cada jogo, já sabia explorar suas notas e acertos. A frequência com que respondia às perguntas com convicção demonstrou que as aprendizagens estavam ocorrendo, o que reforça a importância de integrar recursos digitais lúdicos no processo de ensino, especialmente, para estudantes com deficiência. Todavia, os jogos digitais não precisam ser utilizados de forma isolada em relação aos materiais manipuláveis. Pelo contrário, eles podem ser apresentados concomitantemente a esses materiais, promovendo uma integração entre as abordagens. Vale ressaltar que essa ferramenta também pode ser explorada na apresentação do conteúdo a ser trabalhado.

Diante dessa situação, as contribuições de Grandin (2017, p. 131) são relevantes, ao afirmar que “[...] se pudermos reconhecer, de modo realista, caso a caso, os pontos fortes de um indivíduo, podemos determinar melhor seu futuro”. Reconhecer essas habilidades não apenas diz respeito a aspectos cognitivos específicos associados aos autistas, mas também ressalta a importância de valorizar suas capacidades únicas, como atenção aos detalhes, capacidade de foco intenso em áreas de interesse e habilidades analíticas e sistemáticas. Ao identificar e fomentar esses pontos fortes, é possível criar oportunidades que permitam ao indivíduo autista não apenas alcançar seu potencial máximo, mas também contribuir de maneira significativa em diversos contextos sociais e profissionais.

Referências e bibliografia

- Bortoni - Ricardo, S. M. (2008). *O professor pesquisador: introdução à pesquisa qualitativa*. São Paulo: Parábola.
- Brasil (2015). Lei nº 13.146, 06 de julho de 2015. *Lei Brasileira de Inclusão da Pessoa com Deficiência ou Estatuto da Pessoa com Deficiência*. Brasília: Presidência da República.
- Brasil (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília: Ministério da Educação.
- Bleuler, E. (1993). *Demencia Precoz: El grupo de las Esquizofrenias*. Buenos Aires: Lumen-Horné, 1993.
- Cunha, A. E. (2014). *Práticas Pedagógicas Para Inclusão e Diversidade*. 4. ed. Rio de Janeiro: Wak.
- Dessen, M. A. C. Borges, L. M. (1998). Estratégias de observação do comportamento em Psicologia do Desenvolvimento. In: Romanelli, G.; Biasoli-Alvez, Z. M. *Diálogos Metodológicos sobre prática de pesquisa*. Ribeirão Preto: Legis Summa. p. 31- 49.
- Grandin, T. (2017). *O cérebro autista: pensando através do espectro*. Rio de Janeiro: Record.
- Kanner, L. (1997). Os distúrbios autísticos de contato afetivo. In: Rocha, P. S. *Autismos*. São Paulo: Escuta.
- Magalhães, S. C. (2014). *O contributo da visualização para o desenvolvimento do sentido de número no pré-escolar*. 207f. Relatório Final da Prática de Ensino Supervisionada (Mestrado em Educação Pré-Escolar) – Instituto Politécnico de Viana do Castelo.
- Minayo, M. C. S. (2003). *Pesquisa Social: teoria, método e criatividade*. Petrópolis: Vozes.
- Pontes, J. P. (2000). *Didática da Matemática do 1º Ciclo*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Schwartzman, J. S. (2011). Transtorno do Espectro do Autismo: conceitos e generalidades. In: Ceres, A. A; Schwartzman, J. S. *Transtorno do Espectro do Autismo*. São Paulo: Editora Memnon.
- Yin, R. K. (2005). *Estudo de Caso: planejamento e métodos*. 3. ed. Porto Alegre: Bookmann.



Estimación por intervalo de media y proporción poblacional usando GeoGebra: Una experiencia didáctica en cursos STEM

Wilson Rodríguez Calderón

Escuela Superior de Administración Pública – ESAP

Colombia

wilson.rodriquezc@esap.edu.co

Myriam Rocío Pallares Muñoz

Universidad Surcolombiana

Colombia

myriam.pallares@usco.edu.co

Resumen

Este artículo presenta la planificación e implementación de un proyecto didáctico para desarrollar recursos educativos computacionales en cursos STEM, utilizando GeoGebra como herramienta principal. La metodología incluye revisión de conocimientos, formulación de modelo conceptual, definición de casos de estudio, capacitación en GeoGebra y Excel, desarrollo y validación de archivos estadísticos y producción científica. Actualmente, el proyecto se encuentra en la fase de desarrollo e implementación de recursos digitales aplicados a problemas de estudio, comparando GeoGebra y Excel. Se destaca la versatilidad de GeoGebra en la estimación de parámetros como el medio y la proporción de población, reduciendo la carga de diseño y favoreciendo el análisis de resultados. En una fase posterior, se realizaron pruebas de usabilidad con estudiantes universitarios. Se concluye que GeoGebra es una herramienta didáctica eficaz para abordar problemas estadísticos de forma sencilla y eficiente, optimizando el aprendizaje y la interpretación de datos.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación Superior; Enseñanza Híbrida; Educación para adultos; Educación para comunidades indígenas; Modelización; STEM; GeoGebra; ESAP; Colombia; GeoGebra.

Introducción

El problema de estudio de esta investigación consiste en el desarrollo de recursos educativos digitales como herramienta didáctica para el apoyo de los procesos formativos en Administración pública territorial, particularmente en lo que se conoce en el escenario global como cursos STEM (Science, Technology, Engineering and Mathematics), particularmente el curso de Estadística II en Administración Pública territorial con destino a población variada constituida por jóvenes, adultos y población indígena.

En el contexto nacional e internacional, se reconocen tesis, artículos y ponencias de desarrollo de herramientas digitales en GeoGebra que se concentran principalmente en aplicaciones en la formación básica primaria y secundaria y con menor intensidad en la formación para la educación superior.

Diversos estudios muestran resultados importantes de aplicaciones de GeoGebra en problemas de estadística (Villamil & Mill, 2019). Estos estudios exploran las posibilidades de GeoGebra para abordar situaciones asociadas al concepto de probabilidad y de muestreo. Alvarez & Solis (2019), estudian el uso de GeoGebra en el aprendizaje de estadística descriptiva para estudiantes de cuarto grado de educación secundaria en la institución educativa Daniel Alcides Carrión en Perú. También se destaca el trabajo de Arias & Hernández (2015), que desarrollaron algunos talleres particulares de estadística descriptiva e inferencial usando GeoGebra con destino a profesores de secundaria y universidad de la carrera de enseñanza de la matemática de la universidad estatal a distancia en Costa Rica. Otro trabajo importante es el de Kanobel (2016), quien encuentra en GeoGebra un recurso didáctico para enseñar probabilidad y estadística en el aula y se destaca allí el uso de simulaciones y animaciones, entre otros. En síntesis, de la búsqueda de investigaciones referentes al tema de uso de GeoGebra en análisis estadístico y su aprovechamiento como herramienta didáctica se encontró que buena parte de ellos tienen limitaciones de alcance en el sentido que solo cubren análisis descriptivos, otros limitan la población objetivo en la enseñanza secundaria o universitaria a nivel de casos particulares, en carreras específicas o instituciones específicas.

Objetivo General del proyecto

Implementar herramientas didácticas en GeoGebra que permitan apoyar la estrategia de aprendizaje basado en problemas en la asignatura de Estadística II del programa de administración pública territorial APT, dentro y fuera del aula de clases.

Metodología

El proyecto está desarrollado siguiendo los pasos o fases mostrados en la figura 1.



Figura 1. Metodología del proyecto.
Fuente: Autores.

Resultados

Los resultados se muestran a continuación en 2 problemas representativos de la estadística relacionados con el tema de estimación de parámetros en particular la media y proporción poblacional.

Problema 1. Aplicación en intervalo de confianza del promedio de vida libre de defectos de Televisores

Se trata de un problema de toma de decisiones basado en el intervalo de confianza del promedio de vida libre de defectos de televisores, parte del cálculo implica hallar un punto crítico en la función de probabilidad t de student presente en las funciones estadísticas de GeoGebra (Contento, 2019). La figura 2 muestra los resultados obtenidos en GeoGebra, en la figura 3 se muestra el cálculo del punto crítico usando GeoGebra y su respectiva gráfica que ilustra el concepto, finalmente en la figura 4 se muestra la verificación desarrollada en hoja Excel.

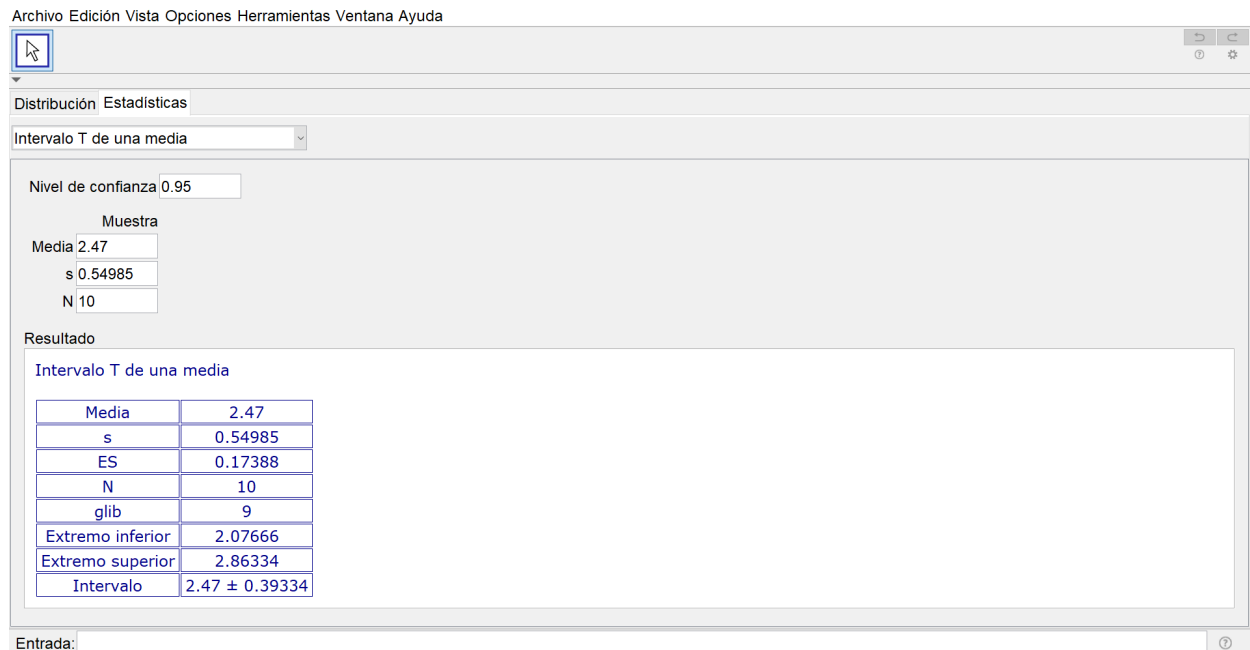


Figura 2. Intervalo de confianza para promedio calculado en GeoGebra. Fuente: Autores.

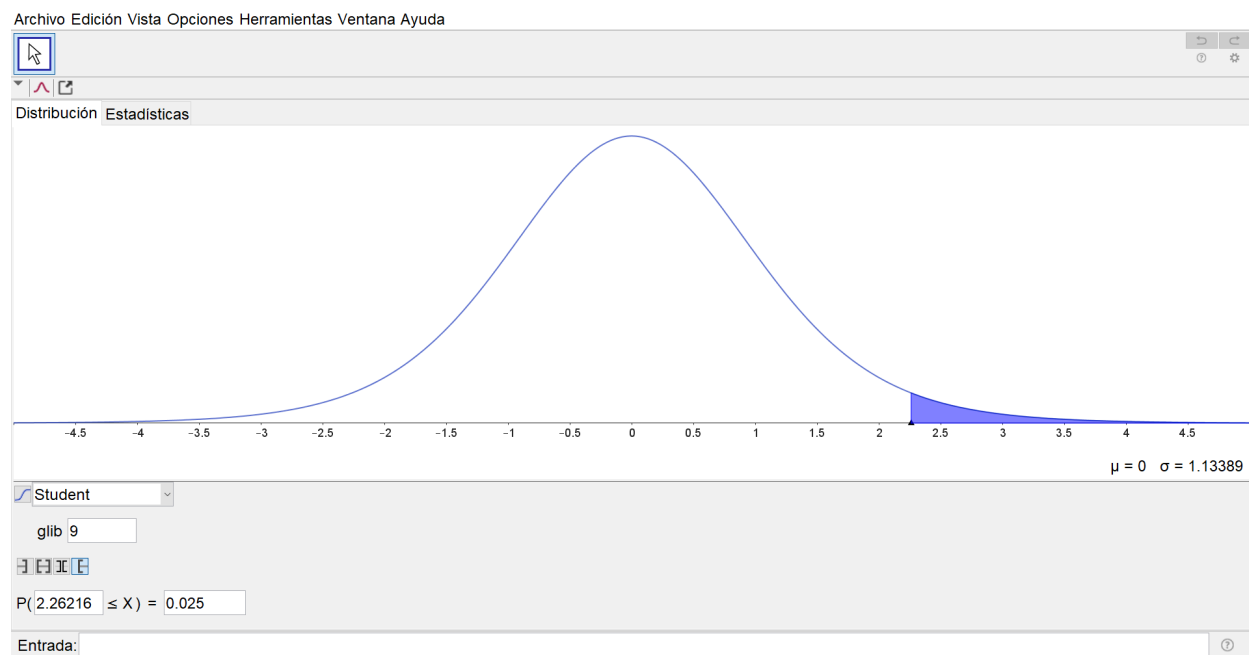


Figura 3. Punto crítico calculado en función de probabilidad t de student. Fuente: Autores.

CALIDAD DE TELEVISORES			
X: número de años de vida sin daños de los televisores			
	X		
x1	2.5	f	
x2	1.9	f	
x3	2.6	f	
x4	2.9	f	
x5	1.6	f	
x6	3.2	a	
x7	3.1	a	
x8	2.2	f	
x9	2.8	f	
x10	1.9	f	
$\bar{x}$	2.47	Media de la muestra	
n	10		
s	0.549848	Desviación estándar de la muestra	
c	0.95	Confianza	
α	0.05	Alfa	
$\alpha/2$	0.025		
$t_{\alpha/2; n-1}$	2.262157	Punto crítico en la t de student $t_{0.025; 9}$	
li	2.076662		
ls	2.863338		

$$\bar{x} \pm t_{\alpha/2; n-1} \frac{s}{\sqrt{n}}$$

El verdadero promedio de vida de los televisores sin daño se encuentra entre 2.08 y 2.86 años y dicha estimación se provee con una confianza de 95%.

Figura 4. Solución en Excel para el cálculo de intervalo de confianza para promedio. Fuente: Autores.

Problema 2. Aplicación en intervalo de confianza de la proporción de vehículos utilitarios deportivos en la ciudad de Bogotá (Colombia)

Se trata de un problema de investigación para estimar la proporción de vehículos utilitarios deportivos (SUV) en la ciudad de Bogotá (Colombia), parte del cálculo implica hallar un punto crítico en la función de probabilidad normal presente en las funciones estadísticas de GeoGebra (Contento, 2019). La figura 5 muestra los resultados obtenidos en GeoGebra, en la figura 6 se muestra el cálculo del punto crítico usando GeoGebra y su respectiva gráfica que ilustra el concepto, finalmente en la figura 7 se muestra la verificación desarrollada en hoja Excel.

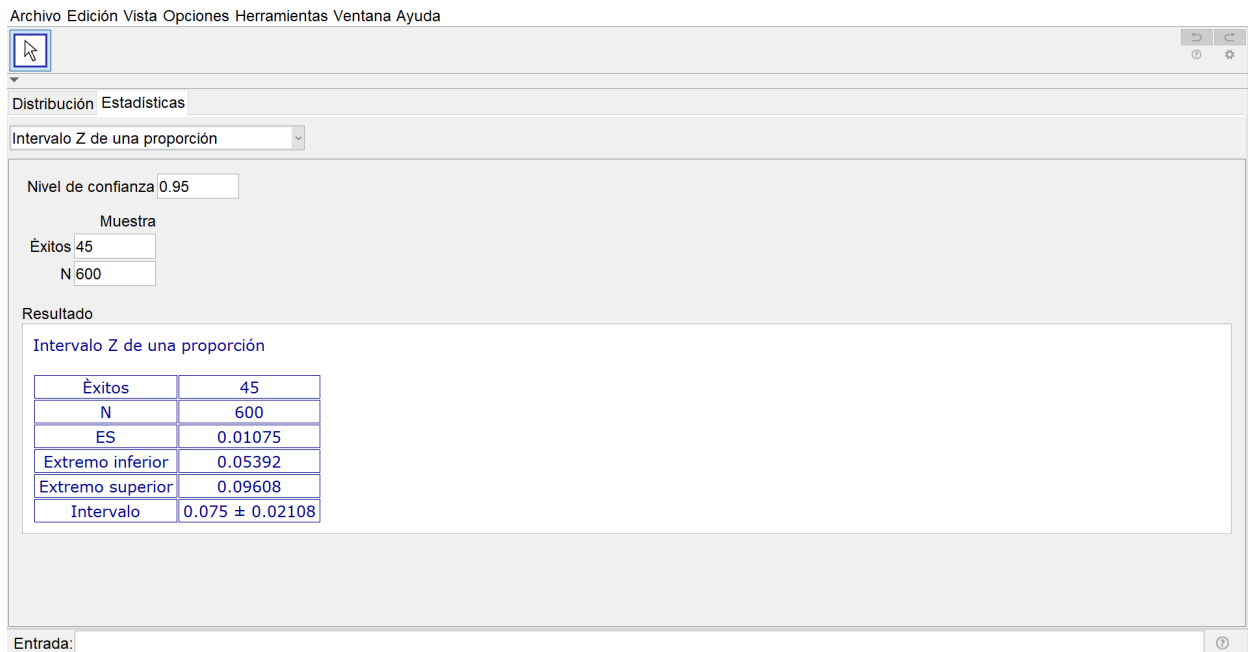


Figura 5. Intervalo de confianza para proporción calculado en GeoGebra. Fuente: Autores.

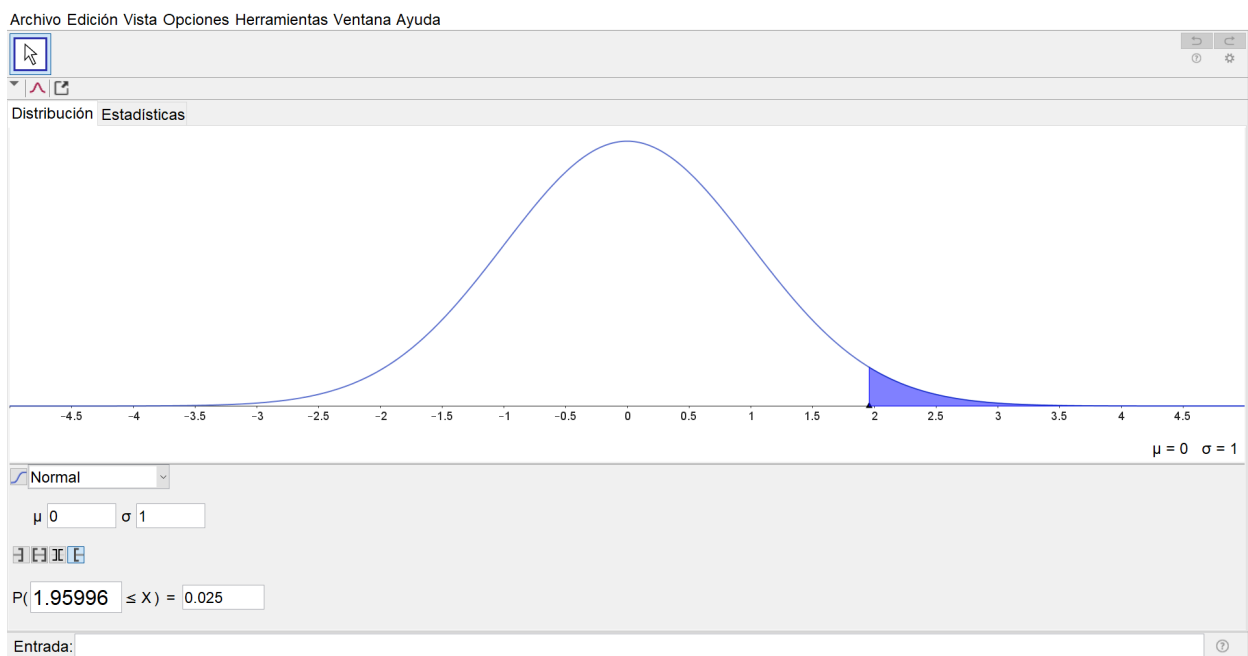


Figura 6. Punto crítico calculado en función de probabilidad normal. Fuente: Autores.

ESTUDIO SOBRE PROPORCIÓN DE VEHÍCULOS SUV EN BOGOTÁ			
X: número de vehículos SUV en Bogotá			
x	45	Valor observado de X	$p \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$
n	600	Tamaño de muestra	
p	0.075	Proporción estimada	
c	0.95	Confianza	
α	0.05	Alfa	
$\alpha/2$	0.025		
$z_{\alpha/2}$	1.959964	Punto crítico en la distribución Normal estándar	
li	0.053925		
ls	0.096075		
Con una confianza del 95% se estima que la real proporción de vehículos SUV en Bogotá se encuentra entre 5.4% y 9.6%.			

Figura 7. Solución en Excel para el cálculo de intervalo de confianza para proporción. Fuente: Autores.

Conclusiones y Recomendaciones

Los resultados verificados en los dos tipos de problemas de estimación de intervalos de confianza de promedio y proporción poblacional muestran que GeoGebra soluciona correctamente los 2 tipos de problemas minimizando los cálculos por parte del estudiante, por tanto es posible concentrar los esfuerzos en el análisis, interpretación, toma de decisiones y obtención de conclusiones en los problemas estudiados.

Se destacan las ventajas didácticas de GeoGebra para ayudar al profesor y al alumno en su proceso de enseñanza-aprendizaje basado en problemas prácticos que pueden tener una carga importante de cálculo numérico o visualización.

Se recomienda continuar explorando más temáticas de la estadística inferencial que permitan ampliar el espectro de aplicaciones de GeoGebra en cursos STEM como los relacionados con matemática y estadística.

Se recomienda realizar una fase adicional de evaluación y usabilidad de las herramientas computacionales en trabajo en el aula y trabajo autónomo.

Referencias

- Alvarez, L., & Solis, K. (2019). *Uso de GeoGebra y el aprendizaje de la estadística descriptiva para estudiantes del cuarto grado de educación secundaria de la Institución Educativa Daniel Alcides Carrión de Cerro de Pasco, 2018. [Tesis de licenciatura]. Repositorio Institucional.*
http://repositorio.undac.edu.pe/bitstream/undac/1543/1/T026_46258318_T.pdf
- Arias, R. O., & Hernández, L. A. (2015). Estadística descriptiva e inferencial con GeoGebra. In A. Borbón & G. Calderón (Eds.), *IX Congreso Internacional sobre la Enseñanza de la Matemática Asistida por Computadora* (pp. 284–299). Tecnológica de Costa Rica. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1164192/Ortiz2015Estadistica.pdf>
- Contento, M. R. (2019). *Estadística con aplicaciones en R. [online]*. Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. <http://hdl.handle.net/20.500.12010/21660>
- Comunicación; Educación Superior*
- IV CEMACYC, Santo Domingo, República Dominicana, 2025.*

- Kanobel, M. C. (2016). Geogebra como recurso didáctico para enseñar probabilidad y estadística en el aula. In I. Álvarez & C. Sua (Eds.), *Memorias del II Encuentro Colombiano de Educación Estocástica* (pp. 307–311). Asociación Colombiana de Educación Estocástica. <https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1243203/Kanobel2016Geogebra.pdf>
- Villamil, O. H., & Mill, D. R. S. (2019). Uso de geogebra y probabilidades: herramientas de interfaz pedagógica en la enseñanza de la estadística / Geogebra and probabilities uses: pedagogic interface tools in the statistics teaching. *Brazilian Journal of Development*, 5(7), 10159–10178. <https://doi.org/10.34117/bjdv5n7-176>



Experiencias de laboratorio híbridas (HyLab): Algoritmo ElGamal

Carmen Caiseda

Codirectora HyLab - UIPR-Bayamón

Puerto Rico

ccaiseda@bayamon.inter.edu

Alvaro Lecompte

Director HyLab – UIPR San Germán

Puerto Rico

alecompte@intersg.edu

Eddie Arrieta-Arrieta

Universidad Interamericana de Puerto Rico (UIPR)-Bayamón

Puerto Rico

earrieta@bayamon.inter.edu

Omayra Rivera-Castro

Coordinadora de Estudiantes HyLab-UIPR-Bayamón

Puerto Rico

oriverac@interbayamon.edu

Carlos Martínez-Bonilla

Coordinador de Currículo HyLab- UIPR- San Germán

Puerto Rico

cmartinez@intersg.edu

Resumen

El proyecto Experiencias de Laboratorio Híbridas (HyLab) es una “comunidad de práctica” que busca desarrollar un currículo híbrido innovador utilizando proyectos relevantes para educar estudiantes de nivel universitario. Las experiencias HyLab utilizan las herramientas virtuales y presenciales identificadas como mejores prácticas para cada equipo de trabajo. Estas experiencias son desarrolladas con el insumo de los estudiantes como diseñadores junto con la facultad proponiendo como grupo una mejor forma de enseñar y aprender.

Como ejemplo, usando aprendizaje basado en proyectos, presentamos la actividad del Algoritmo ElGamal, el equipo de estudiantes y profesores desarrollaron el proyecto por medio de aprendizaje híbrido, formato semiautomatizado y programación alfabetizada que provee oportunidades de aprender sobre estructuras algebraicas, algoritmos y su implementación en lenguajes de programación (MATLAB, Python, etc.).

Los resultados mostraron aumento en la identidad científica, pertenencia y autoeficacia de los estudiantes participantes.

Palabras clave: Aprendizaje basado en proyectos; Criptografía; Educación híbrida; Lenguajes de programación

Introducción

El proyecto de Experiencias de Laboratorio Híbridas (HyLab) de la Universidad Interamericana de Puerto Rico (UIPR) es una “comunidad de práctica” como lo define Lave & Wagner (1991) donde los miembros aprenden unos de otros para crecimiento personal y profesional. HyLab busca desarrollar currículo híbrido innovador utilizando proyectos/problemas relevantes para educar nuestra nueva población estudiantil de nivel superior. Las experiencias HyLab utilizan las herramientas virtuales y presenciales que mejor funcionan por disciplina basado en conversaciones de la facultad. Este proyecto une mentores expertos, facultad y estudiantes por medio de los Institutos de Verano que tienen como resultados facultad y estudiantes capacitados para desarrollar nuevo currículo y las experiencias de laboratorio que han sido diseñadas como mejores prácticas pedagógicas por disciplina. Lo innovador de este currículo es que estas experiencias híbridas de aprendizaje son desarrolladas con el insumo de los estudiantes como diseñadores, junto con la facultad, en un modelo que el grupo propone como una mejor forma de enseñar y aprender.

HyLab surge de la necesidad de ofrecer alternativas a la educación presencial tradicional, especialmente tras las experiencias vividas durante el cierre de instituciones educativas debido a la pandemia de COVID-19 y el consecuente aumento en la oferta de cursos a distancia o en modalidad híbrida en los años posteriores. Este cambio, que se percibe como permanente, invita a repensar los métodos de enseñanza sin comprometer la calidad educativa.

Las actividades de aprendizaje pueden desarrollarse parcialmente en laboratorios o salones de clase, y parcialmente en entornos virtuales o mediante comunicaciones asincrónicas en línea, fomentando el trabajo colaborativo entre los estudiantes. Se espera que los resultados de estas experiencias sean presentados y discutidos colectivamente como parte integral del proceso de aprendizaje.

En la revisión de Sandrone (2022) se discute la relación entre la auto-eficacia y la identidad científico-matemática. La auto-eficacia tiene un rol prominente en la capacidad sostenible del estudiante de hacer y utilizar las ciencias y Matemáticas. Se considera que la auto-eficacia promueve la identidad científico-matemática. El desarrollo de la auto-eficacia está ligado a una experiencia de dominio en la ejecución de una tarea específica y la interpretación del estudiante

de esta experiencia. El Instituto de Verano provee la oportunidad de tener esta experiencia transformadora.

El diseño lógico de la metodología de trabajo se resume en la Figura 1.

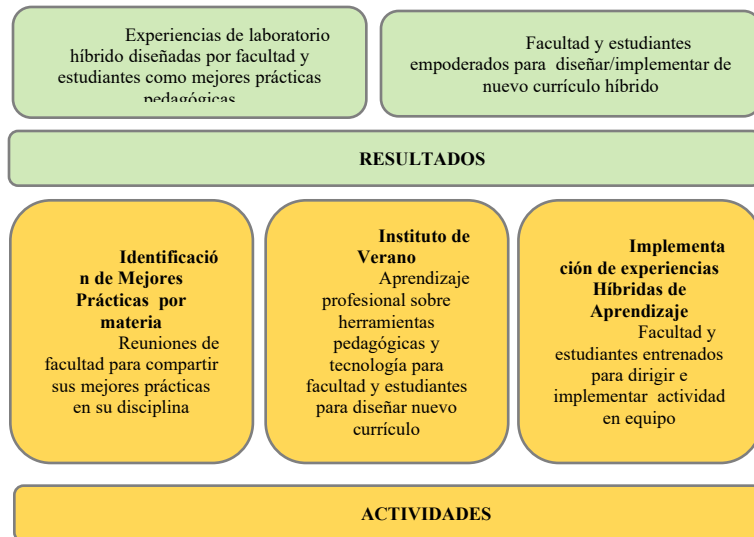


Figura 1. Resumen de las Actividades y resultados del proyecto INTER-HyLab

Este documento está organizado de la siguiente manera. En primer lugar, se presenta la metodología utilizada para el diseño de las actividades. En segundo lugar, a modo de ejemplo, se describe una experiencia basada en un algoritmo criptográfico de llave pública conocido como ElGamal. Esta experiencia puede integrarse en distintos niveles de varios cursos de Matemáticas o ciencias de computación, y demuestra las amplias aplicaciones de estas disciplinas en la vida moderna. En tercer lugar, se discuten los hallazgos obtenidos al emplear esta metodología, otras actividades que ya están disponibles, y los resultados de un estudio impacto de esta metodología realizado con los estudiantes participantes en el proyecto. Finalmente, se analiza la posible contribución de esta metodología y los desarrollos proyectados para el futuro.

Metodología

El Instituto de Verano HyLab 2023 contó con la participación de diez (10) profesores, cuatro (4) coordinadores HyLab y dieciocho (18) estudiantes provenientes de dos recintos geográficamente distantes de la Universidad Interamericana de Puerto Rico: San Germán y Bayamón. La facultad fue seleccionada por su especialidad en Matemáticas e ingeniería, con el objetivo de fomentar una participación significativa y con capacidad de transformar la enseñanza dentro de cada disciplina.

Durante el Instituto, se llevaron a cabo reuniones y conferencias tanto virtuales como presenciales, dirigidas por expertos invitados en herramientas pedagógicas y bienestar, así como por el personal de HyLab. Además, se organizaron sesiones de trabajo colaborativo entre facultad y estudiantes. Esta estructura permitió establecer múltiples niveles de mentoría, desde

expertos hasta estudiantes, fortaleciendo así la comunidad académica. La mentoría es clave para promover la auto-eficacia en los miembros de la comunidad.

Los equipos de trabajo estuvieron compuestos por dos profesores de la misma disciplina y cuatro estudiantes interdisciplinarios de ambos recintos. El Instituto incluyó dos semanas de talleres sincrónicos, dos reuniones presenciales, un mes de trabajo colaborativo (sincrónico y asincrónico), y culminó con un simposio en el que cada equipo presentó el currículo desarrollado, liderado por los propios estudiantes. En las conferencias se discutieron varias herramientas útiles como se indican abajo.

Existe un banco muy rico de herramientas pedagógicas para beneficio de la Educación Matemática a utilizarse al desarrollar actividades tanto en formato virtual como presencial. Parte de las herramientas para desarrollo del currículo que se presentaron en el Instituto de Verano HyLab 2023 se enumera a continuación.

- 4 C's - Pensamiento Crítico, Creatividad, Comunicación y Colaboración
- Raíz causal – los 5 por qué
- Estimación de Fermi
- 6-3-5: 6 personas -3 ideas – 5 minutos
- Específico, Medible, Alcanzable, Recursos y Tiempo (matriz SMART)
- 5-E: conectarse (“engage”), explorar, explicar, elaborar, evaluar
- Aprendizaje basado en problemas y proyectos
- Sustituir, aumentar, modificar, redefinir (SAMR)
- Modelo TPACK: Tecnología, Pedagogía, conocimiento de contenido
- Herramientas tecnológicas:
 - Tecnología para simulaciones en la educación de la física (PhET)
 - Plataforma común en línea para análisis de datos (CODAP)

Presentamos una de las experiencias desarrolladas por uno de los grupos de facultad y estudiantes como resultado de esta metodología de desarrollo de currículo y proyecto grupal.

Actividad sobre el Algoritmo ElGamal

La experiencia desarrollada con el Algoritmo ElGamal es una motivada por la necesidad de la ciberseguridad, de alta importancia en este tiempo. Tanto las transacciones financieras como la comunicación de información sensitiva en las redes deben ser altamente protegidas. El algoritmo ElGamal se caracteriza por su rápida ejecución (“throughput”) y su uso en algoritmos de firmas digitales de documentos, conocido como DSA por sus siglas en inglés. Para más información referimos a los escritos de Anusha, R. et. al 2025, Arhin, et. Al. 2024 y Gómez, 2017.

La codificación del algoritmo ElGamal usa funciones inyectivas y es accesible bajo la Firma digital en el programado *GNU Privacy Guard*. El algoritmo tiene su soporte de seguridad en el concepto de funciones de una sola dirección, en este caso la función logaritmo discreto usada en clases residuales de números primos de más de 2048 bits. Dado que el algoritmo tiene tres pasos claves: 1. Creación de llave pública. 2. Cifrado y 3. Descifrado, se pueden diseñar actividades grupales donde se distribuye cada etapa en los integrantes. El primer paso de creación de la llave pública consiste en seleccionar de forma aleatoria un generador g del grupo

cíclico multiplicativo $(\mathbb{Z}_p)$, para un número primo p , un número aleatorio secreto $a \in \mathbb{Z}_p$ y el residuo $k = g^a \bmod p$. Esto produce la llave pública (p, g, k) . No hay una única solución correcta al momento de crear la llave. La segunda parte conlleva generar un 2-tuplo $[y_1, y_2]$ a partir del mensaje m , para cifrar utilizando otro número aleatorio secreto $b \in \mathbb{Z}_p$ con las siguientes fórmulas: $y_1 = g^b \bmod p$, $y_2 = (k^b * m) \bmod p$. Finalmente en el tercer paso desciframos a partir del cifrado $[y_1, y_2]$ con las siguientes funciones:

$$D_1 = (y_1^{p-a-1}) \bmod p, \quad M = (D_1 \times y_2) \bmod p, \text{ donde } M \text{ es el mensaje original.}$$

El usuario puede utilizar herramientas como MATLAB o Python entre otros que contienen funciones integradas para calcular números aleatorios y hacer cálculos de residuales $\mathbb{Z}_p$. Esta estrategia les permite comenzar a familiarizar a los estudiantes con estas operaciones. Sin embargo, un estudiante desarrolló herramientas en JAVA para calcular dos partes esenciales del algoritmo ElGamal: los generadores (g) del grupo cíclico multiplicativo de enteros módulo p -primo y el cálculo del residuo $k = g^a \bmod p$, donde a es un número entero aleatorio definido en el algoritmo. Los demás estudiantes utilizaron estas herramientas para cifrar y descifrar un mensaje usando ElGamal en forma semiautomatizada.

El proyecto del algoritmo de ElGamal produjo una experiencia curricular y una presentación dirigida por los estudiantes sobre su trabajo que sorprendió tanto a la facultad como a los propios estudiantes. Junto a sus profesores los cuatro estudiantes lograron trabajar efectivamente como equipo, superando los retos por medio de la comunicación, y aprendiendo sobre temas matemáticos previamente desconocidos, incentivados por el uso de la tecnología en el cifrado y descifrado de un mensaje. Los estudiantes son de programas de ingeniería y ciencia de cálculos con conocimiento matemático de nivel del curso de precálculo. No estaban familiarizados con Álgebra Lineal ni las operaciones en módulo p .

Principales Hallazgos

La facultad de Matemáticas participante de estos talleres identificó las mejores prácticas para el desarrollo de un currículo híbrido basado en proyectos. La práctica de mayor prioridad identificada es: **“Implementar tareas que promuevan razonamiento y solución de problemas e interesar a los estudiantes en discusión de problemas que permitan variedad de puntos iniciales y estrategias.”** La facultad contribuyó los siguientes comentarios referentes a la importancia del razonamiento, solución de problemas y comunicación por medio de la discusión de los problemas.

- Uso de lenguaje apropiado que promueve la hermenéutica matemática, pues conecta el proceso cognitivo y semiótico de la interpretación en Matemáticas
- Uso de foros de discusión: Aportación del estudiante sobre cómo explicar de acuerdo con lo que él/ella entendió del tema que se está estudiando
- Incentivar reuniones de grupos de aprendizaje fuera del horario de clases y poner por escrito sus ideas
- Conexión de estudiantes más avanzados con estudiantes nuevos
- Presentaciones orales
- Uso de representaciones múltiples: dibujos, tablas, diagramas

La práctica pedagógica de menor importancia identificada por la facultad participante es: “Apoyar la *lucha productiva*: proveer oportunidades a estudiantes individual y colectivamente para lidiar con ideas y relaciones matemáticas.” Este tipo de enseñanza parece ser la menos conocida y/o practicada posiblemente por la incertidumbre del tiempo de clase que tome, y la meta de adelantar el contenido a cubrir en cada reunión. No obstante, la facultad aportó los siguientes comentarios asociados a la *lucha productiva*.

- Hay que recordarles a los estudiantes que *de los errores se aprende*
- *Validar el estrés* de los estudiantes nuevos
- Dar *múltiples oportunidades* para completar las actividades

El proyecto ha desarrollado cinco actividades producto del trabajo de los cinco equipos de facultad y estudiantes. Este material de formato híbrido incluye los siguientes temas:

1. Algoritmo ElGamal: Aplicaciones de Álgebra Lineal en la ciberseguridad
2. Jugando con cuerdas, masas y vectores: Estudio usando simulación y experimentación con cambios de dirección de cuerdas y masas
3. Análisis de datos para el curso de probabilidad – estudios de caso justificados con razonamiento estadístico
4. Logaritmos y pH- uso de una solución de repollo morado para medir y definir pH
5. Función Exponencial – modelos de crecimiento y decrecimiento

El impacto de esta metodología pedagógica fue evaluado mediante una encuesta ofrecida a los estudiantes antes y después del instituto de verano. Debido al tamaño de la muestra, 11 de 18 estudiantes, los resultados no pretenden ofrecer un análisis del valor estadístico de los resultados, sino una evaluación del Instituto. Los resultados de ambas encuestas (Pre y Pos) se presentan en la Tabla 1. Estos son alentadores, aunque la muestra no permite análisis inferencial. Observamos cambios positivos en tres constructos: Identidad científico-matemática, auto-eficacia y sentido de pertenencia. Es de destacar el cambio más alto que ocurre en el sentido de pertenencia. Esto está asociado con las mentorías facultad-estudiante, y entre pares que ocurre en la experiencia de trabajo en equipo que se promueve como parte de la “comunidad de práctica” del Instituto HyLab.

Tabla 1
Resultados de Pre-Pos prueba para Instituto de Verano 2023

Constructo	Media-Pre N = 9	Media-Pos N = 11	Cambio
Identidad Científica-matemática	4.50	5.25	0.75
Auto-eficacia	8.54	9.15	0.61
Sentido de pertenencia	8.93	9.97	1.04
Bienestar	4.49	4.48	-0.01
Persistencia	4.67	4.65	-0.02

Además, hay una congruencia entre las actividades y las reflexiones que los estudiantes participantes compartieron sobre el impacto del programa. Incluimos comentarios de los estudiantes a la pregunta: ¿qué cosas claves obtuvieron de la experiencia? Citamos:

- “fue un reto, pero aprendí muchísimo”
- “aprendí a adaptarme y vencer ante los retos”
- “podemos hacer más de los que nos parecía posible, aún con pocos recursos”
- “un sentido de amistad y motivación”
- “he desarrollado destrezas de liderazgo, entusiasmo y creatividad”
- “descubrir oportunidades asombrosas para los estudiantes en nuestras disciplinas de estudio.”

Contribución

El valor de esta experiencia HyLab se encuentra en la riqueza del lenguaje matemático y sus métodos que han sido obtenidos por los estudiantes al construir sus funciones y programas en lugar de utilizar un programado obtenido y utilizarlo sin consciencia de su contenido, como una “caja negra”. Esto es una oportunidad que se puede reproducir hoy más que ayer con el uso de los asistentes de Inteligencia Artificial (IA) para facilitar la programación en diversos lenguajes de interés para el estudiante. Un futuro impacto mayor de este tipo de actividad es el uso de la programación alfabetizada (literate programming) de Knuth (1984) que actualmente se integra en sistemas como R-markdown, y Jupyter Notebooks que permitir incluir explicaciones tipo libro de texto que redactan los conceptos matemáticos seguidos por pedazos de código. Este formato provee al estudiante la explicación y la herramienta para que explore y modifique aprendiendo destrezas del pensamiento lógico-matemático y tecnológico. De esta manera como educadores de Matemáticas estamos posicionados para aprovechar esta oportunidad provista por los avances tecnológicos y enseñar el lenguaje del desarrollo de las ideas que la misma tecnología utiliza: las Matemáticas.

Agradecimiento

Este proyecto ha sido subvencionado por el programa MSEIP (Programa de mejoramiento de las ciencias e ingeniería para minorías) del Departamento de Educación de E.U, bajo la dirección de la Dra. Bernadette Hence. El equipo de trabajo del proyecto INTER-HyLab agradece la contribución de la evaluadora externa Dra. Gabriele Haynes.

Referencias y bibliografía

- Anusha, R., & Saravanan, R. (2025). Revolutionizing signature scheme: the enhanced Edward ElGamal extreme performance accumulate signature approach for IoT and blockchain applications. *Soft Computing*, 1-24.
- Arhin, P., & Aggrey, G. Enhancement of ElGamal Cryptosystem (Noviembre 2024); A Review, recuperado el 15 de febrero de 2025, de [https://icaiit.org/proceedings/12th_ICAIIT_2/1-9-ICAIIT_2024_12\(2\).pdf](https://icaiit.org/proceedings/12th_ICAIIT_2/1-9-ICAIIT_2024_12(2).pdf)
- Bravo, A., & Olga, M. (2018). Selección e implementación de librería Java de algoritmo para E-Voting.
- Gómez Olvera, M. D. (2017). Las Matemáticas y las comunicaciones seguras Algoritmo de ElGamal.
- Hernandez, F., Algebra Lineal, recuperado el 15 de febrero de 2025, de <https://sites.google.com/unal.edu.co/fohernandezr/docencia/materias/%C3%A1lgebra-lineal>
- Lave, J., and Wenger, E. (1991). Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation. New York, NY: Cambridge University Press. [doi:10.1017/CBO9780511815355](https://doi.org/10.1017/CBO9780511815355)

- Knuth, D. E. (1984), Literate Programming, *The Computer Journal*, Vol. 27: 2, (pp.97 111), <https://doi.org/10.1093/comjnl/27.2.97>.
- Sandrone, S. (2022) Science identity and Its “Identity Crisis”: On Science Identity and Strategies to Foster Self-Efficacy and Sense of Belonging in STEM, MINI REVIEW article, *Front. Educ.*, 21 July 2022, Sec. STEM Education. Volume 7 - 2022 | <https://doi.org/10.3389/educ.2022.871869>
- Tsiounis, Y., & Yung, M. (1998, February). On the security of ElGamal based encryption. In *International Workshop on Public Key Cryptography* (pp. 117-134). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg.



Exploração de conteúdos matemáticos e do currículo com calculadora gráfica

Franciele Santos **Teixeira**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

fs.teixeira@unesp.br

Bruno de Moraes **Turci**

Diretoria de Ensino Regional de São Carlos/SP

Brasil

turci@prof.educacao.sp.gov.br

Sueli Liberatti **Javaroni**

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”

Brasil

sueli.javaroni@unesp.br

Resumo

Com esta oficina buscamos discutir com os participantes o uso da calculadora gráfica e científica no contexto escolar. Para isso, propomos a discussão de uma atividade atrelada ao do currículo do estado de São Paulo, de modo a abordar com os participantes diferentes contextos e maneiras de pensar tais conteúdos. A atividade versa especificamente sobre conceito de juros simples e compostos, porcentagem e gráfico contínuo e discreto. Salientamos que a proposta é baseada em discussões feitas com professores da Educação Básica no contexto de uma ação de formação desenvolvidas pelos autores desta oficina. Com esse movimento, buscamos trazer discussões que envolvam a importância de dialogar com o contexto em que o professor atua e a integração das tecnologias na sala de aula.

Palavras-chave: Tecnologia Digital, Calculadora Gráfica, Insubordinação Criativa, Ensino de Matemática, Aprendizagem Matemática, Educação Matemática.

Exploração de conteúdos matemáticos e currículo com calculadora gráfica

Definição e relevância do tema

Conforme destacam autores como Bigode (2019) e Valente (2023), os documentos oficiais vigentes no Brasil moldam as propostas de formação de professores e suas abordagens, entretanto, muitas vezes, o corpo docente não participa das decisões que impactam diretamente no seu dia a dia na sala de aula. No contexto brasileiro, mais especificamente no estado de São Paulo, houve uma atualização no currículo de modo que os professores passaram a trabalhar com apresentação de slides, denominado material digital, preparados pelo estado e enviados para os docentes (São Paulo, 2023).

Por ter a proposta de aulas por meios de recursos digitais, compreendemos que é importante discutir que abordagem e propostas são feitas e caso sugestões sejam ponderadas, que pressupostos teóricos podem ser seguidos. Com isso, ressaltamos que defendemos um uso que valorize a criação de conjecturas, explore o *feedback* da tecnologia utilizada, explore aspectos visuais e tentativas e erros possam permear a proposta, ou seja, consideramos a perspectiva da experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005). Para Borba & Villarreal (2005, p. 72, grifo dos autores, tradução nossa), a “experimentação-com-tecnologias significa muito mais do que um ‘apertar de teclas’ em uma calculadora, calculadora gráfica ou computador”.

Entendemos que para atrelar propostas presentes no currículo com a experimentação-com-tecnologias é imprescindível pensar em como e que recursos o professor dispõe para lidar com a burocracia e imposições de caráter superior, e para nós, uma maneira de discutir tais imposições perpassa a insubordinação criativa (D’Ambrosio & Lopes, 2015). Quando nos referimos a insubordinação criativa, queremos dizer que

Quando nos defrontamos com a complexidade da sala de aula e do fazer do pesquisador, emergem dilemas e conflitos. Muitas vezes, diante deles, desenvolvemos nossas próprias estratégias e tomamos decisões que dão origem a práticas pedagógicas e investigativas, as quais podem possibilitar a toda e qualquer pessoa uma apropriação mais significativa e compreensível sobre as Matemáticas utilizadas nas diferentes instâncias da vida humana. Essa ação seria, então, caracterizada como um ato de insubordinação criativa, pois os educadores matemáticos assumiriam a imprevisibilidade presente no processo de construção de conhecimento e se dedicariam a ouvir o seu aluno, o seu sujeito, os seus colegas, ao invés de dar ouvido às diretrizes pré-estabelecidas pelas instituições. (D’Ambrosio e Lopes, 2015, p.13)

Portanto, tendo em vista os pressupostos apresentados até o momento, propomos uma oficina para dialogar com as discussões sobre o currículo e como lidar com propostas que, às vezes, não condizem com o contexto de atuação do professor e com os recursos que possuem disponível. Nesta oficina, será abordada uma atividade que envolve noções de juros simples e compostos, porcentagem, função e gráfico de função e entendemos que a ampla possibilidade de conceitos a serem discutidos possibilitará que os participantes pensem em diferentes faixas etárias de ensino e contextos.

Destacamos ainda que a atividade proposta no minicurso foi discutida com professores em uma ação de formação desenvolvida por nós no segundo semestre de 2024 e intitulada “Material

Digital e Tecnologias: possibilidades para a prática docente de professores que ensinam Educação Financeira”. Essa ação foi vinculada ao projeto temático “Ensino e aprendizagem de Matemática com calculadoras: possibilidades para a prática do professor”¹, que possui como objetivo investigar possibilidades do uso de calculadoras científica e gráfica no ensino de Matemática na Educação Básica. O projeto temático é fruto de uma parceria entre a Casio Brasil Comércio de Produtos Eletrônicos Ltda e membros do Grupo de Pesquisa em Informática, outras Mídias e Educação Matemática (GPIMEM), e trabalha com pesquisas que discutem esses aspectos no âmbito da sala de aula e na formação de professores.

Referencial Teórico

Compreendemos “o currículo como um rol de conteúdos que foram construídos historicamente e que orientam a prática docente nas escolas” (Forner, 2018, p. 94). Valente (2023) aponta que, muitas vezes, “[...] o olhar para essa documentação passa a ter um caráter epistemológico, isto é, considera que uma nova proposta curricular reúne novos saberes para o ensino e para a formação de professores” (Valente, 2023, p. 7). Dessa forma, há desafios referentes ao processo de ensino e aprendizagem quando pensamos em propostas que considerem metodologias ativas para serem discutidas com os professores.

Indo ao encontro dessa visão, Merli (2019) tece críticas a esse currículo idealizado de modo amplo e sem considerar contextos, pois ao não considerar a diversidade inerente do ser ao longo dos documentos oficiais que regem o âmbito escolar, particularidades são ignoradas e é difícil pensar em segui-lo na íntegra. Com isso, aquilo que deveria ser um guia ou auxílio ao professor, acaba se tornando um dos desafios para a sua prática docente.

Destacamos o oferecimento da oficina, oportuniza abordar o papel do currículo em diferentes locais e como se dá esse diálogo com a sala de aula, de modo a possibilitar que a comunidade da área de Educação Matemática reflita e fortaleça estratégias que leve em consideração as demandas e necessidades dos professores que atuam na Educação Básica. Dessa maneira, considerar o conceito de insubordinação faz sentido, pois essa complexidade que é pensar na formação crítica e cidadã dos estudantes diante de imposições curriculares é um dos papéis do pesquisador em Educação Matemática (D’Ambrosio & Lopes, 2015), isso quer dizer que “consideramos a premissa de que atrever-se a criar e ousar na ação docente decorre do desejo de promover uma aprendizagem na qual os estudantes atribuam significados ao conhecimento matemático” (D’Ambrosio & Lopes, 2015, p. 2).

Esse lidar com a complexidade do dinamismo da sala de aula, perpassa tomar decisões e

Essa tomada de decisões constante requer, muitas vezes, assumir posturas que se contrapõem ao que está posto e determinado, seja pelo cotidiano profissional, seja por diretrizes legais. Estas seriam atitudes subversivas que visam a rupturas com o preestabelecido, de forma a criar novas dinâmicas de trabalho (D’Ambrosio & Lopes, 2015, p. 13).

Ao estar preocupado com a formação do educando, o professor desafia a estrutura pré-estabelecida e se propõe a considerar o contexto desse estudante e as motivações para o seu

¹ O projeto foi aprovado no processo nº 3221/2021 – CCP – FUNDUNESP.

processo de aprendizagem. Em vista disso, defendemos que um dos caminhos a ser considerado é o uso de tecnologias em sala de aula. Corroboramos Borba e Villarreal (2005) ao defender que conhecimentos são produzidos de modos qualitativamente diferentes ao se propor uma atividade com diferentes mídias, por exemplo, uma atividade envolvendo função feita com lápis e papel e com o computador podem explorar diferentes aspectos desse conceito matemático. Além disso, assimilamos que ao propor uma atividade que envolva a abordagem experimental-com-tecnologias é importante considerar que não estamos integrando a tecnologia em questão de maneira domesticada, ou seja,

Parte fundamental de nosso trabalho é buscar novos tipos de problemas e diversificados tipos de soluções com o surgimento de uma nova tecnologia. Muitas vezes um problema que poderia ser didático com uma tecnologia não é com outra. Buscamos sempre criar novas possibilidades para os coletivos formados por tecnologias e tecnologias digitais que não estavam disponíveis em um momento anterior. Pensamos que dessa forma evitamos a domesticação dessas novas tecnologias. Entendemos que domesticar uma tecnologia significa utilizá-la de forma a manter intactas práticas que eram desenvolvidas com uma mídia que é predominante em um determinado momento da produção de conhecimento. Manter tais práticas de forma acrítica, como por exemplo usar ambientes virtuais de aprendizagem apenas para enviar um PDF é o que chamamos de domesticação. O envio substitui o correio usual que entregava um texto, mas não incorpora o que pode ser feito com uma nova mídia (Borba, Scucuglia & Gadanidis, 2020, p. 32-33)

Portanto, pensar em um uso não domesticado dialoga com a perspectiva das características de uma abordagem que considere a experimentação-com-tecnologias ao: possibilitar criação de testes e conjecturas, utilizando um vasto número de exemplos e possibilidade de repetições por meio do *feedback* da tecnologia e a possibilidade de diferentes tipos de representação de uma dada situação (Borba & Villarreal, 2005).

Posto isso, propomos uma oficina que possibilite discutir com a comunidade da Educação Matemática sobre possibilidades da integração de tecnologias, mais especificamente a calculadora gráfica, de modo a considerar o currículo e contexto de professores que ensinam matemática em diferentes países.

Estratégia para o desenvolvimento

Iniciaremos a oficina pedindo para que os participantes do minicurso se apresentem, dizendo nome, se lecionam em algum nível de ensino e país. Em seguida, comentaremos sobre o projeto temático e o contexto em que a atividade proposta foi desenvolvida a fim de evidenciar para os participantes que ela foi discutida com professores que atuam na rede de ensino estadual pública paulista e adaptada para esse contexto. Nesse momento, também buscaremos abordar o conceito de insubordinação criativa e experimentação-com-tecnologias.

Ainda nesse primeiro momento, apresentaremos o seguinte problema para os participantes: “Uma pessoa tem uma fatura do cartão de crédito no banco X, no valor de R\$1.500,00. Porém, devido a um imprevisto, só conseguirá pagar 80% deste valor. Vamos calcular como o crédito rotativo dessa pessoa seguirá ao longo dos meses” (Proposta presente no material disponibilizado aos professores). Salientamos que fizemos uma adaptação desse problema, pois a proposta original consistia apenas no exercício seguido de sua resolução. Além disso, diremos que é um

problema que estava no material digital dos professores e que nossa proposta permeou pensar em maneiras de discutir o problema, conceitos matemáticos e conclusões para a situação.

Após essa apresentação inicial, pediremos para que os participantes da oficina se dividam em duplas ou trios e disponibilizaremos calculadoras para os grupos, modelo fx-CG50. O intuito é que os participantes possam explorar o seu menu e ver as funcionalidades que ela possui. Salientamos que serão levadas 20 calculadoras gráficas para serem utilizadas na oficina. Após esse primeiro contato, distribuiremos um tutorial² para que os participantes consultem algumas possibilidades disponíveis na funcionalidade “Tabela” que foram usadas na proposta. Ressaltamos que nesse momento, também faremos o passo a passo presente no tutorial com os participantes por meio do uso de um emulador (Figura 1).

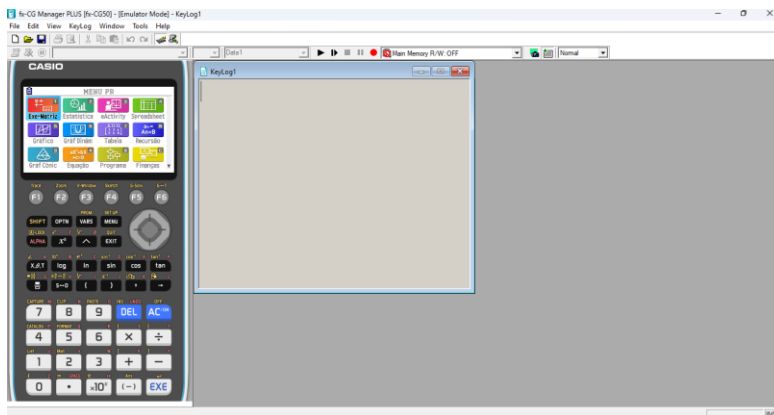


Figura 1: Emulador da calculadora gráfica

A calculadora gráfica possibilita que escolhamos um tempo específico para a plotagem do gráfico e se ele será considerado de maneira contínua ou discreta, possibilita que alteremos a escala para a visualização do gráfico, conforme evidenciamos na Figura 2.

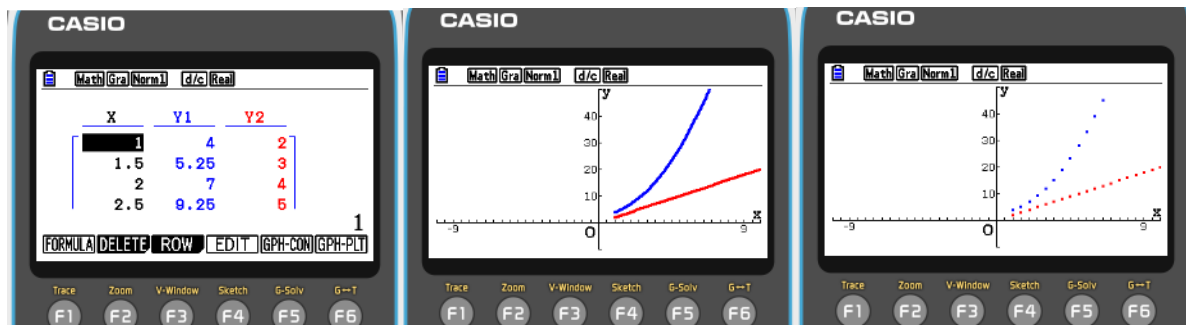


Figura 2: Exemplo de tabela gerada, conjunto de dados contínuos e discretos feitos na calculadora gráfica (Elaborado pelos autores)

Dessa maneira, discussões podem surgir com os participantes sobre formas de abordar com os estudantes aspectos da continuidade do gráfico, se ele poderia ser estendido para mais meses,

² <https://drive.google.com/file/d/1fQ-95aNVeu8ans-cx1K5SBrtsbMo7x4/view?usp=sharing> Acesso em: 14 fev. 2025.

discussão sobre visualizar a diferença entre juros simples e compostos tanto numericamente quanto no gráfico, maneiras de levar essa discussão para a sala de aula e cumprir com as demandas exigidas etc.

Em seguida, pediremos para que cada grupo pense em uma proposta envolvendo o mesmo conteúdo, considerando o contexto dos países e discutam as diferenças entre eles. A ideia é que possam pensar no conceito de insubordinação criativa (D'Ambrosio & Lopes, 2015) e experimentação-com-tecnologias (Borba & Villarreal, 2005) em diferentes perspectivas e currículos. Dessa maneira, nessa etapa proporemos aos participantes da oficina que pensem em uma proposta utilizando a funcionalidade “Tabela” e o contexto dos países dos integrantes da dupla ou trio. Para isso, receberão uma folha com algumas perguntas com o intuito de direcionar as discussões e dialogarem com a proposta de adaptação com os pressupostos teóricos que estamos considerando na oficina.

Após esse momento de discussão em grupos, socializaremos o que foi discutido em cada um deles, de modo que cada trio tenha um tempo para apresentar o que pensaram e que possamos discutir as propostas elencadas.

No quadro 1 a seguir, elencamos as etapas pensadas com a devida separação do tempo, considerando a 1 hora e 50 minutos disponível para a oficina.

Quadro 1:
Divisão das etapas da oficina (Elaborado pelos autores)

Etapas	Tempo
Apresentação dos proponentes, projeto temático e participantes	10 minutos
Contexto da atividade e problema a ser discutido na oficina e pressupostos teóricos adotados	10 minutos
Exploração da calculadora pelos participantes da oficina	15 minutos
Discussão em grupo para pensar sobre a proposta de adaptação	45 minutos
Socialização das propostas pensadas pelos participantes da oficina	30 minutos

Destacamos que na etapa de socialização, podemos explorar junto com os participantes os recursos que pensarem na calculadora gráfica com o emulador, de modo a compartilhar com os demais integrantes da oficina e refletir sobre os referenciais que permeiam as discussões propostas. Portanto, para a oficina, propomos levar essa discussão para os participantes, de modo

que possam explorar colaborativamente modos de propor a atividade, possíveis adaptações pensando em diferentes faixas etárias e contextos.

Referências e bibliografia

- Bigode, A. J. L. (2019). Base, que base? O caso da Matemática. In F. Cássio & R. Catelli Jr. (Orgs.), *Educação é a base?* 23 educadores discutem a BNCC (v. 1, pp. 123-143). Ação Educativa.
- Borba, M. C., Scucuglia, R. R. S., & Gadanidis, G. (2020). *Fases das tecnologias digitais em Educação Matemática: sala de aula e internet em movimento* (3a ed.). Autêntica.
- Borba, M. C., & Villarreal, M. E. (2005). *Humans-with-media and the reorganization of mathematical thinking: Information and communication technologies, modeling, experimentation and visualization*. Springer. (Mathematics Education Library, 39).
- D'Ambrosio, B. S., & Lopes, C. E. (2015). Insubordinação criativa: Um convite à reinvenção do educador matemático. *Bolema*, 29(51), 1-17.
- Fornier, F. T. (2018). *Modelagem matemática e o legado de Paulo Freire: Relações que se estabelecem com o currículo* (Tese de doutorado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho). Instituto de Geociências e Ciências Exatas.
- Merli, A. A. (2019). A homologação da Base Nacional Comum Curricular (BNCC) e suas implicações para a construção de propostas curriculares. *Movimento: Revista de Educação*, 10, 173-194.
- São Paulo (Estado). (2023). Educação de SP oferece material digital inédito para professores da rede; assista ao vídeo. *Secretaria da Educação do Estado de São Paulo*. <https://www.educacao.sp.gov.br/sala-futuro-educacao-de-sp-oferece-material-digital-inedito-para-professores-da-rede/> Acesso em 23 jan. 2025.
- Valente, W. R. (2023). A matemática do ensino e os documentos curriculares: História da produção de novos saberes. *Revista de Educação Matemática*, 20(Edição Especial), e023094. <https://doi.org/10.37001/remat25269062v20id372>



Explorando la geometría con GeoGebra e inteligencia artificial: Un enfoque innovador para la Educación primaria

Marco **Gutiérrez** Montenegro
Escuela de Matemática, Tecnológico de Costa Rica
Costa Rica
vgutierrez@itcr.ac.cr

Resumen

La integración de tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría en educación primaria mejora la comprensión de conceptos espaciales y fomenta el aprendizaje exploratorio. Este taller tiene como objetivo capacitar a docentes en el uso de GeoGebra con inteligencia artificial para diseñar actividades interactivas que potencien la enseñanza de la geometría. La metodología utilizada es práctica y participativa, estructurada en tres fases: exploración inicial, diseño de actividades y reflexión pedagógica. Se emplea GeoGebra con IA para generar construcciones dinámicas, reconocer trazos y analizar propiedades geométricas. Como resultado, los docentes adquieren herramientas para optimizar la enseñanza de la geometría mediante recursos tecnológicos accesibles y efectivos. Se concluye que la inteligencia artificial en GeoGebra facilita la experimentación, el aprendizaje autónomo y el pensamiento crítico en los estudiantes de educación primaria.

Palabras clave: Educación primaria; GeoGebra; Geometría; Inteligencia artificial; Tecnologías digitales.

Introducción

La enseñanza de la geometría en la educación primaria es fundamental para el desarrollo del pensamiento matemático y espacial de los estudiantes. Sin embargo, los enfoques tradicionales presentan desafíos en cuanto a la visualización y exploración dinámica de conceptos geométricos. La incorporación de tecnologías digitales en el aula ha demostrado ser una estrategia efectiva para mejorar la comprensión y la interacción con los objetos geométricos (Clements & Sarama, 2020).

En este contexto, GeoGebra se ha consolidado como una herramienta tecnológica clave en la enseñanza de la matemática, permitiendo a los docentes y estudiantes experimentar con

construcciones dinámicas. Con la reciente integración de inteligencia artificial (IA), GeoGebra facilita el reconocimiento de trazos, la generación automática de figuras y el análisis en tiempo real de propiedades geométricas, promoviendo un aprendizaje más autónomo y exploratorio (GeoGebra, 2023).

De esta manera, se busca impactar positivamente en la práctica pedagógica y mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes. A través de un enfoque práctico y participativo, se explorarán estrategias innovadoras que potencien la enseñanza de la geometría mediante recursos digitales accesibles y efectivos. De esta manera, se busca fortalecer las competencias docentes en el uso de tecnologías emergentes y mejorar la experiencia de aprendizaje de los estudiantes.

GeoGebra con inteligencia artificial en la enseñanza de la geometría y su relevancia en la Educación primaria

La geometría es una de las ramas fundamentales de la matemática y desempeña un papel crucial en el desarrollo del pensamiento lógico, la visualización espacial y la resolución de problemas en los estudiantes de educación primaria. Su enseñanza ha evolucionado con el uso de herramientas digitales, y en la actualidad, la inteligencia artificial (IA) está comenzando a integrarse en software educativo como GeoGebra, ofreciendo nuevas oportunidades para el aprendizaje personalizado y la exploración interactiva.

Desde un punto de vista conceptual, la inteligencia artificial aplicada a la enseñanza de la geometría permite a los docentes y estudiantes acceder a funciones avanzadas como la resolución automatizada de problemas, la identificación de patrones geométricos y la generación de construcciones dinámicas basadas en comandos y reconocimiento visual. Estas características permiten que los estudiantes no solo comprendan conceptos geométricos de manera más profunda, sino que también desarrollen habilidades metacognitivas y de pensamiento computacional.

En este sentido, la IA en herramientas como GeoGebra permite:

- Automatizar la creación y manipulación de figuras geométricas.
- Brindar retroalimentación inmediata sobre construcciones y cálculos.
- Adaptar las actividades al nivel de aprendizaje de cada estudiante.
- Facilitar la interacción con problemas geométricos de manera intuitiva.

Dado que los enfoques tradicionales de enseñanza de la geometría a menudo dependen de la memorización de definiciones y procedimientos, la integración de tecnologías digitales con IA promueve un aprendizaje basado en la experimentación, la visualización y la indagación.

Desde una perspectiva educativa, las tecnologías digitales han demostrado ser herramientas clave para mejorar la enseñanza y el aprendizaje de la geometría en educación primaria. GeoGebra, un software de geometría dinámica ampliamente utilizado, ofrece a los docentes una plataforma interactiva para diseñar experiencias de aprendizaje enriquecedoras. Al incorporar inteligencia artificial, GeoGebra se convierte en un recurso aún más potente para personalizar la enseñanza y facilitar la exploración de conceptos geométricos.

Beneficios de usar GeoGebra con IA en educación primaria:

1. Aprendizaje visual e interactivo: Los estudiantes pueden manipular figuras y observar cambios en tiempo real, lo que les permite comprender propiedades geométricas de manera intuitiva.
2. Desarrollo del pensamiento espacial: La IA permite a los estudiantes explorar relaciones espaciales mediante construcciones dinámicas que responden a sus acciones.
3. Retroalimentación inmediata y adaptativa: La IA en GeoGebra puede detectar errores en las construcciones geométricas y proporcionar sugerencias para mejorar la comprensión.
4. Enfoque en resolución de problemas: Los estudiantes pueden plantear hipótesis, probar diferentes construcciones y recibir orientación en la exploración de soluciones.
5. Accesibilidad y equidad: La enseñanza asistida por IA permite diseñar actividades personalizadas para estudiantes con diferentes niveles de habilidad, promoviendo la inclusión educativa.

La enseñanza de la geometría en educación primaria a menudo se ve limitada por el uso de materiales estáticos y métodos tradicionales de instrucción. La integración de herramientas digitales con IA facilita la transición *hacia un enfoque de aprendizaje basado en la experimentación*, donde los estudiantes pueden construir, manipular y analizar figuras geométricas de manera activa.

En la comunidad de educación matemática, la investigación sobre el uso de inteligencia artificial en la enseñanza de la geometría está en auge. Estudios recientes han demostrado que la incorporación de IA en plataformas digitales puede mejorar significativamente la comprensión conceptual y la capacidad de resolución de problemas de los estudiantes (Breda et al., 2020; Clements & Sarama, 2011).

En particular, se han identificado tres líneas principales de investigación en el uso de IA y tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría:

1. El impacto de la geometría dinámica en la educación matemática: Investigaciones han demostrado que el uso de software como GeoGebra ayuda a los estudiantes a visualizar y comprender conceptos geométricos de manera más efectiva que los métodos tradicionales (Laborde, 2015).
2. La inteligencia artificial en el aprendizaje adaptativo: La IA permite generar modelos de aprendizaje personalizados basados en el desempeño de los estudiantes, lo que facilita la enseñanza de la geometría según las necesidades individuales (Holmes et al., 2019).
3. La integración de herramientas digitales en la formación docente: Se ha identificado la necesidad de capacitar a los docentes en el uso de tecnologías avanzadas para mejorar la enseñanza de la geometría y optimizar el aprendizaje de los estudiantes (Chatterjee & Bhattacharjee, 2021).

Estas investigaciones respaldan la importancia de diseñar estrategias didácticas que incorporen tecnologías emergentes en el aula, especialmente en la enseñanza de la geometría en educación primaria.

El objetivo del taller es capacitar a los docentes en el uso de GeoGebra con inteligencia artificial para diseñar actividades interactivas de geometría en educación primaria. Esta propuesta es relevante porque responde a la necesidad de integrar tecnologías emergentes en la educación matemática, promoviendo un enfoque de enseñanza basado en la exploración y la experimentación.

Pertinencia del objetivo:

- **Innovación en la enseñanza:** Introducir inteligencia artificial en GeoGebra permite transformar el proceso de enseñanza-aprendizaje de la geometría, pasando de una metodología tradicional a un enfoque dinámico y exploratorio.
- **Desarrollo de competencias digitales:** El taller contribuye a la formación de docentes en el uso de herramientas tecnológicas avanzadas, alineadas con las tendencias educativas actuales.
- **Personalización del aprendizaje:** La IA en GeoGebra facilita la creación de actividades adaptativas, permitiendo que cada estudiante aprenda a su propio ritmo.
- **Impacto en el aprendizaje:** Diversos estudios han demostrado que el uso de tecnologías digitales en la enseñanza de la geometría mejora la comprensión conceptual y el pensamiento matemático de los estudiantes (Breda et al., 2020; Holmes et al., 2019).

Esta propuesta busca fortalecer la enseñanza de la geometría en educación primaria mediante la incorporación de inteligencia artificial en GeoGebra, brindando a los docentes herramientas y estrategias que optimicen el aprendizaje de los estudiantes y fomenten el desarrollo del pensamiento geométrico.

Marco referencial

Esta propuesta se fundamenta en un enfoque innovador que combina la enseñanza de la geometría en educación primaria con GeoGebra y herramientas de inteligencia artificial (IA). Para garantizar un desarrollo estructurado y significativo, se presentan a continuación los elementos teóricos, conceptuales y metodológicos que serán abordados en la capacitación.

Fundamentos de la Enseñanza de la Geometría en Educación Primaria

La geometría es un componente esencial del currículo de educación primaria, ya que permite desarrollar habilidades cognitivas clave, como el pensamiento espacial, la visualización geométrica y la capacidad de razonamiento matemático. Según Van Hiele (1986), el aprendizaje de la geometría ocurre en niveles progresivos, donde los estudiantes avanzan desde el reconocimiento visual de figuras hasta el razonamiento deductivo.

Los enfoques tradicionales de enseñanza a menudo se centran en la memorización de definiciones y fórmulas, lo que limita la comprensión conceptual. En contraste, el uso de tecnologías digitales permite adoptar metodologías activas, en las que los estudiantes pueden explorar conceptos geométricos mediante la manipulación directa de figuras y objetos virtuales.

Integración de la Inteligencia Artificial en la Educación Matemática

La inteligencia artificial está transformando la educación matemática al proporcionar herramientas capaces de:

- Analizar patrones en las respuestas de los estudiantes.
- Proporcionar retroalimentación automática en tiempo real.
- Personalizar la enseñanza según el ritmo de aprendizaje de cada estudiante.

La IA en GeoGebra permite mejorar la enseñanza de la geometría al automatizar ciertos procesos de construcción, generar sugerencias inteligentes y ofrecer representaciones dinámicas adaptadas a las necesidades de los estudiantes. Investigaciones recientes (Breda et al., 2020) han demostrado que la combinación de IA y software de geometría dinámica mejora la motivación y el desempeño en la resolución de problemas espaciales.

Esta propuesta se basa en tres conceptos fundamentales que guiarán el diseño de actividades y su aplicación en el aula:

Aprendizaje Basado en la Exploración

El aprendizaje de la geometría debe ser una experiencia activa, donde los estudiantes construyan su propio conocimiento a través de la manipulación y experimentación con objetos geométricos. GeoGebra con IA facilita este proceso al permitir a los estudiantes interactuar con figuras dinámicas y observar cómo cambian en respuesta a diferentes parámetros.

Representación dinámica y pensamiento espacial

El desarrollo del pensamiento espacial es crucial en la educación primaria, ya que permite a los estudiantes comprender las relaciones geométricas de manera intuitiva. GeoGebra proporciona representaciones dinámicas que fortalecen esta habilidad, permitiendo visualizar la transformación de figuras y comprender sus propiedades.

Personalización del aprendizaje con inteligencia artificial

Cada persona tiene un ritmo de aprendizaje diferente. La inteligencia artificial en GeoGebra facilita la adaptación del contenido según las necesidades individuales, proporcionando retroalimentación en tiempo real y ofreciendo actividades progresivas según el nivel de dominio del estudiante.

Para lograr una enseñanza efectiva de la geometría con GeoGebra e IA, el taller se estructurará en dos fases metodológicas:

Diseño de actividades con GeoGebra e IA

- Creación de actividades interactivas para la enseñanza de conceptos geométricos como simetría, traslaciones y rotaciones.
- Implementación de algoritmos básicos de IA en GeoGebra para la generación automática de problemas geométricos.
- Exploración de herramientas de retroalimentación automática para mejorar el aprendizaje.

Aplicación en el Aula y Evaluación del Aprendizaje

- Estrategias para la integración de las actividades en el currículo escolar.
- Evaluación del impacto del uso de GeoGebra e IA en la enseñanza de la geometría.
- Reflexión sobre los beneficios y desafíos de la implementación en el aula.

Metodología para desarrollar el taller

El taller se estructurará en tres enfoques metodológicos clave

:

Trabajo en Grupos Colaborativos

Los participantes trabajarán en grupos pequeños para diseñar y probar actividades didácticas con GeoGebra e IA. Esta metodología fomenta el intercambio de experiencias, la construcción colectiva del conocimiento y la aplicación de estrategias innovadoras en la enseñanza de la geometría.

Esto se justifica por las siguientes razones:

- Permite la interacción y la co-creación de recursos didácticos.
- Favorece la integración de diferentes perspectivas en el diseño de actividades.
- Posibilita el aprendizaje entre pares y la construcción colaborativa del conocimiento.

Demostración y Exploración Guiada

Se realizarán demostraciones en vivo sobre el uso de GeoGebra con IA en la enseñanza de la geometría. Los participantes seguirán instrucciones prácticas para explorar herramientas específicas y desarrollar actividades con base en la experimentación y la manipulación de figuras geométricas dinámicas.

Esto se justifica por las siguientes razones:

- Brinda una experiencia práctica de aprendizaje basada en la exploración.
- Permite visualizar y comprender mejor el impacto de la IA en la enseñanza de la geometría.
- Ayuda a que los docentes se familiaricen con el software.

Reflexión y Discusión en Plenaria

El taller incluirá espacios de reflexión donde los participantes compartirán sus experiencias, discutirán los desafíos y ventajas del uso de GeoGebra con IA en educación primaria y explorarán posibles aplicaciones en sus contextos educativos.

Esto se justifica por las siguientes razones:

- Permite consolidar los aprendizajes a través del diálogo y el análisis.
- Ayuda a identificar posibles obstáculos y soluciones en la implementación del software en el aula.
- Fomenta la toma de decisiones informadas sobre el uso de IA en la enseñanza de la geometría.

Agenda general del taller

El taller se desarrollará en tres fases, con una duración de 1 hora y 50 minutos distribuidos de la siguiente manera:

Fase	Duración	Actividades principales
Introducción y fundamentos teóricos	20 min	Presentación del taller y objetivos. Explicación teórica sobre la enseñanza de la geometría y la integración de IA en educación matemática.
Experimentación y diseño de actividades	60 min	Exploración guiada del software GeoGebra con IA. Trabajo en grupos para diseñar actividades interactivas de geometría. Implementación de estrategias de personalización con IA.
Socialización, evaluación y aplicación en el aula	30 min	Presentación de los diseños creados por los grupos. Discusión y análisis de los desafíos y ventajas de la implementación. Estrategias para integrar GeoGebra con IA en la planificación docente. Reflexión final y cierre del taller.

La combinación de trabajo en grupos, demostración guiada y reflexión en plenaria garantiza un taller dinámico, donde los participantes no solo recibirán conocimientos teóricos, sino que también experimentarán con herramientas digitales, colaborarán en la creación de actividades innovadoras y reflexionarán sobre su aplicación en la enseñanza de la geometría en educación primaria.

Referencias

- Breda, A., dos Santos, S. P., & Baldin, Y. Y. (2020). *Artificial Intelligence and Mathematics Education: A New Frontier for Learning*. Springer.
- Clements, D. H., & Sarama, J. (2011). *Early Childhood Mathematics Education Research: Learning Trajectories for Young Children*. Routledge.
- Chatterjee, A., & Bhattacharjee, B. (2021). *The Role of Digital Technologies in Mathematics Teacher Education: A Systematic Review*. International Journal of Educational Technology, **38**(2), 245-263.
- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial Intelligence in Education: Promises and Implications for Teaching and Learning*. Center for Curriculum Redesign.
- Jones, K. (2002). *Issues in the Teaching and Learning of Geometry*. En L. Haggarty (Ed.), *Aspects of Teaching Secondary Mathematics: Perspectives on Practice* (pp. 121-139). Routledge.
- Laborde, C. (2015). *Teaching and Learning Geometry: Problems and Prospects*. En S. Cho (Ed.), *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education* (pp. 521-545). Springer.
- Van Hiele, P. M. (1986). *Structure and Insight: A Theory of Mathematics Education*. Academic Press.



Explorando las matrices a través de mapas conceptuales colaborativos en Coggle

Carmen **Rodríguez** Poveda

Escuela de Matemática, Universidad de Panamá

Panamá

carmen.rodriguezp@up.ac.pa

Iselgis **De Diego** Vásquez

Escuela de Matemática, Universidad de Panamá

Panamá

iselgis.dediego@up.ac.pa

Introducción

La enseñanza de conceptos abstractos como las matrices presenta desafíos significativos para los estudiantes universitarios, quienes suelen encontrar dificultades al clasificar y operar con estas estructuras matemáticas. En particular, en los cursos introductorios de álgebra lineal, los estudiantes a menudo no logran asimilar completamente las operaciones y propiedades de las matrices (Valero & Cornejo, 2021). Para abordar esta problemática, se diseñó una experiencia didáctica en la que se utilizaron mapas conceptuales creados mediante la herramienta Coggle. Esta herramienta permitió a los estudiantes de la Licenciatura en Geografía (Geógrafo Profesional) de la Universidad de Panamá clasificar visualmente diferentes tipos de matrices y las operaciones asociadas, promoviendo un enfoque de aprendizaje activo y colaborativo (Gijón Puerta et al., 2022). Además, el uso de herramientas digitales como Coggle es clave para fomentar el aprendizaje visual y significativo, tal como lo señala la aplicación de CmapTools, que facilita la estructuración y organización de conceptos de manera interactiva (Morales Chipana et al., 2021). Asimismo, el uso de entornos virtuales en educación superior ha demostrado ser fundamental para fomentar un aprendizaje significativo, ya que brindan recursos educativos flexibles y accesibles para los estudiantes (Ortega, 2024). La pregunta que orienta esta experiencia es: ¿Cómo el uso de mapas conceptuales colaborativos en Coggle facilita la comprensión y clasificación de matrices en estudiantes de primer año universitario?

Presentación y Metodología

La experiencia de aprendizaje se llevó a cabo en un curso introductorio de álgebra lineal, dirigido a estudiantes de primer año de la Licenciatura en Geografía (Geógrafo Profesional) de la Universidad de Panamá. Durante dos sesiones de 50 minutos, los estudiantes trabajaron en equipos pequeños utilizando la herramienta Coggle para construir mapas conceptuales colaborativos sobre matrices.

La primera sesión se centró en la introducción teórica de las matrices, explicando los diferentes tipos, como las matrices fila, columna, cuadrada, nula e identidad (Morales Chipana et al., 2021). Después, los estudiantes, organizados en equipos de 3 a 4 personas, crearon un mapa conceptual en Coggle, clasificando y definiendo cada tipo de matriz, añadiendo explicaciones sobre sus propiedades.

En la segunda sesión, los estudiantes ampliaron sus mapas conceptuales, incorporando operaciones básicas de matrices como la suma, resta y multiplicación. Cada grupo presentó su mapa conceptual ampliado, explicando las relaciones entre los conceptos y las operaciones que habían agregado. La actividad culminó con una reflexión en plenaria, en la que los estudiantes compartieron sus aprendizajes y reflexiones sobre el uso de la herramienta y la actividad colaborativa (Olivares et al., 2022).

Desarrollo de la Propuesta

La experiencia permitió a los estudiantes organizar visualmente los conceptos relacionados con las matrices, facilitando la comprensión de estos conceptos abstractos (Olivares et al., 2022). Mediante la construcción de los mapas conceptuales en Coggle, los estudiantes no solo mejoraron su comprensión de las matrices, sino que también desarrollaron habilidades en el uso de herramientas digitales colaborativas. El objetivo principal de la propuesta fue mejorar la capacidad de los estudiantes para clasificar matrices y realizar operaciones básicas de manera autónoma, apoyados por una herramienta visual que les permitió representar gráficamente sus ideas.

Los resultados obtenidos sugieren que los estudiantes lograron una comprensión más profunda de los tipos de matrices y las operaciones asociadas. La utilización de Coggle facilitó la organización de la información y promovió un aprendizaje más interactivo y colaborativo. Además, los estudiantes mejoraron su capacidad para trabajar en equipo, compartir conocimientos y reflexionar sobre los procesos de aprendizaje (Gijón Puerta et al., 2022). Esta experiencia también demostró ser efectiva para fortalecer las habilidades digitales de los estudiantes, proporcionándoles una herramienta útil para futuras experiencias de aprendizaje (Valero & Cornejo, 2021). El uso de entornos virtuales también fue clave para fomentar la participación activa y el aprendizaje colaborativo, mostrando que estos entornos son fundamentales para la formación académica en la educación superior (Ortega, 2024).

Referencias Bibliográficas

- Gijón Puerta, J., Khaled Gijón, M., Matas Lara, A., & García Sempere, P. (2022). *El mapa conceptual y el software CmapTools como herramientas neurodidácticas para la mejora del aprendizaje*. DOI: [10.35699/1983-3652.2022.40725](https://doi.org/10.35699/1983-3652.2022.40725)
- Morales Chipana, E., Valero, V., Cornejo, G., & Calderón Quino, K. (2021). *Mapas conceptuales como herramienta de aprendizaje en estudiantes de Educación Superior*. Horizontes. Revista de Investigación en Ciencias de la Educación, 5(21), 1602-1612. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v5i21.301>.
- Olivares, J. L., Arrese, F. G., Villarreal, M., & Damm, N. (2022). *Evaluación formativa y compartida de estudiantes de Ciencias Biológicas mediante mapas conceptuales y rúbricas*. Revista de la Facultad de Ciencias de la Educación, 18(1), 126-139. <https://doi.org/10.21676/23897856.3891>
- Ortega Sánchez, R. M. (2024). *Entornos virtuales, conocimiento y utilidad en estudiantes de educación superior*. Horizontes. Revista De Investigación En Ciencias De La Educación, 8(32), 34–44. <https://doi.org/10.33996/revistahorizontes.v8i32.702>



Explorando las potencialidades de la Inteligencia Artificial en la planificación de clases de Matemáticas, de la teoría a la resolución de problemas

Edgar Esaúl **Saucedo Becerra**

Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Zacatecas
México

esaul.saucedo@itz.edu.mx

Mónica del Rocío **Torres Ibarra**

Universidad Autónoma de Zacatecas
México

mtorres@uaz.edu.mx

Resumen

Este taller está dirigido a profesores de matemáticas de los niveles medio superior y superior que tengan interés en explorar y crear scripts que les permitan utilizar herramientas de Inteligencia Artificial disponibles gratuitamente en la web, como ChatGPT, DeepSeek y Microsoft Copilot con el objetivo de explorar cuál se adapta mejor a la educación matemática, analizando su capacidad para crear contenido educativo, planificar clases de manera eficiente y resolver dudas académicas con inteligencia artificial. Se trabajará individualmente haciendo comparaciones entre las diferentes herramientas y se discutirá grupalmente las formas y palabras clave necesarias para la Inteligencia Artificial genere de propuestas de clase cimentadas en la experiencia docente en conjunto con los elementos teóricos de la matemática.

Palabras clave: Educación Matemática; Enseñanza asistida; Inteligencia Artificial; Resolución de problemas; Estrategias de enseñanza.

Introducción

Ante el bombardeo de herramientas que actualmente están haciendo uso de inteligencia artificial se presenta para la docencia un reto que implica su incorporación en las actividades

Taller: Media Superior y Superior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

involucradas en el aula de clases de matemáticas, como lo son la preparación de materiales, la presentación de propuestas de clase y la resolución de problemas.

El corazón de las herramientas de inteligencia artificial funciona mediante el uso de técnicas de procesamiento del lenguaje natural y se entrena en una gran cantidad de texto para generar respuestas a preguntas o sugerencias dadas por los usuarios (Morales-Chang, 2023). Así, la IA generativa se enfoca en la creación de contenido mediante modelos de lenguaje entrenados en grandes corpus de datos. Estos modelos generan respuestas basadas en probabilidades estadísticas, sin garantizar siempre su precisión, lo que es crucial en su uso educativo.

International Business Machines (IBM) define a la Inteligencia Artificial (IA) como un campo de la informática que busca crear sistemas capaces de realizar tareas que normalmente requieren inteligencia humana, como el razonamiento, el aprendizaje, la percepción y la comprensión del lenguaje. Estos sistemas buscan simular procesos cognitivos humanos para resolver problemas y tomar decisiones de manera autónoma. (IBM, 2024).

En el ámbito educativo, la IA ha evolucionado para asistir en diversas áreas, incluyendo la enseñanza de matemáticas, con aplicaciones que van desde la resolución de problemas matemáticos hasta la generación de planes de estudio personalizados.

Para este trabajo, parte de una búsqueda exhaustiva de las características que tienen los sistemas de IA que existen actualmente, ya que desde 2022, el número de herramientas con capacidades de IA ha crecido exponencialmente gracias a los Modelos de Lenguaje de Gran Tamaño (LLM), como GPT de OpenAI, impulsado por su popularidad con ChatGPT. Sin embargo, existen otros modelos relevantes, como BERT, T5, LaMDA, Chinchilla, Bard, LLaMA, Titan y Lima, que han avanzado en la generación de lenguaje natural (García-Peñalvo, et al (2024).

En el ámbito educativo, las herramientas de IA generativa pueden clasificarse según el tipo de contenido que generan: texto, imágenes, videos, objetos 3D, audio, código fuente y detección de texto generado por IA, al hacer un análisis epistemológico de aquellas que declaran abiertamente su manejo en la educación se seleccionaron cuatro herramientas:

- ChatGPT Generative Pretrained Transformer (OpenAI). Lanza su primera primera versión de noviembre de 2022, es desarrollado por OpenAI y está basado en la arquitectura GPT (Generative Pre-trained Transformer), que permite generar texto de manera coherente y contextual. Ha pasado por varias versiones, mejorando la capacidad de respuesta, precisión y acceso a información en tiempo real. Se utiliza para generar explicaciones matemáticas paso a paso, crear exámenes y responder preguntas en tiempo real. (OpenAI, 2023).
- Gemini (Google DeepMind). Fue presentado en diciembre de 2023 y desarrollado por Google DeepMind, evolucionando a partir de Bard. Se centra en ser multimodal, es decir, puede procesar texto, imágenes, código y datos en tiempo real con gran precisión. Es utilizado en la generación de materiales interactivos, análisis de datos y apoyo en la investigación matemática avanzada. (Google DeepMind. 2023).
- Deepseek (DeepSeek AI). Se lanza en 2024. Es creada por DeepSeek AI, con un enfoque en la investigación y el análisis avanzado. Está optimizada para la resolución de problemas matemáticos complejos y programación, superando en algunos casos a ChatGPT en precisión

matemática. Es ideal para la enseñanza de matemáticas a nivel superior y la resolución de problemas de álgebra, cálculo y estadística. (DeepSeek AI, 2024).

- Copilot (Microsoft + OpenAI). Se integra en Microsoft 365 en 2023. Es un asistente basado en GPT-4, desarrollado en colaboración con OpenAI y diseñado específicamente para potenciar herramientas como Word, Excel, PowerPoint y Teams, ayudando a automatizar tareas y mejorar la productividad docente. Se utiliza para generar planes de clase, automatizar análisis de datos en Excel y mejorar la redacción de materiales educativos.

Descripción del problema

Consideramos a los "Prompts" como frases o preguntas que se utilizan para dar pedir respuestas generadas por la IA, es algo como las palabras clave o formas en las que comúnmente utilizamos un buscador. La calidad de los prompts es uno de los factores más importantes para lograr una conversación exitosa con los sistemas de IA, así, en este taller se tiene por objetivo que los participantes exploren el uso de prompts desde las 4 herramientas anteriormente listadas de manera tal que puedan determinar cuál es más efectiva para la planificación de una clase de matemáticas, desde el planteamiento de ejercicios y la resolución de problemas, en este documento se ejemplifica el trabajo que se desarrollará en el taller para trabajar el tema de integral definida, la cual se trabaja en los cursos de cálculo de los niveles medio superior y superior, con la finalidad de que los participantes evalúen los resultados arrojados por cada uno de las herramientas y se presente una discusión respecto a la veracidad de las propuestas emanadas de la IA.

Etapas 1. La precisión de la IA en la generación de una definición Matemática (20 minutos)

La intención de la primera etapa del taller es obtener el panorama teórico de un tema en particular, consultando los conceptos básicos para iniciar la interacción con la IA; es importante destacar que el apoyo de bibliografía adicional sobre el tema en cuestión resultaría de gran ayuda para delimitar y conseguir un resultado más preciso sobre lo que se desea obtener.

Si bien, la IA puede proporcionar información muy concreta, si el prompt es ambiguo, las respuestas también lo serán. Se inicia preguntando a los asistentes cómo empezarían a abordar el tema y en base a sus respuestas se genera un prompt como el siguiente: *¿Qué es una integración o integral en el tema de las matemáticas?*, obteniendo de ChatGPT (Figura 1) y DeepSeek (Figura 1a), un resultado que permitirá abrir una discusión sobre la precisión de la respuesta, el tiempo que tarda cada una en responder, la forma en que se puede modificar el prompt para explicar el tema y demás elementos que pudieran ser de ayuda al docente en la impartición de este tema en el aula de clases.

En este ejemplo se puede distinguir que ambas herramientas proveen una descripción del concepto, así como la forma de calcularla, sin embargo, la respuesta de la figura 2 utiliza un lenguaje matemático más preciso, lo cual se espera puedan notar a los participantes.

¿Qué es una integral defi

¿Qué es una integración o integral en el tema de las matem

Una **integral definida** es un tipo de integral que se usa para calcular el área bajo una curva en un intervalo específico. Se denota como:

$$\int_a^b f(x) dx$$

donde:

- $f(x)$ es la función a integrar.
- a y b son los **límites de integración**.
- dx indica que estamos integrando respecto a la variable x .

Cálculo de una integral definida

Para calcular una integral definida, se sigue el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que establece:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Figura 1. Respuesta de ChatGPT



En matemáticas, una **integral** o **integración** es un concepto fundamental del cálculo que tiene interpretaciones principales, relacionadas entre sí:

1. Cálculo de áreas bajo curvas:

La integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ representa el área bajo la curva de f desde a hasta b . Si la función está por encima del eje x , el área es positiva; si está por debajo, el área es negativa.

2. Antiderivada:

La integración es el proceso inverso de la derivación. Si $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x)$ se llama la **antiderivada** o **integral indefinida**. Se escribe como:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde C es una constante de integración.

Figura 1a. Respuesta de DeepSeek

Etapla 2. Creación de Ejercicios con IA que involucran la Integral Definida (30 minutos)

Ya que tenemos el contexto del tema a desarrollar se guiará a los participantes para que soliciten que las herramientas de IA les generen ejercicios sobre un tema y subtema en particular con por ejemplo *¿Cuáles serían algunos ejercicios básicos de las integrales definidas?*, obteniendo los resultados que se presentan en las Figuras 2a y 2b, respectivamente.

En la misma dinámica que en la etapa anterior, se compararán las respuestas de las herramientas y se depurarán los prompts para obtener respuestas más precisas y en el menor tiempo.

Explicame paso a paso la solución del ejercicio 3.

¡Por supuesto! Vamos a resolver paso a paso la integral definida:

$$\int_0^4 (4x - 2) dx$$

Paso 1: Encontrar la primitiva

Para resolver la integral, primero encontramos la primitiva de $f(x) = 4x - 2$.

Recordemos que la integral de una función ax^n se calcula con la regla:

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

Ahora integramos cada término de $f(x)$:

1. Integral de $4x$:

Figura 2a. Respuesta de ChatGPT al planteamiento de un ejercicio

Explicame paso a paso la solución del ejercicio 5



¡Claro! Vamos a resolver paso a paso el **Ejercicio 5**, que consiste en calcular la integral definida de la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Paso 1: Escribir la integral definida

La integral definida que queremos calcular es:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

Paso 2: Encontrar la antiderivada

La antiderivada (o integral indefinida) de $\sin(x)$ es:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

Donde C es la constante de integración. En el caso de las integrales definidas, no necesitamos

Figura 2b. Respuesta de DeepSeek al planteamiento de un ejercicio

Etapla 3. Comparación de las herramientas de IA en la resolución de ejercicios (30 min)

En esta etapa se plantearán primeramente algunos problemas descritos en libros de texto con la finalidad de verificar las respuestas que generan las herramientas de IA, para posteriormente pedir a las mismas que generen problemas similares con algunas variantes específicas, por ejemplo, se pide en cada herramienta primeramente que resuelvan un problema como el siguiente: La temperatura de una sopa crece a una razón de $r(t) = 30e^{-0.3t}$ grados

Celsius por minuto (donde t es el tiempo en minutos). En el tiempo $t=0$, la temperatura de la sopa es de 23°C , arrojando los resultados que se presentan en las Figuras 3a y 3b, respectivamente.

Ambas herramientas llegan a la respuesta correcta, sin embargo, se observan diferencias significativas en el tiempo de respuestas y la manera en la abordan en primer término el concepto.

Este problema se puede resolver utilizando el concepto de integración para encontrar la función de la temperatura en función del tiempo $T(t)$.

Sabemos que la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo es $r(t) = 30e^{-0.3t}$. Esto significa que $\frac{dT(t)}{dt} = r(t) = 30e^{-0.3t}$.

Para encontrar $T(t)$, debemos integrar $r(t)$ con respecto a t :

$$T(t) = \int 30e^{-0.3t} dt$$

Procedamos con la integración.

It seems like I can't do more advanced data analysis right now. Please try again later.

However, I can still guide you through solving the problem manually!

La integral de la función $30e^{-0.3t}$ con respecto a t es:

$$T(t) = \int 30e^{-0.3t} dt$$

Figura 3a. Respuesta de ChatGPT a la resolución de un problema

La temperatura de una sopa crece a una razón de $r(t)=30e^{-0.3t}$ grados Celsius por minuto (donde t es el tiempo en minutos). En el tiempo $t=0$, la temperatura de la sopa es de 23°C .

¡Claro! Vamos a resolver el problema paso a paso. El objetivo es encontrar la temperatura de la sopa en función del tiempo $T(t)$, dado que la razón de cambio de la temperatura es $r(t) = 30e^{-0.3t}$ y la temperatura inicial es 23°C en $t = 0$.

Paso 1: Plantear la relación entre $r(t)$ y $T(t)$

La razón de cambio de la temperatura $r(t)$ es la derivada de la temperatura $T(t)$ con respecto al tiempo t :

$$r(t) = \frac{dT}{dt}$$

Por lo tanto, para encontrar $T(t)$, necesitamos integrar $r(t)$:

$$T(t) = \int r(t) dt = \int 30e^{-0.3t} dt$$

Figura 3b. Respuesta de DeepSeek a la resolución de un problema

Con estos elementos, los participantes pondrán en juego sus conocimientos del tema y valorarán las formas en las que se plantean las soluciones, así también, estas respuestas serán consideradas como una alternativa de abordaje del tema, en la que se puedan modificar los problemas de forma tal que se comprenda el concepto involucrado, más allá de la simple obtención del resultado.

Etapla 4. Discusión (30 minutos)

Al comparar herramientas de IA generativa para la enseñanza de matemáticas, es crucial evaluar su **precisión y fiabilidad**, por lo que verificar la certidumbre de las respuestas es muy importante; incluso se han detectado algunas respuestas incorrectas. También se debe considerar la **accesibilidad y costos**, donde opciones comerciales requieren suscripción, mientras que herramientas de código abierto y ofrecen alternativas más asequibles; el uso de estas herramientas también debe considerar el aspecto ético.

Preguntas de reflexión:

- ¿Las respuestas generadas fueron correctas y comprensibles?
- ¿Detectaste errores en las soluciones matemáticas proporcionadas? ¿Cómo los identificaste?
- ¿Qué herramienta consideras más confiable para resolver problemas matemáticos complejos?
- ¿Qué tan intuitiva fue la herramienta? ¿Requirió mucho aprendizaje previo?
- ¿Tuvo dificultades para interpretar las respuestas o navegar en la plataforma?
- ¿Cuál de las herramientas te resultó más accesible en términos de usabilidad?
- ¿Cómo podrías integrar esta herramienta en tu enseñanza diaria?
- ¿Consideras que estas herramientas pueden mejorar el aprendizaje de los estudiantes? ¿Por qué?

- ¿Qué tipo de actividades educativas crees que podrían beneficiarse más del uso de IA?
- ¿Qué diferencias notaste en la calidad de las respuestas entre ChatGPT, Copilot, Gemini y Deepseek?
- ¿Cuál de estas herramientas recomendarías para la enseñanza de matemáticas y por qué?
- ¿Qué ventajas y desventajas encontraste en cada una de ellas?

Referencias y bibliografía

- García-Peñalvo, F. J., Llorens-Largo, F., & Vidal, J. (2024). La nueva realidad de la educación ante los avances de la inteligencia artificial generativa. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 27(1), 9-39.
<https://doi.org/10.5944/ried.27.1.37716>
- DeepSeek AI. (2024). I DeepSeek R1 AI: Future of Artificial Intelligence. <https://depseek.in>
- Google DeepMind. (2023). Introducing Gemini: our largest and most capable AI model. <https://blog.google/intl/en-africa/company-news/technology/introducing-gemini-our-largest-and-most-capable-ai-model/>
- IBM. (2024). ¿Qué es la inteligencia artificial (IA)?. <https://www.ibm.com/mx-es/topics/artificial-intelligence>
- Microsoft. (2023). Introducing Microsoft 365 Copilot – your copilot for work.
<https://blogs.microsoft.com/blog/2023/03/16/introducing-microsoft-365-copilot-your-copilot-for-work>
- Morales-Chan, M. A. (2023). Explorando el potencial de Chat GPT: Una clasificación de Prompts efectivos para la enseñanza.
[https://biblioteca.galileo.edu/xmlui/bitstream/handle/123456789/1348/Explorando%20el%20potencial%20de%20Chat%20GPT-%20Una%20clasificacio%cc%81n%20de%20Prompts%20efectivos%20para%20la%20ensen%cc%83anza.p
df?sequence=1](https://biblioteca.galileo.edu/xmlui/bitstream/handle/123456789/1348/Explorando%20el%20potencial%20de%20Chat%20GPT-%20Una%20clasificacio%cc%81n%20de%20Prompts%20efectivos%20para%20la%20ensen%cc%83anza.pdf?sequence=1)
- OpenAI. (2023). ChatGPT: Optimizing Language Models for Dialogue.
<https://josefelixrodriguezantonweb.com/2023/01/22/chatgpt-optimizing-language-models-for-dialogue>



Explorando las potencialidades de la Inteligencia Artificial en la planificación de clases de Matemáticas, de la teoría a la resolución de problemas

Edgar Esaúl **Saucedo** Becerra
Tecnológico Nacional de México, Instituto Tecnológico de Zacatecas
México
esaul.saucedo@itz.edu.mx
Mónica del Rocío **Torres** Ibarra
Universidad Autónoma de Zacatecas
México
mtorres@uaz.edu.mx

Resumen

Este taller está dirigido a profesores de Matemáticas de los niveles medio superior y superior que tengan interés en explorar y crear prompts que les permitan utilizar herramientas de Inteligencia Artificial disponibles gratuitamente en la web, como ChatGPT, DeepSeek, Gemini y Microsoft Copilot con el objetivo de explorar cuál se adapta mejor a la Educación Matemática, analizando su capacidad para crear contenido educativo, planificar clases de manera eficiente y resolver dudas académicas con inteligencia artificial. Se trabajará individualmente haciendo comparaciones entre las diferentes herramientas y se discutirá grupalmente las formas y palabras clave necesarias para que la Inteligencia Artificial genere de propuestas de clase cimentadas en la experiencia docente en conjunto con los elementos teóricos de la Matemática.

Palabras clave: Educación Matemática; Enseñanza asistida; Inteligencia Artificial; Resolución de problemas; Estrategias de enseñanza.

Introducción

International Business Machines (IBM) define a la IA como un campo de la informática que busca crear sistemas capaces de realizar tareas que normalmente requieren inteligencia

humana, como el razonamiento, el aprendizaje, la percepción y la comprensión del lenguaje. (IBM, 2024), ellos también se clasificaron el conocimiento, las capacidades cognitivas, la experiencia y otros atributos como competencias clave para los estudiantes contemporáneos de IA (Sanusi, 2021).

Ante el bombardeo de herramientas que actualmente están haciendo uso de inteligencia artificial (IA) se presenta para la docencia un reto que implica su incorporación en las actividades involucradas en el aula de clases, como lo son la preparación de materiales, la orquestación de propuestas de clase y la resolución de problemas.

Específicamente en el área de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas, las IA están ayudando a los estudiantes a realizar tareas requieren razonamiento o adaptación del dominio, como usar una palabra nueva en una oración o realizar operaciones aritméticas básicas y avanzadas (Brown, et al., 2020) que anteriormente eran utilizados para el reforzamiento de algunos tópicos y que hoy hacen necesaria cambiar las estrategias docentes.

El corazón de las herramientas de IA funciona mediante el uso de técnicas de procesamiento del lenguaje natural y se entrena en una gran cantidad de texto para generar respuestas a preguntas o sugerencias dadas por los usuarios (Morales-Chang, 2023). Así, la IA generativa se enfoca en la creación de contenido mediante modelos de lenguaje entrenados en grandes grupos de datos. Estos modelos generan respuestas basadas en probabilidades estadísticas, sin garantizar siempre su precisión, lo que es crucial en su uso educativo.

Así la IA ha evolucionado para asistir en diversas áreas, incluyendo la enseñanza de Matemáticas, con aplicaciones que van desde la resolución de problemas hasta la generación de planes de estudio personalizados, sin embargo, hace falta que los docentes se involucren en su uso, tanto para entrenar estos sistemas en favor de su labor académica, incluyendo propuestas de clase que permitan que sus estudiantes exploren también sus funcionalidades al mismo tiempo que aprenden de ellas.

Para la elaboración de este trabajo, partimos de una búsqueda exhaustiva de las características que tienen los sistemas de IA que existen actualmente, ya que desde 2022, el número de herramientas con capacidades de IA ha crecido exponencialmente gracias a los Modelos de Lenguaje de Gran Tamaño (LLM), como GPT de OpenAI, impulsado por su popularidad con ChatGPT.

Referente Teórico

Estudios recientes (Morales-Chan, 2023; Brown et al., 2020; Tapalova et al., 2020; García-Peñalvo, et al., 2024) afirman que la inteligencia artificial (IA) puede mejorar significativamente el aprendizaje, pero es necesario una capacitación que permita explotar las potencialidades.

En principio es imprescindible realizar una planificación cuidadosa para motivar a los estudiantes y despertar su curiosidad al utilizar la IA (Temitayo, 2021), para ello, es necesario que los docentes comprendan el funcionamiento interno que les permita generar "prompts" (frases o preguntas que se utilizan para solicitar respuestas generadas por la IA), de una manera

similar a las palabras clave o formas que comúnmente utilizamos un buscador, pues la calidad de estos prompts es uno de los factores más importantes para lograr una conversación exitosa con los sistemas de IA.

Por otra parte, en el ámbito educativo, las herramientas de IA pueden clasificarse según el tipo de contenido que generan: texto, imágenes, videos, objetos 3D, audio, código fuente y detección de texto generado por IA; en este trabajo se toma como punto de partida una revisión de aquellas que declaran abiertamente su manejo en la educación, de las cuales se seleccionaron cuatro por las características que se enlistan a continuación:

- ChatGPT (Generative Pretrained Transformer). Lanza su primera versión de noviembre de 2022, es desarrollado por OpenAI y está basado en la arquitectura GPT (Generative Pre-trained Transformer), que permite generar texto de manera coherente y contextual. Se utiliza para generar explicaciones matemáticas paso a paso, crear exámenes y responder preguntas en tiempo real. (Rodríguez, 2023).
- Gemini. Fue presentado en diciembre de 2023 y desarrollado por Google DeepMind, evolucionando a partir de Bard. Se centra en ser multimodal, es decir, puede procesar texto, imágenes, código y datos en tiempo real con gran precisión. Es utilizado en la generación de materiales interactivos, análisis de datos y apoyo en la investigación matemática avanzada. (Pichai, et al., 2023).
- Deepseek. Se lanza en 2024. Es creada por DeepSeek AI, con un enfoque en la investigación y el análisis avanzado. Está optimizada para la resolución de problemas matemáticos complejos y programación, superando en algunos casos a ChatGPT en precisión matemática. Es ideal para la enseñanza de Matemáticas a nivel superior y la resolución de problemas de álgebra, cálculo y estadística. (DeepSeek.AI, 2025).
- Copilot. Se integra en Microsoft 365 en 2023. Es un asistente basado en GPT-4, desarrollado en colaboración con OpenAI y diseñado específicamente para potenciar herramientas como Word, Excel, PowerPoint y Teams, ayudando a automatizar tareas y mejorar la productividad docente. Se utiliza para generar planes de clase, automatizar análisis de datos en Excel y mejorar la redacción de materiales educativos (Spataro, 2023).

Hwang, et al. (2020) enfatiza la necesidad de prácticas de intervención en las que los estudiantes vean a la IA como un tutor inteligente, y que para que esto sea posible es imperante contar con maestros con suficientes habilidades para aplicar estas herramientas en el proceso de enseñanza-aprendizaje.

Por su parte Oromena et al. (2024) menciona que los profesores de Matemáticas pueden utilizar la IA para identificar las conexiones del mundo real con los temas de Matemáticas, conectarlas con los intereses de los estudiantes y crear diversos materiales didácticos para utilizar en el aula, en su estudio hace uso únicamente de ChatGPT, sin embargo consideramos que es posible ampliar la mirada al uso de otras herramientas de IA que han surgido en los últimos años.

Es importante la usar IA el docente debe estar consiente de monitorear el aprendizaje en tiempo real, es decir, predecir las posibles respuestas que serán generadas y cómo encaminarlas, además abordar las dificultades que los estudiantes encuentran en asignaturas como el cálculo y visualizar a estas herramientas como un complemento de la enseñanza tradicional (Torres-Peña,

et al., 2024) para desarrollar estrategias educativas eficaces basadas en IA que puedan mejorar los resultados del aprendizaje de los estudiantes.

Estrategia para desarrollar el Taller

En este taller se tiene por objetivo que los participantes exploren el uso de prompts desde las 4 herramientas diferentes, de manera que puedan determinar cuál es más efectiva para su actividad docente en una clase de Matemáticas, abordando aspectos como el planteamiento de ejercicios y la resolución de problemas, con la finalidad de que los participantes evalúen los resultados arrojados por cada una de las herramientas y se presente una discusión respecto a la veracidad de las propuestas emanadas de la IA.

El taller está estructurado en cinco etapas, las tres primeras se realizarán mediante trabajo individual guiado y colaborativo, mientras que la última tiene la intención de realizar una discusión grupal con base a los resultados obtenidos en el trabajo individual y con ello un consenso sobre las formas de trabajar con estas herramientas. En este documento se ejemplifica el trabajo que se desarrollará para abordar el tema de integral definida, la cual se incluye en los cursos de cálculo de los niveles medio superior y superior,

Etapas 1. Conocimiento de las herramientas (10 minutos).

Esta etapa tiene la intención de que todos los usuarios cuenten con la información necesaria para acceder al uso de la herramienta de IA en su formato libre, tal como ligas de acceso, forma de uso (registro, anónimo y demás información que se requiere) y generación de pequeños Prompts para verificar que la IA está lista para abordar un tema. Se realizará de manera individual, con un dispositivo para cada participante, para ello, uno de los instructores será encargado de dar indicaciones mientras que el otro servirá como monitor para verificar que todos los participantes tengan el acceso necesario.

Etapas 2. La precisión de la IA en la generación de una definición matemática (20 minutos)

Si bien, la IA puede proporcionar información muy concreta, si el prompt es ambiguo, las respuestas también lo serán. Se inicia preguntando a los asistentes cómo empezarían a abordar el tema y en base a sus respuestas se genera un prompt que será utilizado y entrenado para concretar la respuesta esperada.

La intención de esta etapa del taller es obtener los elementos teóricos de un tema en particular, por ejemplo “*La integral definida*” que permitirá iniciar la interacción con la IA y la forma de crear prompts, consultando en primer lugar sobre la forma de abordar el tema y los conceptos básicos involucrados. Es importante destacar que el apoyo de bibliografía adicional sobre el tema en cuestión resultará de gran ayuda para delimitar y conseguir un resultado más preciso sobre lo que se desea obtener.

Según la distribución del aula, se dividirá al grupo en 4 sectores, de forma que cada uno use una de las 4 herramientas de IA que se abordarán en el taller, generando un prompt como el siguiente: *¿Qué es una integración o integral en Matemáticas?*, para lo cual cada herramienta

proporcionará una respuesta como las que se muestran en la figura 1, con base en las cuales se abrirá una discusión sobre la precisión de la respuesta, el tiempo que tarda cada una en responder, la similitud en una misma herramienta, la forma en que se puede modificar y depurar el prompt para explicar el tema y demás elementos que pudieran ser de ayuda al docente en la impartición de este tema en el aula de clases.

¿Qué es una integral definida?

Una **integral definida** es un tipo de integral que se usa para calcular el área bajo una curva en un intervalo específico. Se denota como:

$$\int_a^b f(x) dx$$

donde:

- $f(x)$ es la función a integrar.
- a y b son los **límites de integración**.
- dx indica que estamos integrando respecto a la variable x .

Cálculo de una integral definida

Para calcular una integral definida, se sigue el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que establece:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

¿Qué es una integración o integral en el tema de las matemáticas?

En matemáticas, una **integral** o **integración** es un concepto fundamental del cálculo que tiene dos interpretaciones principales, relacionadas entre sí:

- Cálculo de áreas bajo curvas:**
La integral de una función $f(x)$ en un intervalo $[a, b]$ representa el área bajo la curva de $f(x)$ desde a hasta b . Si la función está por encima del eje x , el área es positiva; si está por debajo, el área es negativa.
- Antiderivada:**
La integración es el proceso inverso de la derivación. Si $F(x)$ es una función cuya derivada es $f(x)$, es decir, $F'(x) = f(x)$, entonces $F(x)$ se llama la **antiderivada** o **integral indefinida** de $f(x)$. Se escribe como:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

donde C es una constante de integración.

Figura 1. Respuesta de la conceptualización. a) ChatGPT b) DeepSeek

En este ejemplo se puede distinguir que ambas herramientas proveen una descripción muy cercana al concepto, así como la forma de calcularla, sin embargo la respuesta de la figura 2 utiliza un lenguaje matemático más preciso, lo cual se espera puedan notar a los participantes.

Posteriormente se pedirá a los participantes que cambien de IA, permitiendo así que cada grupo explore las cuatro herramientas con prompts suficientes para concentrar los elementos teóricos del tema.

Etapla 3. Creación de Ejercicios con IA que involucran la Integral Definida (20 minutos)

Con los resultados de la etapa anterior, los participantes contarán con el contenido temático a desarrollar, se procederá a descartar aquella herramienta que consideren menos efectiva para el tratamiento del tema y se guiará a los participantes para que con ayuda de las herramientas de IA les generen ejercicios sobre un tema y subtema en particular con por ejemplo *¿Cuáles serían algunos ejercicios básicos de las integrales definidas?*, obteniendo propuestas como las que se presentan en la figura 2. Donde ChatGPT (a) empieza por describir la obtención de la primitiva, mientras que DeepSeek (b) describe en primer lugar el significado de cada término.

En la misma dinámica que en la etapa anterior, se compararán las respuestas de las IA, se rotarán las herramientas y se depurarán los prompts para obtener respuestas más precisas, con la intención de mejorar los tiempos para alcanzar las mejores propuestas de ejercicios. En esta etapa se espera que los participantes pidan también a la IA que resuelva los ejercicios seleccionados y busquen estrategias para que al proponerlos en clase se tengan una intención didáctica bien definida, más allá de la simple resolución.

Explicame paso a paso la solución del ejercicio 3.

¡Por supuesto! Vamos a resolver paso a paso la integral definida:

$$\int_0^4 (4x - 2) dx$$

Paso 1: Encontrar la primitiva

Para resolver la integral, primero encontramos la primitiva de $f(x) = 4x - 2$.

Recordemos que la integral de una función ax^n se calcula con la regla:

$$\int ax^n dx = \frac{a}{n+1} x^{n+1} + C$$

Ahora integramos cada término de $f(x)$:

1. Integral de $4x$:

Explicame paso a paso la solución del ejercicio 5

¡Claro! Vamos a resolver paso a paso el **Ejercicio 5**, que consiste en calcular la integral definida de la función $f(x) = \sin(x)$ en el intervalo $[0, \pi]$.

Paso 1: Escribir la integral definida

La integral definida que queremos calcular es:

$$\int_0^{\pi} \sin(x) dx$$

Paso 2: Encontrar la antiderivada

La antiderivada (o integral indefinida) de $\sin(x)$ es:

$$\int \sin(x) dx = -\cos(x) + C$$

Donde C es la constante de integración. En el caso de las integrales definidas, no necesitamos

Figura 2. Solicitud de ejercicios en las IA a) ChatGPT b) DeepSeek

Etap 4. Comparación de las herramientas de IA en la resolución de problemas (30 min)

Para esta etapa, será descartada una de las herramientas utilizadas en la etapa anterior (por consenso de acuerdo a los resultados presentados), para con las restantes plantear algunos problemas descritos en libros de texto con la finalidad de verificar las respuestas que generan las herramientas de IA.

Igual que en la etapa anterior, se pedirá que generen problemas con algunas variantes específicas, por ejemplo, se pide a cada herramienta que resuelva un problema como el siguiente: “La temperatura de una sopa crece a una razón de $r(t) = 30e^{-0.3t}$ grados Celsius por minuto (donde t es el tiempo en minutos). En el tiempo $t = 0$, la temperatura de la sopa es de 23°C , arrojando los resultados que se presentan en la figura 3.

Con estas respuestas en pantalla, se conducirá al grupo a verificar que, si bien ambas herramientas presentan una propuesta de solución correcta, se pueden encontrar diferencias significativas en aspectos como: el tiempo de respuestas, la manera en la abordan el concepto, la aplicación que hacen del mismo, entre otras.

Este problema se puede resolver utilizando el concepto de integración para encontrar la función de la temperatura en función del tiempo $T(t)$.

Sabemos que la tasa de cambio de la temperatura con respecto al tiempo es $r(t) = 30e^{-0.3t}$. Esto significa que $\frac{dT(t)}{dt} = r(t) = 30e^{-0.3t}$.

Para encontrar $T(t)$, debemos integrar $r(t)$ con respecto a t :

$$T(t) = \int 30e^{-0.3t} dt$$

Procedamos con la integración.

It seems like I can't do more advanced data analysis right now. Please try again later.

However, I can still guide you through solving the problem manually!

La integral de la función $30e^{-0.3t}$ con respecto a t es:

$$T(t) = \int 30e^{-0.3t} dt$$

La temperatura de una sopa crece a una razón de $r(t)=30e^{(-0.3t)}$ grados Celsius por minuto (donde t es el tiempo en minutos). En el tiempo $t=0$, la temperatura de la sopa es de 23°C

¡Claro! Vamos a resolver el problema paso a paso. El objetivo es encontrar la temperatura de la sopa en función del tiempo $T(t)$, dado que la razón de cambio de la temperatura es $r(t) = 30e^{-0.3t}$ y la temperatura inicial es 23°C en $t = 0$.

Paso 1: Plantear la relación entre $r(t)$ y $T(t)$

La razón de cambio de la temperatura $r(t)$ es la derivada de la temperatura $T(t)$ con respecto al tiempo t :

$$r(t) = \frac{dT}{dt}$$

Por lo tanto, para encontrar $T(t)$, necesitamos integrar $r(t)$:

$$T(t) = \int r(t) dt = \int 30e^{-0.3t} dt$$

Figura 3. Respuesta a la resolución de un problema. a) ChatGPT, b) DeepSeek

Con estos elementos, los participantes pondrán en juego sus conocimientos del tema y valorarán las formas en las que se plantean las soluciones, así también, estas respuestas serán

consideradas como una alternativa de abordaje del tema, en la que se puedan modificar los problemas de forma tal que se comprenda el concepto involucrado, más allá de la simple obtención del resultado.

Etapas 5. Discusión (30 minutos)

Al comparar herramientas de IA generativa para la enseñanza de Matemáticas, es crucial evaluar su **precisión y fiabilidad**, por lo que verificar la certidumbre de las respuestas es muy importante; incluso se han detectado algunas respuestas incorrectas. También se debe considerar la **accesibilidad y costos**, donde opciones comerciales requieren suscripción, mientras que herramientas de código abierto y ofrecen alternativas más asequibles; el uso de estas herramientas también debe considerar el aspecto ético.

En esta etapa se espera que los participantes tengan un panorama claro acerca de la creación de prompts y cómo es el proceso para educar a la IA, lo cual permitirá tanto el manejo de cada una de ellas de forma más eficiente, detectando además ventajas que presentan y los factores que determinaron la forma en la que fueron mejorando la experiencia.

Al término del taller, se espera que los participantes cuenten con los elementos básicos suficientes para el manejo de estas herramientas de IA, se resolverán dudas sobre las formas de educar a la IA para mejorar la calidad de las respuestas y presentarán algunas otras IA que pueden ser usadas como apoyo.

Finalmente, se plantearán preguntas de reflexión como las siguientes: ¿Las respuestas generadas fueron correctas y comprensibles?, ¿Detectaste errores en las respuestas presentadas?, ¿Qué herramienta consideras más confiable?, ¿Qué tan intuitiva fue la herramienta?, ¿Cuál de las herramientas te resultó más accesible en términos de usabilidad?, ¿Cómo podrías integrar esta herramienta en tu enseñanza diaria?, ¿Consideras que estas herramientas pueden mejorar el aprendizaje de los estudiantes?, ¿Qué tipo de actividades educativas crees que podrían beneficiarse más del uso de IA?, ¿Qué diferencias notaste en la calidad de las respuestas entre las IA utilizadas?, ¿Cuál de estas herramientas recomendarías para la enseñanza de Matemáticas y por qué?, ¿Cómo garantizar que los alumnos utilicen la IA para comprender un tema y no solo para entregar alguna determinada tarea?

Referencias y bibliografía

- Brown, T., Mann, B., Ryder, N., Subbiah, M., Kaplan, J., Dhariwal, P., ... y Amodei, D. (2020). Language models are few-shot learners. *arXiv* <https://arxiv.org/pdf/2005.14165>
- DeepSeek.AI. (2025). Welcome To DeepSeek R1 AI: Future of Artificial Intelligence. <https://depseek.in>
- García-Peñalvo, F. J., Llorens-Largo, F., & Vidal, J. (2024). La nueva realidad de la educación ante los avances de la inteligencia artificial generativa. *RIED-Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 27(1), 9-39. <https://doi.org/10.5944/ried.27.1.37716>
- IBM. (2024). ¿Qué es la inteligencia artificial (IA)? <https://www.ibm.com/mx-es/topics/artificial-intelligence>
- Morales-Chan, M. A. (2023). Explorando el potencial de Chat GPT: Una clasificación de Prompts efectivos para la enseñanza. <https://biblioteca.galileo.edu/xmlui/bitstream/handle/123456789/1348/Explorando%20el%20potencial%20de%20Chat%20GPT-%20Una%20clasificacio%cc%81n%20de%20Prompts%20efectivos%20para%20la%20ensen%cc%83anza.pdf?sequence=1>

- Spataro, J. (16 mayo 2023). Introducing Microsoft 365 Copilot – your copilot for work.
<https://blogs.microsoft.com/blog/2023/03/16/introducing-microsoft-365-copilot-your-copilot-for-work>
- Pichai, S. y Hassabis, D. (6 diciembre 2023). Introducing Gemini: our largest and most capable AI model.
<https://blog.google/intl/en-africa/company-news/technology/introducing-gemini-our-largest-and-most-capable-ai-model/>
- Rodríguez, J. (22 enero 2023). ChatGPT: Optimizing Language Models for Dialogue.
<https://josefelixrodriguezantonweb.com/2023/01/22/chatgpt-optimizing-language-models-for-dialogue>
- Sanusi, I. (2021). Teaching machine learning in K-12 education. In Proceedings of the 17th ACM conference on international computing education research (ICER 2021), New York, NY, USA
<https://doi.org/10.1145/3446871.3469769>
- Temitayo, I., Olaleye, S, Agbo F. y Chiu, T. (2022). The role of learners' competencies in artificial intelligence education. Computers & Education: Artificial Intelligence.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2666920X20300011?via%3Dihub>
- Torres-Peña, R., Peña-González, D. y Vergara, D. (2024). Updating Calculus Teaching with AI: A Classroom Experience. *Education Sciences*. <https://www.mdpi.com/2227-7102/14/7/742>



Explorando los beneficios y limitaciones de la inteligencia artificial en la planeación docente

Darwin **Peña-González**
Universidad del Magdalena
Colombia
ddpenag@unimagdalena.edu.co

Roberto **Torres-Peña**
Universidad del Magdalena
Colombia
rtorres@unimagdalena.edu.co

Resumen

El uso de herramientas de inteligencia artificial (IA) en la planeación docente representa una innovación clave en la educación. Este estudio analiza las percepciones de docentes sobre la integración de IA en la planeación de clases, basándose en un análisis estadístico exhaustivo de las respuestas de una encuesta. Los resultados indican que la IA se percibe como una herramienta efectiva para ahorrar tiempo, mejorar la claridad y fomentar la innovación en el diseño de actividades. Sin embargo, también se identificaron desafíos, como la dificultad para personalizar sugerencias y las limitaciones en contextos avanzados. El análisis factorial reveló dos dimensiones principales: percepción positiva de la utilidad y limitaciones percibidas. Con un Alpha de Cronbach de 0.743, la escala muestra una consistencia aceptable. Este estudio destaca el potencial de la IA como un apoyo en la enseñanza, enfatizando la necesidad de capacitación para maximizar su impacto en la práctica docente.

Palabras clave: Análisis estadístico; Inteligencia artificial; Innovación educativa; Percepciones docentes; Planeación docente.

Definición y relevancia del problema

El uso de herramientas de inteligencia artificial en la planeación docente ha emergido como una tendencia prometedora en el ámbito educativo, pero también plantea desafíos que requieren un análisis crítico. La planeación de clases es un componente esencial en el trabajo docente, ya que impacta directamente en la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, este proceso puede ser demandante en términos de tiempo y creatividad, especialmente cuando se busca personalizar las actividades y recursos para contextos específicos. La planeación de clases es un componente esencial en la labor docente, ya que establece las bases para una enseñanza efectiva. Un plan de clase bien estructurado permite al docente organizar objetivos, actividades y evaluaciones que responden a las necesidades de los estudiantes, promoviendo aprendizajes significativos. Sin embargo, este proceso puede ser altamente demandante, especialmente cuando se enfrenta a contextos diversos y dinámicos que exigen una constante personalización y actualización de los contenidos. Esto requiere no solo creatividad y tiempo, sino también un conocimiento profundo de las estrategias pedagógicas y las herramientas disponibles. En este contexto, las herramientas de IA ofrecen soluciones innovadoras. Su capacidad para procesar grandes volúmenes de información en poco tiempo permite generar ideas para actividades, proponer recursos educativos y organizar los contenidos de manera clara y eficiente. Además, estas tecnologías pueden identificar patrones en las necesidades de los estudiantes, sugiriendo enfoques pedagógicos adaptados a diferentes niveles de aprendizaje. Esto no solo ahorra tiempo al docente, sino que también amplía las posibilidades de diseñar experiencias educativas más inclusivas y efectivas.

La relevancia del problema presentado radica en que la superación de estas limitaciones podría maximizar el potencial de la IA en la educación, promoviendo prácticas docentes más efectivas, innovadoras y adaptadas a las necesidades del siglo XXI. Al abordar estas barreras, la IA no solo se consolidaría como una herramienta de apoyo, sino como un agente clave para re imaginar la educación, facilitando el desarrollo de competencias críticas y creativas en los estudiantes, y empoderando a los docentes en su labor diaria. Por tanto, este tema es de vital importancia para investigadores, desarrolladores de tecnología y tomadores de decisiones en el ámbito educativo, quienes deben trabajar en conjunto para optimizar el diseño y uso de estas herramientas en beneficio del aprendizaje global.

Desde una perspectiva más amplia, este trabajo resalta la importancia de integrar tecnologías emergentes en la enseñanza de las Matemáticas para ampliar las oportunidades de aprendizaje y promover un enfoque más dinámico e inclusivo. La incorporación de estas herramientas no solo enriquece las metodologías docentes, sino que también redefine las formas en que los estudiantes interactúan con el conocimiento, preparándolos para los desafíos de un entorno global digitalizado. Este trabajo se enmarca en los TSG (Topic Study Group), específicamente en el papel y el uso de la tecnología en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas en los niveles primario y secundario inferior. Además, se relaciona con el área de interés en la enseñanza y aprendizaje profesional de los docentes, donde los nuevos desafíos y oportunidades les permiten reflexionar sobre sus prácticas con y a través del uso de la tecnología. También aborda cómo alentar y apoyar a los docentes en la integración de tecnologías adecuadas en su práctica.

Referencial teórico

La integración de las tecnologías de la información y la comunicación (TIC) y la IA en la enseñanza de las Matemáticas presenta importantes oportunidades para mejorar los resultados de aprendizaje. Se ha demostrado que la aplicación de tecnologías de IA en contextos educativos mejora la participación de los estudiantes, personaliza las experiencias de aprendizaje y facilita enfoques pedagógicos innovadores. En este sentido, el uso de herramientas de IA en la planeación docente ha emergido como una tendencia prometedora en el ámbito educativo, pero también plantea desafíos que requieren un análisis crítico. La planeación de clases es un componente esencial en el trabajo docente, ya que impacta directamente en la calidad del proceso de enseñanza-aprendizaje. Sin embargo, este proceso puede ser demandante en términos de tiempo y creatividad, especialmente cuando se busca personalizar las actividades y recursos para contextos específicos.

Una de las principales formas en que las herramientas de IA generan ideas es mediante la aplicación de modelos generativos, que pueden sintetizar nuevos conceptos basados en datos existentes. Por ejemplo, se han empleado redes generativas antagónicas (GAN) para crear diseños únicos y resultados artísticos, lo que demuestra la capacidad de la IA para aumentar la creatividad humana en campos como la arquitectura y el diseño de productos (Liu, 2024; Hughes et al., 2021). Además, las plataformas impulsadas por IA pueden ayudar a los educadores a desarrollar actividades de aprendizaje auténticas que reflejen escenarios del mundo real, mejorando así la participación de los estudiantes y los resultados del aprendizaje (Lang, 2024). La integración de la IA en entornos educativos no solo respalda el proceso de ideación, sino que también permite experiencias de aprendizaje personalizadas adaptadas a las necesidades individuales de los estudiantes (Chang, 2023; Sanabria-Z, 2024).

En términos de diseño de actividades, las herramientas de IA facilitan la co-creación de contenido educativo al incorporar la retroalimentación de varias partes interesadas, incluidos profesores y estudiantes. Este enfoque colaborativo garantiza que las actividades sean relevantes y efectivas (Perna, 2024). Por ejemplo, los chatbots de IA se pueden utilizar en entornos de aula para guiar la investigación científica, lo que permite a los estudiantes participar en un aprendizaje práctico mientras reciben apoyo en tiempo real (Chang et al., 2023). Además, la IA puede agilizar el diseño de los planes de estudio al analizar datos sobre el desempeño y las preferencias de los estudiantes, lo que informa sobre estrategias de instrucción que son innovadoras y efectivas (Park, 2023).

Las capacidades de ahorro de tiempo de las herramientas de IA son evidentes en su capacidad para automatizar tareas repetitivas y optimizar los flujos de trabajo. En contextos educativos, la IA puede gestionar funciones administrativas como la calificación y el seguimiento de la asistencia, lo que libera a los educadores para que se concentren en la enseñanza y la tutoría (Ahmed et al., 2024). Además, las aplicaciones de IA en el descubrimiento de fármacos ejemplifican un importante ahorro de tiempo al analizar rápidamente grandes conjuntos de datos para identificar compuestos potenciales, acelerando así el proceso de investigación y desarrollo (Shen, 2024). La automatización de estos procesos no solo mejora la eficiencia, sino que también permite a los profesionales asignar su tiempo a esfuerzos más estratégicos y creativos.

Método y desarrollo

En este trabajo se utilizó un enfoque mixto para analizar las percepciones de los participantes sobre el uso de la IA en la planeación de clases. La recolección de datos se realizó mediante la aplicación de una encuesta basada en una escala Likert de cinco puntos, dirigida a una muestra de 12 estudiantes en formación docente. La encuesta incluyó 25 ítems diseñados para explorar dimensiones clave como la facilidad de uso, el impacto en la calidad de la planeación, la creatividad fomentada por la IA, y las limitaciones percibidas en su uso. En el análisis de los datos recopilados a través de la encuesta Likert se enfocó en un abordaje cuantitativo para evaluar la consistencia interna, relaciones entre ítems y dimensiones subyacentes. El cálculo del Alpha de Cronbach (74,3%) indicó una confiabilidad aceptable de la escala, permitiendo explorar agrupaciones temáticas a través de análisis de correlaciones y factorial. Este análisis reveló dos dimensiones principales: la percepción positiva sobre la utilidad de la IA en la planeación docente y las limitaciones percibidas, como la dificultad para personalizar sugerencias y su aplicabilidad en contextos avanzados.

De manera complementaria, los comentarios abiertos proporcionados por los participantes fueron analizados cualitativamente. Estos comentarios destacaron valoraciones personales sobre el ahorro de tiempo y la innovación que la IA aporta, pero también señalaron retos relacionados con su integración en prácticas docentes tradicionales y la dependencia excesiva de la tecnología. Este análisis cualitativo permitió enriquecer las interpretaciones cuantitativas, ofreciendo una perspectiva más holística sobre las experiencias y percepciones de los estudiantes. La combinación de enfoques refuerza la relevancia del estudio al identificar fortalezas y áreas de mejora para la integración de IA en la educación.

Resultados

Percepción sobre la actividad

El trabajo presentado exploró las percepciones sobre el uso de la IA en la planeación de clases, utilizando una escala Likert aplicada a 12 estudiantes. Los resultados, analizados desde un enfoque mixto, proporcionan información detallada sobre las fortalezas y desafíos percibidos en esta práctica.

Resultados descriptivos

El análisis descriptivo reveló una tendencia marcadamente positiva hacia el uso de la IA, con medias superiores a 4.5 en la mayoría de los ítems. Esto sugiere que los participantes percibieron un impacto significativo en términos de ahorro de tiempo, claridad en la planeación y fomento de la creatividad. Por ejemplo, ítems como "La IA mejoró la calidad de la planeación" y "Los recursos sugeridos fueron adecuados" obtuvieron puntuaciones consistentemente altas. La baja dispersión en las respuestas indica un consenso amplio entre los participantes. La Figura 1 presenta un gráfico de barras agrupado que muestra la frecuencia de cada puntuación (1 a 5) para los ítems evaluados en la encuesta. Los colores permiten identificar la proporción de cada respuesta, destacando que la mayoría de los ítems tienen una alta concentración de respuestas en

los valores 4 y 5, lo que refleja una percepción positiva general hacia el uso de inteligencia artificial en la planeación docente. Este gráfico facilita la comparación entre los ítems y resalta patrones consistentes en las respuestas. La Figura 2 muestra un diagrama de cajas (boxplot) para cada ítem, visualizando la mediana, el rango intercuartílico y posibles valores atípicos en las respuestas. En este gráfico se identifican la dispersión de las puntuaciones y el nivel de consenso entre los participantes. La mayoría de los ítems presentan una dispersión limitada, con respuestas concentradas en los valores altos, confirmando la tendencia positiva observada en el análisis descriptivo.

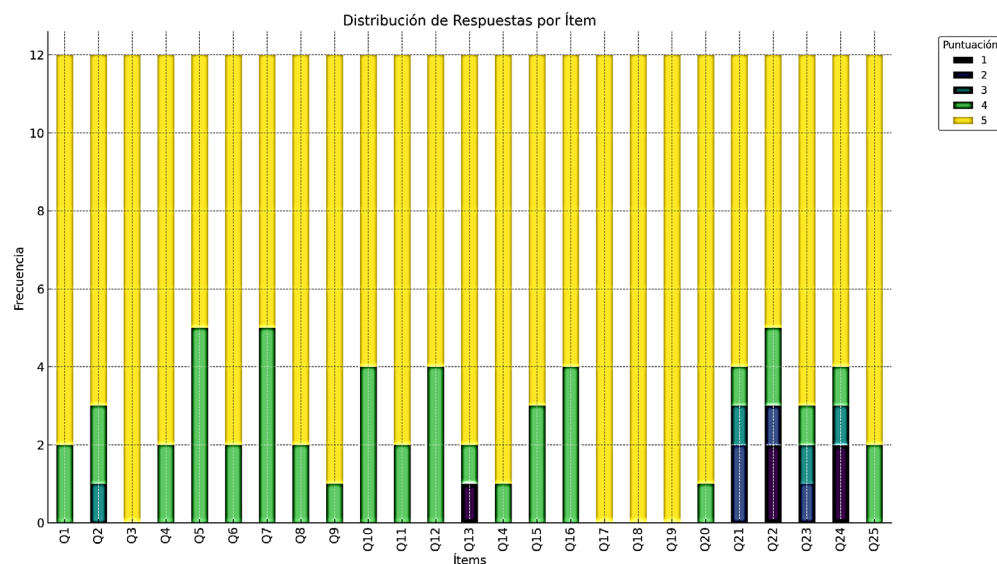


Figura 1. Distribución de Respuestas por Ítem

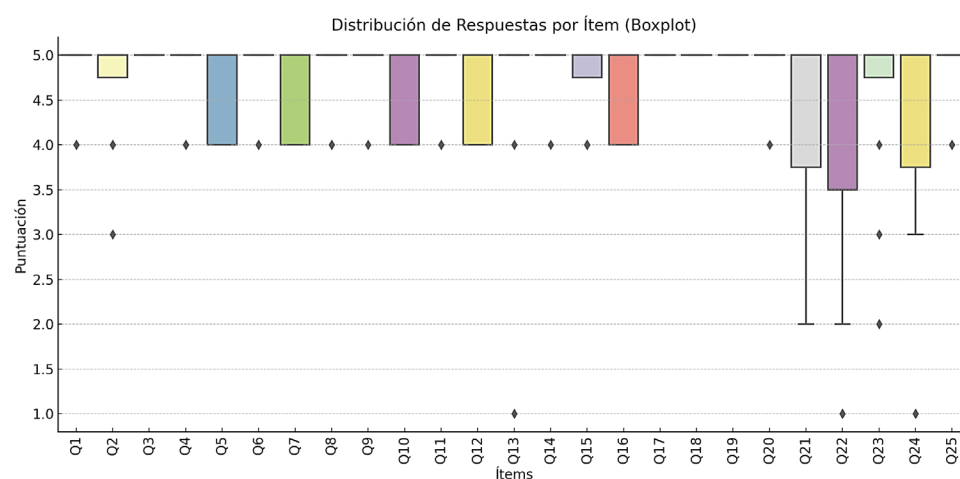


Figura 2. Boxplot de Respuestas por Ítem

Análisis de correlaciones

La matriz de correlaciones reflejó relaciones significativas entre ítems relacionados con la utilidad percibida de la IA, como la claridad y la comodidad en el uso. Por el contrario, las preguntas relacionadas con dificultades técnicas y personalización mostraron correlaciones más bajas con el resto de los ítems, sugiriendo que podrían estar midiendo dimensiones complementarias o independientes. En este caso, la matriz reveló correlaciones fuertes entre los ítems relacionados con la utilidad percibida de la IA, como claridad, ahorro de tiempo y calidad de la planeación. Esto sugiere que estos aspectos están altamente interconectados y forman parte de una misma dimensión subyacente. Por otro lado, los ítems relacionados con dificultades técnicas y personalización mostraron correlaciones más bajas, lo que indica que podrían medir aspectos independientes o complementarios.

Correlaciones Altas

Los ítems relacionados con claridad en la planeación, ahorro de tiempo y mejora en la calidad general presentaron correlaciones superiores a 0.85. Esto sugiere que los participantes que perciben que la IA mejora la claridad en la planeación también tienden a valorarla como una herramienta que ahorra tiempo y mejora la calidad general. Los ítems "La IA me ayudó a estructurar una planeación de clase clara y organizada" y "La planeación con IA me ahorró tiempo en comparación con otros métodos tradicionales" tienen una correlación de 0.88, indicando que estas percepciones están estrechamente vinculadas.

Correlaciones bajas

Los ítems relacionados con dificultades técnicas y personalización de sugerencias generadas por la IA mostraron correlaciones bajas (en el rango de 0.20 a 0.40) con ítems como claridad, tiempo y calidad. Esto indica que, para los participantes, los desafíos técnicos o de personalización no están necesariamente conectados con la percepción general de utilidad de la IA. La correlación entre "Tuve dificultades para personalizar las sugerencias generadas por la IA" y "La IA mejoró la calidad general de la planeación de la clase" fue de 0.25, sugiriendo que los retos de personalización no influyen significativamente en cómo se percibe la calidad general. De acuerdo con lo anterior, las correlaciones altas entre ítems relacionados con claridad, ahorro de tiempo y mejora en la calidad sugieren que estos aspectos conforman un núcleo temático sólido, donde las percepciones sobre la utilidad de la IA están claramente alineadas. Por otro lado, las correlaciones bajas con ítems sobre limitaciones técnicas y personalización revelan que estos desafíos son vistos como cuestiones separadas y no afectan directamente la percepción general positiva de la IA.

Conclusiones

Este estudio exploró las percepciones sobre el uso de herramientas de IA en la planeación docente, integrando análisis cuantitativos y cualitativos para ofrecer una visión integral de su impacto. Los resultados destacan que la IA es percibida positivamente como una herramienta que mejora la claridad, la calidad y la eficiencia en la planeación de clases, con puntuaciones altas en estos aspectos. La mayoría de los participantes coincidieron en que la IA ahorra tiempo y

fomenta la creatividad, consolidándose como un apoyo valioso en el diseño de actividades educativas. Sin embargo, se identificaron retos significativos relacionados con la personalización de las sugerencias generadas por la IA y su aplicabilidad en contextos avanzados. Estos aspectos reflejan la necesidad de desarrollar herramientas más adaptativas y formar a los docentes en estrategias para integrar la IA con su experiencia pedagógica.

Las correlaciones fuertes entre ítems como claridad y ahorro de tiempo refuerzan la idea de que la percepción positiva de la IA está interrelacionada, mientras que las correlaciones bajas con los ítems de limitaciones sugieren que estos desafíos no afectan directamente las opiniones generales sobre su utilidad. En conjunto, este estudio destaca el potencial transformador de la IA en la educación, no solo para optimizar procesos administrativos, como la planeación, sino también para innovar en la enseñanza. La incorporación de IA debe ir acompañada de estrategias de formación docente y mejoras en las herramientas para abordar los desafíos identificados. Estos hallazgos contribuyen al debate global sobre el papel de la tecnología en la educación y sirven como base para investigaciones futuras que amplíen el alcance de este análisis en contextos más diversos. Esta experiencia de aula aporta evidencia valiosa para académicos, desarrolladores de herramientas tecnológicas y tomadores de decisiones en educación, promoviendo un uso más eficiente y equitativo de la IA en la enseñanza.

Referencias y bibliografía

- Ahmed, R., Mallah, I. A., & Shaheen, A. (2024). Learning experiences and practices through artificial intelligence as adoptive academia for teachers and students of higher education institutions of Pakistan. *Pakistan Languages and Humanities Review*, 8(1). [https://doi.org/10.47205/plhr.2024\(8-i\)37](https://doi.org/10.47205/plhr.2024(8-i)37)
- Chang, D. (2023). Educational design principles of using ai chatbot that supports self-regulated learning in education: goal setting, feedback, and personalization. *Sustainability*, 15(17), 12921. <https://doi.org/10.3390/su151712921>
- Chang, J., Park, J., & Park, J. (2023). Using an artificial intelligence chatbot in scientific inquiry: focusing on a guided-inquiry activity using inquirybot. *Asia-Pacific Science Education*, 9(1), 44-74. <https://doi.org/10.1163/23641177-bja10062>
- George, D., & Mallery, P. (2003). *SPSS for Windows Step by Step: A Simple Guide and Reference*. 11.0 Update (4th ed.). Boston: Allyn & Bacon.
- Hughes, R., Zhu, L., & Bednarz, T. (2021). Generative adversarial networks-enabled human-artificial intelligence collaborative applications for creative and design industries: a systematic review of current approaches and trends. *Frontiers in Artificial Intelligence*, 4. <https://doi.org/10.3389/frai.2021.604234>
- Lang, J. (2024). Embracing generative ai for authentic learning. *Creative Education*, 15(01), 1-20. <https://doi.org/10.4236/ce.2024.151001>
- Liu, Y. (2024). Hybrid intelligence: design for sustainable multiverse via integrative cognitive creation model through human-computer collaboration. *Applied Sciences*, 14(11), 4662. <https://doi.org/10.3390/app14114662>
- Park, J. (2023). Integrating artificial intelligence into science lessons: teachers' experiences and views. *International Journal of STEM Education*, 10(1). <https://doi.org/10.1186/s40594-023-00454-3>
- Pernaa, J. (2024). Artificial intelligence chatbots in chemical information seeking: narrative educational insights via a swot analysis. *Informatics*, 11(2), 20. <https://doi.org/10.3390/informatics11020020>
- Sanabria-Z, J. (2024). Ai platform model on 4ir megatrend challenges: complex thinking by active and transformational learning. *Interactive Technology and Smart Education*, 21(4), 571-587. <https://doi.org/10.1108/itse-07-2023-0145>
- Shen, C. (2024). Drugflow: an ai-driven one-stop platform for innovative drug discovery. *Journal of Chemical Information and Modeling*, 64(14), 5381-5391. <https://doi.org/10.1021/acs.jcim.4c00621>



FotoGebra e Inteligencia Artificial: Innovación en la creación de problemas matemáticos y su impacto en la enseñanza y el aprendizaje

Karina Amalia **Rizzo**

Universidad Tecnológica Nacional, Facultad Regional Avellaneda; y Universidad Siglo 21
Argentina

karinarizzo71@gmail.com

Resumen

Este artículo propone la integración de inteligencia artificial (IA) en el concurso FotoGebra para potenciar la creación de problemas matemáticos y mejorar el aprendizaje. Mediante herramientas como modelos de lenguaje (GPT) y generadores de imágenes (DALL·E), se busca personalizar problemas, fomentar la creatividad y el pensamiento crítico, y aumentar la motivación de los estudiantes. La metodología se basa en una revisión teórica de literatura sobre didáctica de las Matemáticas y tecnologías emergentes. Los hallazgos destacan oportunidades para innovar en Educación Matemática, aunque se identifican desafíos técnicos y éticos, como la precisión de la IA y la equidad en el acceso. Se concluye que la IA debe ser una herramienta complementaria, guiada por el juicio pedagógico de los docentes, para maximizar su impacto educativo.

Palabras clave: Aprendizaje personalizado, creatividad en Matemáticas; didáctica de las Matemáticas; FotoGebra; generación de problemas matemáticos; inteligencia artificial en educación; pensamiento crítico; tecnologías emergentes; visualización matemática.

Introducción

El uso de tecnologías emergentes en la Educación Matemática ha transformado las prácticas pedagógicas, permitiendo a los estudiantes explorar conceptos de manera más interactiva y creativa. Como señala Drijvers (2015), "las herramientas digitales no solo apoyan el aprendizaje de las Matemáticas, sino que también pueden transformar la forma en que los estudiantes interactúan con los conceptos matemáticos" (p. 12). En este contexto, el concurso

FotoGebra se posiciona como una iniciativa innovadora que combina la creatividad visual con el aprendizaje matemático. Sin embargo, la integración de inteligencia artificial (IA) abre nuevas posibilidades para enriquecer esta experiencia. Este artículo explora cómo la IA puede potenciar el Concurso FotoGebra, tanto en la generación de problemas como en la creación de imágenes, para mejorar el aprendizaje matemático.

Marco teórico

La didáctica de las Matemáticas ha evolucionado hacia enfoques que priorizan la resolución de problemas y el pensamiento crítico. Según Schoenfeld (2016), "la resolución de problemas no es solo una habilidad matemática, sino una forma de pensar que puede ser cultivada a través de actividades significativas y contextualizadas" (p. 45). Por otro lado, la inteligencia artificial se ha convertido en una herramienta prometedora en educación. Como afirma Holmes et al. (2019), "la IA tiene el potencial de personalizar el aprendizaje, ofrecer retroalimentación inmediata y generar contenido educativo adaptado a las necesidades de los estudiantes" (p. 23). Estas perspectivas respaldan la integración de IA en FotoGebra, ya que combina la resolución de problemas con la personalización del aprendizaje.

FotoGebra: Fotografía, Matemáticas y GeoGebra en acción

FotoGebra es un concurso que combina la creatividad visual con el aprendizaje matemático, invitando a los participantes a explorar las Matemáticas en su entorno a través de la fotografía y la modelización con GeoGebra. El concurso se organiza en cinco categorías:

Categorías 1 y 2: Estudiantes de nivel secundario (hasta aproximadamente 18 años).

Categorías 3 y 4: Estudiantes de carreras de formación docente (futuros profesores).

Categoría 5: Libre (participación abierta a cualquier persona interesada).

A continuación, se describen las etapas que siguen los participantes:

1. Captura de la fotografía

En esta etapa, los participantes deben elegir una fotografía que represente un problema matemático del mundo real. La imagen debe capturar una situación cotidiana, natural o arquitectónica donde se puedan identificar elementos matemáticos, como formas geométricas, patrones, proporciones o relaciones espaciales. Como señala Drijvers (2015), "las herramientas digitales permiten a los estudiantes explorar conceptos matemáticos en contextos reales, lo que facilita una comprensión más profunda y significativa" (p. 14). La fotografía no solo debe ser visualmente atractiva, sino también servir como base para la creación de un problema matemático significativo.

2. Invención del problema real

Una vez seleccionada la fotografía, los participantes deben crear un problema matemático original y relevante que se pueda resolver utilizando la información presente en la imagen. El problema debe ser claro, contextualizado y desafiante, pero accesible para el nivel educativo de

los participantes. Por ejemplo, podrían plantearse preguntas sobre áreas, volúmenes, ángulos, distancias o relaciones proporcionales, dependiendo de los elementos visibles en la fotografía.

3. Modelización con GeoGebra

En esta etapa, los participantes utilizan el software GeoGebra para modelizar la situación matemática presente en la fotografía. GeoGebra permite visualizar, analizar y resolver el problema de manera interactiva. Como afirma Hohenwarter y Jones (2007), "GeoGebra es una herramienta poderosa que integra geometría, álgebra y cálculo, permitiendo a los estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera dinámica e intuitiva" (p. 3). Los participantes pueden emplear herramientas como gráficos, geometría dinámica, álgebra y hojas de cálculo para representar y resolver el problema. Esta fase fomenta el pensamiento crítico y la comprensión profunda de los conceptos matemáticos, ya que los estudiantes deben traducir la situación real a un modelo matemático.

4. Conexión con el mundo real

FotoGebra ayuda a los estudiantes a conectar las Matemáticas abstractas con situaciones concretas y significativas de su entorno. Al identificar y resolver problemas matemáticos en contextos reales, los participantes desarrollan una comprensión más profunda de la aplicabilidad de las Matemáticas en la vida cotidiana. Como señala Kaput (1998), "la visualización matemática es una poderosa herramienta para comprender conceptos abstractos y resolver problemas complejos" (p. 34). Esta conexión no solo mejora el aprendizaje, sino que también aumenta la motivación y el interés por la disciplina.

5. Papel de GeoGebra

GeoGebra desempeña un papel fundamental en FotoGebra, ya que permite a los participantes visualizar conceptos matemáticos, realizar cálculos y resolver problemas de manera interactiva y dinámica. Su capacidad para integrar geometría, álgebra y cálculo en una sola plataforma lo convierte en una herramienta ideal para modelizar situaciones complejas. Según Lavicza (2010), "GeoGebra no solo es una herramienta para resolver problemas, sino también un medio para fomentar la creatividad y la exploración en Matemáticas" (p. 78). Además, GeoGebra fomenta la exploración y la experimentación, permitiendo a los estudiantes probar diferentes enfoques y verificar sus soluciones en tiempo real.

Fotogebra y la inteligencia artificial: Propuesta de integración

La integración de IA en Fotogebra puede darse en múltiples niveles. Por ejemplo, los modelos de lenguaje como GPT-4 pueden generar enunciados de problemas matemáticos a partir de prompts específicos. Según Brown et al. (2020), "los modelos de lenguaje de gran escala pueden generar texto coherente y contextualmente relevante, lo que los hace útiles para la creación de contenido educativo" (p. 8). Además, herramientas generativas de imágenes como DALL·E pueden inspirar problemas matemáticos basados en imágenes creativas. Como señala Ramesh et al. (2021), "la generación de imágenes mediante IA puede ser una fuente inagotable de inspiración visual, especialmente en contextos educativos donde la creatividad es clave" (p.

15). Estas herramientas podrían usarse para personalizar problemas según el nivel de los participantes, alineándose con la idea de aprendizaje adaptativo propuesta por Knewton (2017).

A continuación, se presentan ejemplos concretos que ilustran la utilización de modelos de lenguaje como GPT-4 y tres formas en que estas herramientas pueden aplicarse en el contexto de FotoGebra. Para ello, se toman como referencia dos trabajos presentados en el concurso: “Funciones estéticas” (Figura 1, Categoría 4, 2022, por Enrique Dalila) y “Producción de tapabocas” (Figura 2, Categoría 2, 2021, por Aquino Leyla, Cárdenas Blanca y Rastelli Mariano).

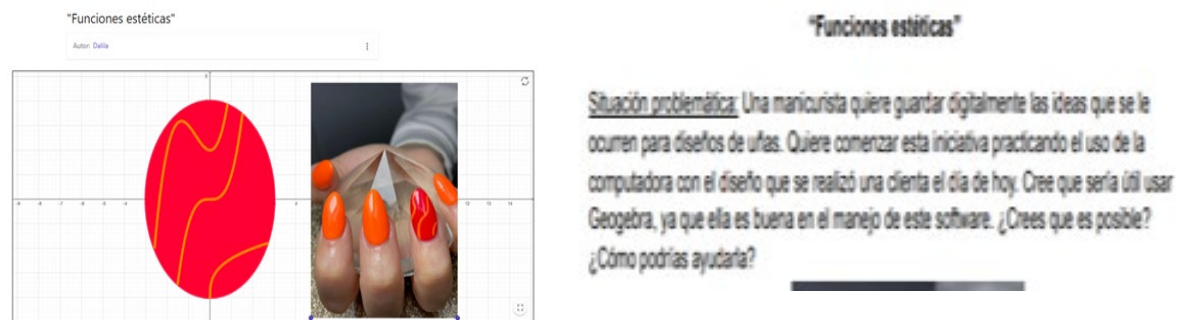


Figura 1. Funciones estéticas. Categoría 4. 2022

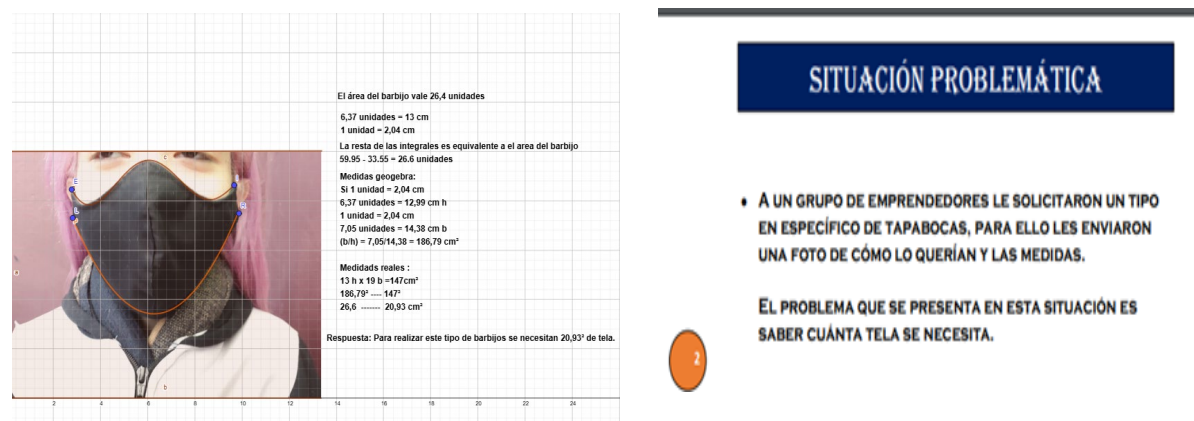


Figura 2. Producción de tapabocas. Categoría 2. 2021

1. Utilización de prompt para mejorar la redacción de una situación problemática

En el Ejemplo 1 (Funciones estéticas) y el Ejemplo 2 (Producción de tapabocas), se utilizaron prompts para mejorar la redacción de las situaciones problemáticas. Esta intervención permitió estructurar los enunciados de manera más clara, enfatizar el problema matemático subyacente y fomentar la exploración de estrategias de solución. La mejora en la redacción no solo facilita la comprensión del problema, sino que también guía a los participantes hacia un abordaje más sistemático y reflexivo.

Situación problemática:

Una manicurista desea digitalizar y organizar sus diseños de uñas para futuras referencias. Para iniciar este proceso, ha tomado una fotografía de la mano de una cliente con un diseño muy creativo, en el que se pueden identificar formas que pueden modelarse con funciones matemáticas. Dado que tiene experiencia en el uso de GeoGebra, se pregunta si este software podría ayudarla a representar y analizar digitalmente sus diseños.

Preguntas:

- ¿Es posible utilizar GeoGebra para modelar los patrones del diseño de uñas?
- ¿Qué tipos de funciones matemáticas podrían representar mejor las formas observadas?
- ¿Qué herramientas de GeoGebra podrían facilitar el trazado y análisis de los diseños?
- ¿Cómo podrías ayudarla a llevar a cabo esta tarea de manera eficiente?

Esta versión enfatiza la conexión con las funciones matemáticas y el potencial de GeoGebra para modelar los diseños. ¿Te gustaría que agregara algo más?

Ejemplo 1. Funciones estéticas. Mejorar redacción situación problemática

Situación problemática:

Un grupo de emprendedores ha recibido un pedido especial de tapabocas con un diseño específico. Para ello, les enviaron una fotografía del modelo deseado junto con sus medidas. El desafío que enfrentar es determinar cuánta tela se necesita para fabricar cada tapabocas de manera precisa y eficiente.

Preguntas:

- ¿Cómo pueden modelar matemáticamente la forma del tapabocas a partir de la imagen?
- ¿Qué herramientas podrían utilizar para calcular el área de tela necesaria?
- ¿Cómo podrían optimizar el uso del material para minimizar el desperdicio?

Ejemplo 2. Producción de tapabocas. Mejorar redacción situación problemática

2. Creación de diversas situaciones problemáticas a partir de la misma fotografía

En los Ejemplos 3, 4 y 5 (Producción de tapabocas), se exploró la creación de múltiples situaciones problemáticas a partir de una misma fotografía. Por ejemplo, con la imagen de una persona con tapabocas, se plantearon preguntas relacionadas con proporciones, geometría y optimización de materiales. Esta diversidad de problemas no solo enriquece el aprendizaje, sino que también permite trabajar distintos conceptos matemáticos y científicos desde una misma imagen, fomentando la creatividad y el pensamiento crítico.

con la misma fotografía de una persona con tapabocas, ¿que otra situación problemática se podría plantear?

Aquí tienes algunas ideas de situaciones problemáticas que podrían plantearse con la misma fotografía de una persona con tapabocas:

1 Ajuste y Comodidad del Tapabocas

Situación problemática:

Un grupo de diseñadores está desarrollando un nuevo modelo de tapabocas ergonómico que se adapta mejor a diferentes tipos de rostros. Para ello, necesitan analizar cómo se ajusta el tapabocas a la cara de una persona, considerando medidas como el ancho, la altura y la curvatura del material.

Preguntas:

- ¿Cómo se podría modelar matemáticamente la forma del tapabocas para optimizar su ajuste?
- ¿Qué tipo de funciones o ecuaciones podrían representar mejor su curvatura?
- ¿Cómo podrían ajustar el diseño para diferentes tamaños de rostro?

Ejemplo 3. Producción de tapabocas. Creación de diversas situaciones problemática

2 Eficiencia del Filtrado y Seguridad

Situación problemática:

En tiempos de pandemia, la efectividad de un tapabocas depende de su ajuste y del material utilizado. Un grupo de investigadores quiere analizar si el diseño de un tapabocas visto en una fotografía es realmente eficiente para filtrar partículas del aire.

Preguntas:

- ¿Qué factores influyen en la eficacia del tapabocas más allá de su forma?
- ¿Cómo se podría analizar la relación entre el tamaño de los poros del material y su capacidad de filtrado?
- ¿Qué mediciones se podrían realizar para evaluar su efectividad en comparación con otros modelos?

Ejemplo 4. Producción de tapabocas. Creación de diversas situaciones problemática

3 Impacto Ambiental del Uso de Tapabocas

Situación problemática:

Cada día se desechan millones de tapabocas desechables, generando un impacto ambiental significativo. Un grupo de estudiantes quiere cuántos análisis tapabocas se utilizan en su comunidad y estimar el impacto en términos de residuos generados.

Preguntas:

- ¿Cómo se podría calcular la cantidad de residuos generados por el uso de tapabocas en un mes?
- ¿Cuánta tela se necesitaría si en lugar de tapabocas desechables se usaran reutilizables?
- ¿Qué alternativas sostenibles podrían implementarse para reducir la contaminación?

Ejemplo 5. Producción de tapabocas. Creación de diversas situaciones problemática

3. Auxilio de pistas para resolver situaciones problemáticas

En los Ejemplos 6, 7 y 8 (Producción de tapabocas), se solicitó el auxilio de pistas para resolver situaciones problemáticas. Estas pistas, generadas mediante IA, orientaron a los participantes en la identificación de variables, la formulación de hipótesis y la aplicación de conceptos matemáticos. Como señala OpenAI (2025), "todas estas situaciones problemáticas pueden abordarse con la ayuda de GeoGebra y la fotografía". GeoGebra, en combinación con la imagen, permite visualizar, modelar y analizar las situaciones de manera interactiva, facilitando la resolución de problemas y la comprensión de conceptos abstractos.

1 Ajuste y Comodidad del Tapabocas

Uso de GeoGebra:

- Se puede importar la fotografía en GeoGebra y superponer una cuadrícula para medir las dimensiones de los tapabocas.
- Se pueden modelar las curvas del tapabocas con funciones cuadráticas, exponenciales o spline para representar su forma.
- Se pueden realizar transformaciones geométricas (escalado, simetría) para adaptar el diseño a diferentes tamaños de rostro.

Solución:

- Se puede calcular la distancia entre puntos clave (nariz, mejillas, barbilla) para evaluar el ajuste.
- Se pueden definir ecuaciones para optimizar el diseño en función de la ergonomía.

Ejemplo 6. Producción de tapabocas. Ayuda para resolver situaciones problemática

2 Eficiencia del Filtrado y Seguridad

📌 Uso de GeoGebra:

- Se puede modelar la malla del tapabocas representando los poros como figuras geométricas (círculos, hexágonos, etc.).
- Se pueden calcular áreas de los poros y comparar con el tamaño de las partículas que deben filtrar.
- Se pueden realizar simulaciones con densidad de puntos para estimar la cantidad de aire filtrado.

📌 Solución:

- Se puede estimar qué porcentaje del tapabocas es "abierto" (poros) y cuánto es material sólido.
- Se pueden analizar diferentes materiales y comparar su eficiencia en función de su diseño geométrico.

Ejemplo 7. Producción de tapabocas. Ayuda para resolver situaciones problemáticas

3 Impacto Ambiental del Uso de Tapabocas

📌 Uso de GeoGebra:

- Se pueden representar datos de consumo de tapabocas en gráficos de barras o funciones de crecimiento.
- Se pueden modelar cálculos de residuos acumulados a lo largo del tiempo con funciones lineales o exponenciales.
- Se puede diseñar un modelo geométrico de tapabocas reutilizable y calcular la cantidad de tela necesaria.

📌 Solución:

- Se pueden hacer estimaciones de reducción de residuos si se usan tapabocas de tela en lugar de desechables.
- Se puede calcular la cantidad de material necesario para fabricar tapabocas reutilizables de diferentes tamaños.

Ejemplo 8. Producción de tapabocas. Ayuda para resolver situaciones problemática

GeoGebra, en combinación con la foto, permite visualizar, modelar y analizar las situaciones matemáticamente.

Estos ejemplos demuestran cómo la integración de modelos de lenguaje como GPT-4 en FotoGebra puede potenciar la creación y resolución de problemas matemáticos. La mejora en la redacción, la diversidad de situaciones problemáticas y el auxilio de pistas no solo enriquecen la experiencia de los participantes, sino que también fomentan el aprendizaje significativo y la conexión entre las Matemáticas y el mundo real. GeoGebra, como herramienta central, complementa este proceso al permitir la visualización y modelización de las situaciones, consolidándose como un recurso indispensable en la Educación Matemática contemporánea.

Beneficios para el aprendizaje matemático

La integración de IA en FotoGebra puede fomentar habilidades clave en los estudiantes. Según Kaput (1998), "la visualización matemática es una poderosa herramienta para comprender

conceptos abstractos y resolver problemas complejos" (p. 34). Al combinar IA generativa con Fotogebra, los estudiantes pueden interactuar con problemas que son visualmente atractivos y conceptualmente desafiantes. Además, la personalización de problemas mediante IA puede mejorar la motivación. Como afirma Ryan y Deci (2000), "la autonomía y la relevancia personal son factores críticos para mantener la motivación intrínseca en el aprendizaje" (p. 68). Finalmente, la IA puede fomentar el pensamiento crítico al presentar problemas que requieren interpretación y análisis, tal como lo sugiere Polya (1945) en su enfoque de resolución de problemas.

Desafíos y consideraciones éticas

A pesar de sus beneficios, la integración de IA en educación no está exenta de desafíos. Como advierte Selwyn (2020), "la IA puede perpetuar sesgos existentes si no se diseña con cuidado, lo que podría afectar la equidad en el acceso y la calidad del aprendizaje" (p. 45). Además, la precisión de los modelos de IA en la generación de problemas matemáticos puede ser limitada. Según Bender et al. (2021), "los modelos de lenguaje pueden generar contenido que parece coherente pero que carece de precisión matemática o lógica" (p. 12). Por otro lado, es fundamental considerar la autoría de los problemas generados por IA y garantizar que los docentes mantengan un papel central en el proceso educativo. Como señala Williamson (2017), "la IA debe ser una herramienta complementaria, no un reemplazo del juicio humano en la educación" (p. 89).

Conclusiones y perspectivas futuras

La integración de IA en Fotogebra representa una oportunidad única para innovar en la Educación Matemática. Como concluye Noss y Hoyles (1996), "la tecnología no solo cambia lo que enseñamos, sino también cómo lo enseñamos y cómo los estudiantes lo aprenden" (p. 56). Futuras investigaciones podrían explorar el impacto de esta integración en el rendimiento y la motivación de los estudiantes, así como desarrollar marcos éticos para el uso de IA en concursos educativos. Además, es crucial involucrar a los docentes en este proceso, ya que, como afirma Mishra y Koehler (2006), "la tecnología solo es efectiva cuando los docentes la integran de manera pedagógicamente significativa" (p. 1018).

Referencias y bibliografía

- Bender, E. M., Gebru, T., McMillan-Major, A., & Shmitchell, S. (2021). On the dangers of stochastic parrots: Can language models be too big?. *Proceedings of the 2021 ACM Conference on Fairness, Accountability, and Transparency*.
- Brown, T., Mann, B., Ryder, N., et al. (2020). *Language models are few-shot learners*. *Advances in Neural Information Processing Systems*, 33.
- Drijvers, P. (2015). *Digital technology in mathematics education: Why it works (or doesn't)*. Springer.
- Hohenwarter, M., & Jones, K. (2007). GeoGebra: A software for teaching and learning mathematics. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 12(2), 1-14.
- Holmes, W., Bialik, M., & Fadel, C. (2019). *Artificial intelligence in education*. Center for Curriculum Redesign.
- Kaput, J. J. (1998). Representations, inscriptions, descriptions and learning: A kaleidoscope of windows. *Journal of Mathematical Behavior*, 17(2), 33-45.
- Lavicza, Z. (2010). Integrating GeoGebra into IMO-level mathematics teaching. *Teaching Mathematics and Computer Science*, 8(1), 77-90.

- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Noss, R., & Hoyles, C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers*. Kluwer Academic Publishers.
- OpenAI, 2025. ChatGPT <https://chatgpt.com/>
- Polya, G. (1945). *How to solve it*. Princeton University Press.
- Ramesh, A., Pavlov, M., Goh, G., et al. (2021). Zero-shot text-to-image generation. *Proceedings of the 38th International Conference on Machine Learning*.
- Ryan, R. M., & Deci, E. L. (2000). Self-determination theory and the facilitation of intrinsic motivation, social development, and well-being. *American Psychologist*, 55(1), 68-78.
- Schoenfeld, A. H. (2016). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. *Journal of Education*, 196(2), 1-38.
- Selwyn, N. (2020). *Should robots replace teachers? AI and the future of education*. Polity Press.
- Williamson, B. (2017). *Big data in education: The digital future of learning, policy and practice*. SAGE Publications.



Geogebra RA: Exploración espacial en la resolución de problemas

Rafael **Martinez**

Instituto Superior de formación docente Salome Ureña (ISFODOSU)

República Dominicana

Rafael.martinez@isfodosu.edu.do

Resumen

Este estudio evalúa la implementación de GeoGebra RA como herramienta didáctica en la enseñanza de sólidos de revolución en Análisis Matemático II. Utilizando un enfoque cuantitativo y descriptivo, se aplicaron cuestionarios antes y después de la intervención, validados por expertos. Los resultados muestran un aumento significativo en la motivación y comprensión de conceptos geométricos, con el 92.3% de los estudiantes valorando positivamente la experiencia. La fiabilidad del instrumento fue alta ($\alpha = 0.89$). Se concluye que GeoGebra RA facilita el aprendizaje activo y visual de la Matemática abstracta.

Palabras clave: GeoGebra; Realidad Aumentada; Matemáticas; Educación secundaria; Innovación.

Introducción

La integración de tecnologías emergentes como la Realidad Aumentada (RA) en el aula de Matemáticas transforma la manera en que se abordan conceptos abstractos. GeoGebra RA permite una visualización tangible de sólidos de revolución, mejorando el pensamiento espacial desde un enfoque constructivista.

Metodología

Se realizó un estudio cuantitativo, exploratorio y descriptivo con estudiantes de la licenciatura en Matemáticas. Se aplicaron cuestionarios antes y después del uso de GeoGebra RA, validados por jueces expertos (V de Aiken > 0.97) y con buena fiabilidad ($\alpha = 0.89$). Las actividades se desarrollaron de forma presencial durante el segundo y tercer cuatrimestre de 2023.

Poster; General

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

Resultados

El 93.8% de los estudiantes indicó haber usado GeoGebra anteriormente, aunque con poco dominio. Tras la intervención, el 100% expresó que GeoGebra RA les ayudó a comprender mejor los sólidos de revolución. El 92.3% consideró útil la RA para el aprendizaje, y más del 79% valoró positivamente su aplicación para comprender conceptos abstractos.

Conclusiones

GeoGebra RA se percibe como una herramienta eficaz para potenciar el aprendizaje visual e interactivo en Matemáticas. El alto nivel de aceptación y motivación estudiantil sugiere su aplicabilidad en otras asignaturas, promoviendo competencias del siglo XXI.

¿Qué ventajas crees que tiene la realidad aumentada en comparación con métodos de aprendizaje más tradicionales? (Puedes seleccionar más de una opción)

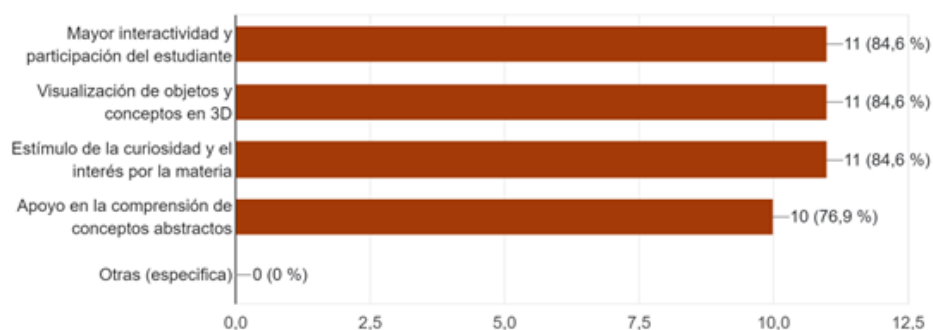


Figura 1. Respuesta de estudiantes sobre ventajas de realidad aumentada

Nota: Elaboración propia a partir de los resultados del cuestionario final.

Referencias bibliográficas

- Casado, J. L. M. (2019). Realidad aumentada con GeoGebra. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (91), 73-80.
- García Perales, R. (2018). Desenho e construção de um instrumento de avaliação da competência matemática: aplicabilidade prática de um julgamento de especialistas. *Ensaio: Avaliação e Políticas Públicas em Educação*, 26(99), 347–372. <https://doi.org/10.1590/S0104-40362018002601263>
- Hernández-Nieto, R. (2002). *Instrumentos de Recolección de Datos en Ciencias Sociales y Ciencias Biomédicas*. Mérida, Venezuela: Universidad de Los Andes. https://www.academia.edu/37886946/Instrumentos_de_recoleccion_de_datos_en_ciencias_sociales_y_ciencias_biomedicas_Rafael_Hernandez_Nieto_pdf
- León, N. (2021). *Realidad aumentada como recurso didáctico para el aprendizaje significativo de la geometría espacial*. Universidad de Cartagena. TGF_Nidia Leon. pdf (unicartagena.edu.co).
- Sombra del Río, L. (2019). Los mil y un aportes de GeoGebra al estudio de la Geometría Tridimensional. *Épsilon*, 2019, n° 103, 89–97. ISSN: 2340-714X.



IA generativa para la formulación y resolución de problemas

Aitana **Martín-Ferraz**

Universidad de La Laguna

España

amartife@ull.edu.es

Alexánder **Hernández**

Universidad de La Laguna

España

alexander.hernandez@ull.edu.es

Matías **Camacho-Machín**

España

Universidad de La Laguna

mcamacho@ull.edu.es

Resumen

Este estudio explora el uso de la inteligencia artificial generativa en una actividad de indagación matemática a través de la formulación y resolución de problemas, que involucra los mosaicos regulares y semirregulares. A partir de interacciones con ChatGPT-4o y o1, se analizaron sus capacidades se identificaron fortalezas y limitaciones en sus respuestas. Los resultados muestran que la IA puede apoyar la indagación matemática, pero sus respuestas requieren validación crítica. Para ello, el uso coordinado de herramientas digitales como GeoGebra o Google Colab y los conocimientos matemáticos del usuario son dos aspectos relevantes. El estudio concluye que la IA es un recurso valioso para la enseñanza de las Matemáticas, pero debe ser integrada con herramientas digitales y la supervisión docente para garantizar un aprendizaje fundamentado en la validación y el análisis crítico.

Palabras clave: Educación Matemática; Resolución de problemas; Formulación de problemas; Inteligencia artificial; Herramientas digitales.

Definición y relevancia del problema

La creciente integración de herramientas digitales en la enseñanza de las Matemáticas ha transformado la manera en que se aborda el planteamiento y la resolución de problemas matemáticos. Un ejemplo de ello es la aparición de herramientas digitales, como GeoGebra, WolframAlpha o DESMOS y en los últimos años, el desarrollo de modelos de inteligencia artificial generativa (IA). Estos avances permiten a los docentes y estudiantes explorar conceptos matemáticos de manera interactiva y fomentar un aprendizaje basado en la indagación. Estudios previos han demostrado que estas tecnologías facilitan la formulación de conjeturas y la identificación de patrones matemáticos que no siempre emergen en enfoques tradicionales (Hernández, Perdomo-Díaz & Camacho-Machín, 2019). Sin embargo, la introducción de modelos de IA generativa, como ChatGPT, plantea interrogantes sobre su aplicabilidad y sus limitaciones en contextos educativos.

El problema de estudio se centra en evaluar la capacidad de la inteligencia artificial generativa para asistir en la indagación matemática, a través de la formulación y resolución de problemas matemáticos desde un enfoque formativo. En particular, se analiza cómo modelos como ChatGPT pueden contribuir a la comprensión de las Matemáticas, facilitando el proceso de reflexión y la toma de decisiones.

La relevancia de este estudio radica en la necesidad de explorar cómo la IA puede integrarse con el resto de las herramientas digitales de manera que aporte nuevos enfoques. A medida que la inteligencia artificial se consolida como una herramienta de apoyo, es crucial evaluar sus fortalezas y limitaciones para su aplicación adecuada en contextos educativos. En este sentido, el presente trabajo busca aportar evidencia sobre la influencia de la IA en la formulación y resolución de problemas matemáticos. Así como su potencial para mejorar la enseñanza y el aprendizaje en este campo.

Referencial teórico

La resolución de problemas matemáticos ha sido ampliamente estudiada desde diversas perspectivas. Pólya (1945) propuso un modelo basado en cuatro fases: comprensión, planificación, ejecución y revisión de la solución. Estos principios han sido adaptados a la práctica docente para fomentar el pensamiento matemático en estudiantes de distintos niveles educativos (Schoenfeld, 1985). Sin embargo, estudios más recientes han ampliado esta concepción, abordando la resolución de problemas desde marcos que incluyen otros aspectos que dan especificidad al campo de estudio. El uso coordinado de herramientas digitales, como GeoGebra, ha sido identificado como un factor clave en la resolución de problemas y la indagación matemática (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Santos-Trigo, 2023). Estas tecnologías permiten representar visualmente conceptos matemáticos, desarrollar estrategias diversas y establecer relaciones entre elementos geométricos y algebraicos. En este sentido, las herramientas digitales no solo facilitan la exploración de problemas matemáticos, sino que también fomentan la creatividad y permiten que los estudiantes construyan nuevas preguntas a partir de problemas resueltos.

Cai y Rott (2024) han explorado los procesos de formulación de problemas matemáticos, proponiendo una estructura en cuatro fases: orientación, conexión, generación y reflexión. Este modelo proporciona una visión estructurada de cómo se pueden diseñar y plantear problemas en la enseñanza de las Matemáticas, enfatizando la importancia de la conexión entre conocimientos previos y nuevos enfoques para generar problemas matemáticos significativos. Por su parte, Baumanns (2022) adopta una mirada centrada en la actividad y el contexto en el que se lleva a cabo la formulación de problemas. Su enfoque describe cuatro categorías clave en la práctica de la formulación de problemas: reformulación para resolver, reformulación para indagar, generación de nuevos problemas y construcción de tareas para otros. Estas categorías permiten relacionar la actividad de formulación con el proceso subyacente de resolución de problemas y la enseñanza de las Matemáticas. Además, destacan la relevancia de la reformulación como herramienta esencial para la indagación, facilitando la generación de nuevas estrategias y enfoques en el proceso de aprendizaje.

Por otro lado, la inteligencia artificial se ha posicionado como una herramienta emergente con el potencial de proporcionar retroalimentación inmediata y generar enfoques novedosos en la resolución de problemas. Investigaciones recientes han señalado que los modelos de lenguaje pueden ofrecer explicaciones detalladas y sugerir estrategias de solución (González-Alcaide, 2024). Sin embargo, estos modelos presentan limitaciones, como la generación de respuestas incorrectas o la necesidad de una supervisión docente para validar sus resultados. Es fundamental evaluar cómo integrar estos sistemas de manera efectiva en la enseñanza, garantizando su uso ético y su alineación con los objetivos educativos.

Método y desarrollo conceptual

Este estudio adopta un enfoque cualitativo basado en el análisis de interacciones con la IA generativa en un contexto de indagación matemática a través de la formulación y resolución de problemas relacionados con mosaicos semirregulares. Este tema se trabajó previamente en una asignatura del Grado en Matemáticas, donde se estudió como punto de partida en una secuencia de innovación didáctica. Para luego plantear y resolver problemas desde dos aproximaciones una algebraica y otra computacional.

La investigación se estructuró en cuatro fases principales:

1. Evaluación del problema sin IA: Se tomaron como referencia los problemas planteados en la asignatura del Grado y resueltos por los estudiantes. Se documentaron las aproximaciones y estrategias utilizadas.
2. Interacción con ChatGPT: Se realizaron varias conversaciones con ChatGPT, en sus versiones 4o y o1, en dos contextos distintos uno enfocado a la indagación sobre mosaicos y la formulación de problemas y otro para la resolución de problemas en su aproximaciones algebraica y computacional.
3. Análisis de respuestas y comparación: Se evaluaron las estrategias propuestas por la IA en comparación con las soluciones desarrolladas por los estudiantes. Se analizaron la coherencia, precisión y utilidad de las respuestas en un contexto educativo. Se identificaron patrones en la generación de respuestas, la presencia de "alucinaciones" y la necesidad de refinamiento en las instrucciones para mejorar la calidad de las soluciones.

4. Reflexión sobre la integración de IA y herramientas digitales: Se discutió el uso coordinado de la IA con otras herramientas digitales como GeoGebra y Google Colab para su aplicación en la enseñanza de las Matemáticas.

Resultados

En el curso de Matemáticas para la Enseñanza del Grado en Matemáticas, una de las tareas tiene como objetivo reflexionar sobre la manera en que se presentan los contenidos matemáticos en la educación media y explorar nuevas estrategias pedagógicas que permitan fortalecer la enseñanza. Como ejemplo de ello, el profesor partió de los conceptos de mosaicos regulares y semirregulares (Figura 1) para generar una unidad innovadora.



Figura 1. Ejemplo ilustrativo usado por el profesor para presentar los mosaicos regulares y semirregulares.

El profesor mostró que la secuencia de enseñanza debía incluir inicialmente una exploración activa de los mosaicos, combinando herramientas físicas (modelos de cartón, madera o plástico) y digitales (pizarras digitales, Polypad o GeoGebra). Estos recursos permitirían analizar patrones y comprender cómo ciertos polígonos pueden teselar el plano, validando así la existencia de los mosaicos regulares y semirregulares. Además del análisis geométrico, la secuencia incluyó la formulación y resolución de problemas matemáticos relacionados con mosaicos, dedicando especial atención al problema de identificar todos los diferentes mosaicos regulares y semirregulares existentes. Junto con el profesor, los estudiantes modelizaron la situación, reformulando el problema a uno con ecuaciones diofánticas (Figura 2). Esta actividad se puede categorizar como una reformulación de un problema dado para resolverlo (Baumanns, 2023). Luego, este nuevo problema fue trabajado por los estudiantes, quienes lo abordaron de forma algebraica y aplicando un enfoque computacional donde ejecutaron un algoritmo en Python, mostrando así su capacidad para resolver problemas por múltiples aproximaciones y coordinar diferentes herramientas digitales (Santos-Trigo & Camacho-Machín, 2013; Santos-Trigo, 2023).

El planteamiento de las ecuaciones parte de que la suma de la amplitud de los ángulos de los polígonos entorno a un vértice (que pueden ser 3, 4, 5 o 6) es de 360° .

$$\sum_{j=1}^3 180 \left(1 - \frac{2}{n_j} \right) = 360$$
$$180 \left(1 - \frac{2}{n_1} \right) + 180 \left(1 - \frac{2}{n_2} \right) + 180 \left(1 - \frac{2}{n_3} \right) = 360^\circ$$

Figura 2. Ecuaciones diofánticas para resolver el problema dado

El equipo de investigadores abordó la interacción con ChatGPT en distintos momentos, con diferentes usuarios y en múltiples conversaciones. Este enfoque permitió evaluar la coherencia y variabilidad de las respuestas de la IA sin que el sistema pudiera cruzar información entre conversaciones previas. La segmentación de las interacciones tuvo como objetivo identificar patrones en la formulación de respuestas, evaluar la consistencia de los conceptos matemáticos generados y detectar posibles errores en las explicaciones proporcionadas.

Una de las interacciones se llevó a cabo con ChatGPT-4o (4o), en la que se abordaron preguntas relacionadas con los mosaicos regulares y semirregulares. En esta conversación, se analizó la capacidad de la IA para definir correctamente estos conceptos, describir sus propiedades y presentar ejemplos relevantes. Se observó que, si bien 4o ofreció explicaciones generalmente precisas, en algunas ocasiones presentó afirmaciones ambiguas o incorrectas, lo que evidenció la necesidad de una supervisión crítica por parte del usuario. Por ejemplo, sus representaciones de mosaicos regulares no eran adecuadas al inicio, y tras algunas intervenciones por nuestra parte se corrigieron (Figura 3a y 3b).

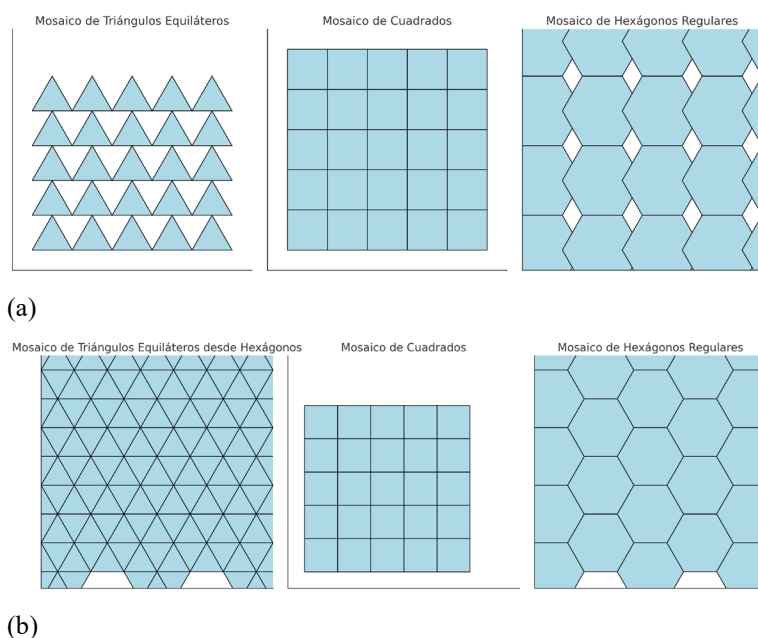


Figura 3. (a) Representación inicial. (b) Representación después de refinar la respuesta.

Tras preguntar en la conversación varios aspectos conceptuales y refinar sus respuestas, se le pidió a 4o lo siguiente: "Con esta información plantea algún problema de Matemáticas". Este respondió con un problema basado en un caso particular, en el que un arquitecto deseaba cubrir un suelo con una configuración de mosaicos (3,5,4,6), es decir, que un vértice coincidiese los polígonos regulares de la manera: triángulo-pentágono-cuadrado-hexágono. Y invitaba, con varias cuestiones, a discutir si era posible hacerlo. En términos de Baumanns (2023) entramos en una actividad de generar un nuevo problema.

Para conectarlo con la secuencia de innovación realizada, se le planteó a 4o la instrucción: "Como plantearías un problema que me llevara a encontrar todos los mosaicos semirregulares".

En la respuesta 4o, organiza un breve enunciado, unas preguntas que podrían guiar la indagación e ideas para verificar los avances o encontrar la solución.

Con estos ejemplos se pudo verificar la capacidad del ChatGPT para formular problemas y ofrecer una lista de preguntas relacionadas. Buscar las respuestas y abordar el problema permitirían a un usuario desarrollar su conocimiento sobre mosaicos regulares como se le solicitó, relacionamos estas preguntas propuestas con la actividad de resolver problemas para indagar (Baumanns, 2023). Para terminar esta conversación y antes de iniciar una nueva conversación con o1, se le solicitó a 4o que: "Genera un prompt para o1 en el que analice los semirregulares analíticamente", obteniendo la respuesta de la Tabla 1:

Tabla 1

Prompt generado por ChatGPT 4o para preguntar a o1 por los mosaicos semirregulares

Título: Análisis Analítico de los Mosaicos Semirregulares
Descripción: Quiero realizar un análisis matemático de los mosaicos semirregulares en el plano euclidiano. Estos mosaicos están formados por combinaciones de polígonos regulares que se ensamblan de tal forma que cada vértice tiene la misma disposición y la suma de sus ángulos internos es exactamente 360° .
Tareas:
Definir restricciones geométricas: ¿Cuáles son los polígonos regulares que pueden formar mosaicos sin dejar huecos? ¿Cómo se calcula el ángulo interno de un polígono regular de n lados? ¿Qué condiciones deben cumplir los ángulos internos en un vértice para que el mosaico sea válido?
Explorar combinaciones posibles de polígonos: Determinar combinaciones de polígonos como triángulos, cuadrados, hexágonos, octágonos y dodecágonos. Verificar si la suma de ángulos en cada vértice es exactamente 360° .
Demostrar el conjunto completo de mosaicos semirregulares: ¿Cuántos tipos distintos de mosaicos semirregulares existen? ¿Cómo demostrar que no hay más soluciones aparte de las conocidas?
Representaciones analíticas y gráficas: Obtener ecuaciones o algoritmos que modelen los mosaicos. Generar visualizaciones matemáticas o simulaciones computacionales.
Objetivo final: Obtener un listado completo y justificado matemáticamente de los mosaicos semirregulares en el plano euclidiano, con explicaciones analíticas y representaciones gráficas que validen los resultados.

La respuesta de o1 se estructuró en un estudio analítico sobre los mosaicos semirregulares, abordando su caracterización dentro de la geometría euclidiana. Primero, estableció las restricciones geométricas necesarias para que un conjunto de polígonos regulares pueda teselar el plano sin dejar huecos. Luego, exploró combinaciones viables de polígonos, justificando

matemáticamente la existencia de estos mosaicos. Posteriormente, enumeró la lista completa de mosaicos semirregulares conocidos, explicando por qué no hay más soluciones posibles.

Además, propuso representaciones analíticas mediante ecuaciones y criterios geométricos que validan su existencia. Finalmente, destacó el uso de herramientas computacionales para visualizar y analizar las teselaciones, sugiriendo algoritmos para su modelización. La respuesta sigue un enfoque estructurado y riguroso, aunque requiere supervisión para verificar la precisión de sus deducciones matemáticas.

En otros dos chats con o1, se plantearon los problemas modelizados previamente, pero sin incluir información específica sobre los mosaicos. Esto permitió evaluar cómo la IA resolvía las ecuaciones diofánticas por diferentes estrategias. En una conversación, se abordó el problema de manera algebraica, mientras que en la otra se utilizó un enfoque computacional, implementando código para obtener soluciones numéricas. En ambas interacciones, o1 presentó *alucinaciones*, es decir, respuestas incorrectas pero formuladas de manera plausible. Estas inconsistencias se manifestaron en la manipulación de expresiones algebraicas muy simples y en el uso de operaciones en Phyton que produce errores numéricos. Sin embargo, la experiencia previa de los investigadores en el problema y su conocimiento matemático permitieron refinar ambos procesos, corrigiendo errores y ajustando los planteamientos para lograr soluciones matemáticamente o computacionalmente válidas.

Para complementar el análisis, GeoGebra se utilizó para representar gráficamente los ejemplos obtenidos en las conversaciones con ChatGPT, facilitando la visualización geométrica de las soluciones. Paralelamente, Google Colab se empleó para ejecutar el código en Python generado en las distintas interacciones con o1, permitiendo verificar la validez de los resultados obtenidos. Siguiendo el enfoque de Santos-Trigo (2023) sobre el uso coordinado de herramientas digitales, estas tecnologías no solo facilitaron la exploración matemática, sino que también permitieron contrastar diferentes aproximaciones. Además, como señala Schoenfeld (1985), el papel del usuario fue fundamental al adoptar una visión crítica sobre las respuestas proporcionadas por la IA, usando GeoGebra y Google Colab como instrumentos de control para detectar errores, validar estrategias y refinar el proceso de resolución.

Conclusiones

Los resultados de esta investigación evidencian que la inteligencia artificial generativa puede desempeñar un papel relevante en la enseñanza y el aprendizaje de la Matemática, particularmente en la formulación y resolución de problemas. Sin embargo, su uso requiere de una supervisión crítica, dado que los casos analizados presentan *alucinaciones* e interpretaciones no justificadas, lo que destaca la importancia del papel del usuario que debe cuestionar las respuestas formulando nuevas preguntas.

El análisis de los mosaicos semirregulares permitió evaluar cómo ChatGPT, en su versión 4o y o1, genera explicaciones matemáticas y resuelven problemas por diferentes estrategias. A través de interacciones estructuradas en múltiples sesiones, se identificó que la IA puede ser una herramienta útil para el planteamiento de problemas y su resolución. En ocasiones es necesario complementar la información recibida y revisar las respuestas. En este sentido, el uso de

herramientas digitales como GeoGebra y Google Colab fue clave para verificar y corregir los resultados obtenidos, lo que nos permite ampliar la propuesta de Santos-Trigo (2023) sobre el uso coordinado de la tecnología en la enseñanza matemática. Se observó que la IA provoca un cambio de roles en el usuario y el resto de las herramientas digitales. En vez de generar conjeturas para luego valorar su veracidad con las herramientas, el usuario ahora debe analizar las conjeturas realizadas por la IA. Para ello, recurre a sus propios conocimientos y se apoya en otras herramientas como elementos de control.

La interacción con la IA también permitió reflexionar sobre la enseñanza de los mosaicos regulares y semirregulares. Esto ofrece una nueva estrategia metacognitiva para un estudiante o docente, que debe preguntarse a sí mismo si comprende la información que responde la IA y plantearle nuevas cuestiones que le permitan revisar su veracidad. Es una forma de desarrollar la indagación matemática a través de la formulación y resolución de preguntas y problemas.

En términos generales, esta investigación confirma que la integración de la IA en la Educación Matemática es prometedora, pero debe combinarse con herramientas tradicionales y digitales, y con la intervención activa del docente y el estudiante, garantizando un aprendizaje sólido y fundamentado en la validación matemática.

Agradecimientos

Esta investigación ha sido subvencionada por el Proyecto de Investigación de referencia PID2022-139007NBI00 aprobado por el M CIN/AEI/10.13039/501100011033/ FEDER, UE, que lleva por título: Formulación de problemas matemáticos con herramientas digitales en la formación inicial de profesorado (ForDiMat). Así como, por el Vicerrectorado de Investigación y Transferencia de la Universidad de La Laguna.

Referencias y bibliografía

- Baumanns, L. (2023). *Mathematical Problem Posing*. Springer Spektrum Wiesbaden.
doi:<https://doi.org/10.1007/978-3-658-39917-7>
- Cai, J., & Rott, B. (2024). On understanding mathematical problem-posing processes. *ZDM Mathematics Education*, 56, 61-71. doi:<https://doi.org/10.1007/s11858-023-01536-w>
- González-Alcaide, G. (2024). *I d. C. (después de ChatGPT): Inteligencia artificial generativa en la educación superior*. Universidad de Valencia.
- Hernández, A., Perdomo-Díaz, J., & Camacho-Machín, M. (2019). Mathematical understanding in problem solving with GeoGebra: a case study in initial teacher education. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. doi:[10.1080/0020739X.2019.1587022](https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1587022)
- Pólya, G. (1945). *How to solve it?* Princeton: Princeton University Press.
- Santos-Trigo, M., & Camacho-Machín, M. (2013). Framing the use of computational technology in problem solving approaches. *The Mathematical Enthusiast*, 10(1&2), 279-302. doi: [10.54870/1551-3440.1268](https://doi.org/10.54870/1551-3440.1268)
- Santos-Trigo, M. (2023). Trends and Developments of Mathematical Problem-Solving Research to Update and Support the Use of Digital Technologies in Post-confinement Learning Spaces. En T.L. Toh, M. Santos-Trigo, P.H. Chua, N.A. Abdullah y D. Zhang (Eds.), *Problem Posing and Problem Solving in Mathematics Education* (pp. 7-32). Springer, Singapur. doi: [10.1007/978-981-99-7205-0_2](https://doi.org/10.1007/978-981-99-7205-0_2)
- Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.



Implicación parental en el aprendizaje de las Matemáticas en primaria: Una experiencia en línea

José María **Marbán**

Facultad de Educación y Trabajo Social, Universidad de Valladolid.

España

jasemaria.marban@uva.es

Matías **Arce**

Facultad de Educación de Palencia, Universidad de Valladolid.

España

matias.arce@uva.es

Ana **Maroto**

Facultad de Educación de Segovia, Universidad de Valladolid.

España

anaisabel.maroto@uva.es

Palabras clave: experiencia educativa; familia; plataforma online; aprendizaje de las Matemáticas; apoyo.

Introducción

Las experiencias significativas en el aprendizaje de las Matemáticas son consideradas uno de los factores más importantes para alcanzar el éxito académico. Es frecuente que estas experiencias recaigan mayoritariamente en los centros educativos, quedando en un segundo plano las experiencias en otros contextos; sin embargo, la investigación en Educación Matemática apunta a que, en particular, ciertos factores del ámbito familiar deben considerarse elementos que potencialmente pueden influir en el rendimiento matemático del alumnado (García-Crespo et al., 2019).

Silinskas y Kikas (2019) aseguran que la motivación y el rendimiento del alumnado están relacionados con la implicación que padres y madres muestran en la realización de los deberes de Matemáticas que sus hijos traen a casa, influyendo en los resultados la forma que adquiere dicha implicación.

El objetivo general de esta investigación es el de explorar los cambios que se producen en los roles parentales, en particular en términos de flujo de conductas de control a conductas de

apoyo, cuando se ofrece un entorno de trabajo matemático en el hogar basado en una relación entre iguales a través de un sistema de tutela inteligente virtual gamificado.

Método

El diseño metodológico corresponde con un método mixto de tipo secuencial, el cual se define a través de un diseño cuantitativo cuasiexperimental. Esta intervención consistió en proporcionar a una muestra de familias acceso completo a la plataforma online para el aprendizaje de las Matemáticas, denominada Smartick, tanto a padres como a hijos, asumiendo ambos el rol de aprendiz. Esta plataforma presenta un método de aprendizaje de las Matemáticas en línea dirigido a niños de 4 a 14 años, donde cada usuario trabaja diariamente durante 15-20 minutos. La plataforma se apoya en algoritmos adaptativos de tutela inteligente que permiten personalizar el aprendizaje y adaptarlo a las necesidades y al progreso de cada usuario. A su vez, está gamificada y presta atención tanto a aspectos cognitivos como afectivos. Estos aspectos, unidos a su facilidad de uso y las numerosas valoraciones positivas recopiladas previamente de padres, madres y niños que ya la habían utilizado fueron los criterios elegidos para su selección al adaptarse al propósito de la investigación a llevar a cabo. Los participantes fueron 36 unidades familiares con hijos de 5º y 6º curso (10-12 años) de un colegio público, constituidas por 41 adultos (madres en su mayoría) y 50 niños que podían actuar online entre sí de dos formas distintas: mediante el avatar que hubiesen elegido en el mundo virtual, que ofrece la plataforma, o tras el desarrollo de las propias actividades matemáticas mediante función parentales de apoyo directas o indirectas. Para la toma de datos se utilizó una adaptación española del cuestionario PIQ (Parental Involvement Questionnaire), que permite evaluar la implicación parental a través de los roles que los padres y las madres desempeñan y que clasifican en roles directos (consejeros y asesores) e indirectos (motivadores, monitores o proveedores de recursos).

Resultados y conclusiones

Se observó el flujo que se produce de roles indirectos, sobre todo del rol monitor, a roles directos, cuando el nivel de participación de toda la unidad familiar fue alto o muy alto, esto es, llevando a cabo el trabajo diario propuesto por la plataforma durante la mayor parte del periodo de ejecución de la experiencia. Este fenómeno puede deberse a una o varias de las siguientes razones: la consideración de padres y de Smartick como un recurso en sí mismo de gran valor para sus hijos e hijas (reducción de la necesidad de proporcionar recursos), las características propias de los sistemas de tutoría inteligente de la plataforma (reducción de la necesidad de supervisar el progreso como padre/tutor) o la sensación de aprendizaje entre iguales junto con un aumento de la competencia matemática (al menos percibida) de toda la unidad familiar participante (aumento de las acciones de apoyo mutuo como consejeras y consejeros «matemáticos»). La investigación que da lugar este trabajo contó con la supervisión y la financiación de la Junta de Castilla y León (España) a través del contrato con número de Expediente B2022/009831.

Referencias y bibliografía

- García-Crespo, F. J., Fernández-Alonso, R. y Muñiz, J. (2019). Resilient and low performer students: Personal and family determinants. *Psicothema*, 31(4), 363-375. doi:10.7334/psicothema2019.245
- Silinskas, G., & Kikas, E. (2019). Parental involvement in math homework: Links to children's performance and motivation. *Scandinavian Journal of Educational Research*, 63(1), 17-37



Integración del Aula Invertida y Laboratorio en la formación del profesorado

José David Vargas

Escuela de Matemática, Universidad de Costa Rica

Costa Rica

Jose.vargas_g@ucr.ac.cr

Resumen

Este estudio analiza la integración del aula invertida y el enfoque de laboratorio en la enseñanza del álgebra en la formación del profesorado. La metodología combinó estudio autónomo previo con actividades prácticas en el aula para fomentar la comprensión conceptual y la participación estudiantil. Se evaluó la implementación en un curso universitario, aplicando encuestas a los participantes. Los resultados mostraron mejoras en la motivación, estructuración del conocimiento y argumentación matemática. Se concluye que esta estrategia es efectiva y se recomienda su implementación en otros contextos educativos para validar su impacto.

Introducción

La enseñanza tradicional del álgebra se basa en métodos expositivos que dificultan la comprensión y motivación del estudiantado. Para abordar esta problemática, se ha implementado un modelo que integra el aula invertida y el enfoque de laboratorio, optimizando el tiempo en el aula mediante el estudio autónomo previo y actividades prácticas. Esta combinación busca fortalecer la comprensión conceptual y mejorar el compromiso del estudiantado con el aprendizaje (Séré, 2002, p. 358). Por lo tanto, el objetivo es valorar el impacto de la integración de ambas estrategias en la comprensión conceptual y el desarrollo de habilidades procedimentales.

El aula invertida reorganiza la enseñanza trasladando la instrucción teórica fuera del aula, permitiendo que las sesiones presenciales se enfoquen en la aplicación y resolución de problemas. A través de recursos digitales como videos y artículos, los estudiantes acceden al contenido previamente, facilitando un aprendizaje activo y colaborativo que potencia la interacción con el docente (Merla y Yáñez, s.f., p. 74). Por su parte, el laboratorio científico en

álgebra ofrece un espacio para la experimentación y exploración matemática, siguiendo fases de formulación de hipótesis, experimentación, análisis y conclusiones. El docente tiene el rol de preparar los materiales, tiempos, espacios y actividades para los estudiantes, así como de interactuar con ellos en el momento de la clase (Reyes, 2020, p. 65).

Metodología

El estudio se realizó en el curso MA0101 Matemática de Ingreso con un grupo de 8 estudiantes repitentes, pertenecientes a la carrera Educación Matemática en la Universidad de Costa Rica. Las sesiones se distribuyeron en dos clases semanales de 2 horas y 30 minutos, enfocadas en la resolución de problemas y el trabajo en equipo. Los contenidos abordados incluyeron operaciones algebraicas, ecuaciones, progresiones y resolución de problemas.

Cada semana, el curso siguió una secuencia estructurada combinando estudio autónomo, evaluación y actividades prácticas. Primero, los estudiantes revisaron materiales previos, como videos y resúmenes en línea, para llegar preparados a la clase. Luego, realizaron un quiz teórico sobre definiciones y propiedades algebraicas, seguido de su revisión y resolución de ejemplos en la pizarra. Posteriormente, trabajaron en ejercicios prácticos en parejas o tríos. Entre sesiones, realizaron ejercicios individuales de refuerzo. En la segunda clase de la semana, se aplicó un quiz práctico seguido de nuevas actividades guiadas similares a las de la primera sesión para consolidar los conocimientos adquiridos.

Resultados y conclusiones

El cuestionario aplicado a 6 de los 8 participantes reveló que la estrategia fue bien valorada. 4 de 6 estudiantes dedicaron entre 1 y 2 horas al estudio previo. 5 de 6 estudiantes consideraron que los quices favorecieron su aprendizaje. Todos los estudiantes consideraron que las indicaciones y guías previas fueron claras y útiles. La integración del aula invertida y el laboratorio resultó ser una estrategia efectiva para la enseñanza del álgebra elemental. La combinación de estudio previo, evaluación continua y actividades prácticas favoreció la comprensión conceptual y el compromiso del estudiantado. Como áreas de mejora se identificaron la optimización de los materiales de estudio y la diversificación de herramientas interactivas. Se recomienda evaluar esta metodología en cohortes de estudiantes no repitentes para analizar su efectividad en distintos contextos.

{**Enlace a poster digital:** [dirección web de archivo en dispositivo de la organización](#)}

Referencias y bibliografía

- Merla, A., & Yáñez, C. (2016). El aula invertida como estrategia para la mejora del rendimiento académico. *Revista Mexicana de Bachillerato a Distancia*, 8(16), 68-78.
<https://doi.org/10.22201/cuaed.20074751e.2016.16.57108>
- Reyes, E. (2020). Prácticas de laboratorio: la antesala a la realidad. *Revista Multi-Ensayos*, 6(11), 61-66.
<https://doi.org/10.5377/multiensayos.v6i11.9290>
- Séré, M. (2002). La enseñanza en el laboratorio. ¿Qué podemos aprender en términos de conocimiento práctico y de actitudes hacia la ciencia? *Enseñanza de las Ciencias Revista de investigación y experiencias didácticas*, 20(3), 357-368. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.3953>



Integrando IA en la Educación Superior: Análisis del aprendizaje en resolución de problemas de ingeniería a través del Cálculo Integral

Ellery **Chacuto** López
Universidad del Magdalena
Colombia
echacuto@unimagdalena.edu.co

Liceth **Niño** Camacho
Universidad del Magdalena
Colombia
lnino@unimagdalena.edu.co

Joaquín **Pomares** Blaise
Universidad del Magdalena
Colombia
jpomares@unimagdalena.edu.co

Resumen

Este artículo trata sobre las estrategias que constantemente viene generando las instituciones de educación superior que forman ingenieros en Colombia, con el propósito de lograr en un buen nivel las habilidades que requieren actualmente; se destaca que docentes de la asignatura de Calculo integral del Programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena miden con indicadores determinados el nivel de logro de los estudiantes, para identificar, formular y resolver problemas de ingeniería complejos mediante la aplicación de principios de ingeniería, ciencias y Matemáticas, posteriormente con ayuda de modelación matemática e inteligencia artificial, se analizan oportunidades de mejoras que se pueden incorporar en la asignatura de Calcula Integral. Con lo anterior, se concluye que estudiantes y docentes del programa consideran efectivo el uso de nuevas estrategias para el fortalecimiento del aprendizaje de dicha cátedra y mejorar integralmente la habilidad en solución de problemas usando principios básicos de Matemáticas.

Palabras clave: Cálculo integral; Inteligencia artificial; Modelación matemática; Resolución de problemas; Resultado de aprendizaje.

Introducción

En Colombia, las universidades han implementado diversas estrategias para mejorar el rendimiento en Matemáticas, fundamentales en la formación de ingenieros. No obstante, persisten brechas en la aplicación efectiva de conceptos matemáticos a problemas reales (Rojas et al., 2019). La inteligencia artificial contribuye al análisis de los procesos de aprendizaje, la personalización de la enseñanza y la retroalimentación inmediata, potenciando las habilidades analíticas y críticas de los estudiantes (Romero & Ventura, 2022). En este marco, la enseñanza del cálculo integral es clave para el desarrollo de competencias analíticas y de resolución de problemas en ingeniería (García-Peñalvo, 2021).

La investigación busca indagar cómo la incorporación de la inteligencia artificial (IA) y la modelación matemática en la asignatura de Cálculo Integral del Programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena permite medir y analizar el nivel de logro de los estudiantes en la formulación y resolución de problemas de ingeniería, utilizando indicadores específicos para identificar oportunidades de mejora continua en las estrategias de enseñanza y fortalecer el aprendizaje y desarrollo de competencias en ingeniería. La IA y la modelación matemática se consideran herramientas valiosas para optimizar la enseñanza en disciplinas que requieren alto nivel de abstracción, como el cálculo integral, ofreciendo apoyo personalizado y retroalimentación inmediata, aspectos cruciales para el dominio de conceptos matemáticos complejos, según destacan Hjelte et al. (202) y Wang et al. (2023).

Desde este artículo se examina cómo la Inteligencia Artificial, puede aportar en la toma de decisiones, acerca de modelos de enseñanza y aprendizaje en la asignatura de Calculo Integral, con una orientación más efectiva para la resolución de problemas de ingeniería.

Ilustración y relevancia del problema

El propósito principal de esta investigación es tratar de encontrar respuesta al siguiente interrogante ¿Qué estrategias de enseñanza en cálculo integral son positivas para mejorar la habilidad de los estudiantes en la formulación y resolución de problemas de ingeniería enfatizando en la formación superior en el programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena? este interrogante surge que dentro de la formación de ingenieros es importante adquirir la habilidad para identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería, lo cual implica la aplicación de los principios de ingeniería, ciencias y Matemáticas para abordar problemas desafiante dentro de un entorno.

Con esta premisa, en esta ponencia se muestran los resultados del seguimiento a la medición del resultado de aprendizaje a los estudiantes del programa de ingeniería Pesquera durante los ciclos 2023 II y el ciclo 2024 I, usando una rúbrica con tres indicadores y cuatro niveles de logro. La muestra se hizo con actividades evaluativas durante cada ciclo académico y documentados mediante una plantilla de Excel. Estos resultados desde la asignatura de cálculo integral revelaron que el 51% de los estudiantes del Programa de Ingeniería Pesquera se ubicaron en nivel de No cumplimiento o básico para los indicadores de identificación y formulación de problemas de ingeniería.

Los resultados de tres indicadores en la asignatura de Cálculo Integral del Programa de Ingeniería Pesquera fueron analizados mediante Evaluapp, un software propio que utiliza modelación matemática e inteligencia artificial para apoyar la mejora continua en la resolución de problemas de ingeniería. Evaluapp identificó debilidades en la identificación y formulación de problemas, asignando una puntuación de 3.0. Estos hallazgos evidencian deficiencias en la formación de los estudiantes y resaltan la necesidad de revisar y mejorar las estrategias de enseñanza del cálculo integral. La investigación busca documentar evidencias y oportunidades de mejora para fortalecer la formación integral en ingeniería y replicar este modelo en otros programas de la Facultad de Ingeniería de la Universidad del Magdalena.

Referencial teórico

La resolución de problemas constituye una actividad crucial tanto en las ciencias como en las disciplinas tecnológicas, siendo inherente a la vida diaria y, particularmente, al trabajo profesional de los ingenieros. Más allá de ser una herramienta de evaluación de procesos cognitivos y metacognitivos, la resolución de problemas se configura como una metodología principal para la activación, potenciación y el desarrollo de dichas habilidades y procesos en los estudiantes (Paz, 2013). En este argumento, el enfoque de resolución de problemas propuesto por Schoenfeld (Barrantes, 2006) se denota primordialmente acertado, ya que afirma que el aprendizaje profundo de las Matemáticas no se limita a la memorización de algoritmos y fórmulas, sino que demanda el desarrollo de habilidades cognitivas y metacognitivas. Esto incluye, de gran manera, la capacidad de monitorear y adecuar estrategias durante el proceso de resolución. Schoenfeld expone que, al enfrentar problemas reales y abiertos, los estudiantes adquieren habilidades transferibles a situaciones reales, promoviendo así la creatividad, la perseverancia y el análisis crítico (Barrantes, 2006). Esta perspectiva es un aspecto clave en la búsqueda de la mejora continua en los procesos educativos de ingeniería.

Para fomentar un aprendizaje significativo y aplicado en los futuros ingenieros, resulta crucial vincular a los estudiantes con situaciones problemáticas que reflejen de manera auténtica la realidad profesional. Este enfoque les permite no solo analizar críticamente escenarios complejos, sino también desarrollar habilidades esenciales como la formulación de hipótesis, el diseño de experiencias para contrastar ideas previas, la generación de diversas estrategias de resolución, y el análisis riguroso de los resultados obtenidos (Vásquez, 2018). Esta aproximación pedagógica trasciende el aprendizaje puramente teórico, impulsando una comprensión más profunda y contextualizada.

Dentro de estas estrategias de resolución de problemas, el uso de las Matemáticas—y, en el contexto de esta investigación, el cálculo integral— brota como un elemento necesario. El cálculo integral no es solamente una asignatura, sino una herramienta potente y necesaria para modelar y comprender fenómenos complejos que los ingenieros enfrentarán en su quehacer profesional. Lejos de ser una asignatura abstracta, permite a los ingenieros cuantificar, predecir y optimizar en diversas áreas. Por ejemplo, en el campo de la ingeniería, el cálculo integral es fundamental para el estudio y profundización teórica de modelos de bases de datos, redes neuronales, procesos estocásticos, sistemas basados en el conocimiento, métricas avanzadas y técnicas de optimización, entre otras aplicaciones (Parra, 2010). Así, dominar el cálculo integral se convierte en una competencia transversal que habilita al ingeniero para abordar y resolver problemas complejos con una base analítica sólida.

Actualmente en la formación de ingenieros, es importante buscar la integración de manera efectiva y exitosa la enseñanza teórica del cálculo integral con su aplicación práctica en problemas de ingeniería. Esto desafía la separación común entre el aprendizaje abstracto de las Matemáticas y su utilidad en la ingeniería, sentando un precedente valioso para futuras reformas curriculares y metodologías de enseñanza en disciplinas STEM (Smith & Chen, 2021)

Por otro lado, una de las claves para esta investigación es la importancia de la inteligencia artificial para analizar los resultados de aprendizaje de los estudiantes, donde el uso de ésta permite demostrar de cómo la inteligencia artificial posibilita el análisis de datos de aprendizaje a una escala sin antecedentes. La investigación de Johnson y Miller (2022) destaca que la inteligencia artificial no solo procesa grandes volúmenes de información sobre el rendimiento estudiantil, sino que lo hace de una manera que permite emparejar patrones de aprendizaje. Esto es concluyente para ir más allá de los promedios grupales y comprender las necesidades específicas de cada estudiante.

Otra clave fundamental dentro de la investigación es el uso de la modelación matemática, ya que comúnmente, la medición del aprendizaje se ha centrado en puntos de corte o resultados finales. Sin embargo, Davis y Clark (2018) demuestran cómo sus modelos permiten trazar la trayectoria y la progresión del desarrollo de competencias específicas en los estudiantes de ingeniería a lo largo de diferentes etapas de su formación. Esto proporciona una visión mucho más rica de cómo las habilidades y conocimientos evolucionan con el tiempo, permitiendo una comprensión más profunda del proceso de aprendizaje, y además introducen y validan modelos matemáticos dinámicos como una herramienta sofisticada para ir más allá de la evaluación estática de competencias.

La incorporación de la Inteligencia Artificial (IA) potencia aún más esta perspectiva. La IA y la modelación matemática se establecen, entonces, como una dupla complementaria, con un fuerte potencial para transformar y mejorar significativamente la enseñanza y el aprendizaje del cálculo integral, facilitando análisis más profundos y recomendaciones precisas para la mejora continua.

Método y desarrollo conceptual

El desarrollo de este trabajo de investigación se organizó desde un prototipo de investigación cualitativo, teniendo de cuenta la comprensión, interpretación y análisis del objeto de estudio. Para ello, se tomaron muestra de los resultados de los estudiantes del curso de Cálculo integral de los estudiantes de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena, en la Facultad de Ingeniería; durante 2 ciclos o periodos académicos; es importante anotar que fue el mismo docente quien orientó el curso durante los 2 ciclos de la muestra.

Esta investigación se realiza desarrolla en 3 momentos así; momento 1. Los resultados de los estudiantes fueron medidos mediante rúbricas diseñadas por un grupo de docentes del programa, posteriormente recopilados y documentados en Excel. El momento 2. Se hace cuando son incorporados los resultados documentados por el docente son ingresados al software Evaluapp y luego, y con los resultados arrojados por la herramienta modela los datos y además hace uso de la IA para generar análisis de resultados y recomendaciones de mejoras, y finalmente, para el momento 3. Se comparan los resultados de Evaluapp y los análisis documentados por los docentes.

Resultados

Momento 1:

El docente de Cálculo integral del programa de Ingeniería Pesquera realizó las correspondientes evaluaciones en el periodo 2023-II, a 14 estudiantes que se encuentran matriculados en dicha asignatura, y 17 estudiantes en el periodo 2024-I; para ello hizo uso de la rúbrica construida por los docentes del programa que orientan la asignatura de cálculo integral y con el apoyo y acompañamiento del coordinador del área de Matemáticas de la Facultad de Ingeniería. La Figura 1. Muestra la rúbrica usada para la valoración durante los 2 periodos de medición.

A	B	C	D	E	F
FACULTAD DE INGENIERÍA					
PROGRAMA DE INGENIERÍA PESQUERA					
RÚBRICA PARA LOS INDICADORES DE RENDIMIENTO DE LOS RESULTADOS DE LOS ESTUDIANTES					
RA1: Habilidad para identificar, formular y resolver problemas de ingeniería complejos mediante la aplicación de principios de ingeniería, ciencias y matemáticas.		VALORACIÓN CUALITATIVA			
		NO CUMPLIMIENTO	BÁSICO	SATISFACTORIO	DESTACADO
INDICADOR DE DESEMPEÑO		0% - 59%	60% - 69%	70% - 89%	90% - 100%
ID - 11	Identifica un problema complejo de ingeniería.	El estudiante no es capaz de identificar las variables de un problema complejo de ingeniería.	El estudiante es capaz de analizar variables para la identificación de un problema complejo de ingeniería.	El estudiante analiza variables y selecciona los principios, teorías y prácticas relevantes para identificar un problema complejo de ingeniería.	El estudiante cuestiona y acompaña con teorías, prácticas e información relevante y documentación seleccionada, la identificación y definición del problema complejo de ingeniería.
ID - 12	Formula un problema complejo de ingeniería.	El estudiante no es capaz de formular un problema complejo de ingeniería, ni relaciona preconcepciones al listar las alternativas de solución.	El estudiante es capaz de usar conocimiento e información para la formulación de un problema complejo de ingeniería.	El estudiante formula un problema complejo de ingeniería y escribe recomendaciones de solución.	El estudiante cuestiona la formulación y acompaña con teorías, prácticas e información relevante y documentación seleccionada las alternativas de solución.
ID - 13	Logra una solución del problema usando principios de ingeniería, ciencias y matemáticas	El estudiante no aplica principios de ingeniería, ciencias y matemáticas para lograr la solución de un problema.	El estudiante logra una solución al problema mediante la aplicación de una teorías, una fórmula, ecuación o algoritmo, por analogía.	Es estudiante logra resultados válidos en la solución del problema basados en términos matemáticos, físicos, algorítmicos, e ingenieriles.	El estudiante defiende, respalda y cuestiona los resultados de la solución del problema en relación con un modelo matemático físico o algorítmico

Figura 1. Rúbrica para los indicadores de rendimiento de los resultados de los estudiantes (Elaborado por el programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena).

Los resultados fueron almacenados en una hoja de Excel, para tener una forma estandarizada y así facilitar al docente la documentación del proceso. Este formato fue diligenciado por el docente durante cada periodo académico, es decir, una hoja de Excel para el periodo 2023-II y otra hoja para el periodo 2024-I. la Figura 2 muestra los resultados del periodo 2023- II y las Figura 3 los resultados del periodo 2024-I. así:

Student Outcome		S01	An ability to identify, formulate, and solve complex engineering problems by applying principles of engineering, science, and mathematics						
Performance Indicators (PI)		PI1	Identifying a complex engineering problem						
		PI2	Formulating a complex engineering problem						
		PI3	Achieving a solution to a complex engineering problem						
N	Student Name	% Compliance PI1	PI1 Level	% Compliance PI2	PI2 Level	% Compliance PI3	PI3 Level	% SO Compliance	SO Level Compliance
1	ALCENDRA GARZAO JHON ALEXANDER	17%	Non-Compliance	50%	Non-Compliance	38%	Non-Compliance	35%	Non-Compliance
2	BARBOSA EINER	67%	Basic	100%	Outstanding	100%	Outstanding	90%	Outstanding
3	CARREÑO LOZANO SERGIO JOSE	50%	Non-Compliance	92%	Outstanding	100%	Outstanding	83%	Satisfactory
4	CHARRIS MAJARRRES INGRIS POALA	17%	Non-Compliance	92%	Outstanding	100%	Outstanding	75%	Satisfactory
5	COSTA DE LEÓN LUIS FELIPE	83%	Satisfactory	100%	Outstanding	75%	Satisfactory	85%	Satisfactory
6	FIGUEROA ORTIZ HAROLD JOSUE	0%	Non-Compliance	93%	Outstanding	25%	Non-Compliance	38%	Non-Compliance
7	GULLO VENERA JOSE DANIEL	50%	Non-Compliance	50%	Non-Compliance	75%	Satisfactory	60%	Basic
8	OROZCO CARBONÓ JOEL DE JESÚS	50%	Non-Compliance	67%	Basic	13%	Non-Compliance	40%	Non-Compliance
9	ORTEGA OLIVERO MARCELA CAROLINA	17%	Non-Compliance	50%	Non-Compliance	75%	Satisfactory	50%	Non-Compliance
10	PALMERA OROZCO DANIEL ENRIQUE	50%	Non-Compliance	50%	Non-Compliance	63%	Basic	55%	Non-Compliance
11	PEDROZA RAMÍREZ DARIO JOSÉ	17%	Non-Compliance	17%	Non-Compliance	25%	Non-Compliance	20%	Non-Compliance
12	RAMÍREZ ANGLIO DIEGO ANDRÉS	67%	Basic	83%	Satisfactory	100%	Outstanding	83%	Satisfactory
13	SUÁREZ CORDOBA OMAR JOSÉ	83%	Satisfactory	67%	Basic	50%	Non-Compliance	65%	Basic
14	TAPIAS LÓPEZ JUAN PABLO	83%	Satisfactory	100%	Outstanding	100%	Outstanding	95%	Outstanding

Student Outcome		S01	An ability to identify, formulate, and solve complex engineering problems by applying principles of engineering, science, and mathematics						
Performance Indicators (PI)		PI1	Identifying a complex engineering problem						
		PI2	Formulating a complex engineering problem						
		PI3	Achieving a solution to the problem using engineering, science, and maths principles						
N	Student Name	% Compliance PI1	PI1 Level	% Compliance PI2	PI2 Level	% Compliance PI3	PI3 Level	% SO Compliance	SO Level Compliance
1	CAMELO PEREZ XIMENA JULIETH	50%	Non-Compliance	0%	Non-Compliance	100%	Outstanding	60%	Basic
2	DIAZ TORRES EMERSON DANIEL	100%	Outstanding	67%	Basic	100%	Outstanding	90%	Outstanding
3	CANTILLO REVOLLEDO KEVIN JOSE	100%	Outstanding	67%	Basic	100%	Outstanding	90%	Outstanding
4	GARCA MOZO JAMIE JESUS	50%	Non-Compliance	33%	Non-Compliance	100%	Outstanding	70%	Satisfactory
5	GUERRERO FORTAL PEZ JUAN PABLO	75%	Satisfactory	50%	Non-Compliance	100%	Outstanding	80%	Satisfactory
6	OLIVERA PERERA MANUEL DE JESUS	25%	Non-Compliance	100%	Outstanding	100%	Outstanding	85%	Satisfactory
7	JEREZ FONTALVO ANDRES FELIPE	25%	Non-Compliance	17%	Non-Compliance	100%	Outstanding	60%	Basic
8	MERA MERA JUAN CARLOS	100%	Outstanding	17%	Non-Compliance	25%	Non-Compliance	35%	Non-Compliance
9	ORTIZ ESCOBAR DEMER DE JESUS	50%	Non-Compliance	17%	Non-Compliance	100%	Outstanding	65%	Basic
10	DREDO ESCUELA LAURA SOFIA	25%	Non-Compliance	33%	Non-Compliance	50%	Non-Compliance	40%	Non-Compliance
11	PEROTERO PALMERA JUAN MARCOS	100%	Outstanding	100%	Outstanding	100%	Outstanding	100%	Outstanding
12	QUINTERO HANRIO MAYULU	25%	Non-Compliance	17%	Non-Compliance	100%	Outstanding	60%	Basic
13	RIVERA MEDVILL NICOLL MICHELL	100%	Outstanding	33%	Non-Compliance	100%	Outstanding	80%	Satisfactory
14	RODRIGUEZ GARAY DIEGO ANDRES	100%	Outstanding	67%	Basic	100%	Outstanding	90%	Outstanding
15	ROMERO SOLIS JUAN FELIPE	25%	Non-Compliance	50%	Non-Compliance	10%	Non-Compliance	25%	Non-Compliance
16	SILVA CHAHUJA BETSY LLIANA	25%	Non-Compliance	33%	Non-Compliance	10%	Non-Compliance	20%	Non-Compliance
17	VEGA PACHECO GARCIA MARCELA	25%	Non-Compliance	17%	Non-Compliance	100%	Outstanding	60%	Basic

Figura 2. Resultados de los estudiantes en el periodo 2023- II y 2024-1 (Elaborado por el programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena).

En cada medición los docentes, documentan lo sucedido en cada periodo y almacenados para su posterior revisión así:

OBSERVATIONS	
Implemented actions:	Se realizaron talleres, ejercicios individuales y grupales donde se describieron y explicaron cómo se encuentran las áreas bajo una curva, aplicando técnicas de integración en integrales definidas, haciendo uso del teorema fundamental del cálculo.
Obtained results:	Los estudiantes presentaron dificultades para describir y explicar cómo determinar el área bajo una curva, mientras que algunos mostraron un buen dominio de las técnicas de integración. Además, pudieron proponer una solución al problema a pesar de no considerar principios básicos de matemáticas. Respondieron con asertividad en los talleres grupales e individuales.
Recommended improvement actions:	el próximo semestre se incorporan herramientas tecnológicas como el graficador DESMOS, en el desarrollo del tema de área bajo la curva, con el fin de fortalecer la capacidad de describir los procedimientos para el uso de intervalos.

Figura 3. Observaciones del proceso de medición para el periodo 2023- II (Elaborado por el programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena).

OBSERVATIONS		
Implemented actions:	Obtained results:	Improvement actions:
Se realizaron talleres, ejercicios de forma individual y grupal donde ellos describieron y explicaron cómo se halla áreas bajo una curva haciendo uso del graficador DESMOS para que pudieran comprender con mejor facilidad los intervalos de integración de las diferentes áreas bajo una curva, aplicando técnicas de integración en integrales definidas, haciendo uso del teorema fundamental del cálculo.	Los estudiantes mostraron una mejoría en la dificultad para describir y explicar la forma de determinar el área bajo una curva mediante el uso del graficador DESMOS, el cual les permitió obtener resultados relevantes en la aplicación de resolución de problemas, haciendo buen manejo de las técnicas de integración. Aunque en ocasiones le falta mayor concentración en la realización de la aplicación de las operaciones básicas para obtener los resultados correctos y pudieron plantear una solución al problema a pesar de no tener en cuenta principios básicos de matemática. Además respondieron de manera correcta en los momentos de realización de talleres grupales e individuales. Se evidencian falencias en la aplicación de las operaciones básicas propias del área de álgebra lineal.	Se continuarán realizando actividades por medio de graficadores (DESMOS y otros). Además, se implementarán problemas de aplicación relacionados a la ingeniería pesquera para acercar a los estudiantes a los conocimientos básicos de matemáticas en el quehacer de la profesión

Figura 4. Observaciones del proceso de medición para el periodo 2024- I (Elaborado por el programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena).

Momento 2:

El momento 2. Se ingresan los resultados documentados por el docente al software Evaluapp así:

La Figura 5. Muestra una vista de la herramienta Evaluapp, del ingreso de los indicadores de valoración del resultado de aprendizajes provistos para el curso de Cálculo integral, en el programa de Ingeniería Pesquera.

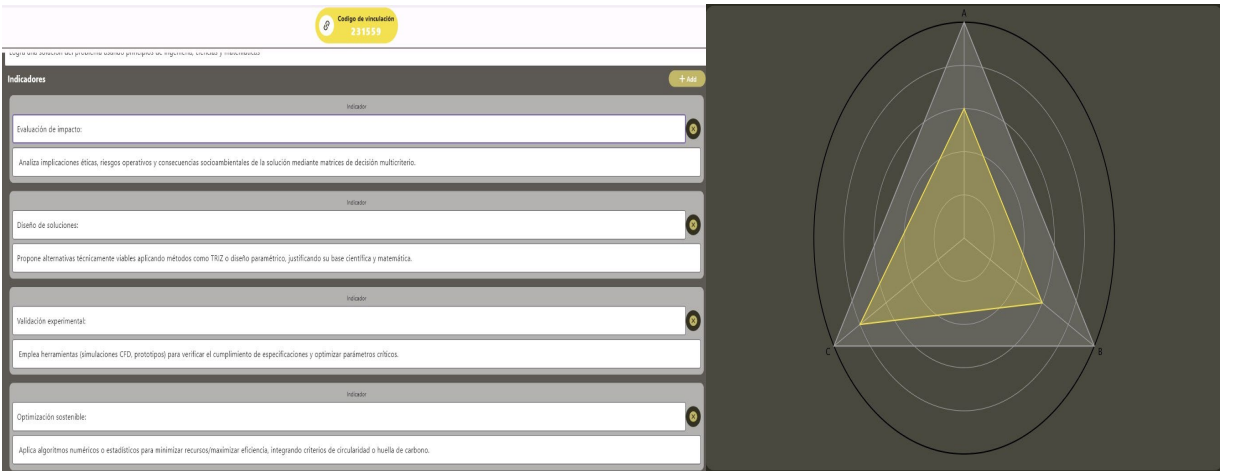


Figura 5. Vista de Evaluapp. Elaboración Propia y muestra grafica de la evaluación.

La Figura 5. Muestra una vista de la herramienta Evaluapp, después del ingreso de los indicadores de valoración del resultado de aprendizajes provistos para el curso de Cálculo

integral, en el programa de Ingeniería Pesquera; la herramienta con ayuda de modelación matemática genera una gráfica que, lo cual permite una visualización amigable de la medición de los resultados obtenidos.

También en este momento se generan los resultados arrojados por la herramienta modela los datos y con ayuda de IA que tiene incorporada la herramienta Evaluapp, se genera un análisis de resultados y proporciona unas recomendaciones de mejoras, para ser analizadas en el momento 3. La Figura 6. muestra una vista del análisis y recomendaciones generadas por la IA en Evaluapp

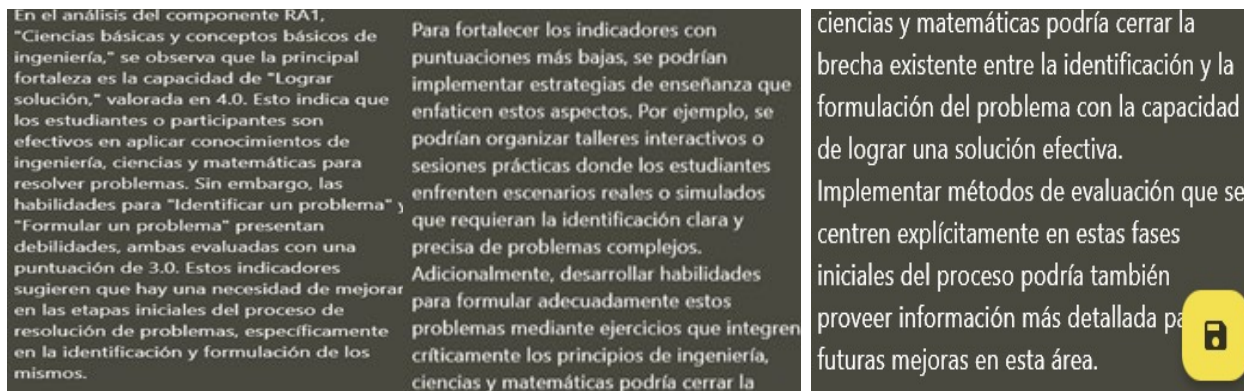


Figura 6. Vista del análisis y recomendaciones generadas por la IA en Evaluapp, Elaboración Propia

Momento 3:

En este momento se comparan los resultados y se encuentra que existe una estrecha relación entre lo analizados por los docentes y los resultados arrojados por Evaluapp, es decir, si se encontraron coincidencias, lo cual, ha favorecido y permitido documentar de manera más ágil los procesos de mejora continua para el siguiente periodo de medición. En este caso particular, el uso de herramientas incorporar herramientas tecnológicas interactivas como el software DESMOS, fue una de las coincidencias encontradas entre la herramienta tecnológica y el análisis por parte de los docentes del área de Matemáticas del programa de Ingeniería Pesquera.

Conclusiones

La presente investigación, ha permitido llegar a las siguientes conclusiones significativas sobre la mejora de los procesos de enseñanza y aprendizaje del cálculo integral en el programa de Ingeniería Pesquera de la Universidad del Magdalena:

Los resultados de los periodos 2023-II y 2024-I, evaluados mediante rúbricas, confirmaron la importancia de desafiar a los estudiantes con problemas contextualizados y reales de ingeniería. Aunque inicialmente mostraron dificultades en la identificación y formulación de problemas complejos (indicadores D-11 y D-12), la participación en talleres y ejercicios prácticos, como el cálculo de áreas bajo la curva, mejoró su comprensión del cálculo integral como herramienta para soluciones eficientes en ingeniería. Este enfoque pedagógico activo es

crucial para que los estudiantes superen la aplicación mecánica y valoren la utilidad práctica del conocimiento matemático en su disciplina.

Como número dos, el proceso de evaluación formativa se vio notablemente favorecido por el uso sistemático de rúbricas e indicadores de logro. La implementación de una rúbrica construida colaborativamente por los docentes del programa permitió una valoración cualitativa estandarizada del rendimiento de los estudiantes en la habilidad de identificar, formular y resolver problemas complejos de ingeniería. La documentación de los resultados en hojas de cálculo Excel facilitó un seguimiento continuo y sistemático, que, además de generar evidencia de los procesos de evaluación, fue una oportunidad para un mejor desarrollo del ejercicio docente. La capacidad de estar a la mira en la evolución del desempeño de los estudiantes en indicadores específicos demostró ser una herramienta con potencial para diagnosticar áreas de mejora y ajustar las estrategias de enseñanza en tiempo real.

Finalmente, la integración de la modelación matemática y la Inteligencia Artificial (IA) a través de la herramienta Evaluapp se consolidó como una dupla indispensable para apoyar los procesos de mejora continua. Evaluapp no solo permitió la visualización amigable de los resultados de aprendizaje obtenidos de las rúbricas, sino que, mediante su modelación matemática y el uso de IA, generó análisis particulares y recomendaciones específicas para fortalecer los indicadores con puntuaciones más bajas. La estrecha relación y coincidencia entre los análisis generados por Evaluapp y las observaciones cualitativas de los docentes aprueban el potencial de estas tecnologías para innovar la práctica docente en ciencias básicas.

Referencias y bibliografía

- Barrantes, H., Meta-Matemáticas, U. C. R., & de Ciencias Exactas, E. (2006). *Resolución de problemas. El trabajo de Allan*.
- Benítez, J., Pérez, M., & Torres, L. (2020). Innovación educativa en ingeniería: Estrategias y herramientas para el aprendizaje matemático. *Revista de Educación y Tecnología*, 15(2), 45-58.
- bin Mohamed, M. Z., Hidayat, R., binti Suhaizi, N. N., bin Mahmud, M. K. H., & binti Baharuddin, S. N. (2022). Artificial intelligence in mathematics education: A systematic literature review. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 17(3), em0694.
- Davis, R., & Clark, T. (2018). Dynamic mathematical models for assessing competency development in engineering education. *Journal of Engineering Education Transformations*, 32(1), 1-10.
- García-Peñalvo, F. J. (2021). Inteligencia artificial y educación: Una revisión sistemática sobre su impacto en el aprendizaje. *Journal of Learning Analytics*, 8(1), 23-41.
- Hjelte, A., Schindler, M., & Nilsson, P. (2020). Kinds of mathematical reasoning addressed in empirical research in mathematics education: A systematic review. *Education Sciences*, 10(10), 289.
- Johnson, L., & Miller, S. (2022). Leveraging artificial intelligence for personalized learning analytics in higher education. *Computers & Education: Artificial Intelligence*, 3, 100078.
- Kaushik, R., Parmar, M., & Jhamb, S. (2021, diciembre). Roles and research trends of artificial intelligence in mathematics education. En *2021 2nd International Conference on Computational Methods in Science & Technology (ICCMST)* (pp. 202-205). IEEE.
- Kim, S., & Park, J. (2023). Mathematical models for analyzing student performance and predicting success in engineering programs. *IEEE Transactions on Education*, 66(1), 100-115.
- Parra Castrillón, E. (2010). Las ciencias básicas en ingeniería de sistemas: Justificaciones gnoseológicas desde los objetos de estudio y de conocimiento. *Revista de la Asociación Colombiana de Facultades de Ingeniería*, 10, 74-84. <https://www.acofi.edu.co>
- Paz Penagos, H. (2013). *Resolución de problemas como estrategia de enseñanza para la formación integral de ingenieros*. Escuela Colombiana de Ingeniería Julio Garavito.

- Peña-Páez, L. M., & Morales-García, J. F. (2016). La modelación matemática como estrategia de enseñanza-aprendizaje: El caso del área bajo la curva. Facultad de Ciencias Básicas e Ingeniería, Universidad de San Buenaventura.
- Rojas, P., Martínez, C., & Gutiérrez, D. (2019). Dificultades en la enseñanza del cálculo en ingeniería: Una perspectiva desde la educación superior en Colombia. *Revista Colombiana de Matemática Educativa*, 12(1), 30-48.
- Romero, C., & Ventura, S. (2022). *Educational data mining and artificial intelligence in higher education*. Springer.
- Schoenfeld, A. H. (2014). *Mathematical problem solving*. Elsevier.
- Smith, J. R., & Chen, L. (2021). Integrating calculus concepts with engineering problem-solving: A project-based learning approach. *Journal of Engineering Education*, 110(3), 450-465.
- Vázquez Borges, E., Rodríguez Vargas, H., Marín Quen, J., & Pool Rodríguez, I. (2018). Relaciones de las ciencias básicas. Tema de la ONU. *Ingeniería*, 22(2), 52-61. Universidad Autónoma de Yucatán.
- Wang, S., Christensen, C., Cui, W., Tong, R., Yarnall, L., Shear, L., & Feng, M. (2023). When adaptive learning is effective learning: Comparison of an adaptive learning system to teacher-led instruction. *Interactive Learning Environments*, 31(2), 793-803.



Interfaces tangibles y juegos serios para fomentar el razonamiento lógico-matemático y el pensamiento computacional en el estudiantado de Educación Superior

Juan Carlos **Sandí-Delgado**

Escuela de Informática, Sede del Atlántico - Universidad de Costa Rica
Costa Rica

juan.sandidelgado@ucr.ac.cr

Mainor Alberto **Cruz-Alvarado**

Escuela de Informática, Sede del Sur - Universidad de Costa Rica
Costa Rica

mainor.cruz@ucr.ac.cr

Mag. Roberto **Mesén-Hidalgo**

Escuela de Lenguas Modernas, Sede del Caribe - Universidad de Costa Rica
Costa Rica

roberto.mesen@ucr.ac.cr

Resumen

Este estudio analiza el impacto de los juegos serios y las interfaces tangibles en el desarrollo del razonamiento lógico-matemático y el pensamiento computacional en un contexto de estudiantes de primer año de educación superior. La investigación se centró en la implementación de objetos activos y distintos tipos de retroalimentación, el visual, auditivo y táctil, en cursos introductorios de la carrera Informática Empresarial en el Recinto de Guápiles de la Universidad de Costa Rica. Se aplicaron instrumentos de evaluación para medir la efectividad de estas herramientas en la adquisición de competencias clave. Los principales resultados revelan que la retroalimentación visual es la más efectiva para mejorar el aprendizaje, mientras que la retroalimentación auditiva ha brindado una mejor experiencia educativa. La retroalimentación táctil ha forjado interés, pero presentó dificultades en su interpretación. No obstante, este trabajo proporciona una base sólida para continuar con futuras investigaciones y optimizar las interfaces tangibles en entornos educativos.

Palabras clave: Costa Rica; Educación Superior; Juegos Serios; Interfaces Tangibles; Pensamiento Computacional; Razonamiento Lógico-Matemático.

Introducción

El desarrollo del pensamiento computacional y el razonamiento lógico-matemático es un pilar fundamental en la transformación de profesionales, especialmente en el ámbito de las tecnologías de la información. En este contexto, los juegos serios y las interfaces tangibles se presentan como herramientas pedagógicas innovadoras que fomentan un aprendizaje interactivo y dinámico (Gubaro et al., 2024; Sandi-Delgado & Bazán, 2024). Sin embargo, aún persisten vacíos significativos en la investigación a nivel nacional sobre la efectividad de la implementación de la retroalimentación en el proceso de adquisición de competencias por parte del estudiantado universitario. Este trabajo tiene como objetivo evaluar el impacto de los objetos activos y la retroalimentación interactiva en la motivación y el rendimiento académico del estudiantado de primer ingreso en la carrera de Informática Empresarial de la Universidad de Costa Rica. Asimismo, este análisis se enfoca en analizar las fortalezas y limitaciones de estas herramientas con el propósito de optimizar su integración en los entornos educativos, maximizando así su potencial para mejorar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

Antecedentes

En la actualidad, la Interacción Persona-Ordenador (IPO), ha sido un área destacada en el ámbito de las Ciencias de la Computación. En los últimos años, se ha incrementado la transición del modelo tradicional de Interfaz Gráfica de Usuario (GUI), vinculante significativamente a las computadoras de escritorio, hacia otros modelos novedosos de interacción. Por ejemplo, el caso de las Interfaces de Usuario Tangible (TUIs, Tangible User Interface), la cual tiene como propósito generar en la persona una experiencia de interacción más natural e intuitiva (Sanz et al., 2019).

Las *tabletops* se consideran superficies interactivas, digitales, horizontales y aumentadas computacionalmente. Su tamaño equivale al de una mesa. Estas superficies proporcionan un espacio compartido y permiten a los usuarios participar en diversas tareas de forma individual y grupal. Se utilizan para generar, manipular y mostrar objetos que transmiten información, es decir, se enfoca en elaboración e interacción en lugar de la simple difusión. De esta forma los *tabletops* son el medio para el uso de objetos activos tangibles. La esencia de las *tabletops* radica en la apropiada combinación del uso del entorno físico junto con el virtual, donde se potencian actividades colaborativas, construcción de conocimiento, el aprendizaje basado en la investigación y la resolución de problemas (Cruz et al., 2019). Hacer una combinación de *tabletops* y objetos tangibles puede mejorar la presentación y manipulación de datos y ofrece nuevas experiencias de juego y aprendizaje (Valdés et al., 2014).

La retroalimentación es un componente crítico en los procesos de enseñanza y aprendizaje, y su efectividad aumenta cuando se adapta a las necesidades del estudiantado (Sanz et al., 2019). Existen diferentes tipos de retroalimentación, como sobre la tarea, de procesamiento de tareas, de autorregulación y afectivo (Van Seters et al., 2012). En las actividades educativas basadas en TUIs, la retroalimentación puede ser mejorado por medio de canales sensoriales junto con actuadores como luces y vibradores (Cruz, Sanz, & Baldassarri, 2019).

A pesar de estos avances, no se han identificado, en Costa Rica, estudios que midan el impacto de integrar diferentes tipos de la retroalimentación en objetos activos dentro de actividades educativas. Este proyecto busca llenar ese vacío empleando juegos serios como herramientas pedagógicas. Los juegos serios, que están diseñados para fines educativos además del entretenimiento, pueden fomentar la adquisición de competencias tecnológicas y el pensamiento crítico (Michael & Chen, 2005).

En la Universidad Nacional de La Plata (UNLP) en Argentina, se han utilizado juegos como "El Conquistador" y "AstroCódigo" para integrar temas educativos y desarrollar competencias digitales (Sanz et al., 2019). En España, el grupo AffectiveLab de la Universidad de Zaragoza ha diseñado el tabletop NIKVision, que se utiliza en aplicaciones educativas para niños y niñas con problemas cognitivos (Marco et al., 2013).

Este proyecto de investigación se enfocará en el uso de juegos serios basados en TUIs con objetos activos. Analizará el impacto de la retroalimentación en estos objetos para mejorar los procesos cognitivos y la adquisición de competencias del estudiantado de primer ingreso de la carrera de Informática Empresarial en la Universidad de Costa Rica.

Metodología

La investigación se desarrolló utilizando un enfoque cualitativo, en dos fases a lo largo de dos años. La población en estudio fue el estudiantado de primer año de la carrera Informática Empresarial. Se incluyeron cursos como Introducción a la computación e informática y Lógica para informáticos. Es importante indicar que el curso Lógica para Informáticos tiene componente matemático. Además, que es un curso antecesor de Estructuras de Matemáticas Discretas, Cálculo Diferencial e Integral, Álgebra lineal y Métodos Numéricos. Por lo tanto, es importancia trabajar desde las bases.

Durante la primera fase se realizó una revisión sistemática de la literatura. También se diseñaron los objetos activos en 3D con equipo tecnológico de impresión con material termoplástico y se realizaron pruebas de funcionalidad en entornos educativos.

La segunda fase consistió en la implementación de actividades prácticas en un estudio de caso con estudiantes de los cursos mencionados en párrafos anteriores. Se utilizaron cuestionarios tipo Likert para evaluar tanto la aceptación como la efectividad de los objetos activos y los distintos tipos de retroalimentación en el aprendizaje. Las actividades se centraron en la resolución de problemas mediante el juego serio AstroCódigo, y buscaron medir el impacto de los diferentes tipos de retroalimentación en el desarrollo de competencias.

Resultados obtenidos

Este apartado reúne los principales resultados obtenidos y se compone de dos subapartados clasificados en efectividad y la aceptación de los objetos activos. La evaluación fue realizada a 30 participantes matriculados en los cursos Lógica para Informáticos e Introducción a la Computación e Informática.

Efectividad de los objetos activos

En la Tabla 1, se observa que los promedios de las respuestas para la mayoría de las afirmaciones son bastante positivos. Esto indica una percepción favorable por parte del estudiantado hacia estos objetos.

La Tabla 1

Presenta los resultados de la Efectividad de los objetos activos

Afirmaciones sobre la efectividad de los objetos activos	Promedio	Desviación estándar
1. La claridad en el propósito de los objetos fue adecuada.	4.2	0.8
2. Los objetos facilitaron la realización de las tareas .	4.5	0.7
3. El uso de los objetos activos fueron útiles para alcanzar los objetivos de aprendizaje .	4.3	0.6
7. Experimenté dificultades al utilizar los objetos activos .	2.5	1.0
9. La interacción me motivó a participar más.	4.4	0.5

Específicamente, los resultados de la Tabla 1 indican que en cada afirmación se obtuvo:

- Claridad y utilidad de los objetos - En relación con la claridad en el propósito de los objetos activos se obtuvo un promedio de 4.2 con una desviación estándar de 0.8, lo que indica que el estudiantado percibe un propósito claro en el uso de estos recursos. Asimismo, la afirmación respecto a la utilidad para alcanzar los objetivos de aprendizaje (promedio 4.3, desviación estándar 0.6) refuerza esta percepción positiva. La coherencia en los valores altos y baja variabilidad sugiere un consenso entre las personas estudiantes sobre la efectividad de los objetos en estos aspectos.
- Facilidad para completar tareas y motivación - Con un promedio de 4.5 y desviación estándar de 0.7, el estudiantado indicó que los objetos activos facilitaron la realización de las tareas asignadas. Además, la motivación para participar (promedio 4.4, desviación estándar 0.5) refleja que la interacción con los objetos activos generó un mayor interés en la participación. Este hallazgo resulta relevante en entornos de aprendizaje donde la motivación sea crucial para el éxito del proceso formativo.
- Dificultades en el uso de los objetos activos - Aunque la mayoría de las afirmaciones reflejan una valoración positiva, la afirmación sobre las dificultades experimentadas al utilizar los objetos obtuvo un promedio de 2.5 y una desviación estándar de 1.0. Esto indica que, si bien algunas personas estudiantes encontraron desafíos, la alta variabilidad sugiere experiencias diversas. Esta disparidad podría deberse a factores individuales, como la familiaridad con la tecnología o el estilo de aprendizaje, lo cual sería valioso de explorar en estudios futuros.

Estos resultados podrían reflejar una aceptación generalizada de los objetos activos como herramientas útiles y motivadoras para el aprendizaje. Sin embargo, se recomienda considerar las dificultades experimentadas por algunos estudiantes para optimizar su implementación.

Aceptación de los objetos activos

En la Tabla 2, se observan respuestas que reflejan una alta satisfacción del estudiantado con respecto al diseño, la facilidad de uso e interacción que proporcionan estos objetos.

Tabla 2.

Resultados de la aceptación de los objetos activos

Afirmaciones sobre la aceptación de los objetos activos	Promedio	Desviación estándar
4. Me sentí satisfecho/a con los objetos activos utilizados, eran fáciles de utilizar .	4.3	0.6
5. Los objetos activos presentaron una interacción fácil y fluida .	4.4	0.4
6. El diseño de los objetos activos fue atractivo visualmente para las actividades desarrolladas.	4.5	0.5
8. Los objetos activos me motivaron a participar.	4.6	0.5
10. Me gustaría utilizar objetos activos similares en actividades educativas futuras .	4.5	0.6

Específicamente, los resultados de la Tabla 2 muestran que en cada afirmación se obtuvo:

- Satisfacción general y facilidad de uso – Se resalta una alta facilidad de uso, ya que se obtuvo un promedio de 4.3 y una desviación estándar de 0.6. Este valor indica que los objetos activos son percibidos como accesibles y convenientes, lo que podría fomentar su integración en futuras actividades educativas en el aprendizaje. La baja variabilidad en las respuestas es positiva en términos de la adopción de estos recursos.
- Interacción fluida y diseño atractivo - La afirmación sobre la facilidad y fluidez de la interacción, con un promedio de 4.4 y desviación estándar de 0.4, muestra que el estudiantado experimentó una interacción fácil de comprender o bien, un uso sencillo y comprensible. Además, el diseño visual de los objetos activos fue valorado con un promedio de 4.5 y una desviación estándar de 0.5, lo que indica que el atractivo visual contribuyó a la experiencia positiva de las personas estudiantes. Estos resultados son coherentes con la literatura que subraya la importancia de un diseño visual atractivo y una interfaz amigable para facilitar la aceptación y el uso efectivo de tecnologías educativas.
- Motivación y proyección hacia el futuro - La afirmación sobre la motivación inducida por los objetos activos (promedio de 4.6, desviación estándar de 0.5) refleja que estos objetos facilitaron la realización de tareas y fomentaron una participación activa, lo cual es de suma importancia para el aprendizaje significativo. Finalmente, el interés en utilizar objetos similares en el futuro (promedio de 4.5, desviación estándar de 0.6) sugiere que las personas estudiantes están abiertas a continuar interactuando con estos recursos. Este aspecto es relevante para los desarrolladores de contenidos educativos interactivos y las instituciones que buscan implementar herramientas innovadoras en sus prácticas pedagógicas.

Los resultados presentados en la Tabla 2 evidencian una alta aceptación de los objetos activos en términos de usabilidad, diseño y motivación. Estos hallazgos respaldan la continuidad y expansión del uso de objetos activos en entornos educativos, ya que facilitan la interacción. Además, promueven la participación sostenida en el aprendizaje.

Tipos de retroalimentación implementados

En relación con la retroalimentación visual, auditivo y táctil ha sido recibido con una variedad de niveles de aceptación entre el estudiantado. Esto permite evaluar la efectividad de cada tipo de retroalimentación para mejorar el compromiso y la comprensión de los contenidos en entornos educativos interactivos. Específicamente, se obtuvo en cada afirmación que:

- **Retroalimentación Visual** - La afirmación sobre la **claridad y utilidad** del feedback visual alcanzó un promedio de 4.6 con una desviación estándar de 0.4. Esto indica una aceptación alta y homogénea. Esto sugiere que la retroalimentación visual fue clara y efectiva para el entendimiento de las tareas, lo cual concuerda con la literatura mencionada en la justificación del proyecto en la cual se resalta la relevancia de los estímulos visuales en la retención de información.
- **Retroalimentación Auditivo** - Con un promedio de 4.3 y una desviación estándar de 0.6, la retroalimentación auditiva fue bien valorada por las personas estudiantes en cuanto a su **capacidad para mantener la atención**. Además, la variabilidad sugiere opiniones mixtas, posiblemente debido a factores como las preferencias de aprendizaje o la necesidad de ajustes en aspectos técnicos (por ejemplo, en cuanto a volumen o claridad). Este tipo de retroalimentación podría complementarse con otros estímulos para maximizar su efectividad en un público diverso.
- **Retroalimentación Táctil** - La retroalimentación táctil obtuvo un promedio más moderado de 3.9 con una desviación estándar de 0.8, lo que indica una **valoración menos uniforme y algo más baja** que los otros tipos de retroalimentación. Aunque generó curiosidad entre algunos estudiantes, la variabilidad sugiere que otros encontraron dificultades en su interpretación. Para mejorar la aceptación, sería útil optimizar la intensidad y claridad de las señales táctiles, de modo que ofrezcan una experiencia más intuitiva y accesible.
- **Motivación e Interés Aumentados por la retroalimentación** - La afirmación "me sentí más **motivado/a** con la retroalimentación" obtuvo un promedio de 4.5 (desviación estándar de 0.5), mientras que la afirmación sobre el **incremento en el interés** alcanzó un promedio de 4.4 (desviación estándar de 0.6). Esto demuestra que la retroalimentación, en general, tuvo un impacto positivo en la motivación y el interés del estudiantado, resaltando el papel de la retroalimentación bien diseñada en el fortalecimiento de la participación y disposición para el aprendizaje activo.

Los resultados de la **Tabla 3** indican que **la retroalimentación visual** es la más efectiva y ampliamente aceptada, seguido por la **auditiva**. En cambio, que la retroalimentación **táctil** requiere ajustes para mejorar su funcionalidad y accesibilidad. Por tanto, la retroalimentación visual y auditiva podrían implementarse como herramientas clave para fomentar el aprendizaje interactivo, con potencial para incorporar la retroalimentación táctil de manera optimizada en futuros diseños de objetos activos.

El estudiantado mostró una clara preferencia por la retroalimentación visual, seguida de la auditiva y, en menor medida, la táctil. Estos resultados reflejan tendencias en la elección de modalidades de retroalimentación en entornos educativos interactivos, destacando la relevancia de la modalidad visual en el proceso de aprendizaje. Es decir, en cada afirmación se obtuvo:

- **Preferencia por la Retroalimentación Visual** - El mayor número de estudiantes (20) seleccionó la retroalimentación visual como su favorita. Esta preferencia puede deberse a la claridad y accesibilidad de la retroalimentación visual, que facilita la comprensión rápida de la información y apoya el aprendizaje visual, una modalidad predominante en contextos educativos.
- **Retroalimentación Auditiva** - Ocho (8) estudiantes prefirieron la retroalimentación auditiva. Aunque esta preferencia es menor en comparación con la retroalimentación visual, esta elección sugiere que la retroalimentación auditiva es efectiva para captar la atención y puede ser valioso en combinación con otros tipos de retroalimentación, especialmente para estudiantes con estilos de aprendizaje auditivo.
- **Retroalimentación Táctil** - La retroalimentación táctil obtuvo solo dos (2) preferencias, lo que indica una menor aceptación de la modalidad. Esta baja aceptación podría estar relacionada con la novedad de la retroalimentación táctil en contextos educativos o con dificultades en su interpretación, como se mencionó anteriormente.

Por último, se evidencia una preferencia marcada hacia **la retroalimentación visual**, lo que indica que esta modalidad debería priorizarse en el diseño de herramientas de retroalimentación en entornos educativos. La retroalimentación auditiva, aunque menos popular, puede servir como complemento. Por otro lado, que la retroalimentación táctil, si bien tiene potencial, requiere ajustes para aumentar su efectividad y aceptación.

Apreciaciones y Mejoras Necesarias

En relación con los aspectos específicos valorados por las personas participantes en cada tipo de feedback (visual, auditivo y táctil), así como las áreas de mejora. Esto permitiría optimizar cada modalidad de retroalimentación y mejorar la experiencia de aprendizaje.

A. Retroalimentación Visual

- ✓ **Aspectos Apreciados** – Las personas participantes destacaron la **claridad y el soporte** de la retroalimentación visual en la realización de las tareas, lo cual refuerza su función como una herramienta accesible y directa en el proceso formativo.
- ✓ **Mejoras Necesarias** - Se recomienda **variar la presentación** de la retroalimentación visual para hacerlo más dinámico. Esto podría implicar el uso de diferentes estilos visuales, colores y formatos que mantengan el interés del estudiantado y eviten la monotonía.

B. Retroalimentación Auditiva

- ✓ **Aspectos Apreciados** – La retroalimentación auditiva fue valorado por su eficacia en captar la atención de las personas estudiantes. Esto coincide con la tendencia de que los estímulos auditivos pueden ser efectivos para dirigir la atención a información relevante.
- ✓ **Mejoras Necesarias** - Ajustar el volumen de la realimentación auditiva se identificó como una necesidad para garantizar una claridad óptima. Esto podría implicar personalizar el nivel de volumen según el entorno de aprendizaje del estudiantado para mejorar su experiencia auditiva.

C. Retroalimentación Táctil

- ✓ **Aspectos Apreciados** - Aunque fue menos preferido, la retroalimentación táctil **generó curiosidad** entre algunas personas estudiantes, lo que indica un potencial para despertar interés y explorar nuevas formas de interacción en entornos de aprendizaje.
- ✓ **Mejoras Necesarias** - Se recomienda optimizar la **intensidad y la diferenciación de las señales táctiles**, para que sean más intuitivas y fáciles de interpretar. Esto implica el uso de vibraciones de diferentes intensidades o patrones, que ayuden a comunicar información de forma más clara.

Por tanto, se destacan los elementos efectivos de cada tipo de feedback, así como las áreas específicas que requieren optimización. Estos ajustes pueden contribuir a que el estudiantado aprovecha mejor las distintas modalidades de retroalimentación y refuerzan su participación y comprensión en sus actividades educativas.

Conclusiones

El uso de interfaces tangibles y juegos serios en la enseñanza de informática y matemáticas puede potenciar el aprendizaje significativo. Por lo tanto, podría significar una base para realizar futuras investigaciones sobre la efectividad de los objetos activos y su impacto en diferentes contextos educativos, destacando la importancia de ajustar el diseño y soporte de acuerdo con las necesidades del estudiantado.

Existe una leve curva de aprendizaje detectada, dado que el estudiantado sugiere un proceso introductorio para conceptualizar y comprender el alcance de los objetos activos y los tipos de la retroalimentación. Es importante dar prioridad a la personalización de los objetos activos de acuerdo con las necesidades del estudiantado, esto con el fin de mejorar la usabilidad y accesibilidad. Para el juego serio AstroCódigo es necesario incorporar una diferencia significativa en los diferentes tipos de retroalimentación que provee, como lo puede ser la intensidad a la retroalimentación táctil y mejor claridad en la retroalimentación auditiva.

Referencias

- Gubaro, M., Sanz, C., Aires, B., & Aires, B. (2024). Juegos Serios Educativos Digitales Orientados a la Enseñanza de la Matemática en Educación Secundaria. Estado del Arte. *XXX Congreso Argentino de Ciencias de La Computación (CACIC)*, 379–389. <https://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/176332>
- Cruz, M. A., Sanz, C. V., Baldassarri, S., & Artola, V. (2019). Diseño e implementación de juguetes interactivos para actividades educativas basadas en interacción tangible.
- Marco, J., Baldassarri, S., & Cerezo, E. (2013). NIKVision: Developing a Tangible Application for and with Children.
- Michael, D. R., & Chen, S. L. (2005). Serious games: Games that educate, train, and inform.
- Sandi-Delgado, J. C., & Bazán, P. A. (2024). INTEGRA+506: Una Metodología para el diseño y desarrollo de juegos serios. *XXIX Congreso Argentino de Ciencias de La Computación (CACIC)*, 730–743. <https://sedici.unlp.edu.ar/handle/10915/163107>
- Sanz, C., Cruz, M., Nordio, M., Artola, V., & Baldassarri, S. (2019). The Conqueror: An Educational Game Based on Tangible Interaction.
- Valdés, C., Eastman, D., Grote, C., Thatte, S., Shaer, O., Mazalek, A., Ullmer, B., & Konkel, M. (2014). Exploring the design space of gestural interaction with active tokens through user-defined gestures.
- Van Seters, J. R., Ossevoort, M. A., Tramper, J., & Goedhart, M. J. (2012). The influence of student characteristics on the use of adaptive e-learning material.



Invariantes Geométricos como uma possibilidade didática

Renan Severo **Ferreira**

Secretária de Educação do Rio Grande do Sul

Brasil

renansevero@hotmail.com

Carmen Vieira **Mathias**

Universidade Federal de Santa Maria

Brasil

carmen@ufsm.br

Resumo

Este trabalho constitui um relato de uma atividade realizada em com o objetivo de descrever algumas possibilidades didáticas para o uso dos invariantes geométricos com o auxílio do *software* GeoGebra. Tais possibilidades emergiram a partir da análise do conteúdo produzido por professores participantes de uma oficina realizada de forma remota. No presente trabalho, apresentamos atividades envolvendo invariantes geométricos, desenvolvidas por quatro professores, nas quais identificamos conteúdos e conceitos que podem ser abordados a partir desses invariantes, além de como sua utilização pode auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Palavras-chave: Tecnologias; Invariantes geométricos; Formação continuada

Definição e relevância do problema

Quando pensamos na palavra "invariante", nossa imaginação remete a algo que não muda. Se buscarmos o significado dessa expressão no dicionário, encontramos a seguinte definição: “Que não varia”; “em matemática, diz-se de uma grandeza, uma expressão, uma relação, uma propriedade etc., que se conserva inalterada para um grupo de transformações” (Ferreira, 1999, p. 805).

No contexto matemático, Libeskind et al. (2018) afirmam que:

[...] a invariância é um conceito-chave em matemática. Em qualquer teorema matemático, há algum aspecto de invariância – quando certas propriedades dos objetos mudam, outras podem permanecer invariantes. Os alunos nem sempre reconhecem propriedades invariáveis; portanto, é importante que os professores as apontem quando houver alguma propriedade invariante envolvida. (Libeskind et al., 2018, p. 107).

Além disso, “os invariantes estão muito presentes na matemática e na nossa vida diária, já que o ser humano busca se guiar através de padrões, sejam eles padrões de convivência social, padrões étnicos ou outros.” (Lopes, 2012, p. 1).

Na Matemática, e especialmente na geometria, existem inúmeros exemplos de invariantes. Um exemplo claro ocorre quando recortamos uma figura em vários pedaços: a soma das áreas desses pedaços permanece constante e é igual à área da figura original. O mesmo princípio pode ser observado quando um cubo é dividido em vários cubinhos ou quando utilizamos uma corda para formar diferentes figuras – neste caso, o perímetro das figuras é a invariante, pois mantém-se igual ao comprimento da corda (Lopes, 2012, p. 1).

Na Geometria, uma das formas de ilustrar os tipos de invariantes é por meio do uso de um *software* de matemática dinâmica, que permite a construção geométrica de figuras e o deslocamento de seus pontos. Quando esse procedimento é realizado corretamente, utilizando as ferramentas adequadas, percebe-se que determinadas propriedades permanecem inalteradas.

Neste trabalho, buscamos apresentar algumas possibilidades didáticas para o ensino dos invariantes geométricos com o auxílio do *software* GeoGebra. Essas possibilidades foram levantadas por professores durante uma oficina, na qual um dos módulos foi dedicado à exploração do conceito de invariantes geométricos por meio desse *software* de matemática dinâmica.

Referencial teórico

As ferramentas digitais são um recurso valioso para educadores; elas podem ser acessadas pela maioria das pessoas por meio de computadores e dispositivos móveis. Embora trazer esses recursos para o contexto escolar seja um desafio, vale destacar o quanto eles podem ajudar a desenvolver a aprendizagem. Gravina e Santarosa (1999) afirmaram que as ferramentas tecnológicas dão caracterizações dinâmicas aos materiais de aprendizagem. Isso estimula muito os processos cognitivos do aluno. Segundo Gainutdinova et al. (2020), é essencial disseminar métodos que se baseiem no ensino e na utilização de tecnologias, o que é muito produtivo em um espaço educacional, pois ajuda na produção de diversas formas de interação entre o aprendiz e docente. A utilização de softwares de matemática dinâmica pode auxiliar nesse processo, intensificando a imaginação, a manipulação de objetos e ajudando a compreender conceitos.

Gravina (1996) ainda destaca que um aspecto importante do pensamento matemático é a abstração da invariância, visando seu reconhecimento e entendimento, nada melhor do que a variação oferecida pelos softwares. Sobre isso, Machado, Bortolossi e Almeida Junior (2018) destacam a importância desses softwares do ponto de vista cognitivo, pois, com eles, é possível criar infinitos exemplos, o que favorece o aprendizado de conceitos por meio dos invariantes geométricos.

Um desses programas que auxiliam na visualização dos invariantes geométricos é o *software* de Matemática Dinâmica GeoGebra. Com ele, podemos construir figuras da mesma forma que no papel. A diferença é que podemos arrastá-las para qualquer direção, invertê-las e verificar suas congruências — tudo simultaneamente. Leung (2003) afirma que esse é um dos fatores mais significativos dos *softwares* de Matemática Dinâmica, tornando-os poderosos meios para a aquisição de conhecimento. Ao utilizar o recurso de arrasto, conseguimos perceber simultaneamente aspectos relevantes da Geometria, o que é essencial para a formulação de conjecturas matemáticas. O ato de arrastar permite movimentar as figuras e perceber que as propriedades dos entes geométricos construídos não se alteram, e isso pode ser feito de maneira fácil e ágil, facilitando a descoberta.

Para Baccaglini-Frank (2012), atividades que utilizam o arrasto possibilitam a exploração, o que é fundamental para a construção de conjecturas. Essas atividades auxiliam os alunos a mobilizarem seus conhecimentos prévios, contribuindo para o desenvolvimento do aprendizado e a evolução do pensamento matemático. Além disso, atividades que instigam a investigação e a descoberta dos invariantes são realizadas por meio de experiências visuais, facilitadas pela precisão dos *softwares*.

Leivas (2009, p. 22) conceitua a visualização como “um processo de formar imagens mentais, com a finalidade de construir e comunicar determinado conceito matemático, com vistas a auxiliar na resolução de problemas analíticos ou geométricos”. O autor postula que, na Matemática, a visualização não deve ser vista apenas como a representação de objetos, mas também como uma forma de expressar uma linguagem. Ela pode ser o principal modelo no processo de abstração e desempenha um papel significativo na construção do conhecimento matemático.

Conforme Santos (2014, p. 21), “uma das razões para se investir na implementação da visualização nas salas de aula está associada às habilidades mentais e visuais que os alunos desenvolvem e adquirem”. A autora também afirma que:

[...] imaginar, tocar e manipular são fatores que influenciam no desenvolvimento cognitivo dos estudantes, proporcionando estrutura para a compreensão de determinados conceitos. E quando o manipular não está ao alcance, a visualização pode conduzir a uma tentativa de dar concretude ao pensamento, construindo uma imagem mental, um significado ao significante. (Santos, 2014, p. 21).

Com o auxílio do *software*, podemos movimentar objetos geométricos e visualizar suas características. Isso também pode ser feito com ferramentas tradicionais, como régua e compasso, que auxiliam na visualização de diversas figuras geométricas. Esses softwares despertam a curiosidade de quem os utiliza. De acordo com Gravina (2001, p. 89), “os ambientes de Geometria Dinâmica também incentivam o espírito de investigação matemática: sua interface interativa, aberta à exploração e à experimentação, disponibiliza os experimentos de pensamento”.

Assim, percebe-se que os softwares de Matemática Dinâmica podem ser grandes aliados no desenvolvimento do conhecimento em Geometria. Como o próprio nome sugere, eles são dinâmicos, facilitando as construções geométricas e a visualização de conceitos.

Desenvolvimento da pesquisa

Este trabalho caracteriza-se como uma pesquisa aplicada, cujo objetivo é gerar conhecimentos voltados para a aplicação prática, contribuindo para a solução de problemas específicos (Gerhardt e Silveira, 2009, p. 35). Metodologicamente, trata-se de uma pesquisa qualitativa, pois foca em aspectos da realidade que não podem ser quantificados, priorizando a percepção e a argumentação das relações sociais (Gerhardt e Silveira, 2009).

A pesquisa envolveu quinze professores e acadêmicos de Matemática inscritos na oficina Experiências Matemáticas, conduzida de forma remota por meio do ambiente Moodle. A oficina foi estruturada em quatro módulos, sendo um deles destinado à exploração do conceito de invariantes geométricos. Os participantes foram convidados por meio de divulgação em redes sociais (Facebook e Instagram) e grupos de WhatsApp, além do convite formal a professores da rede municipal de ensino, realizado pelo Núcleo de Tecnologia Educacional Municipal.

Para conduzir a investigação, utilizamos como instrumentos um questionário inicial, realizado por meio de um formulário online do Google em que buscamos identificar o perfil social e educacional dos participantes da pesquisa. Também, ao longo da oficina, foram propostas três tarefas. A primeira, teve como objetivo aprofundar a compreensão do conceito de invariante geométrico, além de proporcionar aos participantes a oportunidade de utilizar o arrasto e a visualização como ferramentas para responder aos questionamentos propostos. A segunda tarefa apresentou uma abordagem alternativa para a exploração dos invariantes geométricos, incentivando os participantes a formular conjecturas. Por fim, a terceira tarefa estimulou a criatividade dos participantes em um ambiente colaborativo, promovendo a troca de ideias e conhecimentos.

Os registros produzidos nas tarefas foram organizados e classificados com base em categorias temáticas. Inicialmente, foram identificadas duas categorias principais: formalismo matemático e aspectos formativos. Na análise das tarefas, trechos com temáticas semelhantes foram agrupados, resultando na subdivisão da categoria formalismo matemático em duas subcategorias: justificativa e conceito. Já a categoria aspectos formativos foi segmentada em três subcategorias: contribuição, possibilidades didáticas e trabalho colaborativo. Neste trabalho, daremos ênfase à subcategoria possibilidades didáticas, explorando como os participantes utilizaram os invariantes geométricos no desenvolvimento das atividades propostas. Daremos ênfase a terceira atividade, pois foi dela que emergiram tal subcategoria.

Possibilidades didáticas

Na terceira atividade proposta, os participantes foram convidados a criar ou editar uma atividade cujo objetivo fosse explorar o conceito de invariante geométrico e, posteriormente, compartilhá-la com os colegas por meio do fórum do ambiente virtual, conforme ilustrado na Figura 1.

Parte 1 Escolha o enunciado de uma atividade de um livro didático, de um site, de uma apostila ou elabore você mesmo, que o foco seja determinar um invariante geométrico. Em seguida, no GeoGebra, construa um arquivo que você utilizaria para abordar essa questão em uma situação de estudo pessoal ou com vista à sala de aula. Poste seu arquivo neste fórum, acompanhado do enunciado da questão e de uma breve descrição de como utilizou o GeoGebra para resolver a questão escolhida. Você deve realizar a Parte 1 até 03 de Dezembro às 23h59min (horário de Brasília). Parte 2 Escolha construções realizadas por, no mínimo, dois colegas e interaja com eles fazendo perguntas, sugerindo alterações ou acréscimos em suas construções. Você pode sugerir, por exemplo, um outro modo de utilizar o GeoGebra para abordar a atividade proposta pelo colega, ou, ainda, dizer de que modo utilizaria a proposta do colega (atividade e arquivo do Geogebra) em uma aula sua. Você deve realizar a Parte 2 até 05 de Dezembro às 23h59min (horário de Brasília).
--

Figura 1. Atividade colaborativa.

Nessa tarefa, os participantes deveriam desenvolver uma atividade focada na identificação de um invariante geométrico. Em seguida, precisavam construir o arquivo no *software* GeoGebra e publicá-lo no fórum, juntamente com a descrição da atividade. Posteriormente, na etapa denominada Parte 2, os participantes deveriam comentar e sugerir melhorias em pelo menos duas atividades propostas por seus colegas.

A seguir, apresentamos alguns exemplos desenvolvidos pelos participantes. Para preservar a identidade dos autores, utilizamos codinomes, como A1, A2, A3..., A15. A participante A1 elaborou uma atividade envolvendo a construção de uma parábola e de um triângulo baseado na definição da parábola. Conforme descrito por A1, inicialmente, é necessário construir uma parábola no *software* GeoGebra e, em seguida, formar um triângulo cujos vértices são um ponto na parábola, o foco e um ponto na diretriz. Para isso, a participante disponibilizou um protocolo de construção e o respectivo arquivo. ggb, ilustrado na Figura 2.

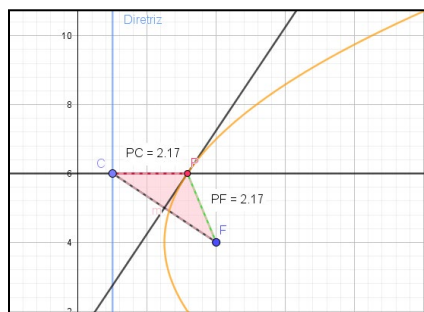


Figura 2. – Construção realizada pela participante A1.

A partir dessa construção, a participante sugeriu a exploração de algumas propriedades geométricas identificadas, o que constitui a segunda parte da atividade, conforme ilustrado na Figura 3.

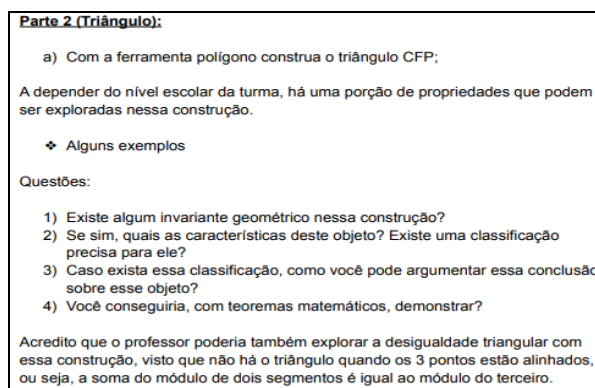


Figura 3. – Parte 2 da tarefa 3, realizada pela participante A1.

A1 destacou as possibilidades de explorar conceitos tanto da Geometria Analítica quanto da Geometria Plana, além do uso de ferramentas menos comuns no GeoGebra, como a função Lugar Geométrico. Dessa forma, os alunos podem visualizar e compreender propriedades geométricas, além de se familiarizarem com novas ferramentas do software, ampliando seu repertório para atividades futuras.

O participante A2 desenvolveu uma atividade que relaciona propriedades do baricentro de triângulos equiláteros construídos sobre os lados de um triângulo qualquer. O resultado, ilustrado na atividade por meio do GeoGebra, é conhecido como o Teorema de Napoleão (Figura 4).

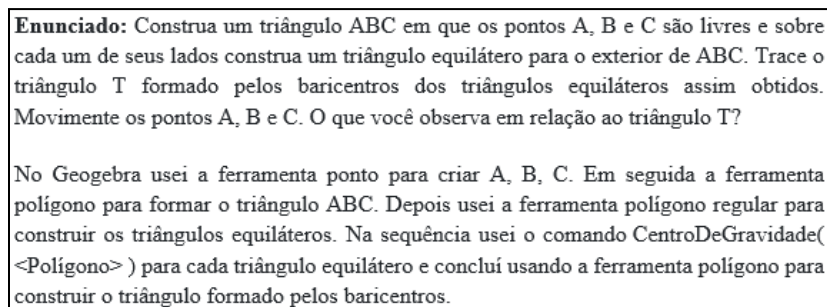


Figura 4. – Parte 1 da tarefa 3, realizada pela participante A1.

O resultado final da construção está representado na Figura 5.

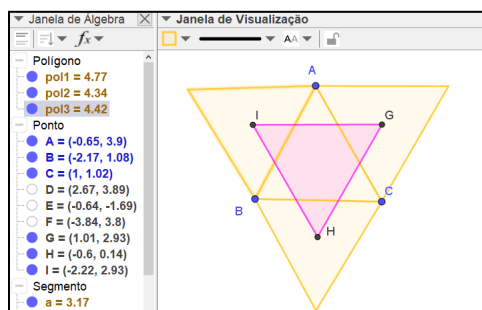


Figura 5. – Construção realizada pela participante A2.

Segundo A2, essa atividade permite levantar conjecturas sobre a natureza do triângulo obtido. Por exemplo, os participantes podem formular a hipótese de que o triângulo formado pelos baricentros dos triângulos equiláteros também seja equilátero. Além disso, as medidas dos lados desse triângulo podem ser analisadas para reforçar a hipótese sobre o invariante geométrico identificado.

O participante A11 propôs uma atividade explorando as relações entre quadriláteros, como ilustrado na Figura 6.

Dado um quadrilátero qualquer ABCD:

- Construa o ponto médio dos lados AB, BC, CD e DA, chamando-os de E, F, G e H, respectivamente.
- Construa o quadrilátero EFGH.

Quais relações possuem ABCD e EFGH e o que EFGH possui que ABCD não necessariamente possui?

Figura 6. – Parte 1 da tarefa 2, realizada pela participante A11.

A construção correspondente está representada na Figura 7.

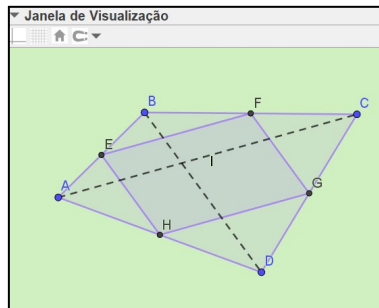


Figura 7. – Construção realizada pela participante A11.

Após a realização da construção, utilizando as retas suporte dos segmentos EH e FG, e aplicando o comando “relação”, verifica-se que essas retas são paralelas. O mesmo procedimento pode ser aplicado aos segmentos EF e GH, permitindo concluir que EFGH é um paralelogramo. Além disso, considerando as diagonais AC e BD, e utilizando o Teorema da Base Média, podemos inferir que o quadrilátero EFGH possui metade da área do quadrilátero ABCD. Esse resultado corresponde ao conhecido Teorema de Varignon.

Outros participantes desenvolveram atividades explorando propriedades de polígonos e invariantes geométricos, como quadriláteros, triângulos isósceles, escalenos, equiláteros e trapézios. Além disso, algumas atividades abordaram conceitos geométricos fundamentais, como ângulos, áreas, baricentro, ortocentro, incentro, circuncentro, medianas, mediatrizes, retas perpendiculares e bissetrizes.

Considerações

Neste trabalho, exploramos a presença dos invariantes em conceitos geométricos, evidenciando que sua aplicação se estende a uma ampla variedade de tópicos da Matemática escolar. As atividades desenvolvidas demonstraram que os invariantes geométricos podem ser abordados de forma significativa tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio, proporcionando aos alunos uma compreensão mais aprofundada das propriedades matemáticas envolvidas.

Além disso, a integração dessas atividades com softwares educacionais, como o GeoGebra, amplia consideravelmente as possibilidades didáticas. Durante o trabalho realizado foi possível verificar que o uso de ferramentas tecnológicas pode tornar o processo de ensino e aprendizagem interativo, possibilitando a visualização e manipulação de entes geométricos de forma intuitiva. Esse recurso não apenas potencializa a construção do conhecimento, mas também favorece a autonomia dos alunos no processo de investigação matemática.

Para os professores, a utilização de tecnologias educacionais representa uma oportunidade de inovar suas práticas pedagógicas, enriquecendo as discussões em sala de aula e incentivando a experimentação. Além disso, o uso desses recursos permite a criação de materiais didáticos personalizados, adaptados às necessidades dos alunos e às particularidades dos conteúdos abordados.

Os resultados deste estudo evidenciam que a exploração dos invariantes geométricos por meio de tecnologias digitais pode despertar a curiosidade dos estudantes, estimular o pensamento matemático e promover um aprendizado com maior significado. Dessa forma, reforçamos a necessidade de incentivar o uso de ferramentas tecnológicas no ensino da Matemática, pois elas não apenas enriquecem o processo de ensino e aprendizagem, mas também impulsionam novas descobertas e conexões dentro do universo matemático.

Referências e bibliografia

- Baccaglini-Frank, A. (2012). Dragging and making sense of invariants in dynamic geometry. *Mathematics Teacher*, 105(8), 616–620. <https://doi.org/10.5951/mathteacher.105.8.0616>.
- Ferreira, A. B. de H. (1999). *Dicionário eletrônico Aurélio Século XXI*. Nova Fronteira e Lexikon Informática.
- Gainutdinova, T. Y., Denisova, M. Y., Shirokova, O. A., & Mikhaylovsky, M. N. (2020). The use of digital and information technologies in order to increase the effectiveness of mathematical education. *Talent Development and Excellence*, 12(3s), 188–198. <http://www.iratde.com/index.php/jtde/article/view/263>.
- Gerhardt, T. E., & Silveira, D. T. (2009). *Métodos de pesquisa* (1ª ed.). UFRGS.
- Gravina, M. A., & Santarosa, L. M. C. (1999). A aprendizagem matemática em ambientes informatizados. *Informática na Educação: Teoria e Prática*, 1(2), 73–88. <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/20962>.
- Gravina, M. A. (2001). *Ambientes de geometria dinâmica e o pensamento hipotético-dedutivo* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Rio Grande do Sul). <https://lume.ufrgs.br/handle/10183/2545>.
- Leivas, J. C. P. (2009). *Imaginação, intuição e visualização: A riqueza da possibilidade da abordagem geométrica no currículo de cursos de licenciatura de matemática* (Tese de doutorado, Universidade Federal do Paraná).
- Libeskind, S., Stupel, M., & Oxman, V. (2018). The concept of invariance in school mathematics. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 49(1), 107–120. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2017.1355992>.
- Lopes, D. (2012). Invariantes – Como algo que não muda mudará sua vida. In *Anais da XV Semana Olímpica* (pp. 1–9). Maceió.

- Machado, E. J. C., Bortolossi, H. J., & Almeida Junior, R. V. (2018). *Explorando geometria 2D e 3D na escola básica com o software gratuito GeoGebra para smartphones e tablets*. Sociedade Brasileira de Matemática. <https://www.sbm.org.br/wp-content/uploads/2019/06/final-geometria-2d-e-3d-corrigido.pdf>.
- Santos, A. H. (2014). *Um estudo epistemológico da visualização matemática: O acesso ao conhecimento matemático no ensino por intermédio dos processos de visualização* (Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Paraná). <https://acervodigital.ufpr.br/handle/1884/37264>.



La clase invertida en modalidad virtual: Una experiencia preuniversitaria

Ronald **Quesada** Córdova
Universidad de Lima
Perú
rquesada@ulima.edu.pe

Resumen

El Centro de Estudios Preuniversitarios de la Universidad de Lima implementó el Aula Invertida en la modalidad virtual para el desarrollo de las clases. Esta metodología demostró efectividad en la participación constante de los estudiantes y fomentó una mayor comprensión de los contenidos matemáticos fundamentales. Cabe mencionar que, esta metodología del proceso de enseñanza-aprendizaje fue utilizada durante los primeros meses de la pandemia con el fin de motivar a docentes y estudiantes en el logro de dos objetivos: ingreso directo y base académica sólida para el primer ciclo de la universidad. Con el paso del tiempo, se consolidó como una herramienta eficaz para potenciar el rendimiento académico de los postulantes. Los objetivos de la presente comunicación consisten en socializar el impacto de esta metodología, identificar buenas prácticas docentes, proponer y escuchar recomendaciones para mejorar los resultados cuantitativos y cualitativos obtenidos, algunos de los cuales se comparten en esta comunicación.

Palabras clave: Aula invertida; Modalidad virtual; rendimiento académico; preuniversitario; prácticas docentes; enseñanza de la Matemática.

Definición y relevancia del problema

El entorno educativo enfrentó grandes desafíos durante la pandemia global, lo que obligó a las instituciones educativas a replantear sus metodologías. En este contexto, el Centro de Estudios Preuniversitarios de la Universidad de Lima adoptó el enfoque del Aula Invertida en modalidad virtual para la enseñanza de la Matemática con el objetivo de superar las limitaciones del modelo tradicional, como la baja participación estudiantil y la dificultad para garantizar una comprensión profunda de los contenidos en entornos no presenciales. Este problema adquiere

especial relevancia al considerar la necesidad de mantener la calidad educativa y preparar a los estudiantes para el ingreso universitario en un escenario de incertidumbre.

Esta implementación se complementó con herramientas digitales propias, como *ClassAnimate*, un aplicativo diseñado para repasar y estudiar conceptos fundamentales, y con la mejora de videos educativos en colaboración con la Oficina de Innovación y Calidad Educativa de la universidad. Estas innovaciones permiten a los estudiantes revisar los materiales de manera asíncrona antes de iniciar un tema nuevo, fomentando un aprendizaje autónomo y preparándolos para actividades prácticas y colaborativas durante las sesiones virtuales.

El Aula Invertida promueve habilidades críticas y creativas, y fomenta una formación matemática inclusiva y efectiva. Diversos estudios confirman su eficacia en entornos virtuales, lo que respalda su aplicación en este contexto.

Este trabajo tiene como objetivo compartir la experiencia de implementación del Aula Invertida en modalidad virtual en un entorno preuniversitario analizando sus efectos en el rendimiento académico y la participación constante del estudiantado, así como socializar los aprendizajes obtenidos a partir de esta práctica. Asimismo, se busca abrir un espacio de diálogo que permita recoger aportes, sugerencias y experiencias similares de los participantes.

Se plantea la pregunta: ¿Qué efectos tuvo la aplicación del Aula Invertida en modalidad virtual en la participación y el aprendizaje de los estudiantes preuniversitarios, y qué aspectos pueden mejorarse o adaptarse en contextos educativos similares?

A través del análisis de resultados cuantitativos y cualitativos, esta comunicación espera aportar elementos para la reflexión colectiva sobre la mejora continua de la enseñanza de las Matemáticas en diversos entornos, entre ellos, virtuales.

Referencial teórico

La clase invertida es una metodología de enseñanza-aprendizaje que rompe con el modelo transmisivo tradicional y promueve una participación del estudiantado. En este enfoque, los contenidos teóricos se trabajan de manera autónoma fuera del aula, generalmente a través de recursos audiovisuales, y el tiempo de clase se dedica a resolver dudas, realizar ejercicios y desarrollar actividades colaborativas que consolidan el aprendizaje (Aguirre, 2022; Abeysekera & Dawson, 2015). Lejos de ser una simple reorganización del tiempo, esta propuesta implica un rediseño pedagógico que sitúa al estudiante en el centro del proceso formativo y redefine el rol del docente como facilitador, mediador y guía del aprendizaje (Flores et al., 2020).

Desde una perspectiva teórica, el modelo de clase invertida se fundamenta en los principios del constructivismo social de Vygotsky, que resalta el valor del aprendizaje mediado, colaborativo y contextualizado; así como en el enfoque del aprendizaje experiencial propuesto por Kolb, que destaca la importancia de la reflexión activa sobre la experiencia como motor del aprendizaje significativo. Estos marcos permiten entender cómo el aula invertida favorece tanto el desarrollo de competencias cognitivas como habilidades metacognitivas y sociales, esenciales en la formación matemática.

La virtualización forzada de la enseñanza durante la pandemia aceleró la adopción de metodologías activas como la clase invertida en diversos niveles educativos. Sin embargo, la modalidad virtual no debe entenderse como una simple traslación de la presencialidad a lo digital, sino como un entorno con dinámicas y desafíos propios que exigen diseñar estrategias pedagógicas específicas para garantizar la motivación, el compromiso y el sentido de pertenencia de los estudiantes (Leal et al., 2019). En este sentido, el entorno virtual requiere generar experiencias de aprendizaje que sean flexibles, accesibles, interactivas y con retroalimentación constante.

La experiencia desarrollada en el Centro de Estudios Preuniversitarios de la Universidad de Lima responde a esta necesidad de adaptación metodológica. En ella, la clase invertida se implementó con recursos especialmente diseñados: un aplicativo propio (*ClassAnimate*) que permite reforzar conceptos clave mediante ejercicios interactivos, así como videos educativos elaborados con apoyo de la Oficina de Innovación y Calidad Educativa. Estos materiales permiten a los estudiantes explorar los contenidos antes de cada sesión sincrónica, promoviendo el auto-aprendizaje y preparando el terreno para una participación constante durante las clases virtuales.

Para la implementación de esta nueva metodología, se rediseñó la sesión de clases tal como se muestra en la siguiente tabla:

Tabla 1
Diseño de la sesión de clases

Etapa de la clase	Materiales	Descripción
Antes	Video motivador	Ejemplifica la aplicación del tema matemático a tratar en situaciones cotidianas.
	Video teórico	Video educativo con explicaciones del profesor para que los estudiantes comprendan el tema.
	Video de autoevaluación	Evaluación formativa, permite medir nivel de comprensión y revisar material si lo necesitan. (EdPuzzle).
Durante	Videos anteriores y separatas de trabajo	Profesores fomentan la participación en explicar conceptos, resolver ejercicios y consolidan el conocimiento.
Después	Autoevaluación	Evaluaciones formativas apoyadas en herramientas digitales (Kahoot, Quizzes)

Nota: Elaboración propia

El siguiente gráfico ilustra el desarrollo mencionado en la Tabla 1.



Figura 1. Proceso del desarrollo de la clase invertida en la modalidad virtual.

Durante la sesión sincrónica, el rol del profesor se centra en dinamizar la clase a través de preguntas, resolución de ejercicios y discusión de ideas, fomentando un aprendizaje colaborativo. Finalmente, en la fase posterior, se aplican autoevaluaciones y actividades formativas con herramientas digitales como Kahoot o Quizizz, que refuerzan el conocimiento adquirido y permiten monitorear el progreso.

Como señalan Monsalve et al. (2019), la innovación pedagógica no consiste en el uso de tecnología por sí misma, sino en cómo esta se integra coherentemente en el diseño didáctico. En este caso, la tecnología actúa como un medio para promover la autonomía, la reflexión crítica y la colaboración, aspectos clave para una formación matemática efectiva.

Como cualquier acto humano, el desarrollo de la clase invertida en la modalidad virtual es sujeto de mejora. Es una metodología versátil que se adapta a las necesidades de los estudiantes y a los objetivos de aprendizaje y que cuenta con una gran variedad de literatura sobre los criterios de su aplicación. La adaptabilidad a las herramientas tecnológicas, su capacidad para promover el aprendizaje autónomo y versátil en los estudiantes, junto con el compromiso docente en facilitar la participación de los estudiantes como protagonistas del proceso, convierten a esta metodología en una estrategia pedagógica poderosa para la enseñanza de Matemáticas en entornos virtuales.

Método y desarrollo conceptual

Antes de la pandemia, las clases en el centro mencionado se desarrollaban de manera presencial, combinando la enseñanza teórica con ejercicios prácticos, tanto individuales como colaborativos. Sin embargo, con la transición a la modalidad virtual durante la pandemia, se implementó el enfoque del Aula Invertida como estrategia pedagógica para optimizar la participación de los estudiantes y mejorar la comprensión de los contenidos matemáticos fundamentales. En vista del impacto positivo obtenido, esta modalidad se ha mantenido y consolidado, permitiendo la adaptación de los temas curriculares a formatos digitales en la plataforma Blackboard. En este proceso participan todos los docentes, en coordinación con los equipos de gestión académica, incluyendo la dirección y los coordinadores académicos.

El estudio realizado es de tipo descriptivo y exploratorio, con un enfoque cuantitativo y cualitativo para evaluar el impacto del Aula Invertida en el rendimiento académico y la participación de los estudiantes. Los participantes incluyen a los estudiantes del Centro de Estudios Preuniversitarios, quienes han experimentado este modelo en la modalidad virtual, así como a los docentes encargados de su implementación.

En cuanto a la recolección de datos, se utilizaron tres fuentes principales:

- Entrevistas semiestructuradas a docentes y estudiantes, realizadas de forma virtual, con el fin de conocer sus percepciones, experiencias y sugerencias respecto al uso del Aula Invertida.
- Resultados académicos de los estudiantes, que permitieron realizar comparaciones entre grupos que trabajaron con esta metodología y grupos de ciclos anteriores que siguieron un enfoque más tradicional.

- Registros de interacción obtenidos desde la plataforma Blackboard (ingresos a materiales, participación en foros, envíos de tareas, asistencia a sesiones sincrónicas), que brindaron datos objetivos sobre el nivel de involucramiento y autonomía de los estudiantes.

El análisis de datos cuantitativos se enfocó en el rendimiento académico, mediante estadísticas descriptivas (promedios, porcentajes) y comparativas simples entre ciclos. Por su parte, los datos cualitativos, obtenidos mediante entrevistas y encuestas de satisfacción, fueron analizados temáticamente, identificando categorías vinculadas a dimensiones pedagógicas, experiencias estudiantiles y percepción de la metodología, y sugerencias de mejora.

La triangulación de datos se realizó mediante la comparación cruzada de los resultados obtenidos en las entrevistas, los registros en Blackboard y el desempeño académico. Esta estrategia permitió fortalecer la validez de los hallazgos y detectar patrones coincidentes o divergentes entre lo percibido por los estudiantes, lo reportado por los docentes y lo evidenciado en los datos objetivos.

Diferentes estudios destacan la necesidad de reconsiderar los enfoques tradicionales de enseñanza y el potencial del Aula Invertida para mejorar el compromiso y el desempeño académico de los estudiantes en entornos virtuales. En este contexto, la experiencia en el Centro de Estudios Preuniversitarios de la Universidad de Lima aporta evidencia sobre la eficacia de esta metodología y ofrece oportunidades de mejora a partir del análisis de los datos obtenidos.

Resultados

1º Resultados académicos

Tras varios ciclos de aplicación de la metodología de la Clase invertida, se observa un incremento en los porcentajes de estudiantes que lograron el ingreso directo, como se ilustra en la siguiente figura:

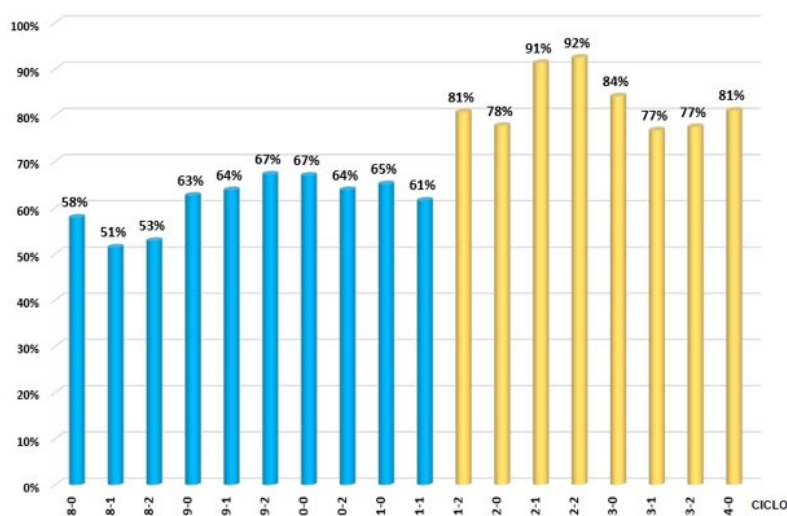


Figura 2. Evolución del porcentaje de ingresantes.

Se observa un incremento progresivo en el ingreso directo (de 58% a 81% hasta el año 2024), lo que evidencia una mejora en el aprendizaje. Esto confirma que la participación (Flores et al., 2020) y el rediseño de las sesiones (con videos, autoevaluaciones y trabajo guiado) potencian el rendimiento. Esto implica que los datos respaldan que la clase invertida, al fomentar el autoaprendizaje y la aplicación práctica, cumple con lo planteado por las teorías constructivistas y experienciales.

2º Resultados de entrevistas

Los estudiantes manifestaron sentir cierto grado de incomodidad al comienzo del ciclo debido a su falta de experiencia con esta metodología en su etapa escolar. Comentan que les costó lograr adaptarse porque estaban acostumbrados a ser ellos quienes escuchaban a sus docentes escolares para después estudiar en casa. Esta nueva metodología los obligaba a revisar materiales antes de desarrollar un tema nuevo.

Por otro lado, los docentes manifestaron temor al comienzo de la pandemia por el cambio brusco a la modalidad virtual, pero que, con el paso del tiempo, quienes lograron adaptarse, comprendieron la necesidad de actualizar sus estilos y métodos de enseñanza para lograr buenos resultados al finalizar los periodos académicos.

Se observó que los estudiantes tuvieron dificultades iniciales por el cambio de metodología, pasando de una pasividad en su etapa escolar a la autonomía que busca la clase invertida, lo cual coincide con lo que se espera en procesos de innovación educativa (Aguirre, 2022). Por otro lado, la resistencia inicial de los docentes fue superada porque comprendieron la necesidad de actualizar sus métodos y su adaptación progresiva, también de estudiantes, válida que la clase invertida, aunque retadora, logra mejorar la mediación pedagógica (Leal et al., 2019).

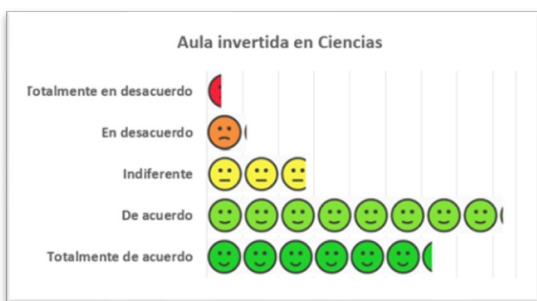


Figura 3. Satisfacción de estudiantes con la metodología por curso.



Figura 4. Satisfacción de estudiantes con la metodología por curso.

IMPORTANCIA VS SATISFACCIÓN (de 1 a 5)			
Servicio	Importancia	Satisfacción	Brecha
Aula invertida	4,08	3,93	0,15
ClassAnimate	3,90	3,83	0,07
Charlas y talleres	3,99	3,96	0,03

Figura 5. Comparación de la importancia con el nivel de satisfacción.

PROMOTORES vs DETRACTORES (de 1 a 7)					
AULA INVERTIDA			PRE LIMA		
Promotores	539	57,2 %	Promotores	626	66,5 %
Neutros	168	17,8 %	Neutros	144	15,3 %
Detractores	235	24,9 %	Detractores	172	18,3 %
NPS		32,3 %	NPS		48,2 %

Figura 6. Nivel de satisfacción con la metodología y con la institución.

3º Resultados de revisión de materiales previos

Todos los estudiantes no logran revisar de manera completa los materiales previos que requieren para participar en la clase invertida de manera adecuada y que les permita aprender eficientemente. En el siguiente gráfico se muestra la evolución y comparación de los porcentajes de revisión de materiales durante cada ciclo y en varios ciclos.

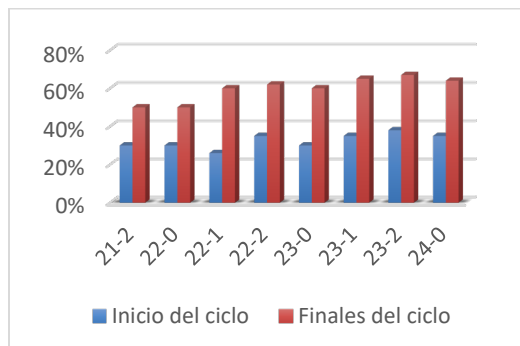


Figura 7. Evolución del porcentaje de revisión de materiales para la clase invertida.

Se observa que solo entre 25% y 35% revisaron los materiales al inicio del ciclo, pero al final del ciclo, estos porcentajes aumentaron a 50% y 65%. A pesar de que no se logra un cumplimiento total, se observa una mejora en los hábitos de estudio ya que la autonomía no es inmediata, pero mejora con el tiempo, de acuerdo con la idea de que la clase invertida promueve el autoaprendizaje (Kolb).

Conclusiones

La implementación del Aula invertida en la modalidad virtual ha demostrado ser una estrategia efectiva para fortalecer el aprendizaje preuniversitario, logrando mejoras significativas en la participación estudiantil, el rendimiento académico y los resultados de ingreso directo a la

universidad. A pesar de los desafíos iniciales, como la resistencia al cambio y la necesidad de superar obstáculos tecnológicos, la colaboración entre docentes y el desarrollo de materiales innovadores permitió afianzar la implementación de esta metodología. Como resultado, se ha observado un incremento en la cantidad de estudiantes que visualizan los materiales previos, por ende, participan de manera constante en las clases, lo cual repercute y aumenta la probabilidad de que logren el ingreso directo a la universidad, además de una base académica sólida para afrontar los primeros ciclos de su carrera universitaria.

A pesar de los resultados positivos, el estudio revela que no todos los estudiantes logran revisar completamente los materiales previos necesarios para aprovechar de mejor manera esta metodología, y podría implicar un resultado negativo en el ingreso directo a la universidad o en la base académica deseada para quienes ingresen. No se ha realizado una evaluación sobre esta última expresión, por lo se sugiere tener presente esto para desarrollar un estudio posterior. Además, los logros del desarrollo de la clase invertida en la modalidad virtual, no serán posible sin el compromiso de los docentes, su adaptación y actualización constante para maximizar los beneficios de esta metodología.

Referencias

- Aguirre, J. P. S. (2022). Flipped Classroom: ¿Enfoque o Metodología?. *Polo del Conocimiento: Revista científico-profesional*, 7(2), 64.
- Flores, L., Veytia, M., & Moreno, J. (2020). Clase invertida para el desarrollo de la competencia: uso de la tecnología en estudiantes de preparatoria. *Revista Educación*, 44(1), 1-30.
- Leal Bolaño, N. L., Aguilera Cuenca, H., Egea Arciniegas, T. G., & Escobar Jurado, S. (2019). Estilos de aprendizaje de estudiantes universitarios principiantes con modalidad virtual. *Cultura Educación y Sociedad*, 10(2).
- Abeysekera, L., & Dawson, P. (2015). Motivation and cognitive load in the flipped classroom: definition, rationale and a call for research. *Higher education research & development*, 34(1), 1-14.
- Monsalve, A. M. S., Camacho, J. L. A., & Peña, W. Z. (2019). Análisis sobre el uso de tecnologías emergentes en procesos de enseñanza y aprendizaje en Educación Superior. *Tecnociencia, innovación y sociedad*, 135. Colombia.



La programación informática como herramienta para trabajar el álgebra en el aula

Fabienne Venant
Université du Québec à Montréal
Canada
venant.fabienne@uqam.ca

Resumen

El aprendizaje de la programación informática está en auge en las escuelas. En Quebec, por ejemplo, el plan de acción digital para la educación y la enseñanza superior publicado por el Gobierno en 2018 incluye el desarrollo del uso pedagógico de la programación informática en las escuelas como una de las medidas emblemáticas. En este taller, exploraremos si la escritura de programas informáticos puede contribuir al desarrollo de conocimientos algebraicos y de qué manera. Por eso, proponemos realizar y estudiar con los participantes una tarea de generación y resolución de ecuaciones en un contexto lúdico, utilizando la plataforma de programación Scratch. Utilizaremos el marco teórico de la génesis instrumental para analizar los tipos de trabajo implicados.

Palabras clave: Educación Matemática; Educación secundaria; Aprendizaje; Resolución de problemas; Herramientas tecnológicas; Informática; Algorítmica; Programación informática; Álgebra; Québec; Canadá.

Introducción

El aprendizaje de la programación informática está en auge en las escuelas. En Quebec, por ejemplo, el plan de acción digital para la educación y la enseñanza superior publicado por el Gobierno en 2018 incluye el desarrollo del uso pedagógico de la programación informática en las escuelas como una de las medidas emblemáticas. En un informe dirigido a proponer acciones óptimas para promover el uso pedagógico de la programación informática en las escuelas de Quebec, Barma et al. (2020) recomiendan que se añada la programación informática al plan de estudios de Quebec como una nueva habilidad transversal relacionada con el pensamiento

Taller; Media inferior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

computacional. En este taller, queremos investigar la posibilidad de utilizar la programación informática como herramienta pedagógica y, por tanto, de ponerla al servicio del aprendizaje escolar. Nos interesa la especial relación entre la informática y, más concretamente, los algoritmos y las matemáticas escolares. Exploraremos si la escritura de programas informáticos puede contribuir al desarrollo de estos conocimientos y de qué manera. Nos centraremos especialmente en el álgebra y la resolución de ecuaciones. Nuestro objetivo es iniciar un debate para comprender mejor el trabajo algorítmico y sus vínculos con el trabajo matemático, en particular con el trabajo algebraico. Por eso, proponemos realizar y estudiar con los participantes una tarea de generación y resolución de ecuaciones en un contexto lúdico, utilizando la plataforma de programación Scratch.

Definición y relevancia del tema a desarrollar en el taller

Dualidad objeto/herramienta

Aún queda por explorar el papel preciso que puede desempeñar la programación informática en la movilización del conocimiento y el razonamiento matemáticos (Autor, 2022). Aunque la programación informática está estrechamente vinculada a las matemáticas a través de la actividad algorítmica que la sustenta, el algoritmo sigue siendo un objeto sobre el que se sabe poco. Es difícil prever su papel en la enseñanza y la formación de los profesores de matemáticas. El algoritmo o el programa informático que lo incorpora puede considerarse un método para resolver un problema matemático. Por tanto, se aborda como una herramienta. Sin embargo, como señalan Modeste et al. (2010), un algoritmo no es solo una herramienta para resolver problemas, sino también un objeto matemático por derecho propio. Por tanto, debe abordarse como un objeto de conocimiento, cuyas propiedades matemáticas deben estudiarse en relación con los demás conceptos algorítmicos que entraña. Esta dualidad objeto/herramienta, en el sentido de Douady (Douady, 1986), lleva a Modeste (2012) a defender la idea de que en matemáticas es fundamental no limitarse a cuestiones de programación, escritura y ejecución de algoritmos. Sino que hay que abordar el papel conceptual que los algoritmos pueden desempeñar en el trabajo matemático (Autor, 2018; Autor et al., 2023). Nuestro trabajo ha puesto de manifiesto la dificultad de construir el conocimiento matemático a partir de una situación que requiere conocimientos informáticos. La transposición necesaria para llevar a cabo una tarea algorítmica en clase de matemáticas puede no producirse espontáneamente. Un ajuste forzado o mal concebido puede ser contraproducente para la construcción de significados, tanto matemáticos como algorítmicos. Sumergir objetos matemáticos en un contexto algorítmico obliga a reinterpretarlos y a utilizarlos de nuevo a través de prácticas algorítmicas. Por ejemplo, aunque ambos tienen raíces comunes, las generalizaciones algebraicas y algorítmicas no adoptan la misma forma, sobre todo en lo que respecta a la gestión de la denominación.

Cuestiones didácticas difíciles de identificar.

Desentrañar las cuestiones didácticas específicas del trabajo algorítmico es particularmente crucial en contextos en los que se tiende a una visión puramente instrumental de la programación informática. Los objetos didácticos declarados en la interfaz de las dos disciplinas son difíciles de transferir en su doble referencia (Couderette, 2016). Nuestro trabajo (Autor, 2024) ha mostrado la necesidad de definir con precisión las intenciones didácticas, tanto matemáticas

como algorítmicas, a la hora de construir una tarea algorítmica para el aula de matemáticas. Tener en cuenta la dualidad objeto/herramienta del algoritmo es esencial para explorar un contexto matemático en el que se deben establecer esquemas algorítmicos. Sin embargo, la complejidad matemática puede dificultar el desarrollo algorítmico instrumental. Algunos algoritmos pueden ser más relevantes desde el punto de vista matemático, pero pueden resultar más difíciles de traducir al lenguaje informático. A la inversa, el desarrollo algorítmico avanzado puede bloquear el acceso a algoritmos matemáticos más eficientes, sobre todo en un contexto de prueba. La comparación de diferentes algoritmos que resuelven la misma cuestión y la depuración son actividades que deberían fomentarse explícitamente.

¿Instrumentos algorítmicos para trabajar con álgebra?

A menudo vemos (Barma, 2018; Laval, 2018) un deseo institucional de negar la importancia de la dualidad objeto/herramienta de los algoritmos y de reducir su enseñanza a una herramienta para resolver problemas o construir conocimiento matemático. Sin embargo, la enseñanza de los algoritmos conlleva muchas cuestiones didácticas, por lo que es imposible reducir un algoritmo a un artefacto que facilite la mediación entre los estudiantes y los conceptos matemáticos. Creemos que sería mejor promover la interacción entre las actividades algorítmicas y matemáticas. Esto nos lleva, en línea con Lagrange and Rogalski (2017), a cuestionar los conceptos y habilidades implicados en cada una de estas actividades y sus posibles correlaciones.

En este taller nos centraremos en el campo matemático del álgebra. Las palabras «álgebra» y «algoritmo» tienen una raíz lingüística común. De hecho, la palabra «álgebra» es una deformación occidental del nombre de Al-Khwārizmī, figura central en la formación de la escuela algebraica árabe en el siglo IX. La obra más conocida de Al-Khwārizmī es el Resumen sobre el cálculo por restauración y comparación (*Kitāb al-mukhtaṣar fī ḥisāb al-jabr wa-l-muqābala*), cuyo título, por cierto, dio origen a la palabra «álgebra» (*al-jabr*). En esta obra, Al-Khwārizmī organiza y sistematiza la solución de ecuaciones, en particular a partir de diferentes casos posibles. Los procedimientos que utilizaba y que más tarde fueron calificados de algebraicos tienen un fuerte aspecto algorítmico. Formulaban instrucciones «sencillas» que debían aplicarse sistemáticamente paso a paso, con el fin de transmitir métodos eficaces para obtener resultados precisos. Hoy en día, principalmente bajo la influencia de la informática, la finitud, la iteración, la recurrencia y la recursividad se han convertido en aspectos esenciales del pensamiento algorítmico. Como proceso de cálculo sistemático que puede aplicarse a diversos contextos (numérico, algebraico, geométrico, lógico, etc.), la algorítmica se distingue así más claramente del álgebra. Sin embargo, nos gustaría explorar cómo una actividad de programación puede explotar el potencial de estos estrechos vínculos entre algoritmos y álgebra.

Referencial teórico

Nos interesan las cuestiones didácticas implicadas en la integración de los algoritmos en la enseñanza de las matemáticas. Siguiendo a Lagrange y Rogalski (2017), esto nos lleva a cuestionar los conceptos y habilidades implicados en cada una de estas actividades y sus posibles correlaciones, adoptando la perspectiva teórica de la génesis instrumental (Rabardel, 1995). Este enfoque nos permite abordar el potencial de la programación informática, vista como un artefacto digital, para el aprendizaje (Artigue, 2002; Drijvers, 2000; Guin et al., 2006; Lagrange,

1999), pero también la complejidad del papel del profesor, que debe construir instrumentos didácticos que le permitan orquestar las diferentes génesis instrumentales de los alumnos (Artigue, 2007; Guin y Trouche, 2002; Haspekian, 2014; Restrepo, 2008)

El trabajo del alumno

Tratamos de comprender el trabajo del alumno y como se hace la transición de los objetos virtuales utilizados en clase a los conceptos a los que hacen referencia. Este trabajo se aborda como una actividad humana que adopta la forma de una actividad de resolución de problemas matemáticos. El alumno no debe limitarse a seguir los caminos trazados por los ejercicios escolares, sino actuar como un investigador que explora el problema que se le plantea. Su trabajo no consiste simplemente en adquirir conocimientos, sino en construirlos, y se basa en una cierta coherencia epistemológica (Kuzniak et al., 2016). Los significados también se derivan de los vínculos establecidos entre conceptos diferentes (Noss et al., 1997). El acto de observar relaciones y establecer conexiones, ya sea entre diferentes representaciones funcionales o entre dominios escolares, es un aspecto clave del proceso de aprendizaje (Boaler, 2022). Al igual que el del experto, el trabajo del alumno, cuando se centra en la resolución de problemas, implica fases de descubrimiento, explicación, justificación y aplicación (Giaquinto, 2005; Reichenbach, 1938).

En este taller, proponemos explorar el trabajo que se lleva a cabo durante la programación informática en un contexto algebraico. Para ello, consideramos tres tipos de trabajo.

Trabajo informático

Hablamos de trabajo informático cuando la actividad subyacente es la programación ergonómica, la animación o la contextualización. Este trabajo implica procesos (gestión de movimientos o sensores, consideración de las restricciones de funcionamiento.) y razonamientos (secuenciales, basados en eventos, disyuntivos...) de carácter instrumental o técnico. Conceptos instrumentales como eventos, testes, contadores definen formas particulares de concebir variables (como incrementadores, sensores o acumuladores) u operaciones (como interacciones, comportamientos...).

Trabajo algorítmico

Hablamos de trabajo algorítmico cuando se trata de una actividad sistemática que permite resolver un tipo de problemas siguiendo un conjunto predeterminado de reglas y en un número finito de pasos, hasta llegar a una respuesta en un momento dado (Modeste, 2012). Este trabajo implica procesos (generalización, identificación de regularidades, modelización...) y razonamientos (iterativos, por condiciones, por modularización...) de naturaleza algorítmica. Conceptos algorítmicos como la asignación o las estructuras de control definen formas particulares de entender la igualdad (como una verificación) o las variables (como cantidades computables en un proceso genérico).

Trabajo algebraico.

Hablamos de trabajo algebraico cuando la actividad subyacente implica operaciones de cualquier tipo que se repiten un número finito de veces (Squalli, 2002). Implica procesos (generalización, modelización, operaciones con símbolos...) y razonamientos (analíticos, funcionales, en términos de estructura...) de naturaleza algebraica. Los conceptos algebraicos, como las expresiones numéricas o la equivalencia, definen formas particulares de concebir la igualdad (como equivalencia), las operaciones (en suspenso) y las variables (como objetos conocidos) (Squalli y Jeannotte, 2024)

Existen similitudes interesantes entre el trabajo algebraico y el algorítmico, sobre todo en cuanto a la generalización y la identificación de estructuras o regularidades. Ambos tratan conceptos comunes (como la variable y la igualdad), pero desde enfoques diferentes. Por ello, nos parece interesante estudiar su relación en el contexto de una actividad de programación informática. Abordamos los distintos tipos de trabajo desde la perspectiva de su génesis instrumental, a través del diseño de un programa informático en una plataforma de programación.

Génesis instrumental

Desarrollado inicialmente por Rabardel (1995) desde una perspectiva de ergonomía cognitiva, el modelo instrumental responde a la necesidad de describir el funcionamiento de las herramientas y su relación con el conocimiento matemático movilizado (Soury-Lavergne, 2017). Esta teoría se basa en la distinción fundamental entre un artefacto, diseñado inicialmente para cumplir objetivos específicos, y el instrumento que un sujeto construye a partir de dicho artefacto durante su uso en una actividad situada. Por lo tanto, un artefacto es simplemente una proposición que un sujeto puede desarrollar o no durante una actividad (Trouche, 2005). La génesis instrumental se refiere al proceso mediante el cual un instrumento es construido por un sujeto que participa en una acción en la que interviene un artefacto. Esta construcción implica el establecimiento y desarrollo de esquemas de uso por parte del sujeto implicado en una acción, así como la mejora de las propiedades del artefacto. Se trata de dos niveles de esquemas: esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada. Los esquemas de uso corresponden a las interacciones del individuo con el artefacto (Folcher y Rabardel, 2004). Se refieren a la gestión de las características y propiedades del artefacto y se aplican con relativa independencia de los objetivos de la actividad que se esté llevando a cabo. Los esquemas de acción instrumentada se orientan hacia el objeto de la actividad, es decir, la finalidad para la que se utiliza el artefacto. Incorporan patrones de uso.

La génesis instrumental implica dos procesos. La instrumentalización, orientada hacia el artefacto, que preside el descubrimiento o la adaptación de sus funcionalidades y la instrumentación, orientada hacia el sujeto, que preside la aparición y evolución de esquemas de uso. En nuestro caso, los bloques de instrucciones disponibles en la plataforma Scratch y los algoritmos que se pueden construir ensamblándolos son los artefactos en torno a los cuales se despliegan los instrumentos de trabajo matemático, algorítmico e informático. Los tipos de esquemas permiten caracterizar los tipos de trabajos.

Estrategia para desarrollar el taller

Tarea propuesta

Proponemos una reflexión colectiva sobre la relación entre los tres tipos de trabajo — algorítmico, informático y algebraico— a partir de la resolución de una tarea de programación informática utilizando la plataforma Scratch. Hemos elegido esta plataforma porque está muy extendida en las escuelas de Quebec. La tarea consiste en programar un juego de laberinto en el que el personaje «gato» se desplaza utilizando las teclas de flecha. A medida que lo hace, encuentra «tesoros» que debe ganar resolviendo una ecuación. El juego se detiene cuando el gato alcanza el botón verde situado en la parte inferior derecha del laberinto. Entonces, el programa comprueba que se han ganado todos los tesoros y muestra el tiempo que se ha tardado en completar el laberinto

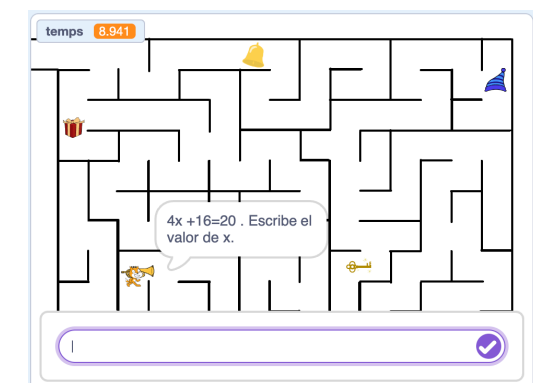


Figura 1. Laberinto algebraico

La tarea es compleja y puede dividirse en tres subtarefas: generación de ecuaciones, resolución de ecuaciones et gestión del laberinto.

Por la generación de ecuaciones, cada uno de los personajes que representan un tesoro debe generar una ecuación de primer grado que cumpla ciertas restricciones sobre el coeficiente, asegurarse de que tiene una solución entera, mostrar la ecuación y pedir la solución al jugador. Por la resolución de ecuación, cada uno de los personajes que representan un tesoro debe calcular la solución de la ecuación generada anteriormente y comparar el valor calculado con el valor introducido por el jugador. Estas dos primeras tareas las repite cada personaje, que genera una nueva ecuación tras cada intento fallido del jugador. La gestión del laberinto incluye la definición de los movimientos del personaje del gato utilizando los comandos de flecha y teniendo en cuenta la topología del laberinto (el gato no puede cruzar paredes...). En esa parte también se trata la gestión del tamaño de todos los personajes, de los sonidos que emiten y de los tiempos de espera. También concierne al número de respuestas correctas (o de tesoros ganados) y a la programación del cronómetro.

Dentro de estas subtarefas se encuentran los tres tipos de trabajo estudiados. El trabajo **informático** se refiere a los aspectos técnicos del diseño del juego. Esto implica, por ejemplo, la

gestión de eventos (como cuando se toca una flecha o un color), instrucciones condicionales y pruebas de igualdad (*si Tesor no es igual a 5*). El trabajo **algorítmico** apoya la implementación de estructuras iterativas más complejas. Incluye la elección y asignación de variables, la definición de las relaciones entre ellas, la determinación de los operadores pertinentes para cumplir las restricciones matemáticas y la elaboración de las pruebas de entrada y salida de las iteraciones. El trabajo **algebraico** permite determinar de forma genérica de las soluciones de las ecuaciones generadas. Se trata también de traducir las restricciones numéricas sobre el coeficiente y la solución de la ecuación que rigen la generación de las ecuaciones a una forma algebraica. Se basa también en la capacidad de generalizar la resolución de ecuaciones de primer grado. Implica un razonamiento analítico (Radford, 2014) que permite tratar las cantidades indeterminadas (coeficientes e incógnitas) como si fueran conocidas y realizar operaciones sobre estos números desconocidos.

Lo que resulta especialmente interesante es que el trabajo algorítmico y el trabajo matemático están estrechamente relacionados. La generalización y el razonamiento iterativo se retroalimentan mutuamente. En particular, esta vinculación implica una fase de denotación que permite asociar variables informáticas a la simbolización de números desconocidos.

Funcionamiento del taller

El facilitador presentará las cuestiones didácticas, los conceptos teóricos y los objetivos del taller durante aproximadamente 10 minutos. A continuación, presentará la tarea de programación que deberán realizar los participantes. Los participantes podrán trabajar individualmente o en equipo. Esta fase durará aproximadamente 50 minutos. A continuación, tendrá lugar una sesión de feedback en grupo. Los diferentes equipos debatirán sobre los problemas/obstáculos encontrados y las soluciones propuestas durante unos 10 minutos. A continuación, el animador presentará su propia versión del programa. Esta versión se podrá comparar con las soluciones propuestas por los participantes.

En la segunda fase de trabajo, los participantes identificarán, individualmente o en equipo, los tres tipos de trabajo que la tarea permite desarrollar. Esta fase se puede hacer descubriendo los esquemas de acción instrumentada, o de forma más intuitiva. A continuación, estos análisis se debatirán en el gran grupo. La atención se centrará en cómo los distintos tipos de trabajo (informático, algorítmico y algebraico) se complementan o se obstaculizan mutuamente. El taller finalizará con un resumen y una conclusión a cargo del responsable del taller.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 7, 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Artigue, M. (2007). Digital technologies: a window on theoretical issues in mathematics education. *Proceedings of CERME*.
- Barma, S. (2018). *Réaliser une étude de cas multiple qui vise à affiner les connaissances sur l'usage pédagogique ou didactique de la programmation dans les écoles du Québec - Rapport final*. CRIRES. <https://lel.crires.ulaval.ca/oeuvre/rapport-final-realiser-une-etude-de-cas-multiple-qui-vise-affiner-les-connaissances-sur>

- Couderette, M. (2016). Enseignement de l'algorithmique en classe de seconde: une introduction curriculaire problématique. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives. Revue internationale de didactique des mathématiques*, 21, 267-296. <https://doi.org/10.4000/adsc.834>
- Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique objet-outil. *Recherche en didactique des mathématiques*, 7(2), 5-31. <https://revue-rdm.com/1986/jeux-de-cadres-et-dialectique/>
- Drijvers, P. (2000). Students encountering obstacles using a CAS. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 5, 189-209. <https://doi.org/10.1023/A:1009825629417>
- Folcher, V. y Rabardel, P. (2004). Usages et appropriation : de l'analyse a priori à l'activité instrumentée. In P. Rabardel et P. Pastré (Eds), *Modèles du sujet pour la conception. Dialectiques Activités Développements* (pp. 129-155). Octarès Éditions. <https://doi.org/10.4000/activites.1885>
- Giaquinto, M. (2005). Mathematical activity. In n Paolo Mancosu, Klaus Froyen Jørgensen & S. A. Pedersen (eds.), *Visualization, explanation and reasoning styles in mathematics* (pp. 75-87). Springer.
- Guin, D., Ruthven, K., & Trouche, L. (2006). *The didactical challenge of symbolic calculators: turning a computational device into a mathematical instrument*. Springer Science & Business Media.
- Guin, D. y Trouche, L. (2002). *Calculatrices symboliques. Transformer un outil en un instrument du travail mathématique: un problème didactique*. La Pensée sauvage éditions.
- Haspekian, M. (2014). Teachers' instrumental geneses when integrating spreadsheet software. In: Clark-Wilson, A., Robutti, O., Sinclair, N. (Eds), *The Mathematics Teacher in the Digital Era. Mathematics Education in the Digital Era*, vol 2. Springer, Dordrecht. https://doi.org/10.1007/978-94-007-4638-1_11
- Kuzniak, A., Tanguay, D., & Elia, I. (2016). Mathematical Working Spaces in schooling: an introduction. *ZDM*, 48(6), 721-737. <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Lagrange, J.-B. (1999). Complex calculators in the classroom: Theoretical and practical reflections on teaching pre-calculus. *International Journal of Computers for mathematical learning*, 4, 51-81.
- Lagrange, J.-B., & Rogalski, J. (2017). Savoirs, concepts et situations dans les premiers apprentissages en programmation et en algorithmique. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 22, 119-158. <https://doi.org/10.4000/adsc.723>
- Laval, D. (2018). Une ingénierie didactique autour de "l'algorithme de dichotomie" illustrant un enseignement de l'algorithme en première scientifique comme objet d'apprentissage dans un champ des mathématiques: l'analyse. Actes du Séminaire Bational en Didactiques des Mathématiques.
- Modeste, S. (2012). *Enseigner l'algorithmique, pourquoi? Quels apports pour l'apprentissage de la preuve? Quelles nouvelles questions pour les mathématiques?* [Mémoire de thèse, Université de Grenoble].
- Modeste, S., Gravier, S., & Ouvrier-Buffet, C. (2010). Algorithmique et apprentissage de la preuve. *Repères Irem*, 79, 51-72.
- Noss, R., Healy, L., & Hoyles, C. (1997). The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational Studies in Mathematics*, 33, 203-233. <https://doi.org/10.1023/A:1002943821419>
- Rabardel, P. (1995). *Les hommes et les technologies; approche cognitive des instruments contemporains*. Armand Colin.
- Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. *Mathematics Education Research Journal*, 26, 257-277. <https://doi.org/10.1007/s13394-013-0087-2>
- Reichenbach, H. (1938). *Experience and prediction: An analysis of the foundations and the structure of knowledge*. Chicago, Ill.: The University of Chicago Press
- Restrepo, A. M. (2008). *Genèse instrumentale du déplacement en géométrie dynamique chez des élèves de 6ème* [Thèse de doctorat, Université Joseph-Fourier-Grenoble II].
- Squalli, H. (2002). *Une reconceptualisation du curriculum d'algèbre dans l'éducation de base*. [Thèse de doctorat, Université Laval].
- Squalli, H., y Jeannotte, D. (2024). Un modèle praxéologique de référence de la pensée algébrique élémentaire. *Revue québécoise de didactique des mathématiques*, 66-101.
- Soury-Lavergne, S. (2017). *Duos d'artefacts tangibles et numériques et objets connectés pour apprendre et faire apprendre les mathématiques*. [Mémoire d'HDR, École Normale Supérieure de Lyon].
- Trouche, L. (2005). *Des artefacts aux instruments, une approche pour guider et intégrer les usages des outils de calcul dans l'enseignement des mathématiques*. Actes de l'Université d'été, Le calcul sous toutes ses formes.



Mineract como herramienta didáctica para el reforzamiento de la Geometría Analítica

Marco Diego Sáenz Trejos
Universidad Nacional de Costa Rica
Costa Rica
marco.saenz.trejos@una.cr

Resumen

Esta comunicación presenta una experiencia realizada con un grupo de estudiantes de undécimo año del Colegio Humanístico Costarricense, Campus Nicoya, donde, a través del juego Mineract Education, crearon historias con diversos escenarios y personajes. El objetivo fue diseñar problemas de geometría analítica contextualizados en un entorno lúdico y virtual, que a su vez propiciara el dominio de los contenidos matemáticos que abordarían. Para ello los estudiantes trabajaron en forma grupal con un tema específico de geometría analítica culminando con la presentación del proyecto. Como resultado, surgieron trabajos visualmente atractivos, con narrativas que reflejan la creatividad de los estudiantes al integrar conceptos matemáticos en la construcción de los desafíos.

Palabras Clave: Didáctica de la Matemática; Educación secundaria; Enseñanza virtual; Educación para jóvenes; Software; Geometría; Colegio Humanístico Costarricense; Guanacaste; Costa Rica.

Definición y relevancia del problema

En los últimos años, el uso de herramientas digitales para potenciar el aprendizaje de las Matemáticas ha tomado un lugar protagónico en la educación, siendo Mineract Education una opción versátil que fomenta la comprensión de conceptos a través de la exploración y la resolución de problemas en un entorno de realidad virtual. Esta herramienta permite a los estudiantes construir representaciones gráficas de situaciones Matemáticas, promoviendo la creatividad y el pensamiento analítico, mientras se divierten.

La relevancia de esta experiencia se basa en el buen uso a un juego de realidad virtual semi inmersiva que llama mucho la atención de los estudiantes, motivándolos a crear situaciones problema con conceptos de geometría analítica, y dándoles, a estos temas, un sentido contextualizado en su historia.

Así, el principal objetivo de esta experiencia es generar un mayor dominio de los contenidos mediante la creación de situaciones problema en un espacio lúdico virtual, para el fortalecimiento de las capacidades matemáticas de los estudiantes.

El uso de realidad virtual, relato digital y creación de problemas, en un solo juego, hace de esta experiencia un potencial recurso didáctico para trabajar distintos temas matemáticos de manera llamativa, actualizada y con muchas formas de abordar contenidos que, en ocasiones, los estudiantes no encuentran su aplicación o interés.

Referencial teórico

Minecraft Education puede definirse como un Juego Serio, como lo definen Bossolasco, Enrico, Casanova, y Enrico (2015) como “aquellos juegos que además del efecto lúdico inherente al género, fueron diseñados con un propósito específico más allá del entretenimiento. Este tipo de juegos transmiten mensajes o ideas sobre determinado tema, buscan intencionalmente generar habilidades, reacciones, interpelar a los jugadores, contribuir a internalizar conceptos.” (p.3). Este incorpora elementos con fines educativos, tales como pizarras, mapas, libros, cámaras fotográficas y personajes no jugables (NPCs por sus siglas en inglés), entre otros. Estos elementos permiten crear una interacción entre los personajes y jugadores, además facilitan la inclusión de tareas tanto en el juego de realidad virtual como externo a este, abriendo esto a una diversa experiencia de aprendizaje.



Figura 1. Elementos con fines educativos en Minecraft Education

Jumbo Castillo Esther Maricela y Castro Morocho Rosa Annabel. (2016) señalan los aportes que hace esta teoría a la educación matemática:

La utilización del juego serio es un recurso en la enseñanza de Matemáticas para trabajar diversos conceptos, implica una serie de procesos que contribuye al desarrollo cognitivo, integral, emocional y mejora la capacidad de pensamiento reflexivo del estudiante, el juego educativo facilitará tanto al docente como al estudiante a la realización de cada una de las actividades lo cual permitirá retroalimentar y afianzar el conocimiento adquirido en el aula. (p.42)

Por otro lado, la realidad virtual es una herramienta didáctica poderosa que transforma la enseñanza al crear entornos inmersivos e interactivos, donde los estudiantes pueden explorar conceptos complejos de manera visual y práctica. Vera, Ortega y Burgos (2003), apuntan sobre la realidad virtual que “dichas experiencias generarán un conocimiento directo, personal, subjetivo e implícito en la medida de lo posible. Además, permiten una buena comprensión de elementos abstractos, hechos o fenómenos complejos para los estudiantes, que de otra manera más rudimentaria se comprenderían en menor medida.” (p.6). En esta experiencia se les solicitó a los estudiantes que varios jugadores pudieran interactuar en el reto creado, dando la posibilidad al trabajo diseñado, ser utilizado por otros estudiantes de forma simultánea, aumentando así la experiencia de realidad virtual.

El Relato Digital como una herramienta didáctica, es una de las herramientas que los estudiantes utilizaron para crear una experiencia similar a un video juego de estrategia. Esta técnica facilita la conexión emocional con los temas, mejorando la retención de información y fomentando la creatividad. Al fomentar en los estudiantes la creación de narrativas, se promueve el pensamiento crítico, la resolución de problemas y la comprensión de conceptos complejos. El relato digital Davidson y Porter (citado por Rosales y Roig, 2017) lo definen como “un arte que es tanto personal como educativo y el proceso de construir un relato digital puede ser difícil de definir, porque no se basa en una fórmula única, y esto se debe, básicamente, a que el relato surge de la visión personal, de cómo el creador se involucra personalmente con la información y la historia.”(p.165).

La creación de problemas matemáticos conlleva un amplio dominio de los contenidos y va ligada a la creatividad del estudiante para pensar, a priori, en el resultado deseado en un ejercicio o situación problema. Esta práctica no solo refuerza el aprendizaje, sino que también incrementa la motivación y el compromiso de los alumnos al involucrarse activamente en su proceso educativo. En el proyecto realizado los estudiantes debían de crear, al menos, cuatro situaciones problema con el tema seleccionado. Y un gran reto fue poder adaptarlos a la narrativa y contexto creados.

Método y desarrollo conceptual

Este proyecto se llevó a cabo con un grupo de 20 estudiantes de nivel de undécimo año del colegio Humanístico Costarricense Campus Nicoya en el año 2023. Las edades de los estudiantes eran entre 16 y 17 años. La mayoría indica haber jugado Minecraft y otros aseguran un alto nivel del dominio del juego.

El tema de geometría analítica fue tratado en el primer semestre del año 2022, por lo que para el trabajo asignado debían retomar los contenidos ya estudiados.

A los estudiantes se les asigna el proyecto con un valor porcentual de 10% en la nota del segundo semestre. Se formaron cuatro grupos de 5 estudiantes, cada uno, y debían considerar una serie de requerimientos mínimos para el desarrollo y elaboración del mismo. El Cuadro 1 resume estas indicaciones.

Cuadro 1

Requerimientos a tomar en cuenta para la elaboración del proyecto.

Requerimiento	Especificación
Escenario llamativo	El lugar debe ser construido de forma que el jugador se sienta inmerso en la época o espacio que se quiera presentar. Ejemplo si se desarrolla en el antiguo Egipto, todo lo que se presente sea acorde al tema; o si se trabaja en una biblioteca, castillo, mina, colegio, un barco, etc. debe tener ese ambiente bien definido.
Escenario Simultáneo	Se debe construir el escenario de forma que 3 jugadores puedan competir entre ellos simultáneamente en el juego. Pero las preguntas y pruebas deben ser independientes para cada jugador de forma que su avance sea separado y ambos logren comprobar cada uno su conocimiento y habilidad.
Creación de, al menos, cuatro situaciones problema	A lo largo del juego deben aparecer al menos 4 preguntas que evalúen el tema asignado. Estas pueden estar inmersas en el mundo o leerse a través de un NPC o un link externo. Las respuestas deben contener la opción correcta que les permitirá avanzar y otras respuestas incorrectas que les podrían hacer devolverse, perder puntos, o dirigirse por un camino más largo, etc.
Al menos cuatro retos propios del juego	A lo largo del juego deben aparecer al menos 4 preguntas o retos que no tienen que ver con el tema matemático pero que el jugador deberá poner en práctica sus habilidades para poder avanzar.
Uso de cámaras y libros	Habilitar el uso de cámaras y libros con el fin de que se vayan documentando cada prueba o espacios de interés, al final el jugador deberá presentar un pdf de su libro con fotos y apuntes.
Uso de redstone	Las diferentes pruebas asociadas a las preguntas deben tener algún elemento que trabaje con redstone, bloques de comando, pistones, trampas, placas de presión, arco y flecha, botones, palancas, etc. Ser creativos en este punto.
Interdisciplinar	Con el fin de realizar un juego más completo que involucre diferentes disciplinas, se agregará una pregunta o reto de programación mediante el uso del CODE BUILDER. Para esto debe ser claro en el reto que se quiere alcanzar, y dar unas instrucciones básicas para realizarlo (para ello puede hacer uso del NPC) Se recomienda que la programación pedida sea por medio de bloques. También se agregará una pregunta o reto de química haciendo uso del CHEMISTRY LAB JOURNAL, para este caso deben ser sobre temas del nivel de décimo y es deseable que se utilicen instrumentos como el “element constructor”, “Compound creator”, “Lab table” o “Material reducer” estos retos serán optativos para el jugador, pero la idea es motivarlos con puntaje extra o un camino más corto para la meta, etc.
Utilizar Minecraft Education	Al terminar su proyecto se debe guardar y compartir mediante drive o llave maya de forma que se pueda abrir y jugar en la pantalla del colegio.

Los estudiantes escogieron trabajar con temas como: representación analítica de una circunferencia, posición relativa de un punto respecto a una circunferencia, posición relativa entre rectas, posición relativa entre rectas y circunferencias, y traslaciones.

Resultados

Los estudiantes construyeron escenarios muy detallados, en donde la experiencia inmersiva es más agradable y envolvente. Todos los grupos utilizan los NPCs para dar las pautas de los retos y la ruta a seguir. En su mayoría, demuestran un gran dominio de los componentes del juego y sus utilidades. También facilitan, a disposición de los jugadores, cámaras y libros que les permitirán documentar la aventura y sus hallazgos.



Figura 2. Escenario egipcio planteado por el Grupo 1

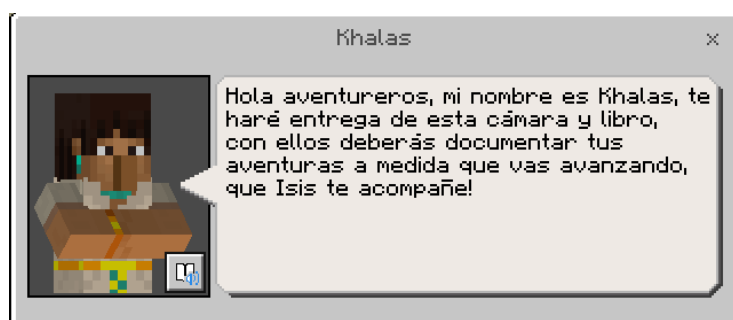


Figura 3. NPC interactuando con un jugador. Elaborado por el Grupo 1.

Con respecto a la creación de situaciones problema, la mayoría plantea ejercicios de geometría analítica como retos para seguir avanzando en la historia creada.



Figura 4. Una situación problema sobre el tema de traslaciones y posición relativa de un punto y la circunferencia, creada por el Grupo 2, como un reto para seguir avanzando.

En los problemas creados, los estudiantes tienen claro los conceptos, redactan de forma clara el ejercicio y colocan de forma correcta las respuestas. Aunque no se realizan problemas con un nivel alto, los ejercicios planteados sirven para reforzar conceptos básicos de geometría analítica.



Figura 5. Opciones de respuesta para un problema sobre el tema de representación analítica de una circunferencia, planteado por el Grupo 2.

Algunos de los problemas creados están contextualizados a la narrativa del escenario, lo que los hace más interesantes de abordar, por ejemplo, cada una de estas situaciones las planteaba un NPC en distintos escenarios:

Situación problema sobre el tema de posición relativa entre una recta y una circunferencia, creada por el Grupo 1: *Para garantizar que el agua fluya eficientemente desde el río hacia los campos, te enfrentas a un desafío. Debes determinar la relación entre un canal de riego y una isla en el río. La isla que tiene forma circular, y el canal de riego que sigue una ruta representada por una línea recta. La ecuación que describe la isla es $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 9$, y la ecuación de la ruta del canal de riego es $3x - 2y = 5$.*

Entonces ¿Cómo se relaciona la ruta del canal de riego con la isla en el río?

- El canal de riego cruza la isla.*
- El canal de riego toca suavemente la orilla de la isla.*
- El canal de riego está completamente fuera de la isla.*

Situación problema sobre el tema de posición relativa entre rectas, creada por el Grupo 1: *Supongamos que eres un destacado astrónomo de Horus. Tu tarea es predecir el momento exacto en el que ocurrirá un eclipse solar, un evento de gran importancia en la vida de los egipcios. Para llevar a cabo esta predicción, debes entender la relación entre dos cuerpos celestes: el Sol y la Luna. Has observado que el Sol sigue una trayectoria en el cielo, que se puede representar mediante la ecuación $2x + 3y = 8$ y la Luna sigue otra trayectoria representada por $6x - 4y = 12$. Para determinar cuándo ocurrirá el próximo eclipse solar, necesitas entender la relación entre las trayectorias del Sol y la Luna. ¿Cuál es esta relación?*

- El Sol y la Luna siguen trayectorias paralelas en el cielo.*
- El Sol y la Luna se cruzan en el cielo formando un ángulo agudo.*
- Las trayectorias del Sol y la Luna no son ni paralelas ni perpendiculares.*
- El Sol y la Luna siguen trayectorias perpendiculares en el cielo.*
- El Sol y la Luna siguen la misma trayectoria en el cielo.*

Podemos notar un buen manejo de los conceptos de geometría analítica, así como la contextualización de los problemas a la narrativa de la época egipcia y sus necesidades. Al crear estos problemas los estudiantes profundizan en el contenido y a su vez le dan aplicación, en un espacio ficticio, al tema como tal.

Conclusiones

Esta experiencia didáctica fue muy enriquecedora para los estudiantes, que, en su mayoría, explotaron su creatividad, trabajaron de forma colaborativa y crearon situaciones problemas, retos o ejercicios matemáticos con algunos temas de geometría analítica, que terminaron dominando para poder utilizarlos.

Además, sus valiosos trabajos podrán ser utilizados, a manera de recurso didáctico, por otras generaciones para practicar los diferentes temas que abordaron en sus proyectos.

Con el potencial del juego Minecraft Education podría desarrollarse futuras investigaciones relacionadas a temas STEM, por su variada gama de herramientas y opciones multidisciplinarias.

Como recomendación, creo que el proyecto se puede depurar más y lograr objetivos de aprendizaje más puntuales. Pero siempre debe permitirse al estudiante un espacio lúdico en sus creaciones para que mezclen sus conocimientos previos del juego, con las nuevas directrices a seguir.

Finalmente, como profesor no se necesita mayor conocimiento en el juego Minecraft Education (normalmente los estudiantes son especialistas), por lo que animo a cualquier colega a emular o mejorar esta experiencia didáctica, aunque haya tratado poco con el juego en sí.

Referencias y bibliografía

- Bossolasco, L. M., Enrico, R. J., Casanova, B. A., & Enrico, E. E. (2015, marzo). *Kokori, un serious game. La perspectiva de los estudiantes ante una propuesta de aprendizaje innovadora*. RED. Revista de Educación a Distancia, 45, 2-17.
- Jumbo, M., & Castro, A. (2016). Juego serio como eje motivador en la asignatura de matemáticas en la Unidad Educativa Héroes de Jambelí. <http://repositorio.utmachala.edu.ec/handle/48000/8056>
- Rosales, S., & Roig, R. (2017). *El relato digital (digital storytelling) como elemento narrativo en el ámbito educativo*. Notandum. <http://hdl.handle.net/10045/58973>
- Vera, G., Ortega, J., & Burgos, M. (2003). La realidad virtual y sus posibilidades didácticas. *Etic@ net: Revista científica electrónica de Educación y Comunicación en la Sociedad del Conocimiento*, 2(2).



Modelagem matemática e tecnologias digitais: Ensino de áreas de triângulos com base nos pressupostos metodológicos da Sequência Fedathi

Raimundo Nonato Barbosa **Cavalcante**
Instituto Federal do Maranhão
Brasil

raimundo.cavalcante@ifma.edu.br

Joalisson Rego **Pavão**
Instituto Federal do Maranhão
Brasil

joalisson210210@gmail.com

Rosângela Maria **Albuquerque**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

rosangela.sana@gmail.com

José Gleison Alves da **Silva**
Universidade Federal do Ceará
Brasil

gleison.proformat.seduc@gmail.com

Maria José Costa dos **Santos**
Universidade Federal do Ceará - UFC
Brasil

mazeautomatic@gmail.com

Jorge Carvalho **Brandão**
Universidade Federal do Ceará - UFC
Brasil

profbrandao@ufc.br

Resumo

Este estudo investiga o ensino das áreas de triângulos por meio da Modelagem Matemática (MM) e Tecnologias Digitais de Informação e Comunicação (TDIC), com base na Sequência Fedathi (SF). O objetivo é explorar como a MM, aliada às

TDIC, contribui para o ensino dentro da abordagem da SF. A pesquisa, de natureza exploratória e qualitativa, foi fundamentada em revisão de literatura e aplicação de sessões didáticas. A MM utiliza procedimentos matemáticos em situações cotidianas, as TDIC oferecem ambientes interativos para manipulação de figuras, e a SF promove a autonomia dos alunos, com o professor como mediador. Os resultados mostram que a integração entre MM e TDIC torna a aprendizagem mais significativa, facilitando a compreensão das áreas de triângulos e potencializando a autonomia dos alunos, enquanto o professor atua como facilitador.

Palavras-chave: Ensino de Matemática; Geometria Plana; Metodologia de Ensino; Modelagem Matemática; Sequência Fedathi; Tecnologias Digitais

Introdução

A integração da MM com as TDIC surge como uma abordagem eficaz no ensino de geometria, especialmente no estudo das áreas de figuras planas. A SF, uma metodologia que incentiva o pensamento crítico e o protagonismo dos alunos no processo de aprendizagem, pode ser aprimorada pelo uso de ferramentas digitais, com o professor atuando como mediador.

Os princípios teóricos da SF podem ser vivenciados ao ensino das áreas de figuras planas, potencializando os resultados com o uso das TDIC. Essa abordagem permite aos alunos explorar o conteúdo de forma ativa e reflexiva, promovendo uma aprendizagem mais significativa e conectada à realidade. A combinação de MM, TDs e SF oferece uma metodologia que aprimora a prática pedagógica docente.

Esta pesquisa tem como objetivo compreender como a integração da SF, MM e TDs pode contribuir para o ensino das áreas de figuras planas. A metodologia proposta busca melhorar a prática pedagógica e fomentar uma aprendizagem mais dinâmica e interativa, com a mediação docente. O trabalho apresenta os aspectos teóricos e metodológicos envolvidos, os resultados da intervenção realizada e as considerações finais sobre a pesquisa.

Referencial Teórico

Este estudo foi embasado em pesquisas de diversos autores que exploraram a Modelagem Matemática (MM), as Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDIC) e a Sequência Fedathi (SF). Trabalhos posteriores, como os de Scipião, Azevedo e Silva (2021) e Miranda, Viana e Santos (2024), reforçam essa abordagem, evidenciando sua relevância para o ensino da matemática.

Para Reis, Brandão e Santos (2024) a construção de modelos ou esquemas resultantes de um trabalho colaborativo de pesquisa contribui para que o aluno desenvolva uma perspectiva diferenciada sobre o processo de aprendizagem, estimulando sua curiosidade, aumentando sua motivação e despertando maior interesse pelo conteúdo estudado. Nesse contexto, a pesquisa de Araújo e Menezes (2022) destaca os benefícios dessa metodologia, ressaltando que o uso de ferramentas digitais possibilita um ambiente interativo no qual os alunos exploram figuras planas de maneira dinâmica. Ao ser combinada com a SF, essa abordagem permite a criação de modelos

interativos que auxiliam na visualização e manipulação das formas geométricas, promovendo uma compreensão mais profunda dos cálculos de área e facilitando a aprendizagem ativa.

As TDIC oferecem um feedback imediato aos estudantes, permitindo a correção de conceitos errôneos em tempo real, aspecto essencial para a assimilação do conceito de área. Segundo Scipião, Azevedo e Silva (2021), esses recursos digitais proporcionam um ambiente interativo no qual os alunos podem visualizar e manipular figuras geométricas, tornando o aprendizado mais intuitivo e envolvente. Esse processo contribui para uma melhor compreensão de conceitos matemáticos complexos.

A SF, quando associada à MM, favorece o desenvolvimento da autonomia dos estudantes. Ao utilizar ferramentas digitais, os alunos podem explorar e manipular figuras planas, como triângulos, quadrados e retângulos, assumindo maior controle sobre seu aprendizado. Essa abordagem prática permite que desenvolvam um entendimento mais sólido sobre os cálculos de área, promovendo um aprendizado mais significativo.

A Sequência Fedathi estrutura-se em quatro fases: tomada de posição, maturação, solução e prova, que podem ser integradas eficazmente à modelagem digital. Conforme Miranda, Viana e Santos (2024), a SF incentiva os professores a planejarem suas aulas de maneira reflexiva, incorporando tecnologias digitais que favorecem a compreensão das áreas de figuras planas. Dessa forma, a combinação entre MM, SF e TDIC cria um ambiente interativo que promove autonomia, engajamento e aplicação prática, preparando os alunos para enfrentar desafios matemáticos futuros.

Método e desenvolvimento conceitual

Este estudo caracteriza-se como uma pesquisa descritiva e exploratória, com abordagem qualitativa, enquadrando-se nos moldes da pesquisa-ação, conforme Gil (2002) e Prodanov e Freitas (2013). O desenvolvimento do trabalho iniciou-se com uma pesquisa bibliográfica em fontes como o banco de Teses e Dissertações, Google Acadêmico, periódicos da Capes, Scielo e YouTube, a fim de estruturar uma base teórica consistente para a investigação.

A pesquisa utilizou como referência um lance específico de uma partida de futebol, no qual se analisou a triangulação entre jogadores. Com base nessa escolha, foram definidas as Tecnologias Digitais (TDs) que auxiliariam na análise. O processo metodológico seguiu os preceitos da Modelagem Matemática (MM) propostos por Burak (1998, 2004) e Burak & Klüber (2013), fundamentando-se na Sequência Fedathi (SF) para estruturar a prática pedagógica.

Foram empregados diversos softwares na condução do estudo: o Canva foi utilizado para desenhar os triângulos na imagem extraída do jogo, o Google Earth permitiu localizar o estádio e estimar as dimensões aproximadas dos lados do triângulo, e o GeoGebra possibilitou a construção geométrica e o cálculo das alturas dos triângulos, levando à dedução do algoritmo da área. Essa abordagem proporcionou uma análise interativa e aprofundada do conceito matemático.

A aplicação prática da pesquisa ocorreu na disciplina de Metodologia de Ensino de Matemática, com discentes do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal do Maranhão, campus Zé Doca. O estudo fez parte de uma pesquisa de Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) e foi desenvolvido em duas sessões didáticas de 100 minutos cada, distribuídas ao longo de duas semanas. Durante esse período, os alunos participaram ativamente das etapas da MM, explorando conceitos matemáticos de maneira dinâmica e contextualizada.

Na primeira etapa da pesquisa foi definido o objeto de conhecimento, as metodologias aplicadas e a situação da realidade a ser objeto de modelagem. Na segunda etapa foi realizada a pesquisa bibliográfica acerca do tema da pesquisa. Na terceira etapa foram realizadas as seções didáticas, onde a tomada de posição foi apresentada e ocorreu a maturação onde definiu-se as TDIC a serem utilizadas e como o problema seria abordado no ambiente computacional.

Para a solução os discentes contaram com o apoio de computadores conectados à internet para acessar o Canva, onde foi desenhado o triângulo a partir da imagem do lance estudado, o Google Earth para acesso virtual ao campo onde realizou-se a partida, fazer as possíveis marcações dos jogadores, desenhar e medir os lados do triângulo e o Geogebra, para construção de um triângulo semelhante utilizado na modelagem e obtenção da sua área. A quinta etapa constituiu da prova com a análise crítica das soluções.

Resultados

O presente estudo consiste em uma pesquisa que teve como foco o ensino e aprendizagem do conceito de área de figuras planas. Para isso, foram utilizadas como ferramentas auxiliares as tecnologias digitais Google Earth e GeoGebra, com a Modelagem Matemática (MM) e o suporte da Sequência Fedathi (SF) como metodologias aplicadas à prática pedagógica docente.

A SF foi estruturada nas etapas de preparação, vivência e análise. Na fase de vivência, a Tomada de Posição envolveu a determinação da área de figuras planas por meio da Modelagem Matemática. A maturação ocorreu com a seleção de um polígono específico para a modelagem, a escolha das ferramentas digitais adequadas e a verificação, junto aos discentes, dos conceitos matemáticos necessários para a realização da tarefa. Durante essa etapa, foram estabelecidas as três fases iniciais da MM, que orientaram a formulação das situações de modelagem.

Com o objetivo de utilizar a MM para determinar áreas de triângulos em situações reais, escolheu-se como contexto o futebol, mais especificamente a triangulação entre jogadores, fenômeno que ocorre quando o passe da bola entre três atletas forma um triângulo. O desenvolvimento seguiu o processo metodológico da MM proposto por Burak (1998, 2004), composto pelas etapas: Escolha do Tema, Pesquisa Exploratória, Levantamento dos Problemas, Resolução dos Problemas e Análise Crítica das Soluções.

Para a realização da pesquisa, foram analisadas diversas partidas de futebol em busca de lances decisivos que apresentassem triangulações. Como objeto de estudo, foi selecionado um dos jogos mais emblemáticos do Flamengo: a final da Copa Libertadores da América de 2019, contra o River Plate, realizada em 23 de novembro no Estádio Monumental de U, em Lima, no Peru.

No minuto 88 da partida, ocorreu a triangulação analisada neste estudo. Conforme ilustrado na Figura 1, o jogador Bruno Henrique (BH) driblou um defensor adversário e passou a bola para Jorge de Arrascaeta (ARRASCA), que, mesmo em uma posição difícil, conseguiu tocar para Gabriel Batista (GABI), resultando no gol que consolidou a virada e o título do Flamengo

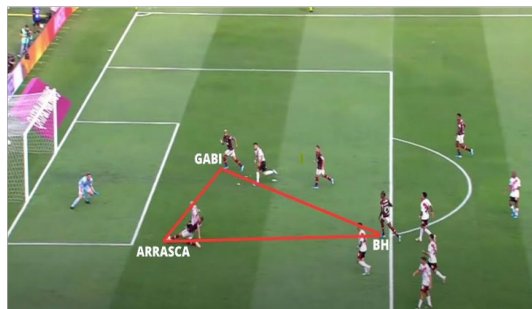


Figura 1 – Triangulação do ataque da equipe do flamengo

O levantamento dos problemas, próxima etapa da MM, de acordo com (Burak; Klüber, 2013), é fundamental para o seu desenvolvimento, uma vez que contribui para o desenvolvimento do pensamento lógico e coerente. Após isso, surgiram as indagações: a) Por meio dos triângulos traçados, observando as imagens dos lances, é possível deduzir a distância aproximada entre dois jogadores? b) Sendo possível encontrar as medidas entre os jogadores, como calcular a altura dos triângulos? c) Após dimensionar os lados e a altura, como calcular e deduzir que a área do triângulo é dada pelo produto da base e altura dividido por dois?

A partir dos problemas levantados, seguiu-se para a resolução dos problemas, etapa esta que se intersecta com a fase da Solução presente na SF. Essa etapa foi dividida em dois momentos. O primeiro foi utilizado para encontrar as medidas aproximadas dos lados (distância entre os jogadores) e altura do triângulo. Para isso, foram usadas as ferramentas do Google Earth e GeoGebra. No segundo, foi calculada a área das figuras por meio da fórmula básica.

Para encontrar os lados do triângulo, foi necessário pesquisar pelo estádio Monumental de U no Google Earth. Então, foram adicionados 3 pontos: D, E e F, referente a posição aproximada de cada jogador. D representa a posição do Bruno Henrique (BH), E é o local que o Arrascaeta (ARRASCA) toca na bola, e F é a posição que o Gabriel (GABI) chuta para o gol. Dando continuidade, utilizou-se a opção “medir distâncias e área” presente no Google Earth. Os valores encontrados, aproximadamente, para lados do triângulo DEF foram: $DE = 9,43 \text{ m}$, lado $EF = 9,22 \text{ m}$ e $DF = 11,62 \text{ m}$, como mostra a figura 2.

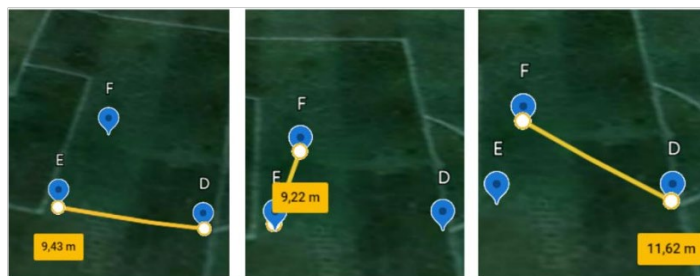


Figura 2 – Medição aproximada dos lados do triângulo utilizando o Google Earth

Com a finalidade de encontrar altura do triângulo, foram seguidos alguns passos descritos na situação 1. Além disso, para a representação no GeoGebra, também assumiu-se a escala de 1:10. Primeiro, delineou-se três segmentos proporcionais: $DE = 94,3$ cm, $EF = 92,2$ cm e $DF = 116,2$ cm. Em seguida, a partir de um ponto qualquer da malha, construí-se um círculo com centro E (ARRASCA). Após isso, marcou-se um ponto D (BH) na circunferência e traçou-se o seu raio, de medida equivalente DE.

A partir desse mesmo centro, construí-se outro círculo com raio, de medida EF. Com o centro no ponto D marcado na primeira circunferência e com raio medindo DF traçou-se o terceiro círculo. Em seguida, marcou-se o ponto de interseção F (GABI) entre a segunda e a terceira circunferência. Finalmente, criou-se o triângulo formado pelo centro ARRASCA, ponto BH e a interseção GABI. Assim, obteve-se um triângulo semelhante ao triângulo do Google Earth.

Desse modo, após construir o triângulo $\triangle BH$ -ARRASCA-GABI, foi possível dimensionar a altura. Para isso, foi inserida uma reta perpendicular ao lado BH-ARRASCA, passando pelo vértice GABI. Assim, adicionou-se um segmento h que vai do vértice GABI até o ponto de interseção L. Como mostra a figura 3, foi encontrado o seguinte valor: $h \cong 89,8$ cm.

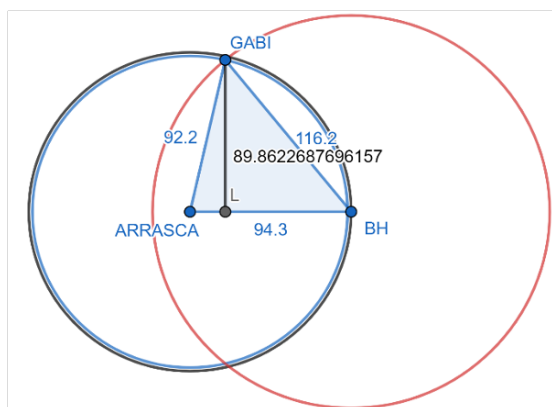


Figura 3 – Construção de triângulo semelhante no Geogebra

Descobrimos a área do triângulo $\triangle BH$ ARRASCA-GABI. Para isso, como mostra a figura 4, traçou-se uma reta paralela ao segmento BH-ARRASCA, passando pelo vértice GABI, e outra paralela ao lado ARRASCA-GABI, tocando o vértice BH. Feito isso, desenvolveu-se um paralelogramo formado pelos vértices ARRASCA, GABI, BH e Y (ponto de interseção das duas retas).

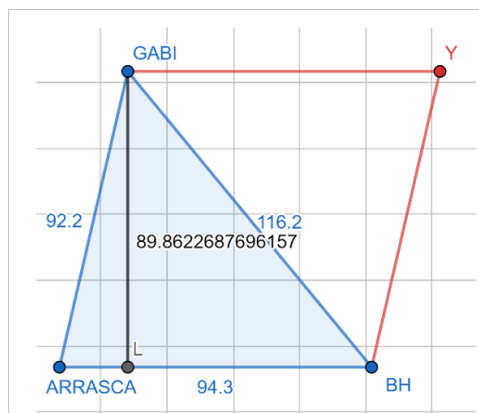


Figura 4 – traço do paralelogramo para justificar a área do triângulo

Assumiu-se o lado BH-ARRASCA como base e, sabendo que a altura GABI-L do paralelogramo BH-ARRASCA-GABI-Y é aproximadamente 8,98 m, foi possível afirmar que sua área é: $A_p = (BH - ARRASCA) \cdot (GABI - L)$ Então, $A_p = (9,43) \cdot (8,98) \cong 84,6m^2$ O paralelogramo BH – ARRASCA – GABI – Y = $\Delta(BH - ARRASCA - GABI) + \Delta(BH - GABI - Y)$ com a reta suporte do segmento GABI – Y paralela ao lado BH – ARRASCA e a reta suporte do segmento BH – Y paralela ao lado ARRASCA – GABI.

Note que o lado BH-GABI é comum aos dois triângulos e $BH-Y \equiv ARRASCA-GABI$ e $BH-ARRASCA \equiv GABI-Y$. Logo, os dois triângulos são congruentes. Dito isso, pode-se assumir que a área do triângulo $\Delta BH - ARRASCA - GABI$ é igual a metade da área do paralelogramo. Para se encontrar a área do triângulo $\Delta BH - ARRASCA - GABI$, seguiu-se a linha de raciocínio de Batista (2014). $A_{\Delta} = (BH - ARRASCA) \cdot (GABI - L)/2 = (9,43) \cdot (8,98)/2 \cong 42,3m^2$

Depois da solução, passou-se para a última fase da MM que correspondeu a análise crítica das soluções. Para Burak e Klüber (2013, p. 24), “Esta etapa da Modelagem é um momento muito rico e especial para analisar e discutir a solução ou as soluções encontradas. É um momento em que se fazem as considerações e análise das hipóteses consideradas na etapa de levantamento dos problemas”.

A utilização do GeoGebra e do Google Earth para calcular as distâncias entre os jogadores e, posteriormente, a altura dos triângulos, evidenciou a importância das tecnologias no ensino e aprendizagem. As TDIC facilitaram diversas etapas da MM, tornando o processo mais acessível e dinâmico. Além disso, o uso do futebol como contexto para o problema despertou nos estudantes maior interesse, pois se trata de um esporte amplamente apreciado no Brasil, país historicamente reconhecido por sua forte relação com essa modalidade.

A resolução do problema demonstrou que a prática da MM, aliada às TDIC e ao suporte da Simulação Física (SF), proporciona um aprendizado mais envolvente. Os alunos foram desafiados a encontrar as distâncias entre os jogadores utilizando o Google Earth para dimensionar os lados dos triângulos e, em seguida, calcular suas alturas. Esse processo contribuiu para a dedução da fórmula da área do triângulo, permitindo que os estudantes percebessem, na prática, a aplicabilidade da matemática em situações reais.

Conclusões

Os resultados desta pesquisa demonstram que a MM, aliada às TDIC e fundamentada na SF, aprimora significativamente o ensino e aprendizagem das áreas de triângulos. A utilização de ferramentas como o Google Earth e o GeoGebra permitiu que os alunos visualizassem e manipulassem figuras planas de forma interativa, favorecendo a construção do conhecimento matemático. Além disso, a abordagem contextualizada pelo futebol despertou maior interesse dos estudantes, tornando o aprendizado mais dinâmico e envolvente.

A combinação entre MM, SF e TDIC mostrou-se uma estratégia inovadora para o ensino da matemática, promovendo autonomia, pensamento crítico e um ambiente de aprendizagem mais reflexivo. O feedback imediato proporcionado pelas TDIC auxiliou na correção de erros em tempo real, fortalecendo a aprendizagem ativa. Dessa forma, essa metodologia não apenas facilita a assimilação dos conteúdos, mas também demonstra que a matemática pode ser aplicada de maneira prática e significativa no cotidiano dos alunos.

Referências e bibliografia

- Araújo, C. H. D. de, & Menezes, D. B. (2022). *Mathematical proof and epistemological obstacles: Assumptions of the methodological teaching proposal of the Fedathi sequence*. 17(4), em0707.
<https://doi.org/10.29333/iejme/12315>.
- Batista, F. da S. (2014). Um estudo sobre área de triângulos e polígonos convexos e não convexos (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Campina Grande.
<http://dspace.sti.ufcg.edu.br:8080/jspui/handle/riufcg/2183>
- Burak, D. (1998). Formação dos pensamentos algébrico e geométrico: uma experiência com modelagem matemática. *Pró-Mat*, 1(1), 32-41.
- Burak, D. (2004). A modelagem matemática e a sala de aula. In *Anais do 1º Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática*. Londrina: UEL.
- Burak, D., & Klüber, T. E. (2013). Considerações sobre a Modelagem Matemática em uma perspectiva de Educação Matemática. *Margens Interdisciplinar*, 6(8), 33-50.
<http://novoperiodicos.ufpa.br/periodicos/index.php/revistamargens/article/view/2745/2870>
- Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa* (4ª ed.). São Paulo: Atlas.
- Miranda, R. d. R., Viana, M. C. M. & Santos, M. J. C. d. (2024). Teoria da Objetivação, Sequência Fedathi e Letramento Matemático: reflexões sobre uma oficina de geometria. *Rematec*, 19(50).
<https://doi.org/10.37084/rematec.1980-3141.2024.n50.e2024005.id690>
- Prodanov, C. C., & Freitas, E. C. de. (2013). *Metodologia do Trabalho Científico: Métodos e Técnicas da Pesquisa e do Trabalho Acadêmico - 2ª Edição*. Editora Feevale.
- Reis, J. dos, Brandão, J. C. ., & Santos, M. J. C. dos . (2024). A Cultura Maker no contexto da Modelagem Matemática: uma revisão sistemática da literatura. *Ensino Da Matemática Em Debate*, 11(1), 65–88.
<https://doi.org/10.23925/2358-4122.2024v11i62286>



Modelagem matemática e GeoGebra no estudo de Equações Diferenciais Ordinárias

Celina Aparecida Almeida Pereira **Abar**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil

abarcaap@pucsp.br

Amábile Jeovana Neiris **Mesquita**
Universidade Estadual de Goiás
Brasil

amabile.mesquita@ueg.br

Marcio Vieira de **Almeida**
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Brasil

marcioalmeidas@gmail.com

Resumo

As Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) permitem a realização de diversas relações entre a Matemática e outras Ciências e a criação de um ambiente propício para a aprendizagem. Estudos indicam um enfoque estritamente algébrico dado ao ensino de EDO e assim, essa pesquisa, de cunho qualitativo, foi desenvolvida em um ambiente promovido pela Modelagem Matemática (MM), e pelo GeoGebra por meio de abordagens analítica e gráfica, importantes para a construção de um conceito matemático. Neste artigo, excerto dessa pesquisa, apresentam-se atividades exploratórias, desenvolvidas em um curso de Licenciatura em Matemática, com o objetivo de analisar suas potencialidades e fragilidades. Alicerçada na Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval, as atividades desenvolvidas permitiram articulações entre os diferentes registros de representação do objeto matemático e os alunos foram capazes de compreender EDO além dos métodos algébricos tradicionais, relacionando as soluções com os fenômenos descritos.

Palavras-chave: Equações Diferenciais Ordinárias; Formação de professores; GeoGebra; Modelagem Matemática; Registros de Representação Semiótica.

Definição e Relevância do Problema

O tema abordado nesta pesquisa, o ensino e a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO), para licenciandos em Matemática, utilizou a Modelagem Matemática (MM) como apoio metodológico e o software GeoGebra como recurso tecnológico.

Por meio das EDO é possível descrever matematicamente vários tipos de fenômenos, analisar seu comportamento e fazer previsões com boas aproximações. Sendo assim, com o intuito de contribuir para o ensino e para a aprendizagem desse conteúdo, foi proposta a utilização da Modelagem Matemática como estratégia metodológica por realizar interação entre o “mundo real” e a matemática.

Aliado a essa metodologia de ensino, fez-se uso de Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) pois, de acordo com Marin (2008, p. 138), é no desenvolvimento das aulas que “[...] identifica-se que as TIC permitem realizar atividades que seriam impossíveis de serem feitas somente com o uso de lápis e de papel, proporcionando a organização de situações pedagógicas com maior potencial para aprendizagem”.

Gravina e Santarosa (1998, p.1), relatam que a aprendizagem “depende de ações que caracterizam o ‘fazer matemático’: experimentar, interpretar, visualizar, induzir, conjecturar, abstrair, generalizar e enfim demonstrar [...]”, sendo assim, as TIC podem contribuir para que os estudantes modelem, analisem simulações, façam experimentos, conjecturem, confrontem e refinem suas ideias. Para esta pesquisa, foi utilizado o GeoGebra, que é um software de geometria dinâmica e direcionado para o ensino e aprendizagem de matemática.

O aporte teórico que orientou o desenvolvimento deste trabalho foi a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (Duval, 1993). Esta teoria elucida a importância da utilização dos registros semióticos para a aprendizagem matemática considerando as características dos objetos matemáticos que são abstratos e devem ser representados para sua compreensão. Essa teoria proporciona suporte tanto em termos cognitivos, pois permite compreender como ocorre a construção do conhecimento, quanto em termos didáticos/metodológicos ao abordar a forma como se processa a aprendizagem.

Por acreditar em um cenário complexo e subjetivo que envolve a formação inicial de professores, esta pesquisa se desenvolveu pelo paradigma qualitativo, evidenciando o processo interpretativo/subjetivo presente, acreditando que pessoas agem em função de suas crenças, percepções, sentimentos e valores, com comportamentos imbuídos de significado e sentidos que não são imediatamente assimilados, mas sim desvendados (Alves-Mazzotti; Gewandszajder, 1998). Santos Filho e Gamboa (2009) mencionam que o foco de pesquisas qualitativas seria a experiência individual de situações, o processo de construções de significados, o senso comum, o “como”. O pesquisador qualitativo origina-se por meio de fenômenos de seu interesse.

O desenvolvimento da pesquisa ocorreu na Universidade Estadual de Goiás, em um curso de Licenciatura em Matemática com a participação de 10 alunos. Os dados foram produzidos no laboratório de informática, localizado na própria instituição e, uma parte, ocorreu utilizando-se

gravações e transcrições dos encontros, registros escritos pelos participantes durante as atividades desenvolvidas, questionário inicial, registro gráfico das atividades realizadas com o GeoGebra no computador dos grupos e, outra parte, foi obtida a partir de observações. Devido a variedade de dados existentes e a complexidade de cenários nos quais foram produzidos, a triangulação de dados amparou esse processo.

A pesquisa foi orientada pela seguinte pergunta: *como a utilização da Modelagem Matemática, como estratégia metodológica de ensino, aliada ao recurso tecnológico GeoGebra, contribuem para a aprendizagem de EDO por meio de atividades exploratórias?*

Subsidiados por esta questão, o objetivo desta pesquisa foi analisar as potencialidades e fragilidades que o desenvolvimento de atividades exploratórias em um ambiente de aprendizagem promovido pela Modelagem Matemática com a utilização do GeoGebra proporciona para a aprendizagem de EDO a partir de uma abordagem qualitativa.

Referencial Teórico e Metodológico

A motivação para a realização da pesquisa, sobre a utilização da modelagem matemática como estratégia de ensino e de aprendizagem de EDO, em um curso de licenciatura em matemática surgiu a partir de pesquisas como a de Dullius, Veith e Araujo (2013), Alvarenga, Dorr e Vieira (2016) e Rosa, Alvarenga e Santos (2019) as quais indicam que a abordagem dada em seu ensino possui um enfoque estritamente algébrico centrando-se na aplicação de métodos de resolução sem focar no comportamento da solução obtida, ou seja, sem realizar uma análise qualitativa do problema que gerou essas equações dificultando, assim, a percepção da conexão existente entre a EDO e o sistema real modelado.

A pesquisa de Dullius, Veit e Araujo (2013) traz indícios de que a MM pode ser uma facilitadora do aprendizado pois as atividades de ensino em ambiente de modelagem fazem emergir vários conceitos matemáticos e extra matemáticos favorecendo a aprendizagem.

A modelagem matemática, segundo Bassanezi (2022) deve seguir uma sequência de etapas como: Experimentação (etapa na qual ocorre a obtenção de dados); Abstração (procedimento que leva à formulação dos modelos matemáticos e na qual se estabelece a seleção das variáveis, a problematização, formulação de hipóteses e a simplificação); Resolução (está vinculada ao grau de complexidade empregado em sua formulação portanto pode ser uma resolução analítica ou numérica podendo ser viabilizada somente através de métodos computacionais); Validação (é o processo de aceitação ou não do modelo); Modificação (se o modelo não for aceito, os dados do problema devem ser revistos para os ajustes necessários e refazer as etapas até obter uma melhor aproximação da realidade).

O desenvolvimento da pesquisa teve como aporte teórico a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval (Duval, 1993, 2011). Esta teoria elucida a importância da utilização dos registros semióticos para a aprendizagem matemática exigidas pelas características dos objetos matemáticos que são abstratos e precisam ser representados.

As representações semióticas “são produções constituídas pelo uso de signos pertencentes a um sistema de representação os quais têm suas próprias restrições de significado e de funcionamento” (Duval, 1993, p. 39). A escrita em língua natural, escrita algébrica, gráficos, tabelas são exemplos de representação semiótica que exteriorizam a representação mental e são importantes para a atividade cognitiva do pensamento. Segundo Duval (2011), só há aprendizagem quando o aluno consegue articular, de maneira natural, entre os vários registros de representações referentes ao objeto matemático.

Método e Desenvolvimento Conceitual

As atividades exploratórias elaboradas e desenvolvidas para esta pesquisa, seguiram a sequência de etapas sugeridas por Bassanezi (2022) e foram compostas por diferentes estratégias como construção de gráficos, análise de modelos matemáticos previamente modelados para o estudo de vários conceitos matemáticos desde os pertencentes à matemática básica quanto aos referentes ao cálculo e EDO, com o auxílio do GeoGebra.

Considerando as atividades referentes ao estudo de EDO, foram utilizados primeiramente a construção do campo de direções de algumas EDO, seguidas pela análise do comportamento das soluções. Também foram realizadas previsões e examinadas as influências dos parâmetros das equações no comportamento das soluções, possibilitando a articulação entre os registros gráfico e algébrico.

Algumas atividades selecionadas incluíram problemas modelados previamente e abrangeram uma série de tópicos matemáticos, incluindo funções e suas características (como domínio, imagem, contradomínio, crescimento e decrescimento), além de tipos específicos de funções (afim, linear, polinomiais de primeiro e segundo grau, logarítmicas, exponenciais), e conceitos fundamentais do cálculo diferencial, tais como o problema de determinar a reta tangente em um ponto da representação gráfica de uma função, limites e a derivada interpretada como a inclinação dessa reta tangente, além de outras atividades investigativas para ressignificar o conhecimento em derivadas.

Foram introduzidos conceitos utilizados no estudo de EDO, com exemplos que modelam situações reais, como a segunda lei de Newton e modelo de crescimento populacional proposto por Malthus, explorando os elementos que compõem uma EDO, tais como coeficientes (ou parâmetros) e variáveis, além de discutir a formulação dos modelos matemáticos. O objetivo destas atividades foi analisar o comportamento das soluções da EDO.

Para explorar o entendimento dos alunos sobre uma EDO simples e a construção do campo de direções, foi dada a expressão $y'=1$. Os participantes compreenderam que deveriam encontrar uma função cuja derivada fosse constante e igual a um. Foram questionados se algum fenômeno real poderia ser modelado por essa EDO com a questão: *qual situação, ou problema possui uma variação constante?* não obtendo respostas.

Na elaboração dos campos de direções, foram propostas EDO com diferentes níveis de complexidade. Inseriam vários pontos em papéis quadriculados e após a construção do campo de

direções, questionaram qual função seria a solução para aquela EDO, sugerindo que poderia ser uma função afim. Perceberam que a solução geral do problema é representada algebricamente pela função $f(x)=x+c$, que a determinação do valor da constante c depende da escolha de valores para x e y , denominada condição inicial, caracterizando um Problema de Valor Inicial (PVI) e a solução obtida é denominada solução específica da EDO, pois atende às condições iniciais estabelecidas. A Figura 1 ilustra o campo de direções construído por um aluno em um papel quadriculado.

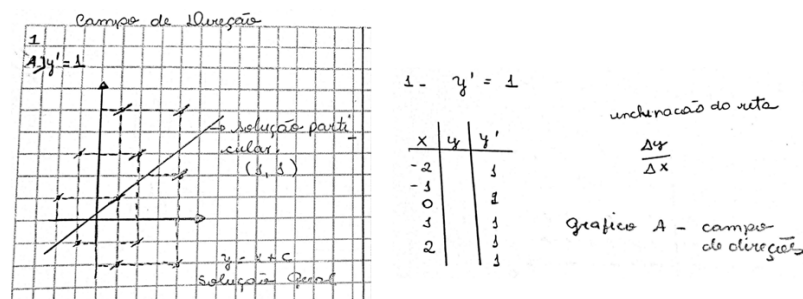


Figura 1. Campo de direções.

Observa-se que o aluno construiu corretamente o campo de direções e apresentou a solução geral. A solução particular que passa pelo ponto $(1,1)$ foi representada por meio do registro gráfico, porém a representação no registro algébrico não foi realizada. Nota-se que a representação gráfica da solução particular não está correta pois a origem deveria pertencer a esta solução.

Em outra atividade deveriam simular a construção de um tanque cilíndrico que captasse 1000 litros de água da chuva com dimensões que minimizassem o custo. Durante a socialização da solução, todos utilizaram o GeoGebra para melhor compreensão do resultado e um dos alunos, que trabalha na construção civil, disse que era impossível aquela solução e, a partir desta observação, discutiram para encontrar o problema da formulação e aperfeiçoaram o modelo.

Nesta atividade, os alunos foram envolvidos em aspectos cognitivos que caracterizam os registros de representação semiótica: a formação de uma representação identificável sobre a qual formularam o problema, o tratamento quando resolveram algebricamente no papel e a conversão, ao utilizaram o software para construir a representação gráfica do problema e confirmar se a solução obtida geometricamente era apropriada.

Após realizarem as atividades sobre derivação e integração, foi iniciado o tema específico sobre EDO, construindo o campo de direções no papel quadriculado e, depois, utilizando as ferramentas do GeoGebra foram comparadas as resoluções e perceberam as facilidades proporcionadas pelo software como ilustrado na Figura 2 e na Figura 3.

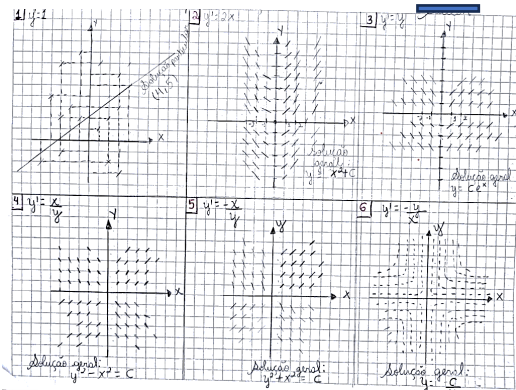


Figura 2. Construindo campo de direções.

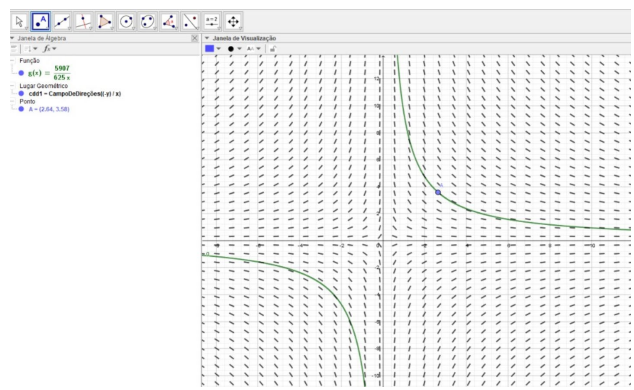


Figura 3. Construindo campo de direções no GeoGebra.

As primeiras atividades contextualizadas sobre EDO foram problemas clássicos, presentes em livros didáticos e que já possuíam todos os dados fornecidos no enunciado. As etapas da modelagem foram cumpridas pois os alunos reconheceram os dados, formularam o problema, o resolveram utilizando o campo de direções no GeoGebra e validaram o modelo.

Uma atividade envolvendo EDO abordou o problema de resfriamento de um corpo, também com os dados previamente fornecidos no enunciado. Nesse caso, os alunos formularam o problema e solucionaram-no por meio das representações analítica e gráfica, analisando o comportamento das soluções obtidas.

A atividade final consistiu em escolher um tema para que fosse proposto um problema e resolvê-lo. No contexto da realidade dos alunos, escolheram trabalhar com o tema do decaimento radioativo do Césio-37 recordando do acidente radioativo em Goiânia em 1987. Os dados do problema foram obtidos da internet, pesquisando sobre a meia-vida do Césio-37, como modelar um problema sobre decaimento radioativo e elaboraram os dados (Figura 4) com as informações obtidas construindo a representação gráfica no GeoGebra (Figura 5)

$$\begin{aligned}
 t=0 \quad Q(0) &= 19,26 \\
 Q(0) &= K \\
 t &= 35 \\
 Q(35) &= 19,26e \\
 Q(t) &= 19,26e^{-0,0226t}
 \end{aligned}
 \quad
 \left\{
 \begin{aligned}
 -\frac{1}{0,0226} \int \frac{dQ}{Q} &= \int dt \\
 -\frac{1}{0,0226} \ln Q &= t + C \\
 \ln Q &= -0,0226t - C_1 \\
 Q &= e^{-0,0226t - C_1}
 \end{aligned}
 \right.$$

Figura 4. Modelo da Atividade Final em papel.

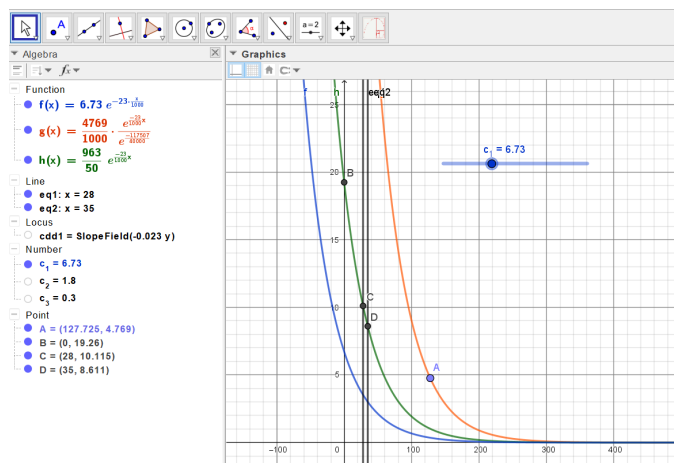


Figura 5. Modelo da Atividade Final.

Em grupo, formularam o problema e socializaram suas propostas. Resolveram analiticamente e graficamente e depois fizeram a validação, comparando seus resultados e decidiram o modelo que melhor representava o problema.

Resultados e Conclusões

O tema abordado neste texto é o ensino e a aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) para licenciandos em Matemática da Universidade Estadual de Goiás, utilizando o GeoGebra como recurso tecnológico. As EDO possibilitam a descrição matemática de diversos fenômenos, análise do comportamento de suas soluções e realização de previsões com boas aproximações, sendo fundamentais em várias áreas do conhecimento.

A abordagem qualitativa das EDO consiste no estudo do comportamento das soluções sem a necessidade de encontrar suas expressões analíticas. O objetivo principal é investigar as características gerais das soluções através de representações gráficas. Uma das técnicas utilizadas nessa abordagem é o campo de direções, que pode ser obtido manualmente ou com a praticidade de um software como o GeoGebra, o que facilita a visualização e a interpretação das soluções.

O aporte teórico que orientou o desenvolvimento da prática docente deste trabalho foi a Teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval. Esta teoria destaca a importância da utilização de registros semióticos para a aprendizagem matemática, considerando que os objetos matemáticos são, em sua maioria, abstratos e requerem diferentes formas de representação para serem compreendidos adequadamente.

Foram elaboradas atividades exploratórias que incorporaram oportunidades de experimentação e exploração que poderiam surgir ao longo da realização das atividades, por exemplo, uma delas, abordou o modelo de juros compostos continuamente, o qual considera que a taxa de variação do capital em relação ao tempo é proporcional ao capital inicial. Os alunos foram incentivados a identificar os elementos constitutivos da EDO e a interpretar a relação entre a função e sua derivada.

Durante as atividades, foi realizada uma análise qualitativa das soluções por meio do campo de direções, destacando a unicidade da solução do PVI. Os alunos utilizaram o comando “CampoDeDireções” no GeoGebra para construir campo de direções da EDO. Inicialmente, a visualização não mostrava claramente as curvas, o que exigiu ajustes na escala do gráfico. Com a alteração da escala, os alunos perceberam que o gráfico se assemelhava a funções exponenciais, levando à identificação de comportamentos de crescimento, decrescimento e constância.

As atividades exploratórias propostas proporcionaram um ambiente favorável para a utilização da modelagem matemática onde os alunos seguiram as suas etapas. Nos momentos de revisão de conteúdos ou nos momentos de ensino de EDO, ocorreram três atividades cognitivas: formação de uma representação identificável, tratamento e conversão.

Sendo assim, por meio dos constructos teóricos mencionados, foi oferecido um ambiente propício ao ensino e à aprendizagem de EDO. Vale mencionar as dificuldades apresentadas pelos alunos que, em vários momentos, precisaram rever os conteúdos básicos de matemática, além do fato de alguns não dominarem o uso do computador.

Referências e bibliografia

- Alvarenga, K. B., Dorr, R. C., & Vieira, V. (2016). O ensino e a aprendizagem de cálculo diferencial e integral: características e interseções no Centro-Oeste brasileiro. *Revista Brasileira de Ensino Superior*, v. 4, n. 2, pp. 46-57. <https://www.researchgate.net/publication/314648760>
- Alves-Mazzotti, A. J., & Gewandszajder, F. (1998). *O Método nas Ciências Naturais e Sociais: Pesquisa Quantitativa e Qualitativa*. São Paulo: Pioneira.
- Bassanezi, R. C. (2022). *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*. 4. ed. São Paulo: Contexto.
- Dullius, M. M., Veit, E. A. & Araújo, I. S. (2013). Dificuldades dos Alunos na Aprendizagem de Equações Diferenciais Ordinárias. *ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia*, v.26, n.2, 207-228.
- Duval, R. (2011), Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: Machado, Silvia Dias Alcântara (Org.). *Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica*. 8. ed. Campinas: Papirus, pp.11-33.
- Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et Sciences Cognitives, IREM-ULP*, 5, 37-65.
- Gravina, M. A., & Santarosa, L. A (1998). Aprendizagem da Matemática em Ambientes Informatizados. *IV Congresso Ribie. Brasília*. <http://euler.mat.ufrgs.br/~edumatec/artigos/a1.pdf>
- Marin, D. (2008). *Professores de Matemática que usam a tecnologia de informação e comunicação no ensino superior*. [Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”]. Repositório Institucional UNESP. <http://hdl.handle.net/11449/91117>
- Rosa, C. de M., Alvarenga, K. B., & Santos, F. F. T. dos (2019). Desempenho Acadêmico em Cálculo Diferencial e Integral: um Estudo de Caso. *Revista Internacional de Educação Superior*, 5, e019023. <https://doi.org/10.20396/riesup.v5i0.8653091>
- Santos Filho, J. C., & Gamboa, S. S. (2009). *Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade*. 7º edição, São Paulo: Cortez.



Pensamiento Computacional como herramienta para la enseñanza del Principio de Inducción Matemática mediante sumas consecutivas

Sonia **Valbuena-Duarte**

Universidad Del Atlántico

Colombia

soniabalbuena@mail.uniatlantico.edu.co

Geison Duvan **Gomez-Acuña**

Universidad Del Atlántico

Colombia

gduvangomez@mail.uniatlantico.edu.co

Resumen

El pensamiento computacional (PC) es una competencia clave para el estudiante del siglo XXI, lo que demanda su integración prioritaria en los procesos educativos. En Matemáticas, potenciar sus subhabilidades favorece la comprensión profunda de conceptos y fortalece el pensamiento lógico y argumentativo lo que podría aprovecharse en el aprendizaje de demostraciones. Esta investigación explora la aplicación de las subhabilidades del PC en la enseñanza del Principio de Inducción Matemática mediante sumas consecutivas. Los resultados sugieren que la utilización del PC como estrategia para la enseñanza del Principio de Inducción fomentan una comprensión significativa de la Matemática y aporta en formar estudiantes capaces de argumentar, justificar y construir conocimiento matemático de manera autónoma.

Palabras clave: Pensamiento Computacional; Enseñanza del Principio de Inducción Matemática; Sumas Consecutivas; Creatividad; Razonamiento matemático

Descripción del problema y justificación

Las demostraciones matemáticas son clave para desarrollar el pensamiento lógico y crítico (Hanna, 2000; Mitr, 2023), ya que promueven una comprensión profunda de los conceptos (Stylianides, 2007). Sin embargo, han sido desplazadas en las aulas por enfoques mecánicos,

donde se prioriza la aplicación de reglas sin explicar su fundamento conceptual. (Durand-Guerrier, 2008).

El pensamiento computacional (PC) es una habilidad esencial para todas las personas, no solo para programadores, y se compone de seis subhabilidades: algorítmica, lógica, depuración, abstracción, patrones y descomposición. Puede desarrollarse mediante actividades con o sin el uso de tecnología, utilizando herramientas como Scratch o Code.org. (Díaz & Silvain, 2020; Valbuena et al., 2024; Vázquez et al., 2019)

Marco teórico

El pensamiento computacional (PC) es una habilidad que no se limita a los desarrolladores de software, sino que resulta esencial para todas las personas (Wing, 2006). Está compuesto por seis subhabilidades: pensamiento algorítmico, pensamiento lógico, depuración, abstracción, reconocimiento de patrones y descomposición (Green TIC, 2022). El PC puede desarrollarse mediante actividades desconectadas, que no requieren dispositivos tecnológicos, o conectadas, que utilizan herramientas digitales como Scratch o Code.org, entre otros.

El principio de inducción matemática es un método de demostración que prueba una afirmación para todos los números naturales, verificando un caso base y luego demostrando que, si es cierta para n , también lo es para $n + 1$. (Larios, 2002; Mitr, 2023).

Metodología

Esta investigación cualitativa, desarrollada con estudiantes de grado once, analizó el uso de subhabilidades del pensamiento computacional como estrategia para enseñar el Principio de Inducción Matemática mediante sumas consecutivas. La implementación de una unidad didáctica con programación en Code.org evidenció que habilidades como descomposición, abstracción y lógica fortalecen la comprensión y el aprendizaje de las demostraciones matemáticas.

{Enlace a poster digital:

<https://docs.google.com/presentation/d/1PGY266HM5NJfPmtgLgjZg2M06XHRSfmf/edit?usp=sharing&ouid=111517228872987724395&rtpof=true&sd=true> }

Referencias y bibliografía

- Díaz, E. C., & Silvain, G. L. (2020). El pensamiento computacional. Nuevos retos para la educación del siglo XXI. Virtualidad, *Educación y Ciencia*, 11(20), 115-137.
- Durand-Guerrier, V. (2008). True statements and proof in mathematics education. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 40(3), 359–366.
- Hanna, G. (2000). Proof, explanation and exploration: An overview. *Educational Studies in Mathematics*, 44(1-2), 5–23. <https://doi.org/10.1023/A:1012737223465>
- Larios, V. (2002) *Demostraciones y conjeturas en la escuela*. <http://www.uaq.mx/matematicas/redm/>
- Mitr. V. (2023). *Método de Inducción*. Sominski. Mir Books. <https://mirtitles.org/2023/03/26/metodo-de-induccion-matematica-lecciones-populares-de-matematicas-by-i-s-sominski/>
- Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 38(3), 289–321
- Valbuena, S., Elías L., W., & Berrio V., J. (2024). Pensamiento computacional en matemáticas con Code.org. *Revista Cedotic*, 9(1), 95–113. <https://doi.org/10.15648/cedotic.1.2024.3999>

- Vázquez, E., Bottamedi, J. y Brizuela, M. (2019). Pensamiento computacional en el aula: el desafío en los sistemas educativos de Latinoamérica. *Revista Interuniversitaria de Investigación en Tecnología Educativa*, (7).
<https://doi.org/10.6018/riite.397901>
- Wing, J. (2006). Computational Thinking. *View Point. Communication of ACM*, 49(3), 33-35.
<http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/usr/wing/www/publications/Wing06.pdf>



Pensamento Computacional: Integração entre a Robótica e a Matemática

Joseane Marques **Flores**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
profejoseaneflores@gmail.com
Agostinho iaqchan Ryokiti **Homa**
Universidade Luterana do Brasil
Brasil
iaqchan@hotmail.com

Resumo

A pesquisa, de caráter qualitativo, investigou atividades didáticas matemáticas para o desenvolvimenato inicial das habilidades associadas ao Pensamento Computacional. No experimento, em um ambiente prático e interativo, os alunos mostraram interesse pelas atividades, embasadas pela Teoria Construcionista, que proporcionaram situações que requeriam as habilidades de decomposição, reconhecimento de padrões, abstração e algoritmo, nas quais se explorou os conceitos de perímetro da circunferência, arco da circunferência e ângulos. Concluiu-se que o agente motivador foi a programação e os robôs integrando os blocos LEGO com o Arduino, levando a aprendizagem da matemática e simultaneamente iniciando o desenvolvendo das habilidades associadas ao Pensamento Computacional pela análise as situações problema e a programação dos robôs.

Palavras chave: Pensamento Computacional; Robótica Educacional; Geometria; Ensino Fundamental.

Introdução

A Matemática com seus procedimentos, teoremas, definições e demonstrações não só demanda a compreensão de seus constituintes abstratos, mas também a capacidade de aplicá-los em contextos práticos e na resolução de situações problemas da realidade. Sendo um desafio aos educadores acompanhar as inovações didáticas e metodológicas que buscam potencializar o

Comunicación; Media inferior

*IV CEMACYC, Santo Domingo,
República Dominicana, 2025.*

processo de ensino e aprendizagem dos conceitos a serem desenvolvidos com estudantes do Ensino Fundamental.

A Matemática, essencial para a formação cidadã, está dirigida ao desenvolvimento de competências e habilidades atuais, e para o seu ensino se considera propícia a aplicação das tecnologias digitais, jogos didáticos, aplicativos e softwares educacionais. A abordagem com tecnologias não apenas proporciona atividades lúdicas e interativas, mas também prepara os alunos para os desafios do século XXI, no qual a proficiência em Matemática e habilidades computacionais são importantes.

Dentre as possibilidades que integram a Matemática e as Tecnologias a Robótica Educacional (RE) se apresenta como uma das que vem ganhando espaço no ambiente educacional. A RE pode ser utilizada em sala de aula como forma de auxiliar o professor em sua prática pedagógica de desenvolvendo a aprendizagem ativa, fazendo o aluno interagir com elementos digitais e concretos para construção de seu conhecimento.

Além da possibilidade de aprendizagem dos conteúdos matemáticos, a RE contribui para o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao Pensamento Computacional (PC) que é essencial para resolução de problemas, pois abrange habilidades como a decomposição, o reconhecimento de padrões, a abstração e o algoritmo, que também se mostram cada vez mais importantes em um mundo em constante transformação impulsionado pela tecnologia.

Em seus itinerários formativos para o Ensino Médio, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta a Robótica para ser desenvolvida em conjunto com a Matemática e suas tecnologias (Brasil, 2017). Já, o Pensamento Computacional é citado na BNCC como um processo matemático, na área da Matemática no Ensino Fundamental, afirmando que a Álgebra pode contribuir para desenvolvimento do mesmo. O raciocínio lógico, mencionado na BNCC, se encontra na segunda competência específica de Matemática para o Ensino Fundamental, de forma que se faz necessário propor atividades para o seu desenvolvimento.

A integração entre o Pensamento Computacional e a Matemática não se trata de apresentar quaisquer atividades, mas do tipo investigativas, instigantes, interessantes e que propiciem aos alunos transformar, questionar, resolver problemas desafiadores, objetivando o protagonismo desse estudante na sua aprendizagem.

Nesse contexto se investigou atividades envolvendo conteúdos matemáticos, aplicadas com a Robótica Educacional, para o desenvolvimento das habilidades associadas ao Pensamento Computacional em alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

Marco Teórico

Brookshear (2013, p. 153) afirma que pesquisadores da Ciência da Computação acreditam que “toda atividade da mente humana, incluindo a imaginação, a criatividade e a tomada de decisões, é resultado da execução de um algoritmo”. Logo ao considerar que o PC está internamente ligado aos princípios da Ciência da Computação, se entende que o processo de

raciocínio ligado a criação de algoritmos que pode estar ligado ao computador ou ao pensamento humano.

Desta forma, o termo “Pensamento Computacional” está interligado a Ciência da Computação, mas também, a área da Educação e a Educação Matemática para a resolução de problemas. Esse termo ganhou destaque após a professora Jannete Wing publicar o trabalho intitulado como *Computational Thinking*, no qual ela afirma que o PC se apoia no poder e nos limites dos processos de Computação, seja efetuado por humanos ou por uma máquina Wing (2006). Logo o PC envolve a solução de problemas entendendo, considerando o comportamento humano, com base nos conceitos fundamentais para Ciência da Computação. Para Wing (2006), o Pensamento Computacional é uma habilidade fundamental para todas as pessoas, não apenas para os cientistas da computação. Trata-se de uma abordagem para a resolução de problemas que se baseia em princípios fundamentais da computação, como o particionamento de tarefas complexas em partes menores, a identificação de padrões e a criação de algoritmos eficientes.

Seghetto (2022, p.26) aponta que “todos usam PC na sua vida, este pensamento é antes humano que computacional, podendo ocorrer sem a presença de um computador, como quando a pessoa organiza sua rotina diária”. Para a International Society for Technology in Education – ISTE (2021) o Pensamento Computacional é definido como uma forma de “desenvolver e empregar estratégias para entender e resolver problemas de forma a aproveitar o poder dos métodos tecnológicos para desenvolver e testar soluções”.

Conectado com a Educação, Brackmann (2017) traz que o PC utiliza quatro pilares ou quatro dimensões, que são: a decomposição, o reconhecimento de padrões, a abstração e os algoritmos, para atingir o objetivo principal que é a resolução de problemas. Cada pilar tem suas características, a decomposição é a quebra de um problema maior em partes menores, ou seja, esmiuçar e simplificar as informações que esse problema possui. O reconhecimento de padrões é a habilidade de identificar as características semelhantes que possui o problema para que se consiga agrupar e ordenar as atividades. A abstração requer mais que o reconhecimento de padrões pois, é onde permanece o foco e os elementos essenciais do problema, com as informações de menores relevância sendo descartadas e, por fim, o algoritmo com a junção de todas as etapas anteriores para que o problema seja resolvido, ou seja, é a definição do conjunto de instruções a serem executadas para alcançar o objetivo final, e cada um desses pilares apresenta sua importância dentro da resolução de problemas.

Para o desenvolvimento do PC é necessário que situações problema sejam de interesse do aluno, de maneira que ele se envolva ativamente na busca pela solução e, não somente solucione o problema, mas seja protagonista no seu processo de aprendizagem, no caso, da Matemática. Deste modo entende-se que a Robótica é uma possibilidade de explorar situações problema nas quais os conceitos e conteúdos matemáticos podem ser aprendidos, haja vistas da necessidade dela para a solução desses problemas.

Robótica como instrumento para a aprendizagem matemática

A sociedade da indústria 4.0, voltada principalmente para as tecnologias, requer uma formação que desenvolva habilidades e competências capazes de vencerem os desafios inerentes

ao uso das tecnologias, integradas em quase todas as esferas econômico sociais (Aires, Moreira & Freire, 2017). Desta forma, é fundamental reconhecer que, no contexto da formação humana, as tecnologias desempenham um papel importante, exercendo uma influência significativa no processo de ensino e aprendizagem. Para Homa e Groenwald (2020) as tecnologias têm alterado o modo de interação e de pensamento do ser humano em relação ao mundo que o rodeia, logo se faz necessário refletir sobre o papel do professor e do aluno no processo de formação com tecnologias.

Com a Robótica Educacional tem-se a oportunidade de incorporar as tecnologias no processo de ensino e aprendizagem, promovendo a expansão do conhecimento e a criação de novas atividades que fomentam interações significativas como a interdisciplinaridade em várias áreas de aprendizagem. Zilli (2004, p.39) considera o robô como “[...] uma ferramenta que permite ao professor demonstrar na prática muitos dos conceitos teóricos, às vezes de difícil compreensão, motivando o aluno, que a todo momento é desafiado a observar, abstrair e inventar”.

Conforme Queiroz, Sampaio e Santos (2017), o uso da robótica em Educação se baseia fortemente na Teoria Construcionista de Seymour Papert, que por sua vez tem origem na Teoria Construtivista de Jean Piaget. Almeida (2015) divide o Construcionismo em quatro pilares essenciais, os quais seriam os norteadores do uso desta metodologia. São eles: Aprender construindo, que envolve a criação de ambientes computacionais de modo a que as crianças possam manipular os materiais de uma forma ativa; Objetos concretos e a sua importância como um meio para chegar à aprendizagem de fenômenos abstratos; Ideias que reforçam a capacidade de aprendizagem do indivíduo; Autorreflexão que acontece quando encorajados a explorar o próprio processo de pensamento.

Santos et al. (2016) afirmam que a inserção da RE como ferramenta pedagógica, surge para suprir demandas por materiais e práticas para o ensino e aprendizagem. Para Bravo e Forero (2012) o uso da robótica como ferramenta de ensino desenvolve habilidades e competências ao fornecer respostas a problemas multidisciplinares. Quando há o envolvimento dos alunos (Márquez & Ruiz, 2014), as atividades com RE promovem a criatividade e a motivação, que posteriormente lhes permitirá desenvolver habilidades cognitivas e manuais.

A Robótica Educacional representa um método de ensino que se centra na pesquisa, descoberta e na construção ou não de protótipos como resultado da aprendizagem. O enfoque dado depende do uso de kits de montagem ou materiais utilizados, deste modo, a RE como um recurso pedagógico integra materiais concretos e tecnológicos, os quais são empregados em situações-problema que facilitam a aprendizagem em diferentes áreas tais como Ciências, Tecnologia, Engenharia e Matemática abordando assim os conceitos das disciplinas STEM de forma integrada.

Metodología

A pesquisa foi aprovada do Comitê de ética sob o nº 067367/2022. Para sua realização, optou-se por utilizar uma abordagem qualitativa. Gatti e André (2010) defendem que a pesquisa qualitativa apresenta uma visão holística dos fenômenos em que se são considerados que todos

os componentes das situações interagem entre si e suas influências são recíprocas. Ainda na pesquisa qualitativa, a análise de dados deve ter consistência e a preocupação com falas e narrativas dos participantes formam um elemento diferencial à integridade dos dados analisados (Teixeira, 2019).

Para a realização da investigação foram utilizados dois questionários semiestruturados (inicial e final), observações, registros e filmagens como instrumentos de pesquisa. O questionário inicial buscou compreender a existência de fatores motivadores como as influências do meio social, interesses e anseios dos alunos, bem como identificar o que os levou a participarem das aulas de robótica, e entender as motivações na realização das atividades propostas. No questionário final os alunos trouxeram suas percepções, considerações e observações sobre as atividades realizadas.

A investigação foi realizada com 22 alunos, dez do 7º ano, dez alunos do 8º ano e dois alunos do 9º ano do Ensino Fundamental de três escolas municipais de rede pública. Visando resguardar a identidade dos sujeitos participantes se adotou o código E(n), para n um número de 1 a 22.

Resultados da pesquisa

As atividades propostas foram do tipo desplugada (*off-line*) e plugadas (*on-line*). Na primeira atividade denominada *Eu robô*, aplicada de modo desplugado, os alunos usaram carimbos com setas para a direita, esquerda e para frente, para organizar a sequência de comandos que eles executariam caso fossem um robô percorrendo um caminho. Depois da atividade com material concreto, os alunos deveriam organizar os comandos na forma escrita para trajetos na forma de um triângulo e um pentágono, informando valores angulares e lineares.

Na terceira atividade, do tipo plugada, os alunos deveriam desenhar figuras geométricas utilizando o programa Pictoblox. A Figura 1 apresenta a produção do aluno E16 que lembra um carro. Quando questionado sobre como pensou para fazer as rodas, o aluno programou como uma repetição de 24 vezes um giro de 15°, de modo que o polígono de 24 lados se assemelha a uma circunferência.

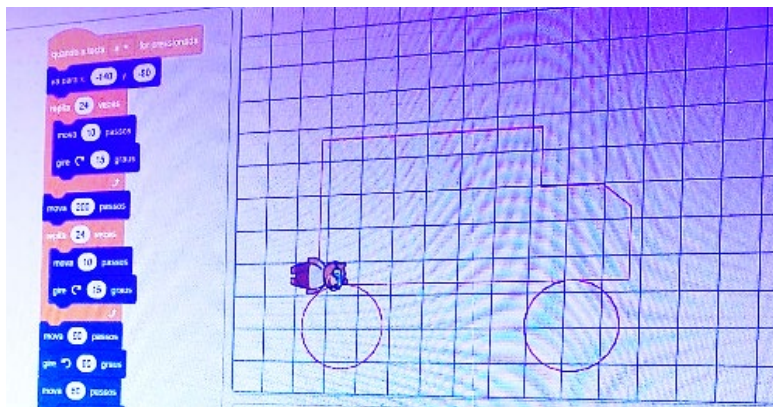


Figura 1 – Desenho livre do E16

A quarta atividade propôs a criação do algoritmo no PictoBlox para que o robô percorresse trajetos pré-determinados. A quinta e última atividade objetivava consolidar os conhecimentos matemáticos e as habilidades do PC nas atividades anteriores. A atividade consistia em realizar a programação de um trajeto utilizando os robôs reais. A atividade com material concreto, como o robô real, foi desde o início um grande motivador para a realização das atividades. Para não apresentar uma situação problema padronizada, foram desenvolvidos dois robôs de diferentes tamanhos (Figura 2). A atividade foi realizada com dois grupos que receberam um notebook e um robô, mas cada aluno realizando os cálculos de forma individual.

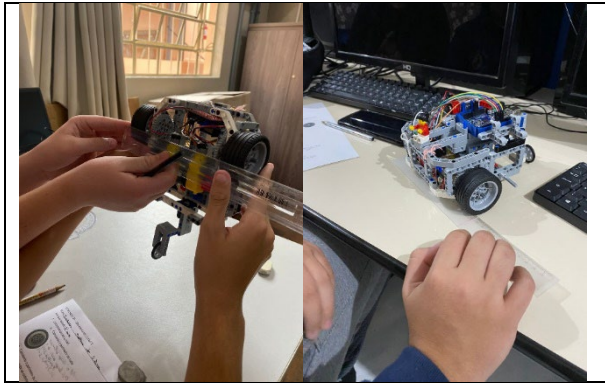


Figura 2 – O robô 1 e a medição da distância entre as rodas

As situações problema com trajetos definidos requeriam conhecimentos de geometria, em especial a conversão dos movimentos angulares em graus em um movimento circular, sendo necessário calcular o comprimento do arco da circunferência equivalente ao ângulo que se deseja, ou seja, para um ângulo α (em graus) e um raio “d” (distância entre rodas em cm) tem-se que o comprimento de arco “ca” é dado por:

$$ca = \frac{\alpha\pi}{180}d$$

Para que a roda percorra o comprimento de arco desejado, realiza-se mais uma conversão entre o comprimento de arco o número de voltas “nv” da roda, dado por, para “r” o raio da roda.

$$nv = \frac{ca}{\text{perímetro da roda}} = \frac{ca}{2\pi r}$$

Para controle do número de voltas que a roda realiza, utiliza-se de um medidor angular denominado *encoder* que, para uma volta completa, gera 100 pulsos denominado aqui por tics, logo o número de voltas deve ser dado em número de tics. A relação entre tics e o número de voltas, é dado por:

$$\frac{tics}{100} = \frac{nv}{1} \Rightarrow tics = 100 nv$$

O mesmo cálculo de tics aplicado na movimentação das duas rodas faz a movimentação linear do robô, ou seja, um deslocamento em linha reta.

Como os estudantes do 7º ano ainda não tinham domínio do conteúdo de regra de três, os cálculos de perímetro foram organizados grupos com alunos do 7º e 8º e alunos do 8º e 9º. Pelas dificuldades para compreender os conhecimentos matemáticos envolvidos nas discussões colaborativas entre os integrantes dos grupos, optou-se em fazer uma intervenção pedagógica para explicar sobre circunferência, perímetro e a regra de três, conteúdos necessários para a realização da atividade.

Após calcularem o perímetro das rodas do robô e sabendo o comprimento de arco que a roda deveria percorrer para o ângulo desejado, os alunos calcularam o número de tics que a roda deveria girar e utilizaram no programa *Pictoblox* para programar o percurso que o robô deveria realizar. Ao realizar a atividade E15 afirmou, “professora agora eu entendi essas contas, ficou fácil” fazendo referência a aplicação da regra de três.

Na realização das atividades, e acompanhando as rotações e o deslocamento linear, os alunos identificaram que o percurso realizado pelo robô não foi o esperado, apresentando erros no trajeto, isso fez com que eles revisassem seus cálculos e buscassem ajuda com a pesquisadora que explicou sobre as questões físicas, como a derrapagem das rodas, erros de arredondamento nos cálculos levando à imprecisão da medida de quanto as rodas giram, causando assim pequenas diferenças no trajeto realizado pelo robô.

Sobre a percepção do grupo em relação as atividades de programação, os alunos externaram que elas foram atrativas e, sobre as dificuldades enfrentadas, somente os alunos do 7º apresentaram dificuldades relacionadas com a regra de três e medição de ângulos, como afirma E1 que teve problemas em “[...] calcular, porque tinha coisas que não aprendi”. Todos os estudantes afirmaram que a robótica auxiliou na aprendizagem e que usando os cálculos em algo que é possível ver a aplicação, fica mais fácil de aprender.

Conclusões

Observou-se que os alunos se interessaram pelas atividades desplugadas e plugadas, com a principal motivação sendo as atividades de programação com o PictoBlox e de percursos com o robô LEGO. Pode-se afirmar que a abordagem prática e interativa proporcionada pelos recursos tecnológicos e concretos foi um fator motivacional e permitiu que os estudantes explorassem de forma contextualizada os conceitos matemáticos trabalhados e entendessem suas aplicações práticas.

Nesse contexto, os recursos da Robótica Educacional contribuíram para o envolvimento dos estudantes com a sequência de atividades que inicia o desenvolvimento das habilidades associadas ao Pensamento Computacional. Verificou-se que as atividades com polígonos regulares criaram situações didáticas que permitiram aos alunos a identificação de padrões juntamente com a aprendizagem de conceitos da Geometria, além de possibilitar o exercício da decomposição do trajeto em partes menores que se repetiam.

As atividades de percorrer trajetos deram significado às medidas angulares ao propor a aplicação desse conhecimento na Robótica, além de propor situações para a organização de comandos e a programação em blocos. Considera-se que as programações propostas nas atividades para desenvolver as habilidades associadas ao Pensamento Computacional, foram adequadas na medida que os estudantes identificaram os comandos necessários para realizar os percursos e trajetos solicitados.

A utilização de um robô físico fez com que os alunos, literalmente, enxergassem a necessidade do conhecimento matemático para a realização da atividade. Eles viram e testaram a

quantidade necessárias de voltas das rodas para mudar a direção de acordo com o ângulo desejado, bem como o número de voltas das rodas para o deslocamento linear do robô.

Afirma-se que atividades devidamente planejadas, utilizando da Robótica Educacional como agente motivador, com conteúdo Matemático adequado, que permita ao aluno identificar padrões e organizar uma ordenação e sequenciamento de ações ou o detalhamento de processos de construção Matemático, como é o caso da Geometria, podem ajudar os alunos a começarem a desenvolver as habilidades associadas ao Pensamento Computacional. Desta forma, destaca-se a possibilidade de investigação o uso da Robótica Educacional como um recurso facilitador e motivador para explorar demais temas da Matemática conjuntamente com a possibilidade de aprimorar a habilidade de resolução de problemas e evoluir as habilidades associadas ao Pensamento Computacional.

Referencias

- Aires, R. W. do A., Moreira, F. K. & Freire, P. de S. (2017). Indústria 4.0: competências requeridas aos profissionais da quarta revolução industrial. In: *Anais do Congresso Internacional de Conhecimento e Inovação*. Foz do Iguaçu, PR.
- Almeida, C. M. dos S. (2015). *A importância da aprendizagem da robótica no desenvolvimento do pensamento computacional: um estudo com alunos do 4º ano*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa.
- Brackmann, C. P. (2017). *Desenvolvimento do Pensamento Computacional através de atividades desplugadas na Educação Básica*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, RS.
- Bravo, F. A. & Forero, A. (2012). La robótica como un recurso para facilitar el aprendizaje y desarrollo de competencias generales. *Education in the Knowledge Society*, 13(2), 120-136.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2017). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF.
- Brookshear, J. G. (2013). *Ciência da computação: uma visão abrangente*. (11. ed.). Porto Alegre, RS: Bookman.
- Gatti, B. & Andre, M. (2013). A relevância dos métodos de pesquisa qualitativa em educação no Brasil. In: Weller, W. & Pfaff, N. (Orgs.). *Metodologias da pesquisa qualitativa em Educação: teoria e Prática*. (2. ed., pp. 29-38.). Petrópolis, RJ: Vozes.
- Homa-A. I. R. & Groenwald, C. L. O. (2020). Tecnologías digitales de información y comunicación como recurso didáctico en el currículo de matemáticas. *Uniciencia*, 34(2), 153-170.
- ISTE. (2021). *ISTE Standards*. Recuperado de: https://cdn.iste.org/www-root/PDF/ISTE%20Standards-One-Sheet_Combined_09-2021_vF3.pdf. Acesso em: 13 mar. 2023.
- Márquez D. J. E., Ruiz F. J. H. (2014). Robótica Educativa aplicada a la enseñanza básica secundaria. *Didáctica, Innovación y Multimedia*, 30, 1-12.
- Queiroz, R. L., Sampaio, F. F. & Santos, M. P. (2017). Pensamento Computacional, Robótica e Educação. *Tecnologias, Sociedade e Conhecimento*. 4(1), Campinas, SP.
- Santos, O. L. dos, Cury, D., Rafalski, J. do P., Silveira, P. D. N. (2016). An IoT computational robotics learning laboratory in Vila Velha, Espírito Santo. In: *2016 XI Latin American Conference on Learning Objects and Technology*. San Carlos, Costa Rica.
- Seghetto, M. (2022). *Simetria da reflexão, translação e rotação: uma abordagem através da robótica educacional*. 2022. 134 f. Dissertação (Mestrado em Matemática). Universidade Federal da Fronteira Sul. Chapecó, SC.
- Teixeira, L. de S. (2019). *A Aprendizagem Baseada em Projetos no curso técnico de Informática: potencialidades e desafios*. 188f. Dissertação (Mestrado em Gestão e Práticas Educacionais). Universidade Nove de Julho. São Paulo, SP.
- Zilli, S. do R. (2004). *A robótica educacional no ensino fundamental: perspectivas e prática*. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Produção). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC.
- Wing, J. M. (2006). Computational thinking. *Communications of the ACM*, 49(3), 33-35.



Propuesta didáctica para el desarrollo del pensamiento estadístico apoyado con el software Jamovi

Julio **Marín** Sánchez
Universidad Nacional de Costa Rica, Campus Sarapiquí
Costa Rica

julio.marin.sanchez@una.ac.cr

Eithel **Trigueros** Rodríguez
Universidad Nacional de Costa Rica, Campus Sarapiquí
Costa Rica

eithel.trigueros.rodriguez@una.ac.cr

Resumen

Este taller tiene como propósito mostrar una propuesta de enseñanza-aprendizaje significativa de la estadística acompañada con el software libre Jamovi. Se propone el trabajo con datos significativos para construir representaciones tabulares y gráficas, así como para calcular e interpretar medidas de tendencia central y dispersión. Apoyado con una metodología activa centrada en la resolución de problemas, se busca fomentar el pensamiento crítico, la interpretación de datos y el análisis contextualizado. El taller está dirigido a docentes de Matemáticas interesados en integrar tecnologías accesibles en sus clases para mejorar la comprensión estadística del estudiantado.

Palabras clave: Análisis de datos; educación estadística; Jamovi; resolución de problemas; software educativo.

Definición y relevancia del tema

La enseñanza de la estadística enfrenta desafíos importantes en el aula, un claro ejemplo es cuando los estudiantes tienen dificultades para conectar los conceptos con datos reales o situaciones significativas. La incorporación de herramientas digitales puede ayudar a superar estas barreras al ofrecer experiencias más dinámicas, visuales y exploratorias (Grisales Aguirre, 2018).

Una opción de acceso libre la representa el software Jamovi puesto que combina una interfaz amigable con potentes funciones de análisis, lo que lo convierte en una excelente alternativa para docentes que desean enseñar estadística con manejo significativo de datos sin la necesidad de programación. Este taller se enfoca en mostrar una propuesta didáctica en la cual se aproveche el potencial de Jamovi como una herramienta que apoya el desarrollo de habilidades estadísticas, promueve el análisis crítico de información y facilita la representación visual de datos.

Fundamento teórico

El aprendizaje de la estadística requiere más que el dominio de fórmulas pues implica desarrollar la capacidad de describir, representar e interpretar datos en diversos contextos. De acuerdo con Garfield y Ben-Zvi (2008), el pensamiento estadístico se fortalece cuando los estudiantes manipulan datos reales, formulan preguntas y extraen conclusiones justificadas. En esta misma línea, Batanero (2013) indica que es importante desarrollar una cultura estadística que se enfoque en interpretar y evaluar información, criticar argumentos basados en datos y comunicar opiniones fundamentadas sobre ellos.

De manera similar, en la guía para la evaluación e instrucción de la educación estadística se indica la necesidad de utilizar actividades que involucren planteamiento de preguntas, análisis de los datos e interpretación de estos utilizando la tecnología de manera transversal (Bargagliotti et al., 2020). Diversas investigaciones (Baglin, 2018; Zieffler et al., 2012) destacan que el uso de software estadístico facilita este proceso, al permitir que el alumnado visualice de forma inmediata el impacto de los cambios en los datos y explore diferentes representaciones sin depender exclusivamente del cálculo manual.

Sin embargo, en la práctica escolar, muchos estudiantes enfrentan dificultades para desarrollar estas habilidades, especialmente cuando el análisis de datos se presenta de forma abstracta o desvinculada de su contexto. Ante este panorama, la incorporación de tecnologías como Jamovi puede desempeñar un papel clave al ofrecer entornos de análisis interactivo que facilitan la visualización de los datos, promueven la exploración activa y estimulan la interpretación crítica. De esta manera, se crean oportunidades reales para cultivar tanto el pensamiento como la cultura estadística en el aula, desde una perspectiva accesible y significativa. Además, Jamovi ofrece una plataforma accesible y potente para aplicar estos enfoques en la educación secundaria y universitaria, ya que elimina las barreras técnicas y permite centrarse en la interpretación y el análisis.

Estrategia para desarrollar el taller

Metodología

El taller se desarrollará con una metodología activa y participativa que combine el aprendizaje basado en la resolución de problemas, el uso de software educativo y la colaboración entre los participantes. Se aplicarán las siguientes estrategias metodológicas:

Trabajo en grupos colaborativos: Los participantes se organizarán en grupos pequeños para resolver problemas y explorar el uso de Jamovi en el análisis de datos. Esta dinámica fomentará el aprendizaje entre pares y permitirá una mayor interacción y reflexión sobre los conceptos estudiados.

Exploración guiada del software: Se proporcionará a los asistentes un conjunto de datos preseleccionado y se les guiará en su análisis mediante actividades estructuradas. Estas actividades incluirán la aplicación de estadística descriptiva, regresión y pruebas de hipótesis, lo que permitirá una inmersión práctica en el uso de Jamovi.

Demostraciones prácticas por parte del facilitador: El facilitador del taller realizará demostraciones en vivo utilizando el software Jamovi, guiando paso a paso a los participantes en la realización de análisis estadísticos descriptivos. Se mostrará cómo importar datos, construir tablas de frecuencia, generar gráficos (como histogramas y diagramas de caja) y calcular medidas de tendencia central y dispersión. Durante cada demostración, se fomentará la participación, permitiendo que los asistentes repliquen los procedimientos en sus propios dispositivos y realicen preguntas en tiempo real para afianzar su comprensión.

Justificación del software Jamovi

Jamovi fue diseñado para ser accesible, intuitivo y libre, lo que lo hace ideal para entornos educativos. Entre sus ventajas destacan:

- Interfaz en español, simple y sin necesidad de programación.
- Visualización inmediata de resultados al modificar variables o análisis.
- Permite trabajar con datos reales sin perder tiempo en tareas técnicas.
- Compatible con distintos formatos de datos (.csv, Excel).
- Permite desarrollar competencias clave del currículo de Matemática relacionadas con el análisis, la interpretación y la comunicación de resultados.

Agenda del Taller

Fase	Actividad	Tiempo
Introducción	Presentación del taller, objetivos y exploración inicial de Jamovi.	15 min
Fase 1	Construcción de tablas de frecuencia y gráficos. Interpretación en contexto.	25 min
Fase 2	Cálculo de medidas de tendencia central y dispersión.	25 min
Fase 3	Análisis guiado de un conjunto de datos reales. Discusión de hallazgos.	15 min
Cierre	Reflexión sobre el uso de Jamovi en el aula. Evaluación y cierre.	10 min

Resultados Esperados

Al finalizar el taller, se espera que los participantes:

- **Reconozcan el potencial didáctico de Jamovi** como una herramienta accesible y efectiva para la enseñanza de la estadística descriptiva en educación secundaria.
- **Utilicen Jamovi de manera autónoma** para realizar análisis estadísticos básicos, incluyendo la construcción de tablas de frecuencia, generación de gráficos y cálculo de medidas de tendencia central y dispersión.
- **Interpreten los resultados estadísticos generados con Jamovi** en contextos educativos, promoviendo en sus estudiantes la comprensión crítica de datos y el desarrollo del pensamiento estadístico.
- **Diseñen propuestas de actividades para el aula** que integren el uso de Jamovi como recurso de apoyo en el análisis e interpretación de datos reales.
- **Fomenten ambientes de aprendizaje más activos y contextualizados**, incorporando tecnologías que hagan del análisis de datos una experiencia significativa para los estudiantes.
- **Comprendan las ventajas del uso de software libre** en el contexto educativo, tanto por su accesibilidad como por su potencial para democratizar el aprendizaje de la estadística.

Referencias y bibliografía

- Baglin, J. (2018). Evaluating the effectiveness of using simulation and computer-based learning activities to improve statistical literacy. *Journal of Statistics Education*, 26(2), 116-123.
- Bargagliotti, A., Franklin, C., Arnold, P., Gould, R., Johnson, S., Perez, L., y Spangler, D. A. (2020). *Pre-K–12 Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education II (GAISE II): A Framework for Statistics and Data Science Education*. American Statistical Association.
- Batanero, C. (2013). Sentido estadístico: Componentes y desarrollo. En J. M. Contreras (Ed.), *Actas de las I Jornadas Virtuales de Didáctica de la Estadística, la Probabilidad y la Combinatoria* (pp. 1–18). Grupo de investigación en educación estadística, Universidad de Granada.
- Grisales Aguirre, A. M. (2018). Uso de recursos TIC en la enseñanza de las matemáticas: retos y perspectivas. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 14(2), 198-214. <https://doi.org/10.18041/1900-3803/entramado.2.4751>
- Garfield, J., y Ben-Zvi, D. (2008). *Developing students' statistical reasoning: Connecting research and teaching practice*. Springer.



Recurso didáctico interactivo como apoyo al aprendizaje en el curso de Precálculo

Ismael Hernández Hernández
Sede del Atlántico, Universidad de Costa Rica
Costa Rica
ismael.hernandez@ucr.ac.cr

Resumen

La educación a nivel mundial está siendo impactada por la era digital, con el avance de las tecnologías, es común el uso de recursos educativos con interactividad. El objetivo de la experiencia educativa fue diseñar un recurso digital interactivo para la enseñanza y aprendizaje de la función polinomial en el curso de precálculo, creado mediante una plantilla de la Red Educativa Descartes, que corresponde a recursos libres y gratuitos con Licencia Creative Commons. El enfoque es cualitativo, y la selección de los participantes se realizó de manera conveniente, se consultó a personas estudiantes del curso de precálculo acerca de un recurso interactivo para aprender Matemáticas y su pertinencia, así como a siete profesores de Matemáticas con experiencia en el curso de precálculo. La conclusión fue objeto de una valoración positiva por parte del personal docente consultado, lo que refuerza su pertinencia y claridad.

Palabras clave: Costa Rica; aprendizaje; educación; innovación educacional; Matemáticas; tecnología educacional.

Introducción y relevancia del problema

El uso de herramientas digitales es más frecuente entre las personas estudiantes para mejorar su proceso de aprendizaje. Como lo argumentan Santos y Camacho (2018):

Un estudiante con el uso de tecnologías digitales consulta fuentes o recursos en línea para informarse y participar o contribuir en las discusiones de temas variados que se generan a través de las redes sociales. También es común que en sus tareas académicas revise materiales en línea, interactúe con sus pares y comparta ideas sobre cómo resolver un problema o comprender algún concepto matemático. (p. 22)

En la Educación Matemática costarricense, a raíz de pandemia del COVID-19, las personas estudiantes no complementaron todos los contenidos en primaria y en secundaria. Como lo señala el Octavo Informe Estado de la Educación (2021):

Los principales hallazgos del Octavo Informe Estado de la Educación 2021 revelan que la pandemia del covid-19 afectó fuertemente áreas esenciales, como las Matemáticas, lo cual ha provocado importantes rezagos acumulados en el aprendizaje del estudiantado de primaria y secundaria. Para el 2020, en promedio se redujo cerca del 50% de los contenidos estipulados en el programa de estudios. (p. 9)

Por otro lado, en la Universidad de Costa Rica, el curso de precálculo tiene como objetivo solventar las deficiencias que presentan los estudiantes de primer ingreso a la institución, debido a que la promoción de aprobación del Diagnóstico de Matemática (DiMa) es de apenas un 6% de una cantidad de 3678 estudiantes admitidos en el 2019. Como lo indica la nota de la (UCR, 2 de abril 2019) aludiendo que más del 94 % del estudiantado que realiza el Examen de Diagnóstico de Matemática (DIMA) reprueba. De esta manera, se ha definido el contexto del problema para visualizar la importancia de recursos interactivos, para ayudar al estudiantado a cumplir con sus metas académicas.

Referencial Teórico

Este recurso elaborado se enmarca desde la posición teórica del Constructivismo, mediante el enfoque pedagógico del aprendizaje activo, donde cada persona logra ser parte de la construcción de su propio conocimiento y puede acceder al conocimiento en cualquier lugar. Como lo argumentan Restrepo y Waks (2018):

El aprendizaje activo se encuadra dentro de las metodologías de aprendizaje constructivista y consiste en utilizar técnicas de instrucción que involucren a l@s estudiantes en el proceso de su propio aprendizaje a través de actividades como escribir, leer, hablar, discutir, investigar, manipular materiales, realizar observaciones, recopilar y analizar datos, sintetizar o evaluar elementos relacionados con el contenido tratado en el aula, entre otros aspectos. (p. 4)

Lo anterior, se refleja en el recurso elaborado, pues permite al estudiante avanzar a su propio ritmo y además, de realizar actividades que le permiten, saber si está comprendiendo de la mejor manera, los temas a medida a que avanza en su estudio. Por esa razón, si la persona se compromete en su proceso de aprendizaje, podría optimizarse el tiempo en las aulas para que la persona docente, pueda profundizar más en los contenidos, con lo anterior, también el recurso fomenta la modalidad de aprendizaje invertido, como señalan Bergmann y Sams (2013): “El aprendizaje invertido no se trata de cómo usar los videos de las clases, sino de cómo utilizar mejor el tiempo en el aula con los estudiantes” (p. 16). En la imagen 1, se muestra un video presente en el recurso elaborado, con evaluaciones en ciertos momentos.

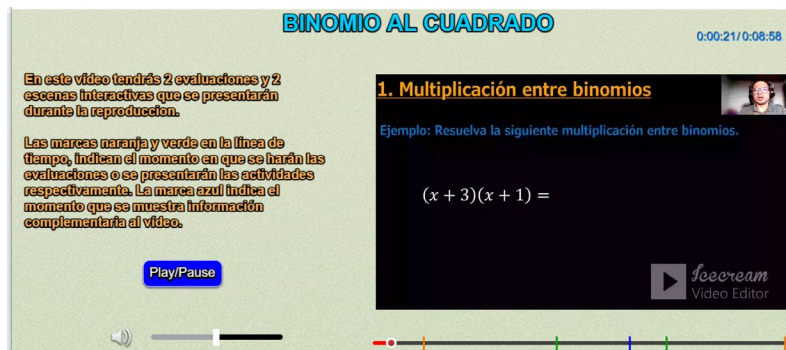


Imagen 1: Video interactivo con evaluación en ciertos lapsos. Plantilla DescartesJS.

Es importante aclarar que no se espera que el estudiante aprenda solo, y que así logre adquirir todo el conocimiento, sino debe ir orientado bajo el acompañamiento de la persona docente, como lo indica Hamdan et al (2013), “El Aprendizaje invertido no debe ser considerado como un remedio para resolver todos los problemas educativos, aunque tiene el potencial de crear un ambiente propicio para el aprendizaje activo, comprometido y centrado en el estudiante.” (p. 16)

Desde el pragmatismo, se trata de explicar que el conocimiento se da a través de las experiencias y las acciones prácticas, como lo afirman Diago y Páramo (2023) “El pragmatismo es una perspectiva teórica y metodológica amplia y flexible con una extendida capacidad integradora y crítica, cuya fortaleza radica en su perspectiva práctica de la construcción del saber (...)” (p. 10).

El recurso digital elaborado, está relacionado al concepto de los libros digitales interactivos, para comprender mejor este término, se cita Carmona et al (2015) el cual señala “El término de interactivo provee al libro digital de ciertas características técnicas y funcionales, con múltiples formas como los contenidos multimediales, juegos, actividades para solucionar, hacer anotaciones, resaltar, extraer, ejecutar simulaciones, acceder a páginas web recomendadas(...)” (p.46)

En la siguiente imagen 2, se muestra el uso de interactividad en el recurso elaborado, para el análisis de la función cuadrática.

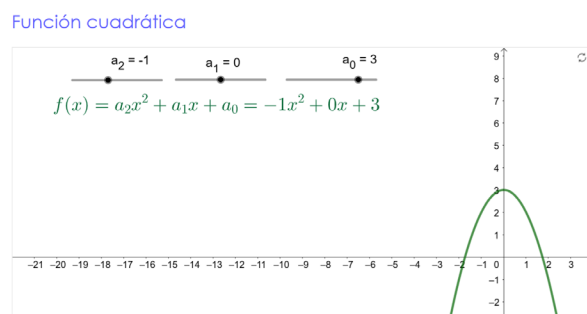


Imagen 2: Recurso interactivo de la función cuadrática

Por otro lado, se busca hacer un recorrido por algunas investigaciones sobre el uso de libros digitales interactivos para la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas, tanto a nivel nacional como internacional. En primer lugar, se presenta el trabajo realizado por Santos y Camacho (2018), docentes en la disciplina de Matemática Educativa en México, sobre la resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnología digital en el diseño de libros interactivos. Por otro lado, la profesora Sánchez (2018), en Ecuador, desarrolló un cuaderno digital interactivo como herramienta didáctica para la enseñanza de Matemáticas en segundo año de Educación General Básica.

A nivel latinoamericano, existe la Red Educativa Digital Descartes (10 de marzo del 2021), cuyo objetivo es la creación de libros digitales interactivos para mejorar la comprensión de las Matemáticas y otras áreas del conocimiento. En esta plataforma se han publicado una gran variedad de recursos libres que mejoran la educación en diversas áreas, en particular, varios libros y escenas interactivas para la enseñanza de las Matemáticas. Por esa razón, esta fue la opción para crear el recurso, la persona investigadora recibió capacitaciones impartidas por la Red Educativa Descartes, en colaboración con el Instituto Universitario Pascual Bravo, con sede en Medellín, Colombia.

Por otro lado, el Instituto Tecnológico de Costa Rica (TEC) ha desarrollado recursos de libros digitales interactivos utilizando la aplicación iBooks Author, disponible solo para el sistema operativo iOS. Estos libros están enfocados en contenidos multimedia visualizables en la aplicación iBooks (Castillo, 2018). También en esta misma institución, se ha realizado un trabajo por parte de Solís et al. (2022), que consiste en la creación de libros digitales interactivos para el aprendizaje de Matemáticas en modalidad a distancia, como una propuesta para sexto grado de primaria.

Metodología y resultados

Este trabajo se encuentra dentro del enfoque cualitativo, tiene como fin describir las distintas cualidades y características de un fenómeno sin ninguna precisión numérica (Hernández, et al. , 2010). La finalidad de la investigación es la elaboración de un recurso digital interactivo con la consulta a expertos en el área de la Matemática y estudiantes del curso de Precálculo, con relación al tema de función polinomial. Por esta razón, se ubicó dentro de una investigación acción, pues se realizó a través de las experiencias y evidencias del autor, como profesor del curso, como lo señala Colmenares et al. (2008):

Se debe tener en cuenta que la investigación acción no es lo que habitualmente hace un profesor cuando reflexiona sobre lo que acontece en su trabajo; como investigación, se trata de tareas sistemáticas basadas en la recolección y análisis de evidencias producto de la experiencia vivida por los actores o protagonistas educativos que participan en el proceso de reflexión y de cambio. (p.107)

Además, el trabajo se realizó bajo un lapso delimitado por el investigador para cumplir con su objetivo. El grupo de sujetos en estudio corresponde a estudiantes universitarios del curso de precálculo en la Sede del Atlántico, Universidad de Costa Rica, Turrialba, la razón por la que se escoge ese grupo es que la persona investigadora ha sido docente del curso, lo cual facilita el acceso de los datos y de la información. El instrumento para la recolección de datos, fueron, cuestionarios elaborados en Google Forms.

Este curso tiene una matrícula en promedio de 30 estudiantes en la Sede, con la apertura de 3 grupos cada ciclo del año, esto representa una población mínima de 90 estudiantes por año que cursan precálculo, para esta ocasión se tomó en cuenta una muestra de un grupo, que son entre 20 a 30 estudiantes, que eran las personas que se encontraban matriculados en el curso de Precálculo, que impartía la persona docente, investigadora del presente trabajo.

En la primera encuesta aplicada, tenía como fin recabar información en las personas estudiantes acerca de las dificultades para aprender Matemáticas y su opinión acerca de cómo la tecnología les puede favorecer para mejorar su proceso de aprendizaje.

¿Cómo cree usted que se pueda aplicar la tecnología para aprender matemáticas? *

Ejercicios que uno pueda realizar en el celular, que indique los errores y una opción de guía, eso sería genial así uno puede pasar durante la semana en dónde sea jugando a resolver la materia vista en clase sin tener que encender la compu ni sacar el cuaderno y esas complicaciones

Imagen 3: Respuesta obtenida de una persona estudiante.

Lo anterior, evidencia la necesidad de acceder al conocimiento en cualquier momento, lo que argumenta García (2017) acerca de la ubicuidad del aprendizaje mediante herramientas tecnológicas, “La ubicuidad de estos formatos de aprendizaje rompe la dependencia y sujeción a un lugar concreto para llevar a cabo una sesión de aprendizaje” (p.20). La encuesta se aplicó a los estudiantes del curso de precálculo en el año 2020, el documento fue enviado por medio de un correo a un grupo de 20 personas, pero solo un total de 14 dieron respuesta. La edad de la población encuestada se encuentra en un rango de los 17 a los 25 años. A continuación, se muestra una pregunta y la respuesta obtenida:

¿Cómo se imagina un libro digital en matemática que aborde los temas de precálculo? *

Uff, eso estaría súper bien: me lo imagino que traiga la explicación puntual y el problema me lo vaya resolviendo como symbolab, poniendo los pasos “oscuros” o sea los que uno por default ya debe saber hacerlos.

Imagen 4: Respuesta obtenida de una persona estudiante.

La respuesta obtenida muestra la necesidad de un recurso que guíe y corrija al estudiante conforme avanza en su aprendizaje, como lo señala Villareal (2012), acerca de la importancia de generar un ambiente donde la Matemática se considere “un laboratorio matemático donde un «ensayo y error educado» fuese permitido y la visualización fuese un aliado para la comprensión matemática.” (p.83). Las personas estudiantes son conscientes de la importancia de implementar nuevas estrategias didácticas apoyadas en recursos digitales, debido a la facilidad de acceso a estos materiales y a la posibilidad de fomentar una mayor participación en clase. Como se muestra en la siguiente respuesta.

¿Cuáles temas desearía que desarrollará un libro digital en matemáticas? *

Los temas relacionados a precalculo, tener estos temas dispobles en un libro para repasar puede ser de gran utilidad debido a que son esenciales para futuros cursos.

Imagen 4: Respuesta obtenida de una persona estudiante.

Esto permite al autor evidenciar la pertinencia y relevancia de los recursos digitales interactivos, donde la persona estudiante pueda estar repasando algunos conocimientos que son conscientes que aún les hace falta aprehender, como se reflejaba en el Dima del año 2019.

Por otro lado, la segunda encuesta, que tenía como fin, recopilar información acerca del uso de las tecnologías en las aulas de algunos docentes en Matemática, la misma se aplicó a cuatro profesores que han impartido el curso de Precálculo, tanto en modalidad presencial como virtual.

5. ¿Cuáles serían algunas características que usted considera, debe tener el libro para que sea útil en su labor?

Mini videos explicativos, retroalimentación clara y concisa. Ejercicios interactivos en línea que le permitan ingresar cuantas veces lo desee. ,

Imagen 5: Respuesta obtenida de una persona docente del curso de precálculo.

En este cuestionario, se determina, una buena aceptación hacia la incorporación de nuevas metodologías que fomenten la participación del estudiantado, así como el uso de estrategias que faciliten una mejor comprensión de los contenidos en Precálculo.

Por último, el recurso digital elaborado fue compartido con siete docentes de Matemática que han impartido el curso de Precálculo, con el propósito de que revisaran algunas de las características del libro y, de este modo, cumplir con el proceso de aceptación del recurso, tercer objetivo propuesto, con expertos en el área.



Figura 1: Caracterización del libro interactivo analizado por siete expertos.

Como se observa en la figura 1, algunas de las preguntas realizadas indagaban si el recurso promueve la motivación y el interés por el aprendizaje de las Matemáticas, así como si contribuye a una mejor comprensión del tema de la función polinomial en el curso de precálculo, más de cinco personas respondieron afirmativamente a ambas cuestiones. Según el criterio de las personas encuestadas, se debe ahondar en la elaboración de más recursos interactivos, ejemplos y videos que logren profundizar los contenidos abordados, para que sean más apoyo para la persona estudiante en el momento de estudiar. Adicionalmente, las personas docentes brindaron recomendaciones sobre la necesidad de que los videos sean más cortos, que se complementen

con recursos interactivos, como el presentado en el estudio del binomio al cuadrado, y que se amplíen las explicaciones en dichos recursos.

Finalmente, con el recurso se cumple con lo que mencionaba Hamdan et al (2013), acerca de incentivar el aprendizaje invertido mediante estrategias que pongan a la persona estudiante como el actor principal para construir su conocimiento a través de la guía del recurso. Por último, se logró concluir con la elaboración de un recurso digital interactivo enfocado en el tema de Función Polinomial; sin embargo, se espera dar continuidad al proyecto con el fin de abarcar la totalidad de los contenidos del curso de Precálculo.

Conclusiones y reflexiones finales

A través del proyecto realizado, ha sido posible constatar que existe una necesidad de cambiar paradigmas y esquemas de cómo aprender y enseñar Matemáticas dentro del contexto educativo. La propuesta diseñada puede llegar a propiciar un aprendizaje significativo en el proceso de aprender Matemáticas de una forma atractiva e interesante para cada estudiante, aunque este proceso aún queda pendiente de validar, porque la aplicación del recurso aún no se ha logrado ejecutar, a dos grupos diferentes de precálculo.

Por esa razón, con el recurso validado, sería una herramienta que busca reforzar los conceptos fundamentales de secundaria que, por diversas razones, como las explicadas en este trabajo, no han sido completamente dominados por las personas estudiantes, lo cual dificulta su preparación en cursos básicos de Matemática en la universidad. Esta situación se ha demostrado especialmente en las últimas generaciones, como lo señalado en el Octavo Informe de la Educación (2021), que han enfrentado dificultades como huelgas, cambios en el currículo escolar, y la transición a la educación virtual, factores que han impactado negativamente en el desempeño académico.

Uno de los principales logros pedagógicos de este trabajo radica en el cambio de rol que experimentan tanto las personas estudiantes como cada docente. En el caso del estudiantado, se fomenta el desarrollo de habilidades autodidactas, lo cual les permite asumir una mayor responsabilidad en su proceso de aprendizaje, mediante un enfoque activo apoyado en la modalidad de aprendizaje invertido. Por su parte, el docente asume un rol de guía o tutor, respondiendo a dudas y preguntas que surjan durante el estudio autónomo. Sin lugar a duda, este enfoque promueve un mayor compromiso tanto por parte del docente como del estudiante, lo que resulta en clases más dinámicas, participativas y provechosas, en contraste con las tradicionales lecciones magistrales, donde el docente expone la teoría de forma continua, con poca intervención del estudiante.

Algunas de las limitaciones que se obtuvo al crear el recurso fue el tiempo requerido para capacitarse y desarrollarlo en código HTML. Esto provocó que únicamente se diseñara un recurso únicamente con un tema, con base en las respuestas obtenidas por expertos y estudiantes. En este sentido, la continuidad del proyecto consistiría en completarlo con los demás tipos de funciones vistos en el curso, luego realizar la investigación de validación y, posteriormente, publicar un libro en la Red Educativa Descartes, de forma libre y gratuita, y si es posible, utilizar herramientas de inteligencia Artificial que completen aún más el recurso.

Referencias y bibliografía

- Bergmann, J., Sams, A. (2013). Flip your students' learning. *Educational Leadership. Eric*, 70(6), 16–20.
- Carmona, M., Flores, M., Rodríguez, S., & Suárez, A. (2015). *Propuesta de innovación educativa para Quinto y Sexto Grado, en las Instituciones Educativas Chaparral y San Vicente Ferrer (San Vicente Ferrer, Antioquía)* [Tesis de maestría, Universidad Pontificia Bolivariana]. Repositorio Institucional UPB. <https://repository.upb.edu.co/handle/20.500.11912/2850>
- Castillo, K. (2018). Manual para la construcción de libros dinámicos e interactivos: ¿Qué es el iBooks Author?. Recuperado el 10 de marzo del 2021. <https://matesvirtuales.com/ibookmanual/>
- Colmenares, A. M., & Piñero, M. L. (2008). La investigación acción: Una herramienta metodológica heurística para la comprensión y transformación de realidades y prácticas socio-educativas. *Laurus*, 14(3), 96–114. <https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=76111892006>
- Diago, R., & Páramo, P. (2023). El pragmatismo en la investigación educativa: Perspectivas y aportes actuales. *Revista de Investigación Educativa*, 41(1), 1–15. <https://doi.org/10.6018/rie.567891>
- García Aretio, L. (2017). Educación a distancia y virtual: Calidad, disrupción, aprendizajes adaptativos y móviles. *RIED. Revista Iberoamericana de Educación a Distancia*, 20(2), 9-25.
- Hamdan, N., McKnight, P., McKnight, K., & Arfstrom, K. M. (2013). A review of flipped learning. Flipped Learning Network. *PEARSON*. DOI [10.4236/ce](https://doi.org/10.4236/ce.2013.4236).
- Programa Estado de la Nación. (2021). Octavo Informe Estado de la Educación. <https://estadonacion.or.cr/informe-estado-educacion-2021>
- Restrepo, S., & Waks, J. (Agosto, 2018). Aprendizaje activo y metodologías constructivistas en la educación superior. *Editorial Universitaria*. <https://unae.edu.ec/wp-content/uploads/2019/11/cuaderno-2.pdf>
- Red Educativa Descartes. (10 marzo del 2021). Proyecto Descartes. <https://proyectodescartes.org/descartescms/>
- Santos Trigo, M., & Camacho Machín, M. (2018). La resolución de problemas matemáticos y el uso de tecnología digital en el diseño de libros interactivos. *Educatio Siglo XXI*, 36(3), 21–40. <https://doi.org/10.6018/j/349451>
- Santos, M., & Camacho, L. (2018). Tecnología digital y aprendizaje matemático: Un enfoque colaborativo. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 12(1), 20–25. <https://doi.org/10.12802/reime.2018.12.1.2>
- Solís Ortega, R., Suárez Valdés-Ayala, Z., Monge Madriz, C., & Sánchez Fernández, I. P. (2022). Libros digitales interactivos de matemática como apoyo al aprendizaje en una modalidad a distancia: Una propuesta para sexto grado de primaria. *Revista Ensayos Pedagógicos*, 17(1), 297–318. <https://doi.org/10.15359/rep.17-1.13>
- Villareal, M. (2012). Tecnologías y educación matemática: Necesidad de nuevos abordajes para la enseñanza. *CONICET*, 5, 73–94. <https://revistas.unc.edu.ar/index.php/vesc/article/view/3014>



Secuencia didáctica para el aprendizaje de la parábola mediado por el chorro de agua, Tracker, GeoGebra y la fotografía

Rafael **Pantoja** Rangel

Departamento de Matemáticas, CUCEI, Universidad de Guadalajara

profe.rpantoja@hotmail.com

México

Rafael **Pantoja** González

Instituto Tecnológico de Ciudad Guzmán. TNM

rpantoja3@hotmail.com

México

Resumen

En el taller se emplea una secuencia didáctica, para modelar la trayectoria de un chorro de agua en fotografía, en su forma ideal, con el Tracker y determinar la función de segundo grado $y = ax^2 + bx + c$. Se pretende que el alumno logre comprender el efecto de los coeficientes a, b, c , cuando se le solicite ubicar en distintas posiciones el plano cartesiano. Una vez que la fotografía se inserta en el Tracker, una de las rutinas permite colocar el origen del plano en el lugar que desee el usuario y girarlo 360 grados, pero solo se planteará moverlo de manera horizontal y vertical y con giros de 90, 180 y 270 grado, sujeto al condicionamiento de alguno de los coeficientes del polinomio, por ejemplo, cuando $a < 0$ o $b = 4$ o $c = 0$. Se empleará GeoGebra para determinar los parámetros de la parábola, para cada función encontrada: vértice, foco, directriz, lado recto, eje de simetría.

Palabras clave: Fotografía; GeoGebra; Modelación; Secuencia didáctica; Tracker; Uso de tecnologías digitales en la Educación Matemática

Introducción

La secuencia didáctica (Tobón, 2010) es un material que tiene como propósito, que el alumno al desarrollar las actividades propuestas, logre relacionar el polinomio de segundo grado y sus coeficientes $f(x) = ax^2 + bx + c$ con el objeto matemático Parábola. Las actividades

propuestas se centran en el empleo de la fotografía digital de un chorro de agua, fotografiado en el momento de lanzar el agua y que se analiza con el software Tracker, para manipular los ejes coordenados y obtener distintas ecuaciones que representan la trayectoria parabólica. La secuencia didáctica se integra de actividades de estudio y un resumen de los conceptos teóricos fundamentales de la parábola, con lo cual se pretende que el estudiante desarrolle las actividades en el aula y extraclase y se propicie la anhelada responsabilidad sobre su aprendizaje.

Se sugiere que el alumno diseñe el set de grabación de la trayectoria del chorro de agua, ya sea de una manguera, de una botella o de una fuente de un parque público (Figura 1), tome la fotografía y seleccione la más conveniente para trabajar con el Tracker, con la finalidad de obtener los datos y gráficas, así como ajustar la función ajustada a la trayectoria que describe el chorro de agua, lanzado desde distintas posiciones.



Figura 1. Ejemplo de chorro de agua

En este trabajo es importante la utilización del software libre Tracker, auxiliar para el alumno principalmente en los aspectos de manipular video y fotografías y obtener tres gráficas de distintas variables del objeto, así como la correspondiente tabla de datos de las variables relacionadas y la obtención de la función (rutina limitada) que mejor se ajusta a la trayectoria descrita por el movimiento.

Se pretende que el alumno al analizar las distintas fotografías con el Tracker, logre relacionar el efecto que tienen los coeficientes del polinomio de segundo grado $f(x) = ax^2 + bx + c$, en primer lugar, con los desplazamientos perpendicular y horizontal de los ejes coordenados y en segundo lugar, con el giro de los ejes coordenados 90° , 180° y 270° grados.

Los objetivos del taller son:

- Modelar la trayectoria del chorro del agua en función de los coeficientes de la ecuación de segundo grado y su desplazamiento.
- Comparar las ecuaciones que calcula Tracker para describir la trayectoria del chorro del agua cuando se desplazan los ejes coordenados a distintas posiciones.
- Analizar los cambios en los coeficientes de la ecuación de segundo grado al girar los ejes coordenados 90° , 180° y 270° grados.

Se pretende analizar la fotografía del chorro de agua con el Tracker. Obtención de las coordenadas de gráfica asociada al chorro de agua. exportar los datos de las variables a GeoGebra, obtener la ecuación de segundo grado que modela el chorro de agua, determinar los parámetros de la parábola con el GeoGebra, elaborar el reporte de la actividad y la presentación de los resultados del taller.

Referencia Teórica

La propuesta considera la teoría de los Registro de Representación Semiótica de Duval (2004), porque de una manera “*natural*”, a partir del análisis de la fotografía con el software Tracker, se presenta al alumno en pantalla, los registros de representación verbal, pictórica, escrita, gráfica, numérica y analítica relacionados con la situación problema. Se espera que el alumno logre transitar entre un mismo registro (Tratamiento) y entre dos registros distintos (Conversión) con la finalidad de lograr un aprendizaje significativo al responder la secuencia didáctica planeada para el taller. Bajo esta perspectiva, la teoría de las representaciones semióticas son un sustento para relacionar el contexto del estudiante con los contenidos matemáticos planteados en el aula, en este caso, la ecuación de segundo grado, el chorro de agua, la parábola y sus parámetros.

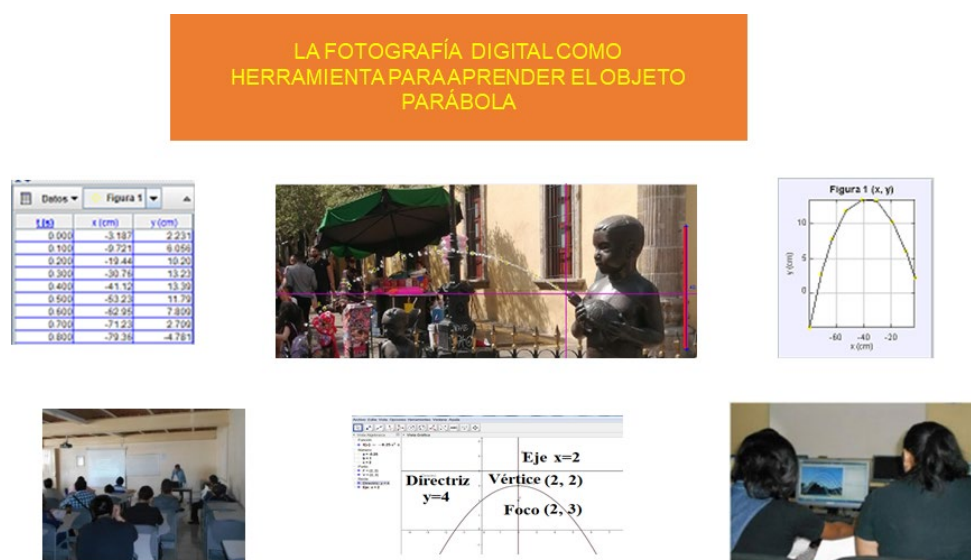


Figura 2. Interpretación de la Teoría de Duval para el chorro de agua

El alumno obtiene la ecuación de segundo grado o cuadrática, y con el GeoGebra obtiene los parámetros de la parábola: directriz, foco, vértice y lado recto. El propósito es la modelación de la situación problema del chorro de agua y su relación con la matemática escolar, en este caso, con la ecuación de segundo grado y la parábola. Al final del taller, los alumnos exponen y elaboran el reporte en trabajo individual y colaborativo por escrito, para presentarlo, discutirlo y defenderlo en la exposición grupal. Es importante mencionar que durante el taller se promueven los valores: puntualidad, participación, honestidad, respeto, igualdad, empatía, entre otros valores.

Metodología

- Se integran los equipos para trabajar la fotografía la situación problema “Chorro de agua”.
- Los alumnos relacionan la situación problema con lo mostrado en pantalla por el software Tracker, que consiste en una tabla de datos, tres gráficas (x vs. t , y vs. t , y vs. x) y en su caso, un ajuste a las funciones. Se aclara que la rutina de ajuste de funciones de Tracker es

limitada y se sugiere exportar los datos a GeoGebra para lograr una mejor aproximación a la trayectoria

- En la última fase cada uno de los equipos presenta y discute ante el grupo su reporte.

Actividades con el docente:

- Análisis de saberes previos, integración de los grupos colaborativos y desarrollo de taller.

Actividades para aprendizaje autónomo y colaborativo

- Diseño del set de grabación de la situación problema seleccionada para fotografiar el chorro de agua.
- Manipulación de la fotografía con Tracker para la obtención de las gráficas y datos.
- Exportación y manipulación de datos obtenidos de Tracker para su tratamiento con GeoGebra y obtener la función ajustada.
- Discusión en grupo colaborativo de los resultados obtenidos del análisis de la situación problema, en este caso, el chorro de agua y los contenidos de la parábola, su ecuación, su gráfica y los parámetros (Vértice, Foco, Directriz, Lado Recto y Eje de Simetría).
- Elaboración del reporte escrito de la actividad.
- Presentación de los resultados ante el grupo para propiciar la discusión e interacción entre los participantes.

Reflexión

Se plantea en la actualidad que en un proceso educativo, es ideal que se involucre a los actores de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, fortalecido con un ambiente adecuado con las TIC, en el que el estudiante, en trabajo individual y colaborativo, puede decidir qué y cómo va aprender, en el que tome la iniciativa y sea el responsable de su aprendizaje. Por otro lado, la importancia del aprendizaje colaborativo es primordial, ya que, mediante la interacción social con compañeros de clases, maestros y otros, propician la motivación para que construya su conocimiento.

Bibliografía

- Duval, R. (2004). *Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores en el desarrollo cognitivo*. Santiago de Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. ISBN: 958-670-329-0.
- Hitt, F., & González-Martín, A. S. (2015). Covariation between variables in a modelling process: The ACODESA (collaborative learning, scientific debate and self-reflection) method. *Educational studies in mathematics*, 88(2), 201-219.
- Jofrey, J. A. (2010). Investigating the conservation mechanical energy using video analysis: four cases. *Physics Education*. DOI 10.1088/0031-9120/1/005.
- Lehmann, CH. (1989). *Geometría Analítica*, México: LIMUSA.
- Tobón, S. T., Prieto, J. H. P., & Fraile, J. A. G. (2010). *Secuencias didácticas: aprendizaje y evaluación de las competencias*. Pearson Educación.
- https://www.researchgate.net/profile/Sergio_Tobon4/publication/287206904_Secuencias_didacticas_aprendizaje_y_evaluacion_de_competencias/links/567387b708ae04d9b099dbb1.pdf



Trabajo matemático realizado por estudiantes de segundo de secundaria al desarrollar evaluaciones virtuales sobre funciones cuadráticas

Andrés Valdés

Universidad Católica de Maule

Chile

v.andres.r@hotmail.com

Catalina Palacios

Universidad de Playa Ancha Valparaíso

Chile

catalina.palacios@upla.cl

Jorge Gaona

Universidad de Playa Ancha Valparaíso

Chile

jorge.gaona@upla.cl

Andrea Vergara

Universidad Católica del Maule

Chile

avergarag@ucm.cl

Resumen

Este estudio se centra en describir cómo se desarrolla el trabajo matemático de estudiantes de secundaria chilena (15 y 16 años) al momento de desarrollar problemas abiertos sobre función cuadrática en un entorno virtual. Para el análisis de lo realizado por los y las estudiantes se utilizó la Teoría del Espacio de Trabajo Matemático. En cuanto a la metodología a utilizar es un estudio cualitativo de contenido por medio de un protocolo descriptivo. Las y los estudiantes resuelven dos tareas, la primera pide encontrar valores máximos y mínimos de una longitud y la segunda solicita construir un rectángulo dada una cuerda de medida constante (perímetro a utilizar). Lo que les permitirá construir la noción de la función cuadrática.

Palabras clave: Educación matemática; Espacio de Trabajo matemático; Enseñanza virtual; Evaluación virtual; Resolución de problemas; Función cuadrática; Educación secundaria; Investigación cualitativa.

Introducción

En la enseñanza de la matemática, la interacción entre profesor y estudiante es primordial. Para esto, el profesor debe ser el encargado de fomentar el diálogo, desde diversas formas, con el estudiante (Lim et al., 2020).

Una de las mayores dificultades dentro del contexto escolar y pedagógico es el cómo los estudiantes adquieren los conocimientos y cómo el profesor entrega la información, corrige y retroalimenta a sus estudiantes (Dos Santos et al., 2022). La retroalimentación o feedback, es la que representa un factor importante en la adquisición de conocimiento, pues es el elemento del proceso educativo que posee mayor impacto en el aprendizaje del estudiante (Hattie y Timperley, 2007; Sánchez-Martí et al., 2019). Para Hattie y Clarke (2018) el feedback es la información que entrega el profesor a los estudiantes a partir de las tareas realizadas por estos.

Un adecuado feedback es aquel que logra fomentar el pensamiento o replanteamiento, donde el estudiante logra distinguir sus próximos pasos y sus errores, con el fin de corregirlos (Hess y Smit, 2024), a su vez, Nicol y Macfarlane-Dickb (2006) establecen que un buen feedback es la estrategia que logra fortalecer la habilidad del estudiante de autorregular su propio aprendizaje. Esto se logra realizando un feedback inmediato, específico, orientado a la tarea y concurrente (Hernández Rivero et al., 2021). Además, este es inherente para cada dominio del conocimiento específico de una disciplina (Moni, 2024) y su efectividad varía dependiendo del mensaje que el receptor recibe (Panadero y Lipnevich, 2022).

Las formas de feedback más efectivas, según Hattie y Timperley (2007) son dar pistas, reforzar, feedback en video o audio e indicaciones por medios computacionales. Es este último punto el que resalta sobre los demás, ya que, dado el avance de la tecnología, esta se encuentra cada vez con mayor frecuencia dentro de las aulas. Por lo que es necesario trabajar con esta, pues impacta en los sistemas de educación formales (Vargas-Quesada et al, 2021). Incluso, los profesores experimentados no ven problemas al momento de incorporar la tecnología con la enseñanza tradicional (Oumelaid et al., 2024), de este modo, Reddy (2021) menciona que es necesaria la incorporación de la tecnología en la enseñanza de la matemática, ya que, provee oportunidades de adquirir conocimientos y fomentar la exploración o la búsqueda de información.

El feedback por medios tecnológicos ayuda con la motivación, el trabajo colaborativo y el desarrollo del pensamiento lógico (Umaña et al., 2020), por lo que es necesario abordar cómo esta tecnología se relaciona con el trabajo matemático que realizan los estudiantes. Pues, para los estudiantes, el uso de la tecnología virtual en la clase de matemática facilita su aprendizaje. Lo que produce un cambio total en la dinámica de la clase, requiriendo una nueva perspectiva educativa (Hu y Wang, 2024).

De acuerdo con el currículo chileno actual, la unidad de álgebra se enfoca en que los estudiantes puedan reconocer funciones en diversos contextos (Díaz y Flores, 2022). Según el Ministerio de Educación de Chile (MINEDUC), la función cuadrática, de forma particular, se concentra en según año de secundaria (MINEDUC, 2015). A pesar de esto, los resultados internacionales muestran que los estudiantes chilenos no han logrado los objetivos propuestos para esta unidad (Agencia de Calidad de la Educación, 2017), además, Arias-Rueda et al. (2020) menciona que son muy pocos los estudiantes que logran un aprendizaje de las funciones cuadráticas. Por lo que es necesario estudiar los procesos y el trabajo que están interfiriendo con estos aprendizajes.

Así, este trabajo busca describir el trabajo matemático realizado por los estudiantes de segundo año de secundaria al momento de resolver evaluaciones virtuales sobre funciones cuadráticas.

Marco Teórico

Esta investigación requiere de un marco teórico robusto que aporte relaciones desde lo cognitivo y matemático al momento de establecer que trabajo matemático realizan los estudiantes. Para esto, se optó por la teoría de los Espacios de Trabajo Matemático (ETM), específicamente, ETM personal, que trabaja a nivel individuo y ETM colectivo, que estudia el grupo como un ente.

El ETM es una teoría organizada que ayuda a comprender el trabajo de estudiantes y profesores al momento de resolver tareas matemáticas. (Henríquez-Rivas et al., 2021a; Panqueban et al., 2024). Si bien, el ETM nace desde la geometría, se ha ido desarrollando y expandiendo a otras áreas de la matemática (Kuzniak, 2011). Este se compone de dos planos. El plano epistemológico, que refiere a la matemática; y el plano cognitivo, que trata los procesos mentales (Kuzniak et al., 2016). En el caso del plano epistemológico se presentan tres componentes: El representamen, relacionado con la forma en que se representan las interpretaciones; Los artefactos, que consisten en el uso de las herramientas o sistemas simbólicos; Y el referencial, que corresponde a las definiciones, propiedades y teoremas. Por otro lado, tenemos el plano cognitivo, que cuenta con tres componentes: La visualización, que se relaciona con la interpretación de los signos; La construcción, el proceso centrado en las acciones activadas por los artefactos y asociados a una técnica; Y la prueba, que son todas las justificaciones de los argumentos, definiciones e hipótesis que sustentan el referencial (Kuzniak, 2011). Estos componentes se pueden visualizar en el diagrama (Figura 1).

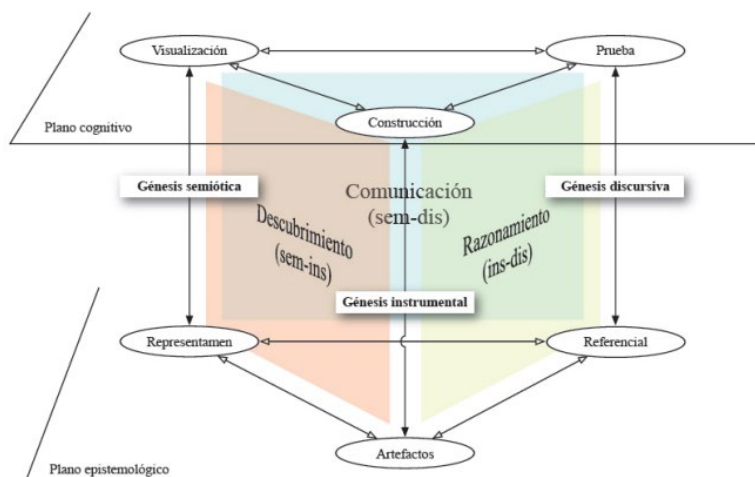


Figura 1. Diagrama ETM de Kuzniak y Richard, 2014

Existen interacciones entre los componentes de cada plano, denominadas génesis (Kuzniak, 2022). La génesis semiótica, que es la relación entre el representamen y la visualización, consiste en cómo el representamen es interpretado a través de la visualización; La génesis instrumental, que relaciona la construcción con los artefactos, son los usos de los artefactos para llegar a la construcción; Y la génesis discursiva, que es la que conecta la prueba y el referencial, toma las referencias teóricas y las asocia con el razonamiento deductivo (Kuzniak, 2022; Gaona y Menares, 2022; Kuzniak et al., 2016).

ETM Personal y Colectivo

Dentro de las relaciones del ETM, hay diversas miradas. Para esta investigación, se utilizará el ETM personal que hace referencia a cómo una persona realiza un trabajo matemático por medio de sus propias habilidades y conocimientos. En este proceso, la persona adopta su propia heurística, por lo que establecen sus propios caminos de resolución (Menares y Vivier, 2022).

En cuanto al ETM Colectivo corresponde a lo que cada estudiante aporta de su ETM personal, es decir, se nutre de cada aporte de los individuos, generando así un trabajo matemático entre pequeños grupos y que pueden o no estar guiados por el profesor. (Gaona et. al., 2024)

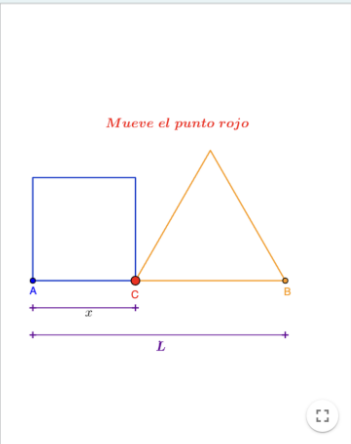
Metodología

Para el análisis de los datos, se realizará un estudio cualitativo del contenido según Mayring (2019). Pues establece que el análisis debe cumplir tres roles principales: Resumir los procesos, estructurar los procesos y explicar los procesos. Lo que ayuda a describir la información obtenida a partir de estudiantes de segundo año de secundaria.

Esta investigación tendrá un carácter interpretativo según Krause (1995) quien establece que este paradigma debe caracterizar lo que la gente dice o hace, se debe buscar descubrir algo nuevo y categorizar, fragmentar y articular los datos con el fin de lograr una interpretación global de los datos. Además, será descriptiva, pues busca recopilar información sin tener una hipótesis definida (Nieto, 2018)

En cuanto a la recolección de los datos, Penn-Edwards (2015) nos indica que la grabación permite observar aspectos en mayor detalle o situaciones no observadas en el momento, por lo que es una herramienta fundamental para un estudio cualitativo. Así, se realizarán videograbaciones de las pantallas de los estudiantes y de la clase en general, específicamente cuando el docente institucionaliza el trabajo realizado, todo esto bajo la información obtenida desde el proyecto FONDECYT código 11230953. Donde se trabajó con estudiantes de segundo de secundaria (15 y 16 años) de un colegio de la ciudad de Valparaíso, Chile. Donde los estudiantes trabajaron en el desarrollo de dos problemas (figura 2 y 3).

Observe la figura en la que hay un cuadrado y un triángulo equilátero :



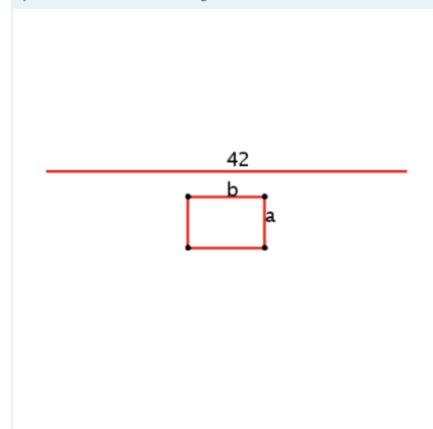
Mueva el punto rojo

Si $L = 11$ y la distancia de A a C es la variable independiente x , responda a las siguientes preguntas:

1. Elija un valor de x (al que llamaremos x_1) que esté dentro de los valores mínimos y máximos posibles.
2. Calcule el perímetro del cuadrado (lo denominaremos p_c) para ese valor que eligió
3. Calcule el perímetro del triángulo (lo denominaremos p_t) para ese valor que eligió

Figura 2. Problema número 3 de Gaona et al, 2024

Se tiene una cuerda de 42 centímetros, se quiere formar un rectángulo con dicha cuerda. Las dimensiones del rectángulo construido serán (a y b) como se muestra en el gráfico:



Indique en el espacio correspondiente:

- ¿cuál podría ser un valor numérico para cada una de las dimensiones (a y b) del rectángulo?
- ¿Cuál sería el área del rectángulo construido?

Figura 3. Problema número 8 de Gaona et al, 2024

Para el análisis de estos datos, se utilizará el protocolo de análisis de ETM propuesto por Hernández-Rivas et al. (2021b) (Tabla 1). Con el fin de establecer criterios para evaluar la presencia de cada génesis del ETM.

Tabla 1
Protocolo para el análisis de la circulación en el ETM.

Criterio	Componentes	Descriptor
Génesis semiótica	Representamen	Relaciona objetos matemáticos y sus elementos significantes.
	Visualización	Interpreta y relaciona los objetos matemáticos según actividades cognitivas ligadas con los registros de representaciones semióticas (identificación, tratamientos, conversiones).
		El proceso de visualización considera dos niveles de identificación visual de objetos (visualización icónica, visualización no-icónica).
Génesis instrumental	Artefacto	Artefactos de tipo material o un sistema simbólico.
	Construcción	Se basa en las acciones desencadenadas por los artefactos utilizados y las técnicas de uso asociadas
Génesis discursiva	Referencial	Definiciones, propiedades o teoremas.
	Prueba	El razonamiento discursivo se basa en una prueba (pragmática, intelectual).

Fuente: adaptado de Hernández-Rivas et al. (2021).

Esto ayudará a definir cada uno de los componentes del ETM presentes en el trabajo matemático realizado por los estudiantes y así poder describir cada uno de ellos.

Finalmente, se contará con las autorizaciones de los apoderados y profesores para ser grabados en la clase. Además de contar con el asentimiento de los estudiantes. Cabe mencionar que como la investigación se encuentra bajo un proyecto FONDECYT, la recolección de datos se encuentra autorizada por el comité de ética de la Universidad de Playa Ancha.

Referencias y bibliografía

- Agencia de Calidad de la Educación (2017). Informe Nacional TIMSS 2015. http://archivos.agenciaeducacion.cl/informe_nacional_de_resultados_TIMSS_2015.pdf
- Agencia de Calidad de la Educación (2018). Resultados educativos 2018. Ministerio de Educación de Chile.
- Arias-Rueda, J. H., Arias-Rueda, C. A. y Burgos Hernández, C. A. (2020). Procesos aplicados por los estudiantes en la resolución de problemas matemáticos: caso de estudio sobre la función cuadrática. *Góndola, enseñanza y aprendizaje de las ciencias*, 15(2), 284-302. DOI: <http://doi.org/10.14483/23464712.14614>
- Díaz, V. y Flores, G. (2022) Resolución de tipos de problemas contextualizados y análisis de errores: un estudio de casos. *Estudios pedagógicos*. 48(2). <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052022000200009>
- Dos Santos, J. M. D. S., Abar, C. A. A. P., Almeida, M. V. d. (2022). Automatic Feedback GeoGebra Tasks – Searching and Opensource and Collaborative Intelligent Interactive Tutor. *Proceedings of the 26th World Multi-Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics: WMSCI 2022*, 3, 77-82. <https://doi.org/10.54808/WMSCI2022.03.77>

- Gaona, J., Bezama, C., Cerda, B., Permonti, G. y Vergara, C. (2024) Propuesta de tareas en plataforma del proyecto “Relación entre el feedback y el trabajo matemático de estudiantes en el contexto de evaluaciones en línea en matemáticas”.
- Gaona, J. y Menares, R. (2021) Argumentation of Prospective Mathematics Teachers in Fraction Tasks Mediated by an Online Assessment System with Automatic Feedback. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(12). [ff10.29333/ejmste/11425ff](https://doi.org/10.29333/ejmste/11425ff). fffhal-03538861
- Gaona, J., Palacios, C. y Sánchez, L. (2024) Tâches ouvertes dans un environnement numérique pour le développement de l'etm collectif. *Actes Du Huitième Symposium d'Étude Sur Le Travail Mathématique*.
- Hattie, J., y Clarke, S. (2018). *Visible Learning: Feedback*. Routledge.
- Hattie, J., y Timperley, H. (2007). The Power of Feedback. *Review of Educational Research*, 77(1), 81–112. <http://www.jstor.org/stable/4624888>
- Henríquez-Rivas, C., Guerrero-Ortiz, C. y Ávila, A. (2021a) Trabajo matemático de profesores universitarios: Heurísticas de solución de una tarea, *Educación Matemática*, 33(3). <https://doi.org/10.24844/em3303.09>
- Henríquez-Rivas, C., Ponce, R., Carrillo, J., Climent, N. y Espinoza-Vasquez, G. (2021b). Trabajo matemático de un profesor basado en tareas y ejemplos propuestos para la enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias*, 39(2), 123-142.
- Hernández Rivero, V.M., Santana Bonilla, P.J. y Sosa Alonso, J.J. (2021). Feedback y autorregulación del aprendizaje en educación superior. *Revista de Investigación Educativa*, 39(1), 227-248. <http://dx.doi.org/10.6018/rie.423341>
- Hess, K. y Smit, R. (2024) Lehrende unterstützen Lernende beim mathematischen Argumentieren mit Feedback-Dialogen – eine Mixed Methods-Studie. *J Math Didakt*, 45(16). <https://doi.org/10.1007/s13138-024-00240-w>
- Hu, L. y Wang, H. (2024) Unplugged activities in the elementary school mathematics classroom: The effects on students’ computational thinking and mathematical creativity. *Thinking Skills and Creativity*, 54, <https://doi.org/10.1016/j.tsc.2024.101653>
- Kuzniak, A. (2011). L'Espace de Travail Mathématique et ses genèses [The mathematical workspace and its genesis]. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 16, 9-24
- Kuzniak, A. (2022) The Theory of Mathematical Working Spaces—Theoretical Characteristics. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1
- Kuzniak, A. y Richard, P. (2014) Espacios de trabajo matemático. Puntos de vista y perspectivas. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 17(4), 5-15. 10.12802/relime.13.1741a
- Kuzniak, A., Tanguay, D., y Elia, I. (2016). Mathematical working spaces in schooling: An introduction. *ZDM - Mathematics Education*, 48(6), <https://doi.org/10.1007/s11858-016-0812-x>
- Lim, W., Lee, J.-E., Tyson, K., Kim, H.-J., y Kim, J. (2020). An integral part of facilitating mathematical discussions: follow-up questioning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 18(2), 377–398. <https://doi.org/10.1007/s10763-019-09966-3>
- Marí, J. A. y Pons Biescas, A. (2005). La alimentación en el mundo Púnico. En J. Salas-Salvadó, P. García Lorda y J. M. Sánchez Ripollés (Eds.), *La alimentación y la nutrición a través de la historia* (pp. 82–112). Glosa.
- Mayring, P. (2015). Qualitative Content Analysis: Theoretical Background and Procedures. En A. Bikner-Ahsbals, C. Knipping, y N. Presmeg (Eds.), *Approaches to Qualitative Research in Mathematics Education*. 365–380. Springer. https://doi.org/10.1007/978-94-017-9181-6_13
- Menares, R. y Vivier, L. (2022). Personal Mathematical Work and Personal MWS. En A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo y P.R. Richard, (eds) *Mathematical Work in Educational Context. Mathematics Education in the Digital Era*. 91-120. Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_5
- MINEDUC (2015). Bases Curriculares 7° Básico a 2° Medio. Ministerio de Educación.
- Moni, A. (2024). Learner Perceptions of the Feedback Process in the Online Component of a Blended Course. *Online Learning*, 28(2), 1-25. 10.24059/olj.v28i2.3967
- Oumelaid, N., Boukari, B. E., y Ghordaf, J. E. (2024). Assessing the impact of teacher characteristics, learner methods, and self-guided learning on technology adoption in mathematics instruction. *Multidisciplinary Science Journal*, 7(3), <https://doi.org/10.31893/multiscience.2025110>
- Panadero, E. y Anastasiya A. (2022). A review of feedback models and typologies: Towards an integrative model of feedback elements Ernesto. *Educational Research Review*, 35. <https://doi.org/10.1016/j.edurev.2021.100416>
- Panqueban, D., Henríquez-Rivas, C., y Kuzniak, A. (2024). Advances and trends in research on mathematical working spaces: A systematic review. *Eurasia Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 20(6). <https://doi.org/10.29333/ejmste/14588>

- Penn-Edwards, S. (2015). Visual Evidence in Qualitative Research: The Role of Videorecording. *The Qualitative Report*, 9(2). 266-277. <http://www.nova.edu/ssss/QR/QR9-2/pennedwards.pdf>
- Reddy, P., Reddy, E., Chand, V., Paea, S. y Prasad, A. (2021) Assistive Technologies: Saviour of Mathematics in Higher Education. *Front. Appl. Math*, 6. 10.3389/fams.2020.619725
- Romero, E., García, L. y Ceamanos, J. (2021). Moodle and Socrative quizzes as formative aids on theory teaching in a chemical engineering subject. *Education for Chemical Engineers*, 36, 54-64. <https://doi.org/10.1016/j.ece.2021.03.001>
- Sánchez-Martí, A., Muñoz, J.L. y Ion, G. (2019). Diseño y Validación de un Cuestionario de Percepción del Aprendizaje a través del Feedback entre Iguales en Educación Superior. *Revista Iberoamericana de Diagnóstico y Evaluación Psicológica*, 53(4), 113-128. 10.21865/RIDEP53.4.09
- Umaña, M., Miranda, C. y Osorio, F. (2020). Uso educativo de TIC en un salón Montessori: diálogo entre la tecnología digital y los ritos de interacción social en el aula. *Revista de estudios y experiencias en educación*, 19(41). 29-42. <http://dx.doi.org/10.21703/rexe.20201941umana2>
- Vargas-Quesada, B., Zarco, C., y Córdón, O. (2023). Mapping the situation of educational technologies in the Spanish university system using social network analysis and visualization [Mapeo de la situación de las tecnologías educativas en el sistema universitario español mediante análisis y visualización de redes sociales]. *International Journal of Interactive Multimedia and Artificial Intelligence*, 8(2), 190-201. <https://doi.org/10.9781/ijimai.2021.09.004ur>



Uso de juegos digitales para la enseñanza de la probabilidad: diseño e implementación en el aula

María Paz **Gazzola**

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires
Argentina

mpgazzola@niecyt.exa.unicen.edu.ar

María Rita **Otero**

Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires y CONICET
Argentina

rotero@niecyt.exa.unicen.edu.ar

Resumen

Este trabajo consiste en un estudio exploratorio que describe el funcionamiento de una secuencia didáctica para estudiar probabilidad empleando el enfoque Digital Game Based Learning (DGBL), en un aula de matemáticas del nivel secundario en Argentina. La secuencia se diseñó en torno al juego digital *ProbabilidArte* y se implementó en curso de 28 estudiantes de entre 17 y 18 años. A lo largo de diversas tareas, los estudiantes exploraron el juego, analizaron la construcción de probabilidades y diseñaron sus propios desafíos. Esto permitió estudiar nociones tales como eventos aleatorios, espacio muestral, probabilidad de éxito y estrategias de decisión basadas en cálculos probabilísticos para ganar el juego. Los resultados sostienen que el juego es una alternativa viable en el aula de matemáticas, que favorece nuevas formas de enseñanza-aprendizaje e interacción con el conocimiento y que agrada a los estudiantes.

Palabras clave: Enseñanza de la probabilidad, Escuela secundaria, Digital Game Based Learning, juegos digitales.

Definición y relevancia del problema

El juego constituye una parte fundamental en el desarrollo integral de los seres humanos. Desde los primeros años de vida se aprende a través de él, y esta dinámica se extiende a la vida adulta, donde los juegos también desempeñan un rol significativo en diversas actividades cotidianas.

En el ámbito educativo, el Aprendizaje Basado en Juegos (Game-Based Learning, GBL) se ha consolidado como una metodología innovadora que emplea juegos, digitales o no, como herramienta principal para colaborar y potenciar la enseñanza y el aprendizaje. Estos juegos se diseñan con objetivos didácticos específicos, con el fin de aprovechar su atractivo, su dinámica y su capacidad para fomentar la interacción social (Prensky & Thiagarajan, 2007). A través de esta metodología, se busca involucrar a los estudiantes en procesos constructivistas de aprendizaje, promoviendo el desarrollo de habilidades propias del siglo XXI tales como: pensamiento crítico, creatividad, modelado, resolución de problemas, comunicación y alfabetización digital (Gee, 2005; Williams-Pierce, 2019).

Particularmente, en los últimos años, producto de la diversificación y masificación de las tecnologías digitales, se ha focalizado en la utilización de juegos digitales, dando lugar al Digital Game-Based Learning (DGBL) (Presnky, 2001; Gee, 2004). En los comienzos del siglo XXI, Prensky (2001) acuña el término *nativos digitales* para referirse a los estudiantes de este siglo y señala que esta condición incrementa su desinterés por las prácticas de enseñanza tradicional, centradas en el profesor, unidireccionales y sin interacción. Así mismo, resalta la necesidad de incorporar en la enseñanza herramientas y elementos afines a su contexto. La metodología DGBL ha mostrado eficacia en numerosos estudios (Gee, 2007, 2008; Mc Gonial, 2011; Guerra y Revuelta, 2013; Siew, 2018; Liu, et. al, 2021) que subrayan el papel de los juegos digitales como generadores de experiencias estimulantes y agradables para los estudiantes. Esto favorece el sostenimiento de la atención durante períodos prolongados, fomenta la curiosidad, el gusto por los desafíos y los esfuerzos que estos conllevan, factores que impulsan de manera efectiva el proceso de aprendizaje. No obstante, a pesar del alto potencial que ofrece la combinación enseñanza-aprendizaje y juego digital, su integración en el entorno educativo debe trascender el mero hecho de jugar y requiere de una planificación adecuada que evite efectos no deseados como la pérdida de la colaboración entre los estudiantes o la estimulación de la competencia (Fotaris et al., 2016).

El objetivo general de nuestra investigación es estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje empleando juegos digitales en las aulas de matemática y ciencias, incluidas tanto la fase del diseño de una secuencia didáctica que integre uno o más juegos, como la actividad que su desarrollo promueve en los estudiantes y también el rol del profesor (Otero, et al., 2024; Gazzola y Otero, 2023).

En este trabajo exploratorio presentamos una propuesta de enseñanza basada en el enfoque DGBL y los resultados parciales de la primera implementación con un grupo de 28 estudiantes del nivel secundario de entre 17 y 18 años de edad. En esta ocasión, se utiliza el juego digital ProbabilidArte (Gomes, et al., 2021) diseñado para aprender conocimientos de probabilidad.

Método

Se diseñó una secuencia didáctica de cuatro tareas que involucran al juego ProbabilidArte. Dichas situaciones comprenden instancias de exploración, juego, estudio relativo al cálculo de probabilidades y justificación, así como la creación y análisis de nuevos desafíos. La profesora es investigadora del equipo, participó en el diseño de las tareas. Se realiza observación participante y no participante. La implementación se realizó en 6to año de una escuela secundaria argentina, en un curso de 28 alumnos de entre 17-18 años de edad, durante tres clases de dos horas cada

una. Los estudiantes carecían de experiencia escolar con un juego digital. Durante las clases, se conformaron grupos de cuatro integrantes, compartían sus resultados y experiencias. Los registros consisten en los protocolos escritos de todos los estudiantes, que se utilizan en este trabajo para analizar el funcionamiento de la secuencia en el aula.

ProbabilidArte

ProbabilidArte¹ es un juego digital para teléfonos móviles de acceso libre, desarrollado por el equipo V-Lab de la Universidad Federal de Pernambuco. Tiene por objetivo promover el aprendizaje en el nivel secundario de conocimientos relativos a las probabilidades: espacio muestral de un evento aleatorio; cuantificación de posibilidades de un evento aleatorio, inferencia frecuentista; porcentaje; principio multiplicativo; axiomas de probabilidad. El jugador asume el papel de un artista que tiene que generar colores a partir del lanzamiento de dados para pintar *mandalas*. El juego posee tres niveles: fácil, medio y difícil y además cuenta con un nivel libre en el que el usuario puede usar su creatividad para pintar eligiendo los colores por sí mismo.

Al ingresar a un desafío, el jugador debe pintar el mandala según el diseño original que se muestra en la parte superior de la pantalla (Figura 1-a). Para conseguir un color determinado, se deben elegir dos dados entre los disponibles (Figura 1-b) y tirarlos. Esta acción es inherente a la noción de evento aleatorio, ya que los resultados posibles del lanzamiento varían según los dados elegidos. Las caras de estos dados tienen colores primarios, distribuidos de diferente manera: dados con las seis caras del mismo color, dados con dos colores (3 caras de cada color) y dados con tres colores (2 caras de cada color). Al lanzar los dados, la unión de los dos colores obtenidos genera el color a utilizar; por ejemplo, si un dado tiene el color amarillo y el otro el color azul, se dispone del verde. En el nivel fácil, a modo de ayuda, una vez seleccionados los dos dados, se muestra la probabilidad de obtención de cada color posible (Figura 1-c). En los niveles posteriores el usuario tiene que realizar cálculos para determinar la probabilidad de que, al lanzar los dados, salga el color deseado y tomar la mejor decisión. Adicionalmente, el juego cuenta con tres “monedas” de ayuda, que permiten volver a lanzar los dados cuando el resultado obtenido no sea el deseado. Cada vez que se completa un desafío, el juego arroja el porcentaje de acierto con el cual se ganó y otorga de una a tres estrellas como premio, a mayor porcentaje de acierto, mayor cantidad de estrellas.

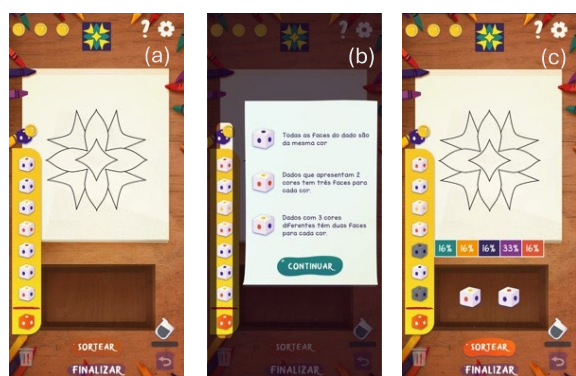


Figura 1. Pantallas de juego desafío 2, nivel fácil.

¹ <https://plataformaintegrada.mec.gov.br/recurso/359323>

Secuencia Didáctica

La secuencia comienza con la exploración del juego, se propone jugar todos los desafíos del nivel inicial (tarea 1) con el objetivo de que los estudiantes se familiaricen con el juego, conozcan las opciones posibles y elaboren sus primeras estrategias para ganar.

Tarea 1

Descargar el juego ProbabilidArte y jugar todos los desafíos del nivel fácil.



Registrar en cada desafío el % de acierto obtenido en la primer jugada.

La tarea 2, pretende que los estudiantes analicen y justifiquen de qué manera se calculan en este nivel los porcentajes de obtención de cada color, según los dados seleccionados. Aquí se requiere estudiar, entre otros, los conceptos de evento aleatorio, espacio muestral, probabilidad de éxito de un evento aleatorio.

Tarea 2

¿Cómo se calculan los porcentajes de obtención de colores que figuran al seleccionar dos dados en el nivel inicial?

La tarea 3 tiene por objetivo que, al jugar los desafíos correspondientes al nivel medio y difícil, los estudiantes construyan los espacios muestrales, calculen probabilidades y elaboren a partir de estos conceptos matemáticos una posible estrategia ganadora para el juego.

Tarea 3

Jugar los niveles *medio* y *difícil* del juego y formular una estrategia ganadora que permita pasar los distintos desafíos con el mayor % de acierto.

¿Cómo decidir qué combinación de dados es más conveniente utilizar?

Finalmente, con la tarea 4 se espera que los estudiantes utilicen lo estudiado para crear nuevos desafíos que se diferencien por su complejidad, teniendo en cuenta los espacios muestrales posibles y las probabilidades de éxito.

Tarea 4

Crear un nuevo desafío para cada nivel del juego: inicial, medio y difícil.

Justificar por qué el desafío diseñado corresponde a cada nivel.

Resultados

La instancia de exploración propuesta a partir de la tarea 1 mostró el entusiasmo de los estudiantes al momento de jugar, a la vez del papel motivador del juego. Cada estudiante jugó de manera individual y comparó sus resultados con el de sus compañeros. Cada desafío se jugó más de una vez, tratando de obtener el mayor porcentaje de acierto posible.

Para analizar la manera de calcular las probabilidades de obtener un determinado color, los estudiantes consideraron casos particulares de combinaciones de dados, por ejemplo, dos dados con un solo color cada uno, o uno con un color y otro con dos colores, dos dados con dos colores cada uno, etc. En esta instancia describieron todas las combinaciones posibles, y contaron cuántas opciones correspondían a cada color resultante. La figura 2 presenta protocolos de dos estudiantes que ejemplifican la solución de esta tarea. En el primer caso (figura 2-a), el estudiante considera un dado con dos colores (rojo y azul) y un dado con tres colores (rojo, amarillo y azul), analiza las combinaciones posibles, considerando inicialmente un total de combinaciones de 6, que las obtiene al multiplicar las dos opciones posibles del dado 1 con las tres opciones del dado 2. En cambio, en el segundo caso, se considera el total de 36 combinaciones posibles, obtenidas a partir de las seis opciones del dado 1 multiplicadas por las seis opciones del dado 2. Más adelante estas variantes se analizan considerando el concepto de eventos equiprobables.

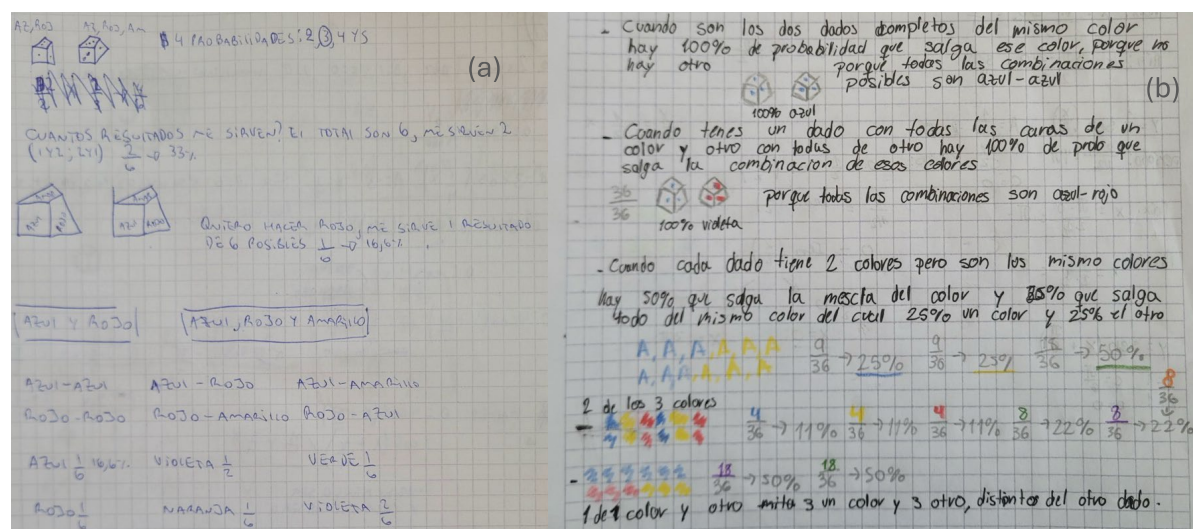


Figura 2. Protocolos de estudiantes, resolución tarea 2.

A continuación, se estudiaron los conceptos de experimento aleatorio, evento aleatorio, espacio muestral, suceso, eventos equiprobables, probabilidad clásica, probabilidad porcentual (Figura 3), para lo cual se realizaron búsquedas en internet, consultas en libros digitales propuestos por el profesor y luego se discutieron los conceptos en conjunto con toda la clase.

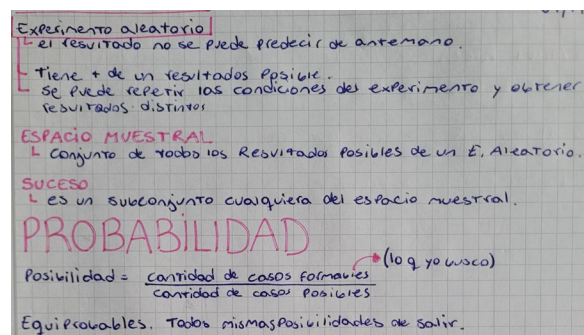


Figura 3. Conceptos probabilísticos estudiados por los estudiantes

A partir de lo estudiado, se realizó la tarea 3. Inicialmente los estudiantes jugaron distintos desafíos de los niveles medio y difícil y se discutieron las principales diferencias con el nivel inicial, tales como la cantidad de colores que se requerían para pintar los mandalas, los dados disponibles para los lanzamientos y la ausencia de la probabilidad de obtener un determinado color. En cuanto a la estrategia ganadora, como se muestra en la figura 4, los estudiantes proponen que, hay que considerar los colores que se requieren para pintar el mandala y determinar los espacios muestrales de las posibles combinaciones de dados. Luego, calcular las probabilidades de obtener cada uno de los colores necesarios y seleccionar el par de dados que tengan la mayor probabilidad para cada color (Figura 4-a). Algunos estudiantes agregan estrategias relativas a cuándo es conveniente usar algunos dados, por ejemplo, los de tres colores, o cuándo usar las monedas para repetir el tiro (Figura 4-b).

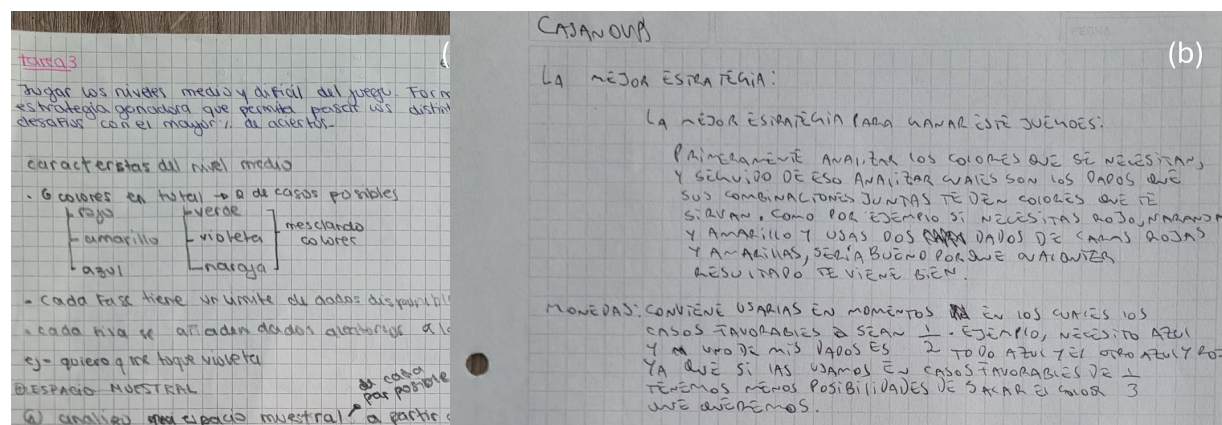


Figura 4. Protocolos de estudiantes, resolución tarea 3.

En la última tarea, los estudiantes crearon nuevos desafíos para los tres niveles del juego. Por un lado, tuvieron que diseñar mandalas y seleccionar los colores para pintarlos y por el otro, decidir cuáles serían los dados disponibles para realizar el desafío. En cuanto al diseño, los niveles se diferenciaron principalmente por la cantidad y tipo de colores que incluía el mandala, el nivel inicial incluía pocos colores y mayormente colores primarios; a mayor nivel de dificultad, más colores para pintar y más colores secundarios. Para elegir los dados disponibles para lanzar, los estudiantes analizaron las probabilidades que las combinaciones de dados arrojarían.

Por ejemplo, el estudiante del protocolo de la figura 5-a para el nivel inicial diseñó un mandala muy simple con tres colores, dos primarios y uno secundario, y para proponer los dados consideró más fácil colocar varios dados con todas las caras del mismo color y algunos con dos colores, lo que permite obtener 100% de probabilidad de sacar dos de los colores del mandala si se seleccionan bien los pares de dados. La dificultad aumenta incluyendo diseños más complejos, con más colores y teniendo disponibles dados cuyas combinaciones tienen probabilidades más bajas de sacar los colores necesarios.

Otros estudiantes, como se muestra en el protocolo de la figura 5-b, realizan los cálculos de las probabilidades para obtener los colores deseados y también calculan una probabilidad de completar el nivel que crearon, el cual va disminuyendo a medida que se aumenta la complejidad

del nivel. Aunque en este último caso no se explicita cómo se obtiene ese valor, se destaca cómo los estudiantes se valieron de lo estudiado para mostrar que la complejidad para realizar los desafíos también es probabilística.



Figura 5. Protocolos de estudiantes, resolución tarea 4.

Discusión y consideraciones finales

Los resultados obtenidos en la implementación de la secuencia didáctica con el juego digital *ProbabilidArte* evidencian el potencial del DGBL para la enseñanza de la probabilidad. En general, los estudiantes se mostraron motivados y comprometidos, esto se evidencia en su disposición para repetir los desafíos del juego intentando mejorar sus resultados. Esto coincide con la literatura que destaca el potencial de los juegos digitales para generar experiencias de aprendizaje inmersivas y fomentar la atención en tareas matemáticas (Gee, 2007; McGonigal, 2011).

En relación al conocimiento matemático, la secuencia permitió que los estudiantes abordaran de manera progresiva distintos aspectos fundamentales de la probabilidad. En la tarea inicial, comenzaron registrando los porcentajes de acierto obtenidos en el juego sin una comprensión explícita de cómo estos se calculaban. Posteriormente, al analizar el cálculo de probabilidades en el nivel fácil, los estudiantes identificaron la estructura de los espacios muestrales y reconocieron la importancia de contar todas las combinaciones posibles entre los dados seleccionados. En este proceso, utilizaron el principio multiplicativo para determinar el

total de combinaciones posibles y establecieron relaciones entre el número de casos favorables y el total de casos posibles, aproximándose a la definición clásica de probabilidad.

Al avanzar a los niveles medio y difícil, los estudiantes enfrentaron nuevos desafíos que requerían un análisis más profundo. Al no contar con las probabilidades explícitas proporcionadas en el nivel fácil, debieron calcular las probabilidades de forma autónoma para tomar decisiones estratégicas en el juego. Esto requiere identificar los eventos aleatorios, construir y comparar los espacios muestrales más complejos y ajustar las estrategias en función de las probabilidades calculadas. Algunos estudiantes elaboraron tablas para organizar sus cálculos, mientras que otros recurrieron a diagramas y representaciones gráficas para visualizar la distribución de colores. Además, en la tarea final, al diseñar sus propios desafíos para cada nivel del juego, demostraron una comprensión más profunda de los conceptos estudiados, ya que debieron justificar la dificultad de sus propuestas en función de la estructura probabilística de los dados seleccionados.

De manera exploratoria, se muestra que la integración apropiada de juegos digitales en la enseñanza de la matemática promueve el interés y el aprendizaje de los estudiantes evidenciado en sus acciones implícitas y explícitas, según se muestra en los protocolos. Es remarcable que las tareas solicitan a los estudiantes la solución del desafío y la justificación matemática, y que ellos consiguen realizar ambas cosas. Los resultados indican que en esta secuencia basada en *ProbabilidArte*, este juego resulta una herramienta apropiada para: enseñar nociones fundamentales de probabilidad, explorar matemáticamente las situaciones de manera lúdica e interactiva y encontrar los saberes matemáticos que se requieren para optimizar sus resultados. Además, esto se realiza a posteriori, de manera pragmática y funcional. Así, los estudiantes aprendieron a calcular probabilidades y mejoraron las técnicas para hacerlo, que inicialmente eran intuitivas e implícitas, construyeron espacios muestrales y desarrollaron estrategias analíticas para optimizar sus decisiones dentro del juego y en el diseño de nuevos desafíos. Todo esto se realizó en tan solo tres sesiones de aula. En síntesis, parece central integrar el juego en secuencias constructivistas de enseñanza, para extender el aprendizaje matemático e ir más allá de lo que se logra aprender por el mero hecho de jugar.

Referencias y bibliografía

- Gazzola, M.P, Otero, M. R. (2023). Recurso Educativo Digital (DER) para enseñar funciones en la escuela secundaria: opiniones de los profesores. *Revista Iberoamericana de Tecnología en Educación y Educación en Tecnología*, 35, e5.
- Gee, J. P. (2004). *Lo que nos enseñan los videojuegos sobre el aprendizaje y el alfabetismo*. Málaga: Aljibe.
- Gee, J. P. (2005). Learning by design: Good video games as learning machines. *E-learning and Digital Media*, 2(1), 5–16.
- Gee, J. P. (2007). *Good video games+ good learning: Collected essays on video games, learning, and literacy*. Peter Lang.
- Gomes, A. S. et al. *ProbabilidArte*. Plataforma Integrada do MEC: Governo do Brasil, 2021. [online]. Disponível em: <https://plataformaintegrada.mec.gov.br/recurso/359323>. Acesso em: 21 dec. 2024.
- McGonigal, J. (2011). *Reality is broken: Why games make us better and how they can change the world*. Jonathan Cape.
- Liu, Y.C., Wang, W.-T., and Lee, T.-L. (2021). An integrated view of information feedback, game quality, and autonomous motivation for evaluating game-based learning effectiveness. *J. Educ. Comput. Res.* 59, 3–40. doi: [10.1177/0735633120952044](https://doi.org/10.1177/0735633120952044)

- Otero, M. R.; Gazzola, M. P.; Castro Filho, J. A., Gomes, A. S. (2024). Teaching and learning mathematics using digital games in the classroom. *Review of Science, Mathematics and ICT Education*, 18(2), 69-87.
- Prensky, M. (2001). Nativos digitales, inmigrantes digitales. *On the horizon*, 9(5), 1-7.
- Prensky, M., & Thiagarajan, S. (2007). *Digital Game-Based Learning* (p. 17). St. Paul MN: Paragon House.
- Siew, H. P. (2018). Pedagogical change in mathematics learning: Harnessing the power of digital game-based learning. *Journal of Educational Technology & Society*, 21(4), 259–276.
- Williams-Pierce, C. (2019). Designing for mathematical play: failure and feedback. *Information and Learning Sciences*, 120(9-10), 589–610. <https://doi.org/10.1108/ILS-03-2019-0027>



Utilización de Geogebra en el proceso de enseñanza aprendizaje de algunos problemas de optimización con aplicación de la derivada

Antonio **Rey** Roque
Universidad de las Ciencias Informáticas
Cuba
antrey@uci.cu

Resumen

Contribuir a mejorar los resultados en la resolución de problemas y en particular los problemas de optimización del Cálculo diferencial en los estudiantes de ingeniería en ciencias informáticas de la Universidad de Ciencias Informáticas de la Habana, Cuba es el propósito del presente trabajo, para lo cual se escogió el software de geometría dinámica Geogebra que cuenta con todos los elementos para efectuar y visualizar cálculos simbólicos, numéricos y gráficos además de esquemas imprescindibles para la interpretación y la modelación de problemas. Para cumplimentar este objetivo se realizó un estudio profundo del software y de la didáctica de la enseñanza-aprendizaje basada en la resolución de problemas, se logró crear un número de objetos con Geogebra insertados en un sistema mucho más amplio para toda la disciplina y utilizarlos en el proceso docente con un impacto significativo en el rendimiento de los estudiantes y la aceptación de los docentes de matemática.

Palabras clave: Objetos de aprendizaje; Geogebra; Resolución de problemas; Problemas de optimización; Aplicaciones del Cálculo diferencial.

Definición y relevancia del problema

Generalmente el estudio del cálculo diferencial se ubica en los primeros años de las carreras de ingeniería en un ciclo básico que pretende dotar a los estudiantes de los fundamentos matemáticos que le servirán para la comprensión de las temáticas de la especialidad. En particular la carrera de ingeniería en ciencias informáticas se plantea desarrollar en los estudiantes de estos primeros años la capacidad para resolver problemas de programación de baja y media complejidad. La disciplina de matemática insertada en este ciclo tiene como misión

principal dar significación a lo aprendido desarrollando en los estudiantes su pensamiento matemático de manera que facilite el enfrentamiento exitoso a la resolución de problemas.

¿Cómo lograr un aprendizaje significativo del Cálculo y en particular de las aplicaciones de la derivada en los estudiantes de ingeniería?, en la respuesta a esta interrogante se centra el problema que pretendió resolver el autor de esta ponencia para lograr en sus estudiantes motivación y sobre todo un aprendizaje eficaz del concepto de derivada aplicado a la resolución de algunos problemas de optimización con el empleo de objetos creados con el software de geometría dinámica Geogebra.

La relevancia del aprendizaje mediante problemas aplicando la interpretación de los conceptos es una verdad reconocida en la comunidad de educadores matemáticos, las dificultades que presentan los estudiantes para resolver problemas del Cálculo se deben principalmente a que la enseñanza precedente se centró en el trabajo algorítmico y algebraico en detrimento del estudio conceptual y problémico (Artigue. M, 1995) lo cual, según Dávila, Grijalva y Bravo (2012) conlleva a dificultades para resolver problemas no rutinarios como los relacionados con las aplicaciones de la derivada.

La investigación se propuso desarrollar con el empleo del Geogebra varios objetos dinámicos e interactivos para algunos problemas de optimización seleccionados entre las aplicaciones de la derivada que se estudian en la disciplina Matemática de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas de la universidad homónima de la Habana, Cuba. la selección de Geogebra se debe a las potencialidades de este software para crear objetos interactivos y dinámicos que facilitan la visualización no solo gráfica de esquemas, diagramas y funciones, también de los cálculos numéricos y simbólicos presentes en este tipo de problemas.

Referencial teórico

La resolución de problemas en el proceso de enseñanza aprendizaje, introducida en Cuba oficialmente desde 1984 revolucionó de alguna manera la forma de enseñar y de aprender sobre todo en la matemática en todos los niveles, según Guanche (2021), con el surgimiento de la enseñanza problémica: "..., reverdeció esta idea de lograr el desarrollo del pensamiento en los estudiantes, de 'mover' su intelecto en busca de conocimientos nuevos, merced a la necesidad de asimilarlos."

Desarrollar el pensamiento matemático en los estudiantes como objetivo centro y no hacer prevalecer el aprendizaje memorístico de fórmulas y algoritmos es una consecuencia consciente de la enseñanza problémica que eleva la calidad del proceso docente educativo (Guanche, 2021). Para instrumentar esta manera de enseñar se utilizan técnicas que según Chevallard (1999) es una manera de llevar a cabo una tarea. En el desarrollo de este trabajo para la resolución de problemas se utiliza una herramienta digital: Geogebra, técnica que integra no solo el conocimiento del software en sí sino que lo entrelaza con el conocimiento matemático que es necesario dominar para resolver el problema (Artigue, 2002).

GeoGebra es un software de geometría dinámica para todos los niveles educativos que reúne geometría, álgebra, hoja de cálculo, gráficos, estadística y cálculo en un solo programa

fácil de usar. GeoGebra es también una comunidad en rápida expansión y desarrollo, con millones de usuarios en casi todos los países. (GeoGebra, 2017). Resulta particularmente eficaz como herramienta didáctica de corte heurístico de manera que el estudiante puede pasar en la resolución del problema, del tratamiento intuitivo relacionado con la fase de familiarización y comprensión en la construcción formal del modelo matemático y la resolución con la utilización de la derivada (Carballo y Mojica, 2022), de acuerdo con Takači et al. (2015), el autor considera que la posibilidad de la visualización que ofrece Geogebra facilita el aprendizaje de funciones y sus gráficos que es imprescindible en la resolución de problemas de optimización mediante derivadas.

Sobre la visualización en la enseñanza aprendizaje de la Matemática, Di Domenicantonio, Costa y Vacchino (2011) compilan en su artículo nombres tan significativos como Gauss: La Matemática es una ciencia del ojo; Descartes, quien reconoce que en ocasiones es importante mostrar figuras; Hilbert, quien consideraba a las figuras geométricas como fórmulas gráficas; también autores contemporáneos como (de Guzmán, 1997), (Davis, 1993) y (Oostra, 2001) se refieren en sus trabajos a la visualización como vía imprescindible para hacer y aprender matemática. La visualización es un proceso interno que en el proceso de descubrimiento y comprensión de la matemática involucra sensación, imaginación y manipulación mental de los objetos, (Di Domenicantonio, Costa y Vacchino, 2011). En este trabajo y otros relacionados con la visualización dinámica e interactiva a través de objetos de enseñanza-aprendizaje que realiza el autor, el material utilizado es el software de geometría dinámica GeoGebra, con el cual se elaboraron los objetos, en forma de applets.

Método y desarrollo conceptual

El trabajo que se presenta fue instrumentado utilizando métodos de investigación cualitativos implementando la técnica digital con el empleo de objetos creados con Geogebra en el proceso de enseñanza aprendizaje de estudiantes de Ingeniería en Ciencias Informáticas durante cuatro cursos y comparando los resultados de estos con los de resultados de cursos anteriores en cuyo aprendizaje no se utilizaron objetos de este tipo.

Se realizó un estudio exhaustivo de las potencialidades de Geogebra para crear objetos dinámicos e interactivos que pudieran ser utilizados en la enseñanza aprendizaje de algunos problemas de optimización estudiados como aplicaciones del Cálculo diferencial, se incluyó en este estudio la revisión para su reutilización, de objetos creados sobre esta temática y se crearon otros desde cero. Se hizo una selección de los problemas más representativos entre los que se estudian tradicionalmente en las asignaturas de Cálculo de los cursos de ingeniería y fue imprescindible el estudio de la pedagogía y la didáctica de la matemática en particular la relacionada con la enseñanza problémica.

Resultados

Los resultados se organizan en tres fases: Selección de los problemas de optimización, estudio y diseño de los objetos de Geogebra, utilización de los objetos en el proceso de enseñanza aprendizaje y estudio comparativo de los resultados académicos en esta temática.

Selección de los problemas de optimización

La selección se centró en los problemas de optimización que involucran funciones reales de una variable real que se estudian en la asignatura Matemática I de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas que involucran situaciones geométricas: área, perímetro, volumen; distancia entre puntos; figuras inscriptas y de recorridos mínimos entre puntos. En cada problema la idea es que el estudiante combine el intercambio con el objeto digital y el trabajo con lápiz y papel.

Problema 1: Volumen máximo de un prisma recto rectangular con área lateral fija.

Problema 2: Área máxima con perímetro fijo de un rectángulo.

Problema 3: Perímetro mínimo con área fija de un rectángulo.

Problema 4: Área máxima de rectángulo inscrito.

Problema 5: Distancia mínima de una curva a un punto del plano.

Problema 6: Camino de recorrido mínimo entre tres puntos no alineados.

Diseño y elaboración con Geogebra de los objetos de enseñanza aprendizaje

Se muestran y explican en esta sección algunos de los objetos que son ilustrativos de las características didácticas de los creados para cada problema:

Problema 1: A partir de una lámina cuadrada de 20cm de lado se desea construir una caja de base cuadrada recortando las esquinas como se muestra en la figura.

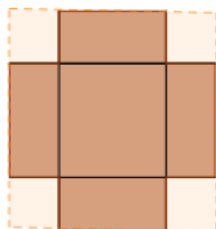


Figura 1: Ilustrativa del problema 1 (Elaborado en el applet de Geogebra)

El objeto creado permite de manera interactiva que el estudiante recorra las fases o etapas de la resolución de problemas, con relevancia en la interpretación del problema modificando las dimensiones del corte y observando la forma y volumen que va tomando la caja de manera que le puede intuir la existencia del volumen máximo y el rango del corte a la postre dominio de la función objetivo, la cual, partir del paso 3 se visualiza de manera que se observa dinámicamente, interactuando con la longitud del corte la relación volumen con la imagen de la función en la que se aprecia la existencia y el valor máximo.

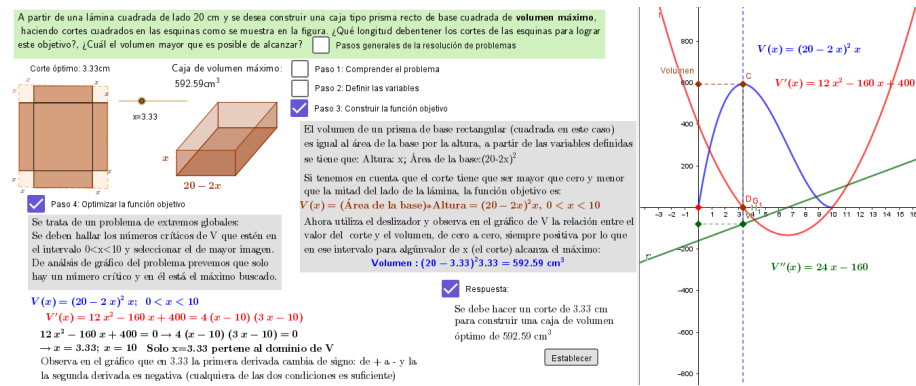


Figura 2: Facsímil del applet para el problema 1 (Elaborado en el applet de Geogebra)

Problema 4: Determinar las dimensiones del rectángulo de área máxima inscrito en una parábola de ecuación $y = -ax^2 + b$, $a, b > 0$ y el eje de las abscisas.

Este problema vincula la geometría *tradicional* del plano con la geometría analítica al involucrar una parábola y su ecuación directamente. De manera similar el estudiante puede recorrer los pasos de la resolución de un problema e interactuar dinámicamente para apreciar en tiempo real la relación entre los parámetros y variables del problema con el gráfico de la función objetivo.

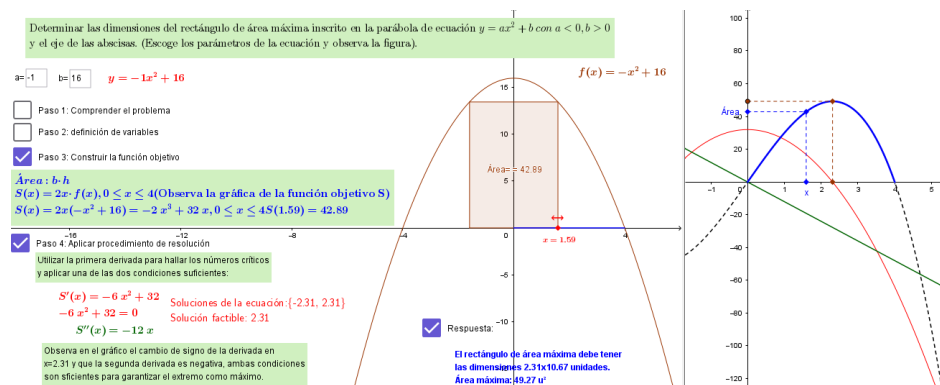


Figura 3: Facsímil del applet para el problema 4 (Elaborado en el applet de Geogebra)

Problema 5: determinar las coordenadas del punto (x, y) de la curva con ecuación $y = f(x)$ más cercano al punto $P(a, b)$.

Se trata de un problema de geometría analítica, de distancias entre puntos. Geogebra permite interactuar con el gráfico de la función $y = f(x)$ y los elementos del problema a la par que facilita los cálculos y muestra en tiempo real de manera dinámica el gráfico de la función objetivo.

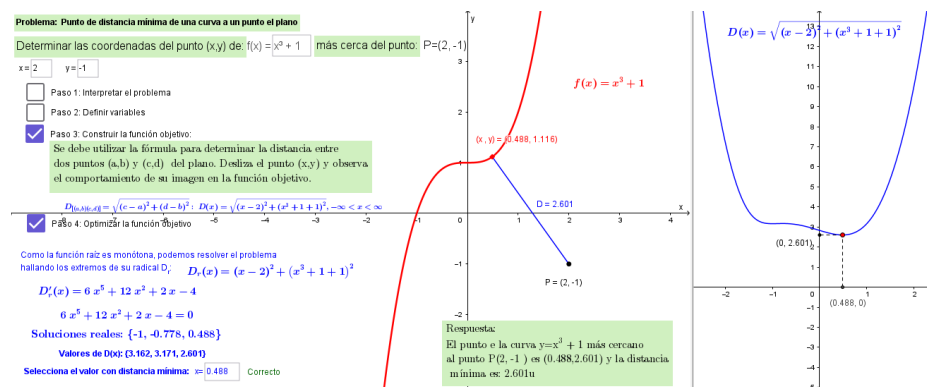


Figura 4: Facsímil del applet para el problema 5 (Elaborado en el applet de Geogebra)

Implementación de los objetos en el proceso docente-educativo

Los objetos creados para esta temática de la resolución de problemas de optimización se insertan en un sistema de objetos de Geogebra, casi un centenar, creados y utilizados en las cuatro asignaturas de la disciplina Matemática de la carrera Ingeniería en Ciencias Informáticas. Aunque fueron organizados por asignatura lo están también por temas, de manera que pueden adaptarse con facilidad ante cambios de organización docente y ser utilizados por otros docentes y estudiantes de otras carreras que incluyen los temas en su plan académico, además de manera independiente en el aprendizaje autónomo.

Específicamente, los problemas de optimización con aplicación del cálculo diferencial se estudian en la asignatura Matemática II, no solo para funciones de una variable, también para los problemas que involucran funciones de dos variables independientes.

En este sistema de objetos dinámicos e interactivos elaborados con Geogebra se distinguen tres grupos clasificados de acuerdo con su funcionalidad didáctica: para la comprensión de los conceptos; para resolver problemas genéricos y específicos (como los que se presentan en este trabajo) y como herramientas de cálculo numérico, simbólico y gráfico.

Impacto en los resultados académicos

El sistema de objetos creado, en el que se insertan los que corresponden a la resolución de problemas de optimización se ha utilizado en el proceso docente de cuatro versiones de la asignatura Matemática II, desde 2022. La resolución de problemas y en particular los problemas de optimización constituyen sin dudas una materia con dificultades en su asimilación, lo que se constató en los resultados académicos de los estudiantes de ingeniería en ciencias informáticas. La utilización de estos objetos se concretó en las clases tipo conferencia, como medios de enseñanza que apoyan al profesor en la explicación de ejemplos a la vez que se muestra a los estudiantes cómo utilizar el objeto. Posteriormente, con la orientación pertinente (guías de trabajo) los estudiantes utilizan los objetos para resolver los problemas de manera independiente y en las clases prácticas con la supervisión del profesor y de forma colaborativa con otros estudiantes.

En la tabla 1 se muestran resultados cuantitativos del porcentaje de estudiantes que

resolvieron adecuadamente los problemas planteados en los exámenes, donde no podía hacer uso de los objetos. La base de comparación se tomó del porcentaje promedio de respuestas correctas a la pregunta del problema de optimización en exámenes de los tres cursos anteriores a 2022 y que es de un 30%.

Tabla 1

Resultado de respuestas correctas en preguntas de problemas de optimización

Curso	No. Estudiantes	% respuestas correctas
2022	673	40%
2023	701	42%
2024	698	53%
2024-2025	679	60%

Fuente: datos de la revisión de exámenes de Matemática II.

Conclusiones

Los resultados constatados en la calidad de la resolución de los problemas de optimización que enfrentaron los estudiantes en los exámenes corroboraron que el empleo de los objetos dinámicos e interactivos elaborados con el software Geogebra contribuyó de manera eficaz al proceso de enseñanza aprendizaje en los estudiantes de la carrera de ingeniería en ciencias informáticas de la universidad homónima. La ductilidad de Geogebra permitió perfeccionar los objetos en cada versión que se utilizó, no solo en lo técnico propio del software, también en los elementos didácticos que lo acompañan incluyendo las guías para su utilización.

La separación de los objetos por temas facilita su generalización a otras carreras incluso a su utilización en el autoaprendizaje y la creación de contenidos para plataformas como entornos virtuales de aprendizaje y repositorios de audiovisuales.

Referencias y bibliografía

- Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del Cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos. En Artigue, M., Douady, R., Moreno, L., Gómez, P. (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática*, 97-140. México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.
- Artigue, M. (2002). Learning mathematics in a CAS environment: The genesis of a reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual work. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 7(3), 245-274. <https://doi.org/10.1023/A:1022103903080>
- Carballo, A. M., Mojica, A. D. (2022). Uso de GeoGebra para mejorar la comprensión de la resolución de problemas de optimización en el bachillerato, *Revista Números: Revista de didáctica de las matemáticas* (pp. 71-89
- Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en didactique des mathématiques*, 19(2), 221-266.
- Dávila, M. T., Grijalva, A. y Bravo, J. M. (2012). La Derivada a partir de la Resolución de Problemas de Optimización con Apoyo de Geogebra. En Cortés, J. C., Ulloa, R. (Eds.), *Uso de Tecnología en Educación Matemática. Investigaciones y Propuestas 2012*. Asociación Mexicana de Investigadores del Uso de la Tecnología en Educación Matemática, 212-222. Guadalajara, México: AMIUTEM, A. C.
- Davis, P. J. (1993). Visual theorems. *Educational Studies in Mathematics*, 24 no. 4, 333-344. Springer. Netherlands.
- De Guzmán, M. (1997). *El rincón de la pizarra. Ensayos de visualización en Análisis Matemático*. Primera Edición, Pirámide, Madrid.

- Di Domenicantonio, Rossana & Costa, Viviana & Vacchino, María. (2011). La visualización como mediadora en el proceso de enseñanza y aprendizaje del Cálculo Integral. *UNIÓN - Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 7(27). Recuperado a partir de <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/913>
- GeoGebra, C. (2017). GeoGebra. Retrieved from www.GeoGebra.org.
- Guanche Martínez, A. (2021). Algunos aportes de los pedagogos cubanos a la teoría de la enseñanza problémica. *Anales de la Academia de Ciencias de Cuba*, 11(2), e878. Recuperado de <https://revistaccuba.sld.cu/index.php/revacc/article/view/878/1091>
- Oostra, A. (2001). Los diagramas de la Matemática y la Matemática de los diagramas. *Boletín de Matemáticas Nueva Serie*, Volumen VIII N°. 1, 1–7.
- Takači, D., Stankov, G., y Milanovic, I. (2015). Efficiency of learning environment using GeoGebra when calculus contents are learned in collaborative groups. *Computers & Education*, 82, 421-431
<https://doi.org/10.1016/j.compedu.2014.12.002>.

Índice alfabético de autores

Agostinho iaqchan Ryokiti Homa, 224
Aitana Martín-Ferraz, 144
Alejandra Sánchez-Ávila, 32
Alejandro Rosas Mendoza, 30
Alexánder Hernández, 144
Alvaro Lecompte, 86
Amábile Jeovana Neiris Mesquita, 213
Ana Maroto, 152
Andrea Vergara, 248
Andrés Valdés, 248
António Domingos, 11
Antonio Rey Roque, 265
Bruno de Moraes Turci, 94
Carlos Martínez-Bonilla, 86
Carmen Caiseda, 86
Carmen Rodríguez Poveda, 108
Carmen Vieira Mathias, 51, 173
Catalina Palacios, 248
Celina Aparecida Almeida Pereira Abar, 213
Claudia Ines Horn, 700
Cristina Costa, 11
Danitza Soledad Mirabal Aybar, 43
Darwin Peña González, 62, 125
Diego Lieban, 53
Eddie Arrieta-Arrieta, 86
Edgar Esaúl Saucedo Becerra, 117
Eithel Trigueros Rodríguez, 232
Ellery Chacuto López, 156
Fabienne Venant, 190
Franciele Santos Teixeira, 19, 94
Geison Duvan Gomez-Acuña, 221
Ieda Maria Giongo, 70
Igor Rocha Siqueira, 35
Iselgis De Diego Vásquez, 108
Ismael Hernández Hernández, 236
Jéssica Jiménez-Moscoso, 32
Jesus Andres Jaimes-Leon, 1
Joalisson Rego Pavão, 205
João Ygor Dias Cardoso, 51
Joaquín Pomares Blaise, 156
Jorge Carvalho Brandão, 205
Jorge Gaona, 248
José David Vargas, 154
José Gleison Alves da Silva, 205
José Luis Henostroza Gamboa, 3

José María Marbán, 152
Joseane Marques Flores, 224
Juan Carlos Sandí-Delgado, 165
Juan Martínez Marín, 30
Julio Marín Sánchez, 232
Karina Amalia Rizzo, 132
Liceth Niño Camacho, 156
Mainor Alberto Cruz-Alvarado, 165
Marcio Vieira de Almeida, 213, 221
Marco Diego Sáenz Trejos, 198
Marco Gutiérrez Montenegro, 101
Maria José Costa dos Santos, 205
María Paz Gazzola, 256
María Rita Otero, 256
Maria Teresa Zampieri, 19
Mariana Matulovic da Silva Rodrigueiro, 19
Matías Arce, 152
Matías Camacho-Machín, 144
Miledis Teresa Tavarez Marzan, 43
Mónica del Rocío Torres Ibarra, 117
Myriam Rocío Pallares Muñoz, 78
Omayra Rivera-Castro, 86
Pedro Pimenta, 11
Quendra Silva Cartier Laranjeira, 51
Rafael Martinez, 142
Rafael Pantoja González, 244
Rafael Pantoja Rangel, 244
Raimundo Nonato Barbosa Cavalcante, 205
Renan Severo Ferreira, 173
Roberto Mesén-Hidalgo, 165
Roberto Seidi Imafuku, 35
Roberto Torres Peña, 62, 125
Ronald Quesada Córdova, 182
Sonia Valbuena Duarte, 1, 30
Sueli Liberatti Javaroni, 19, 94
Suzilei Magosso Araújo Alabarces, 70
William Stevens Perea, 27
William Vieira, 35
Wilson Rodríguez Calderón, 78
Yilmar Stiven Barreto, 27

EDUCACIÓN MATEMÁTICA en América Central y El Caribe 2025



ISBN: 978-9945-30-201-1



www.redumate.org